Drogi czytelniku,

Zeszyt 9
310 przykładów granic
z pełnymi rozwiązaniami krok po kroku...
z serii:
Biblioteczka Opracowań Matematycznych,

zawiera 310 przykładów granic wraz z obliczeniami krok po kroku. Przykłady granic ciągów, funkcji jednej i dwóch zmiennych prezentują różnorodne metody obliczania granic. Książka może być przydatna zarówno dla początkujących jak i bardziej zaawansowanych w tematyce granic czytelników. Przykłady zostały pogrupowane z uwzględnieniem stosowanych metod oraz stopnia trudności.

Owocnej nauki

Autor

9 788360 667002

Wydawnictwo Bila

ISBN - 10: 83-60667-00-4
ISBN - 13: 978-83-60667-00-2

Biblioteczka Opracowań Matematycznych

310 przykładów granic z pełnymi rozwiązaniami krok po kroku...

ZESZYT 9

Materiały Pomocnicze do Nauki dla Studentów

Biblioteczka Opracowań Matematycznych

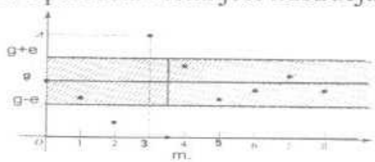
Wydawnictwo Bila

1. Granice ciągów

1/ Definicja granicy właściwej ciągu

Liczba g jest granicą ciągu (a_n) tzn.: $\lim_{n\to\infty} a_n = g$, wtedy i tylko wtedy, gdy: $\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{m\in N} \bigwedge_{\substack{n>m \\ n\in N}} [|a_n - g| < \varepsilon]$

Na rys. 1 przedstawiona jest ilustracja powyższej definicji.



Rys. 1

Mówiąc prościej: Liczba g jest granicą ciągu wówczas, gdy wybierając dowolną liczbę ε > 0, potrafimy znaleźć taką liczbę m ∈ N, że dla ka – dej liczby n > m (wskaźniki ciągu) wszystkie wyrazy ciągu będą znaj – dować się w pasie (g - ε, g + ε). Inaczej mówi się, że prawie wszystkie wyrazy ciągu należą do przedziału (g - ε, g + ε).

2/ Definicja granicy niewłaściwej ciągu:

Granicą ciągu (a_n) jest ∞ (-∞) tzn.: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ lub $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednio:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{m\in N} \bigwedge_{\substack{n>m \\ n\in N}} (a_n > \varepsilon); \quad \text{lub} \quad \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{m>0} \bigwedge_{\substack{n>m \\ n\in N}} (a_n < -\varepsilon);$$

Wybrane twierdzenia o granicach ciągów:

Twierdzenie 1

Każdy ciąg zbieżny (tzn. posiadający granicę właściwą) ma tylko jedną granicę. Każdy podciąg ciągu zbieżnego (do granicy właściwej lub nie-właściwej) jest zbieżny do tej samej granicy.

Twierdzenie 2

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *i* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, to:

$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b;$

$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b; \quad \lim_{n\to\infty}(k \cdot a_n) = k \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = k \cdot a \quad dla \quad k \in R;$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b} \quad b \neq 0;$

$\lim_{n\to\infty}(a_n)^k = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^k \quad k \in Z - \{0\}; \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n} \quad k \in N - \{1\};$

Twierdzenie 3 (o trzech ciągach)

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$ oraz istnieje taka liczba m ∈ N, że dla każdej liczby n > m, n ∈ N zachodzi: $a_n \le b_n \le c_n$ to $\lim_{n\to\infty} b_n = g$

Twierdzenie 4 (o dwóch ciągach)

Jeżeli ciągi a_n i b_n spełniają warunki: $a_n \le b_n$ dla n > m, gdzie n, m ∈ N oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ to $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ to $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Twierdzenie 5 (arytmetyka granic ciągów)

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz $a_n > 0$ ($a_n < 0$) to $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty(-\infty)$.

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ to $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *i* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, to $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \begin{cases} \infty; & b > 0 \\ -\infty; & b < 0 \end{cases}$.

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty(-\infty)$, to $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty(-\infty)$.

(Zapis ∞(- ∞) należy rozumieć, ..granice jednocześnie równe ∞ lub jednocześnie rów-ne -∞).

Jeżeli ciąg a_n jest ograniczony oraz $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, to $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$.

Jeżeli ciąg a_n jest ograniczony oraz $\lim_{n\to\infty} |b_n| = \infty$, to $\lim_{n\to\infty} {a_n}/{b_n} = 0$.

PRZYKŁADY

1/ *Opierając się na definicji granicy ciągu wykazać, że:*

$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{n^2+2n+1} = 3$

Korzystając z definicji granicy ciągu możemy zapisać:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{n^2+2n+1} = 3 \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{m\in N} \bigwedge_{n>m} \left| \frac{3n^2+2}{n^2+2n+1} - 3 \right| < \varepsilon$$

Szukamy m ∈ N, dla którego nierówność jest spełniona dla każdego ε.

Oszacujemy nierówność po prawej stronie następująco:

$$\left| \frac{3n^2+2}{n^2+2n+1} - 3 \right| = \left| \frac{3n^2+2-3n^2-6n-3}{n^2+2n+1} \right| = \frac{6n+1}{n^2+2n+1} < \frac{6n+2n}{n^2} = \frac{8}{n} < \varepsilon$$

Nierówność $\frac{8}{n} < \varepsilon$ jest spełniona dla $n > \frac{8}{\varepsilon}$. Wystarczy zatem za m w def. przyjąć $m = \frac{8}{\varepsilon}$ aby nierówność była spełniona dla dowolnego ε.

2/ *Wykazać, że* $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$.

Niech ε > 0 będzie dowolną liczbą. Z definicji granicy ciągu można zapisać:

$\left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{-2}{n+1} \right| = \frac{2}{n+1} < \varepsilon$. Wystarczy zatem z ostatniej nierówności wyznaczyć m, od którego począwszy spełniona jest nierówność.

Nierówność jest spełniona dla n > m, gdzie $m = \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$.

3/ Opierając się na def. granicy niewłaściwej ciągu, wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}-n\right)=-\infty$.

Wykorzystując definicję granicy niewłaściwej ciągu możemy zapisać: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}-n\right)=-\infty \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{\varepsilon<0}\ \bigvee\limits_{m\in N}\ \bigwedge\limits_{n>m}\left(\sqrt{n}-n<\varepsilon\right)$

Wystarczy wskazać liczbę m taką, że nierówność zapisana po prawej stronie będzie prawdziwa dla każdego ε < 0. Przekształcając tę nie – równość otrzymujemy:

$\sqrt{n}-n=\frac{n-n^2}{\sqrt{n}+n}\le\frac{n-n^2}{n+n}=\frac{1-n}{2}<\varepsilon$ Ostatnia nierówność jest spełniona dla: n > 1 -2ε.

A zatem jako poszukiwaną liczbę m wystarczy przyjąć $m = 1\text{-}2\varepsilon$ aby rozpatrywana nierówność była spełniona dla dowolnego $\varepsilon < 0$.

4/ Wykorzystując tw. o trzech ciągach wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n+10^n}=10$.

Prawdziwe jest oszacowanie:

$10^n\le 3^n+5^n+10^n\le 10^n+10^n+10^n$

$\sqrt[n]{10^n}\le\sqrt[n]{3^n+5^n+10^n}\le\sqrt[n]{3\cdot 10^n}$

Wykorzystamy tu fakt, że $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{10^n}=10$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3\cdot 10^n}=10\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=10$ więc na mocy tw. o trzech ciągach

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n+10^n}=10$.

5/ *Wykorzystując tw. o trzech ciągach wykazać:* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin^2 n+2n}{5n-1}=\frac{2}{5}$

Aby wykazać powyższą równość wykorzystamy własność:

$0\le\sin^2 n\le 1$. Stąd możemy zapisać: $0 + 2n \le \sin^2 n + 2n \le 1 + 2n$. A zatem

$\frac{2n}{5n-1}\le\frac{\sin^2 n+2n}{5n-1}\le\frac{1+2n}{5n-1}$

Wiadomo, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{5n-1}\frac{:n}{:n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{5-\frac{1}{n}}=\frac{2}{5}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2n}{5n-1}\frac{:n}{:n}=\frac{2}{5}$, więc

na mocy tw. o trzech ciągach $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin^2 n+2n}{5n-1}=\frac{2}{5}$.

6/ Wykorzystując tw. o dwóch ciągach obliczyć granicę: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-10n^6\right)$.

Wiadomo, że: $n^5-10n^6+1\ge -10n^6$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^5-10n^6+1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n^6\left(\frac{1}{n}-10+\frac{1}{n^6}\right)=-\infty$

Na mocy tw. o dwóch ciągach $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-10n^6\right)=-\infty$.

Dla obliczenia wielu granic wykorzystuje się wzory skróconego mnożenia oraz własności funkcji.

W zad **7 - 75** obliczyć granice ciągów:

7/ $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{2n^2-1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\left(2n^2+1-\left(2n^2-1\right)\right)}{\left(\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{2n^2-1}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{\left(\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{2n^2-1}\right)}\frac{:n}{:n}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2n}{n}}{\sqrt{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{2n^2}{n^2}-\frac{1}{n^2}}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

8/ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n-\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}\frac{:\sqrt{n}}{:\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{\frac{n}{n}}}{\sqrt{\frac{n}{n}+\sqrt{\frac{n}{n^2}}}+\sqrt{\frac{n}{n}-\sqrt{\frac{n}{n^2}}}}=\frac{2}{2}=1$

Wykorzystano tu fakt, że: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0$ *dla* $k > 0$. *Należy także pamiętać, że umieszczając zmienne lub liczby pod symbolem pierwiastka stopnia k, należy podnieść zmienną lub liczbę do potęgi k.*

9/ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^6-3n^4+2}{5-9n^6}\frac{:n^6}{:n^6}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{5n^6}{n^6}-\frac{3n^4}{n^6}+\frac{2}{n^6}}{\frac{5}{n^6}-\frac{9n^6}{n^6}}=-\frac{5}{9}$

10/ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n}\frac{:n}{:n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{n^2}{n^3}+\frac{1}{n^3}}}{\frac{n}{n}}=0$

11/ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+6\sqrt{n}+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+6\sqrt{n}+1-n}{\sqrt{n+6\sqrt{n}+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+6\sqrt{n}+1}+\sqrt{n}}\frac{:\sqrt{n}}{:\sqrt{n}}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6\sqrt{\frac{n}{n}}}{\sqrt{\frac{n}{n}+6\sqrt{\frac{n}{n^2}}+\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{n}{n}}}=\frac{6}{2}=3$

12/

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+4n+1}-\sqrt{n^2+2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+4n+1-n^2-2n}{\sqrt{n^2+4n+1}+\sqrt{n^2+2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+4n+1}+\sqrt{n^2+2n}}\frac{:n}{:n}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{4n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}}}=\frac{2}{2}=1$

13/ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5(\sqrt{n^2+2}+n)}{2\left(\sqrt{n^2+5}+n\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\left(\sqrt{n^2+2}+n\right):n}{2\left(\sqrt{n^2+5}+n\right):n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\left(\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2}{n^2}}+\frac{n}{n}\right)}{2\left(\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{5}{n^2}}+\frac{n}{n}\right)}=\frac{5}{2}$

14/ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}\frac{:n^2}{:n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}}=\frac{1}{2}$

(Wykorzystano fakt, że licznik jest ciągiem arytmetycznym o różnicy 1.)

15/ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{2+4+\ldots+2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+2n-1)2n}{2n(2+2n)}\frac{:n^2}{:n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{4n^2}{n^2}}{\frac{4n}{n^2}+\frac{4n^2}{n^2}}=1$

16/ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n-1)n}{2n^2}\frac{:n^2}{:n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^2}{n^2}-\frac{n}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}}=\frac{3}{2}$

17/ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\frac{:n^3}{:n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^3}{n^3}+\frac{3n^2}{n^3}+\frac{n}{n^3}}{\frac{6n^3}{n^3}}=\frac{1}{3}$

(Wykorzystano zależność $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$*)*

18/ $$\lim_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+3+\ldots+(2n-1))-(2+4+\ldots+2n)}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n-n^2}{\sqrt{n^2+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{\sqrt{n^2+1}}\frac{:n}{:n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}}=-1$$

Pomocniczo obliczono sumy ciągów arytmetycznych w nawiasach.

19/ $$\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\frac{1}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^3+n^2}{4n^4}\frac{:n^4}{:n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^4}{n^4}+\frac{2n^3}{n^4}+\frac{n^2}{n^4}}{\frac{4n^4}{n^4}}=\frac{1}{4}$$

Wykorzystano fakt dowodzony indukcyjnie, że $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$

20/ $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}+\frac{2}{n^k}+\ldots+\frac{n}{n^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}(1+2+\ldots+n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^k}=$$

$$=\begin{cases} 0 & gdy \quad k>2 \\ \frac{1}{2} & gdy \quad k=2 \\ \infty & gdy \quad k=1 \quad lub \quad k=0 \end{cases}$$

21/ $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}=\frac{2}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}$$

Wykorzystano fakt, że w liczniku i mianowniku są ciągi geometryczne nieskończone.

22/ $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n+1}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\tfrac{1}{n+1}\right)=1$$

23/ $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^3+1}\cos n!$$

Przyjmijmy, że $a_n=\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^3+1}$ oraz $b_n=\cos n!$.

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)n}{2(n^3+1)}\dfrac{:n^3}{:n^3}=0$ a także $|\cos n!|\le 1$, więc ciąg b_n jest ograniczony.
Na mocy twierdzenia 5, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=0$.

24/ $$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\tfrac{1}{4}\right)+\left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{9}\right)+\left(\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{16}\right)+\ldots+\left(\tfrac{1}{n^2}-\tfrac{1}{(n+1)^2}\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1$$

25/ $$\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{5}{8}+\ldots+\tfrac{2n-1}{2^n}\right)$$

Pomocniczo tworzymy różnicę:

$$a_n-\tfrac{1}{2}a_n=\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2^2}+\tfrac{5}{2^3}+\ldots+\tfrac{2n-1}{2^n}-\tfrac{1}{2^2}-\tfrac{3}{2^3}-\tfrac{5}{2^4}-\ldots-\tfrac{2n-1}{2^{n+1}}=\tfrac{1}{2}+\left(\tfrac{3}{2^2}-\tfrac{1}{2^2}\right)+\left(\tfrac{5}{2^3}-\tfrac{3}{2^3}\right)+\ldots$$

$$+\left(\tfrac{2n-1}{2^n}-\tfrac{2n-3}{2^n}\right)-\tfrac{2n-1}{2^{n+1}}=\tfrac{1}{2}+\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2^2}+\ldots+\tfrac{1}{2^{n-1}}\right)-\tfrac{2n-1}{2^{n+1}}$$

Stąd

$$a_n=2\left(a_n-\tfrac{1}{2}a_n\right)=2\left(\tfrac{1}{2}a_n\right)=2\left[\tfrac{1}{2}+\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2^2}+\ldots+\tfrac{1}{2^{n-1}}\right)-\tfrac{2n-1}{2^{n+1}}\right]=1+\left(1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\tfrac{1}{2^{n-2}}\right)-\tfrac{2n-1}{2^n}=$$

$$=1+1\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}=1+2\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}$$

Ostatecznie: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+2\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}\right)=3$

26/ $$\lim_{n\to\infty}\left(1-\tfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\tfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\tfrac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\tfrac{1}{n^2}\right)$$

$$1-\tfrac{1}{2^2}=\tfrac{2^2-1}{2^2}=\tfrac{2-1}{2}\cdot\tfrac{2+1}{2};$$

$$1-\tfrac{1}{3^2}=\tfrac{3^2-1}{3^2}=\tfrac{3-1}{3}\cdot\tfrac{3+1}{3};$$

$$\vdots$$

$$1-\tfrac{1}{n^2}=\tfrac{n^2-1}{n^2}=\tfrac{n-1}{n}\cdot\tfrac{n+1}{n};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\right)\left(\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{4}\right)\ldots\left(\tfrac{n-1}{n}\cdot\tfrac{n+1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{n+1}{n}\tfrac{:n}{:n}=\tfrac{1}{2}$$

27/ $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+n^2}-\sqrt{n^4-n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+n^2-n^4+n^2}{\sqrt{n^4+n^2}+\sqrt{n^4-n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{\sqrt{n^4+n^2}+\sqrt{n^4-n^2}}\frac{:n^2}{:n^2}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2}{n^2}}{\sqrt{\frac{n^4}{n^4}+\frac{n^2}{n^4}}+\sqrt{\frac{n^4}{n^4}-\frac{n^2}{n^4}}}=\frac{2}{2}=1$$

28/ $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)}\right)\left(\sqrt{n\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)}\right)}{\sqrt{n\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+\sqrt{n^4-n^2}}}\frac{:n}{:n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\sqrt{\frac{n^4}{n^4}-\frac{n^2}{n^4}}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

29/ $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\binom{n}{1}+\frac{1}{n^2}\binom{n}{2}+\frac{1}{n^3}\binom{n}{3}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!}+\frac{1}{n^2}\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}+\frac{1}{n^3}\frac{n!}{(n-3)!\cdot 3!}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{2n}+\frac{(n-2)(n-1)}{6n^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+3n(n-1)+(n-2)(n-1)}{6n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{10n^2-6n+2}{6n^2}\frac{:n^2}{:n^2}=\frac{5}{3}$$

30/ $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{n}{n}}}{\sqrt{\frac{n}{n}+\sqrt{\frac{n}{n^2}+\sqrt{\frac{n}{n^4}}}}}=1$$

31/ $$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(n^3+n-n^3\right)}{\sqrt[3]{\left(n^3+n\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+n}+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt[3]{n^6+2n^4+n^2}+\sqrt[3]{n^6+n^4}+n^2}\frac{:n^2}{:n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\sqrt[3]{\frac{n^6}{n^6}+\frac{2n^4}{n^6}+\frac{n^2}{n^6}}+\sqrt[3]{\frac{n^6}{n^6}+\frac{n^4}{n^6}}+\frac{n^2}{n^2}}=\frac{1}{3}$$

32/ $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n(n+1)^2}-\sqrt[3]{n(n-1)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)^2-n(n-1)^2}{\sqrt[3]{n^2(n+1)^4}+\sqrt[3]{n^2(n+1)^2(n-1)^2}+\sqrt[3]{n^2(n-1)^4}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{\sqrt[3]{n^6+4n^5+6n^4+4n^3+n^2}+\sqrt[3]{n^6-2n^4+n^2}+\sqrt{n^6-4n^5+6n^4-4n^3+n^2}}\frac{:n^2}{:n^2}=\frac{4}{3}$$

33/
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+2+3+\ldots+n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1+n}{2}n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{n+n^2}{2}}}{n}\frac{:n}{:n}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

34/
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-\tfrac{1}{n}}-1\right)n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}+1\right)}=-\frac{1}{3}$$

35/
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{4}}\cdot\ldots 2^{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}2^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)}=\lim_{n\to\infty}2^1=2$$

(Pomocniczo obliczono sumę ciągu geometrycznego: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}$)

$$S=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}=1$$

36/
$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot3^{n+1}+2\cdot4^n}{5\cdot2^n+4^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{12\cdot3^n+2\cdot4^n}{5\cdot2^n+16\cdot4^n}\frac{:4^n}{:4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{12\cdot\frac{3^n}{4^n}+2\cdot\frac{4^n}{4^n}}{5\cdot\frac{2^n}{4^n}+16\cdot\frac{4^n}{4^n}}=\frac{1}{8}$$

(Dla ciągów typu wykładniczego, dzielimy przez najszybciej rosnący ciąg z mia--nownika)

37/
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\binom{n+2}{n}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+2)!}{2!\cdot n!}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot(n+1)(n+2)}{2n^2\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+2}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

38/
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+\sqrt{n+1}}-\sqrt{n^2-\sqrt{n-1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+\sqrt{n+1}-n^2+\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n+1}}+\sqrt{n^2-\sqrt{n-1}}\right)(n+1-n)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n+1}}+\sqrt{n^2-\sqrt{n-1}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1+\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-n}\right)}{\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n+1}}+\sqrt{n^2-\sqrt{n-1}}\right)}\frac{:n}{:n}=2$$

39/
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)(2n-1)!}{(2n+1)!+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)(2n-1)!}{(2n-1)!(2n)(2n+1)+1}\frac{:(2n-1)!}{:(2n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{4n^2+2n}\frac{:n^2}{:n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{4n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}}=\frac{1}{4}$$

40/
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(n+3)}{(n+1)!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+1}=1$$

41/
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^{10}-2n^2+2}=\lim_{n\to\infty}n^5\sqrt{1-\tfrac{2}{n^8}+\tfrac{2}{n^{10}}}=+\infty$$

42/
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{4^n-3^n}\frac{:4^n}{:4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}=0$$

43/
$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n+5^n}{5^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{7^n\left(1+\left(\frac{5}{7}\right)^n\right)}{5^n\left(1+\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)}=\left(\frac{7}{5}\right)^n=\infty$$

44/ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n^n}}{\sqrt[n]{3^n}}=\dfrac{n}{3}=\infty$

(Wykorzystano fakt, że $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n}=a$)

45/ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$

Do rozwiązania zadania wykorzystamy zadanie 44/. Zachodzi $n!>\left(\frac{n}{3}\right)^n$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3}\right)^n}=\infty$, stąd na mocy twierdzenia o dwóch ciągach $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$

46/ Pokazać, że: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$

Pomocniczo: $a_n=\dfrac{2^n}{n!};\quad a_{n+1}=\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=q=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot2\cdot n!}{n!(n+1)\cdot2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0$$

Na podstawie tw. jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=g<1$ to $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

47/

Pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}=0$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}\frac{n^n}{2^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}<1$$

A zatem na podstawie tw.

że jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ to $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ pokazaliśmy, że $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}=0$

48/

Pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}=0$

Rozwiązanie podobnie jak w przykładach 46/ i 47/.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^2(2n)!}{(2n+2)!(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{4}<1$$

49/
$$\lim_{n\to\infty}n(\ln(n+1)-\ln n)=\lim_{n\to\infty}n\left(\ln\tfrac{n+1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\tfrac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\ln e=1$$

50/
$$\lim_{n\to\infty}n(\ln(n-3)-\ln n)=\lim_{n\to\infty}n\left(\ln\tfrac{n-3}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\ln\left(1+\left(-\tfrac{3}{n}\right)\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\left(-\tfrac{3}{n}\right)\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(1+\left(-\tfrac{3}{n}\right)\right)^{-\frac{n}{3}}\right]^{-3}=$$

$$=\ln e^{-3}=-3\ln e=-3$$

51/
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\tfrac{3}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\tfrac{3}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(1+\tfrac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3=\lim_{n\to\infty}\ln e^3=3$$

Wykorzystano granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ *lub bardziej ogólnie* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+a_n\right)^{\frac{1}{a_n}}=e$

52/ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_2(n+1)}{\log_3(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_2(n+1)}{\frac{\log_2(n+1)}{\log_2 3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \log_2 3 = \log_2 3$

53/ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n(\ln(n+1)-\ln n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{\ln e} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = \infty$

54/ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+2^n-3^n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 3^n\left(\frac{1}{3^n}+\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right) = -\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = -\infty$

55/ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)^n\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)^1 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{n}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^n \cdot 2 = \infty$

56/ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^3 = e^3$

57/ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2 = e^2$

58/ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{5}}\right]^5 = e^5$

59/ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-5n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-5} = e^{-5}$

60/ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n}\right]^{-1} = e^{-1}$

61/ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\left(-\frac{3}{n}\right)\right)^{-\frac{n}{3}}\right]^{-3} = e^{-3}$

62/ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n}\right)^{-n+3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\left(-\frac{4}{n}\right)\right)^{-n}\left(1+\left(-\frac{4}{n}\right)\right)^3 = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\left(-\frac{4}{n}\right)\right)^{-\frac{n}{4}}\right]^4 \cdot 1 = e^4$

63/ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}\cdot e^1 = e^0 = 1$

(Wykorzystano zadanie 60/ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$*)*

64/ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n^2}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{6}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{6}}\right]^6 = e^6$

65/ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\left(-\frac{1}{3n+2}\right)\right)^{6n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left[\left(1+\left(\frac{1}{-3n-2}\right)\right)^{-3n-2}\right]^{-2}}{\left(1+\left(\frac{1}{-3n-2}\right)\right)^4} = \dfrac{e^{-2}}{1} = e^{-2}$

66/ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+3}\right)^{5-2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{5-2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left[\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+3}\right]^{-2}}{\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{-11}} = \dfrac{e^{-2}}{1} = e^{-2}$

67/ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{1}{e} = e^{-1}$

68/ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-n+1\right)^{\cos\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-n+1\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^1 = \infty$

69/ $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

Pomocniczo wykorzystamy fakt, że $\sin\pi n = 0$ dla każdego $n \in N$. Stąd:

$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = \sin\pi\sqrt{n^2+1} - \sin n\pi = 2\sin\dfrac{\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)}{2}\cos\dfrac{\pi\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 2\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)\cos\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{n^2+1}+n\right) = 0$

Powyższa granica wynosi 0 ponieważ: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0$, a zatem $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) = 0$

70/ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2+1}\sin(3n+1)$

Oznaczmy: $x_n = \frac{n}{n^2+1}$; $y_n = \sin(3n+1)$ $n = 1,2\ldots$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = 0$ oraz prawdziwe jest, że: $|y_n| = |\sin(3n+1)| \le 1$ jest ograniczony.

A zatem na mocy twierdzenia o ciągu ograniczonym i dążącym do 0:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = 0$

71/ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

Pierwszy wyraz ciągu jest największy, ostatni wyraz ciągu jest najmniejszy.

$$n\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le n\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}} = 1$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}} = 1$

Stąd na mocy tw. o trzech ciągach granica 71/ jest równa 1.

72/ $\lim\limits_{n\to\infty} arctg\left(\frac{n^2+1}{n}\right) = arctg\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n}\right) = arctg\,(+\infty) = \dfrac{\pi}{2}$

73/ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin n!}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n}{n^2}\sin n!}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \dfrac{0\cdot\sin n!}{1} = 0$

74/ Wiadomo, że ciągi a_n oraz b_n spełniają zależność $a_n + b_n\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^n$ $n = 1,2\ldots$

Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

Pomocniczo zapiszmy fakty:

$\left(2+\sqrt{3}\right)^n\left(2-\sqrt{3}\right)^n = 1$ $\left(a_n + b_n\sqrt{3}\right) = \frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^n} = \left(2-\sqrt{3}\right)^{-n}$

Stąd ponieważ:

$\left(a_n + b_n\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^n = 1$ to $a_n - b_n\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^n$.

Otrzymujemy układ równań. Po dodaniu stronami równań układu:

$$\begin{cases} a_n - b_n\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-n} \\ a_n + b_n\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^n \end{cases}$$

otrzymamy: $a_n = \frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2+\sqrt{3}\right)^{-n}\right]$. Po wstawieniu a_n do drugiego równania otrzymujemy: $b_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2+\sqrt{3}\right)^{-n}\right]$

Ostatecznie:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2+\sqrt{3}\right)^{-n} : \left(2+\sqrt{3}\right)^n}{\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2+\sqrt{3}\right)^{-n} : \left(2+\sqrt{3}\right)^n} = \sqrt{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n}}}{1+\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n}}} = \sqrt{3}$$

75/ $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^n = 0^\infty = 0$

2. Granice funkcji jednej zmiennej

Granica właściwa funkcji w punkcie (wg Cauchy'ego)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x \in S(x_0)}{\forall} \left[\left(|x - x_0| < \delta \right) \Rightarrow \left(|f(x) - g| < \varepsilon \right) \right]$$

Granica właściwa lewostronna funkcji w punkcie (wg Cauchy'ego)

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g \Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x \in S(x_0^-)}{\forall} \left[\left(0 < x_0 - x < \delta \right) \Rightarrow \left(|f(x) - g| < \varepsilon \right) \right]$$

Granica właściwa prawostronna funkcji w punkcie (wg Cauchy'ego)

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = g \Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x \in S(x_0^+)}{\forall} \left[\left(0 < x - x_0 < \delta \right) \Rightarrow \left(|f(x) - g| < \varepsilon \right) \right]$$

Granica niewłaściwa funkcji w punkcie (wg Cauchy'ego)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \Leftrightarrow \left[\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x \in S(x_0)}{\forall} \left(|x - x_0| < \delta \right) \Rightarrow \begin{cases} f(x) > \varepsilon \\ f(x) < -\varepsilon \end{cases} \right]$$

Granica właściwa funkcji w nieskończoności (wg Cauchy'ego)

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = g \Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{M \in R}{\exists}\ \underset{x \in S(\infty)}{\forall} \left[(x > M) \Rightarrow \left(|f(x) - g| < \varepsilon \right) \right]$$

Granica niewłaściwa funkcji w nieskończoności (wg Cauchy'ego)

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{M \in R}{\exists}\ \underset{x \in S(\infty)}{\forall} \left[(x > M) \Rightarrow \left(f(x) > \varepsilon \right) \right]$$

Granica właściwa funkcji w punkcie (wg Heinego)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \underset{x_n \subset S(x_0)}{\forall} \left[\left(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \to \infty} f(x_n) = g \right) \right]$$

Granice właściwe jednostronne w punkcie (wg Heinego)

$$\lim_{x \to \begin{cases} x_0^- \\ x_0^+ \end{cases}} f(x) = g \Leftrightarrow \underset{x_n \subset \begin{cases} S(x_0^-) \\ S(x_0^+) \end{cases}}{\forall} \left[\left(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \to \infty} f(x_n) = g \right) \right]$$

Granica niewłaściwa funkcji w punkcie (wg Heinego)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \underset{x_n \subset S(x_0)}{\forall} \left[\left(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \to \infty} f(x) = \infty \right) \right]$$

Granica właściwa funkcji w nieskończoności (wg Heinego)

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = g \Leftrightarrow \underset{x_n \subset S(\infty)}{\forall} \left[\left(\lim_{n \to \infty} x_n = \infty \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \to \infty} f(x_n) = g \right) \right]$$

Granica niewłaściwa funkcji w nieskończoności (wg Heinego)

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \underset{x_n \subset S(\infty)}{\forall} \left[\left(\lim_{n \to \infty} x_n = \infty \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \infty \right) \right]$$

Wybrane twierdzenia o granicach funkcji:

Jeżeli funkcje f(x) i g(x) mają granice właściwe w punkcie x_0, to:

1/ $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$

2/ $\lim_{x \to x_0} (k \cdot f(x)) = k \lim_{x \to x_0} f(x)$ *dla* $k \in R$;

3/ $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \to x_0} g(x) \right)$

4/ $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$ $\quad \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$;

5/ $\lim_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \to x_0} g(x)}$

Symbole nieoznaczone: $\infty - \infty; \frac{\infty}{\infty}; \frac{0}{0}; \infty \cdot 0; \infty^0; 0^0; 1^\infty$.

Twierdzenie de L'Hospitala dla nieoznaczoności:

Jeżeli funkcje f(x) oraz g(x) spełniają warunki:

1/ $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$ $\qquad g(x) \neq 0; \quad x \in S(x_0)$

lub

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$

(otrzymujemy zatem symbol nieoznaczony: $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$)

2/ Istnieje granica właściwa lub niewłaściwa dla wyrażenia: $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

wówczas: $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Uwaga! *Twierdzenie jest prawdziwe także dla granic w* $\pm\infty$ *oraz dla* granic *jednostronnych.*

Przekształcanie nieoznaczoności

Nieoznaczoność	Przekształcenie	Otrzymana nieoznaczoność
$\infty - \infty$	$f - g = \dfrac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f \cdot g}}$	$\frac{0}{0}$
$0 \cdot \infty$	$f \cdot g = \dfrac{f}{\frac{1}{g}}$	$\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$
$\infty^0; 0^0; 1^\infty$;	$f^g = e^{g \ln f}$	$0 \cdot \infty$

Granice niektórych wyrażeń nieoznaczonych:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ *dla* $a>0$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a$ *dla* $a\in R$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{shx}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{thx}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$ *dla* $0<a\neq 1$

PRZYKŁADY

Najprostsze granice funkcji obliczamy przez podstawienie wartości granicznej argumentu.

76/ $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2+5x+6\right)=(-2)^2+5\cdot(-2)+6=0$

77/ $\lim\limits_{t\to 1}\frac{t^3+3^t}{\sqrt{t+3}}=\frac{1^3+3^1}{\sqrt{1+3}}=2$

78/ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-4}}{2x+1}=\frac{\sqrt{2^2-4}}{2\cdot 2+1}=\frac{0}{5}=0$

79/ $\lim\limits_{x\to -2}\log\left(2+2x+x^2-x^3\right)=\log\left(2+2\cdot(-2)+(-2)^2-(-2)^3\right)=\log 10=1$

80/ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x\sin 2x\sin 3x=\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$

81/ $\lim\limits_{y\to 0}\frac{(2x-y)^3-\sin y}{x^2+y^2+tg2y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3-\sin y}{x^2+y^2+tg2y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{8x^3}{x^2}=8x$

Dla obliczenia większości granic stosuje się wzory oraz udowodnione twierdzenia.

82/ $\lim\limits_{t\to 1}\frac{3t^2-t-2}{2t^2+5t-7}=\lim\limits_{t\to 1}\frac{3\left(t+\frac{2}{3}\right)(t-1)}{2\left(t+\frac{7}{2}\right)(t-1)}=\frac{3}{2}\lim\limits_{t\to 1}\frac{t+\frac{2}{3}}{t+\frac{7}{2}}=\frac{5}{6}$

83/ $\lim\limits_{x\to -a}\frac{a^2-x^2}{a^3+x^3}=\lim\limits_{x\to -a}\frac{(a-x)(a+x)}{(a+x)\left(a^2-xa+x^2\right)}=\lim\limits_{x\to -a}\frac{a-x}{a^2-xa+x^2}=\frac{2a}{3a^2}=\frac{2}{3a}$

84/ $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)}{(x+3)}=\frac{0}{6}=0$

85/ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^3}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)\left(1+x^2+x\right)}{(1-x)}=\lim\limits_{x\to 1}\left(1+x^2+x\right)=3$

86/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^4-(1-x)^4}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(1+4x+6x^2+4x^3+x^4\right)-\left(1-4x+6x^2-4x^3+x^4\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{8x+8x^3}{x}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}8\left(1+x^2\right)=8$

87/ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^7-1}{x^{10}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\right)}{(x-1)\left(x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\right)}=\frac{7}{10}$

88/ $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1-3^{2\alpha}}{3^\alpha-1}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\left(1-3^\alpha\right)\left(1+3^\alpha\right)}{-\left(1-3^\alpha\right)}=-2$

89/ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\left(1-\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x)}{\left(1-\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)(1+x)}{\left(1-\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\left(1+\sqrt{x}\right)(1+x)=4$

90/ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}+1\right)}=\frac{3}{4}$

91/ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{1+2+\ldots+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x+1)}{\frac{x+1}{2}x}=2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}}=2$

92/ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5x}{x+\sqrt{x^2+5x}}\frac{:x}{:x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-\frac{5x}{x}}{\frac{x}{x}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}}}=-\frac{5}{2}$

93/ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}\frac{:x}{:x}=$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x}}{\sqrt{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$

94/ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sqrt[3]{x^3+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(x^2-x\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}\right)}{x^3+x^3+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-\sqrt[3]{x^9+x^6}+\sqrt[3]{x^9+2x^6+x^3}}{2x^3+1}\frac{:x^3}{:x^3}=$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}-\sqrt[3]{\frac{x^9}{x^9}+\frac{x^3}{x^9}}+\sqrt[3]{\frac{x^9}{x^9}+\frac{2x^6}{x^9}+\frac{x^3}{x^9}}}{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{2}$

95/ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1-\left(x^2-x+1\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}\frac{:x}{:x}=$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}=1$

96/ $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}\frac{:x}{:x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\frac{x}{x}}=\frac{1}{2}$

97/ $\lim\limits_{u\to -2}\frac{u^3+4u^2+4u}{u^2-u-6}=\lim\limits_{u\to -2}\frac{u\left(u^2+4u+4\right)}{(u+2)(u-3)}=\lim\limits_{u\to -2}\frac{u(u+2)^2}{(u+2)(u-3)}=\lim\limits_{u\to -2}\frac{u(u+2)}{u-3}=\frac{0}{-5}=0$

98/ $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+13-4(x+1)}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)}=$
$=\lim\limits_{x\to 3}\frac{-3}{(x+3)\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)}=-\frac{1}{16}$

99/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2-\sqrt{x+4}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(2+\sqrt{x+4}\right)}{\left(2-\sqrt{x+4}\right)\left(2+\sqrt{x+4}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(2+\sqrt{x+4}\right)}{-x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(-2-\sqrt{x+4}\right)=-4$

100/ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{5x^2+2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x^2}}{5+\frac{2}{x}}=\frac{3}{5}$

101/ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-x-x^2}{x^3+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x^3}}=0$

102/ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=2$

103/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\sqrt{2x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}}{-\frac{x}{x}}=-\sqrt{2}$

104/ $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$

105/ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}+\frac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{(1-x)(1+x^2+x)}+\frac{1}{-(1-x)}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-x^2-x+2}{(1-x)(1+x+x^2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+2)}{(1+x+x^2)}=1$

106/ $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^4-18x^2+81}{2x^2-3x-9}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x^2-9)(x^2-9)}{2(x+\frac{3}{2})(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)^2(x+3)^2}{2(x+\frac{3}{2})(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)^2}{2(x+\frac{3}{2})}=0$

107/ $\lim\limits_{p\to 2}\frac{p^5-2p^4+p^2-3p+2}{p^3-2p^2+3p-6}=\lim\limits_{p\to 2}\frac{(p^4+p-1)(p-2)}{p^2(p-2)+3(p-2)}=\lim\limits_{p\to 2}\frac{(p^4+p-1)(p-2)}{(p^2+3)(p-2)}=\frac{17}{7}$

108/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}\,:(-x)}{\sqrt[3]{x^3+1}\,:(-x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{\frac{x^3}{-x^3}+\frac{1}{-x^3}}}=\frac{1}{-1}=-1$

109/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt[3]{1+2x+x^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{1-2x+x^2}}=\frac{2}{3}$

110/
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x}+2}{\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2}}+\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}}=0$

111/
$\lim\limits_{x\to 81}\frac{\sqrt[4]{x}-3}{\sqrt{x}-9}=\lim\limits_{x\to 81}\frac{(x-81)}{(\sqrt[4]{x}+3)(\sqrt{x}+9)(\sqrt{x}-9)}=\lim\limits_{x\to 81}\frac{(x-81)}{(\sqrt[4]{x}+3)(x-81)}=\frac{1}{6}$

112/ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{3}{4}$

113/ $\lim\limits_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}=\lim\limits_{x\to 64}\frac{(x-64)(\sqrt{x}+8)}{(\sqrt{x}-8)\left(\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16\right)(\sqrt{x}+8)}=\lim\limits_{x\to 64}\frac{(x-64)(\sqrt{x}+8)}{(x-64)\left(\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16\right)}=\frac{1}{3}$

114/ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{-(x^6+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=-\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x+1}=-3$

115/ $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^4+3x^2-4}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x^2+4)(x^2-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x^2+4)(x-1)(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}(x^2+4)(x-1)=-10$

116/ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)\left(\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x}+1\right)}{\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)(1-x)}=\frac{5}{3}$

117/
$\lim\limits_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x^3}-2^3}{\sqrt[4]{x}-2}=\lim\limits_{x\to 16}\frac{\left(\sqrt[4]{x^3}-2^3\right)}{\sqrt[4]{x}-2}=\lim\limits_{x\to 16}\frac{\left(\sqrt[4]{x}-2\right)\left(\sqrt[4]{x^2}+2\sqrt[4]{x}+4\right)}{\left(\sqrt[4]{x}-2\right)}=\lim\limits_{x\to 16}\left(\sqrt[4]{x^2}+2\sqrt[4]{x}+4\right)=12$

118/ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x(x+1)^2}-\sqrt[3]{x(x-1)^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(x+1)^2-x(x-1)^2}{\sqrt[3]{x^2(x+1)^4}+\sqrt[3]{x^2(x^2-1)^2}+\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(x^2+2x+1-x^2+2x-1)}{\sqrt[3]{x^6+4x^5+6x^4+4x^3+x^2}+\sqrt[3]{x^6-2x^4+x^2}+\sqrt[3]{x^6-4x^5+6x^4-4x^3+x^2}}\frac{:x^2}{:x^2}=\frac{4}{3}$

119/
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(1+x)}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1}=\frac{1}{2}$

120/
$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^3-3x^2+4}-x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^3-4x^2+x^2+4}-(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2(x+1)-4(x^2-1)}-(x-2)}{(x-2)(x+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{(x+1)(x-2)^2}-(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{|x-2|\sqrt{x+1}-(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)\left(\sqrt{x+1}+(x-2)\right)}{(x-2)(x+2)}=-\frac{\sqrt{3}}{4}\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x+1}-(x-2)\right)}{(x-2)(x+2)}=\frac{\sqrt{3}}{4}\end{cases}$

A zatem granica nie istnieje, ponieważ granice lewo- i prawostronna są różne.

121/
$\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3\left(x^2+\sqrt{x^4+1}-2x^2\right)}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+\sqrt{2}x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\sqrt{x^4+1}-x^2\right)}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+\sqrt{2}x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\sqrt{x^4+1}-x^2\right)\left(\sqrt{x^4+1}+x^2\right)}{\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+\sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{x^4+1}+x^2\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{\sqrt{x^6+x^2+\sqrt{x^{12}+3x^8+3x^4+1}}+\sqrt{2}\sqrt{x^6+x^2}+\sqrt{x^6+\sqrt{x^{12}+x^8}}+\sqrt{2}x^3}\frac{:x^3}{:x^3}=\frac{\sqrt{2}}{8}$

122/

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x-1)-(3x-2)}{\left(\sqrt{4x-3}-1\right)\left(\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{(2x-1)(3x-2)}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{\left(\sqrt{4x-3}-1\right)\left(\sqrt[3]{4x^2-4x+1}+\sqrt[3]{6x^2-7x+2}+\sqrt[3]{9x^2-12x+4}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{4x-3}+1\right)}{\left(\sqrt{4x-3}+1\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)\left(\sqrt{4x-3}+1\right)}{-4(1-x)\left(\sqrt[3]{4x^2-4x+1}+\sqrt[3]{6x^2-7x+2}+\sqrt[3]{9x^2-12x+3}\right)}=-\frac{1}{6}$

123/ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x+1}}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)\left(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}\right)}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4+x^3+x+1}+\sqrt{x^4+x^3-x-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^4+4x^2}}{\sqrt{x^4+x^3+x+1}+\sqrt{x^4+x^3-x-1}}\frac{:x^2}{:x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{4x^4}{x^4}+\frac{4x^2}{x^4}}}{\sqrt{\frac{x^4}{x^4}+\frac{x^3}{x^4}+\frac{x}{x^4}+\frac{1}{x^4}}+\sqrt{\frac{x^4}{x^4}+\frac{x^3}{x^4}-\frac{x}{x^4}-\frac{1}{x^4}}}=\frac{2}{2}=1$

124/ Wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$.
Niech $k<|x|<k+1,\ k\in N$. Wówczas:

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right|=\left|\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{x}{k+1}\cdot\frac{x}{k+2}\cdot\ldots\cdot\frac{x}{n}\right|<\left|\frac{x^k}{k!}\right|\cdot\left|\frac{x}{k+1}\right|^{n-k}$$

Dla ustalonego k: $\left|\frac{x^k}{k!}\right|$ jest wielkością stałą.

Na mocy założenia $\left|\frac{x}{k+1}\right|<1$, a dla n $\to\infty$ $\left|\frac{x}{k+1}\right|^{n-k}\to 0$
Ostatecznie iloczyn stałej i wielkości nieskończenie małej dąży do 0.

125/ $\lim\limits_{x\to\pi}5\sin\frac{3x}{x-\pi}$

Czynnik $\frac{3x}{x-\pi}\to\infty$ *dla* $x\to\pi$, $\sin(\infty)$ nie dąży do żadnej określonej wartości lecz przyjmuje różne wartości z przedziału <-1, 1>. A zatem granica 125/ nie istnieje.

126/ $\lim\limits_{\phi\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2\phi}{\sin\phi-\cos\phi}=\lim\limits_{\phi\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2\phi-\sin^2\phi}{\sin\phi-\cos\phi}=\lim\limits_{\phi\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos\phi-\sin\phi)(\cos\phi+\sin\phi)}{-(\cos\phi-\sin\phi)}=$
$=-\lim\limits_{\phi\to\frac{\pi}{4}}(\cos\phi+\sin\phi)=-\sqrt{2}$

127/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2$

128/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\cdot 5x\cdot\sin 4x}{5\cdot 4x\cdot\sin 5x}=\frac{4}{5}\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}\frac{\sin 4x}{4x}=\frac{4}{5}$

129/ $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sin(x+1)}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sin(x+1)}{(1-x)(1+x)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sin(x+1)}{1+x}\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{1-x}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

130/ $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{\sin(x-a)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{\sin(x-a)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{(x-a)}{\sin(x-a)}(x+a)=\lim\limits_{x\to a}(x+a)=2a$

131/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{tgbx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax\cdot\cos bx}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\cdot b\cdot x\cdot\sin ax\cdot\cos bx}{a\cdot b\cdot x\cdot\sin bx}=\frac{a}{b}\lim\limits_{x\to 0}\frac{bx}{\sin bx}\frac{\sin ax}{ax}\cos bx=\frac{a}{b}$

132/ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{2x}{2}\sin\frac{2h}{2}}{h}=2\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\cos x=2\cos x$

133/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{16\sin 4x\sin 4x}{16x\cdot x}=16\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\frac{\sin 4x}{4x}=16$

134/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^3\sin x^7}{\sin x^4\sin x^6}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{10}\sin x^3\sin x^7}{x^{10}\sin x^4\sin x^6}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x^3}\frac{\sin x^7}{x^7}\frac{x^4}{\sin x^4}\frac{x^6}{\sin x^6}=1$

135/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 5x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{7x}{2}\sin\frac{-3x}{2}}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{7}{2}\sin\frac{7x}{2}}{\frac{7x}{2}}\frac{\frac{3}{2}\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}=\frac{21}{2}$

136/ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\sin x-\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}\right)}{\left(\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}\right)\left(\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}=\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}}}$

137/
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos px-\cos qx}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{px+qx}{2}\sin\frac{px-qx}{2}}{x^2}=-2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{p+q}{2}\cdot\frac{p-q}{2}\sin\frac{x(p+q)}{2}\sin\frac{x(p-q)}{2}}{x\cdot\frac{p+q}{2}\cdot x\cdot\frac{p-q}{2}}=$
$=-2\left(\frac{(p+q)}{2}\frac{(p-q)}{2}\right)=\frac{q^2-p^2}{2}$

138/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\pm\sqrt{(1-\cos x)(1+\cos x)}}=\pm\sqrt{\frac{1}{1+\cos x}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ponieważ otrzymana granica nie jest jednoznaczna, zatem granica nie istnieje

139/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{1-x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)5x}{\left(1+\sqrt{1-x}\right)\cdot 5x\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{x}{5x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{1}{10}$

140/
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1-tgx}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\sqrt{1+tgx}+\sqrt{1-tgx}\right)}{\left(\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1-tgx}\right)\left(\sqrt{1+tgx}+\sqrt{1-tgx}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\sqrt{1+tgx}+\sqrt{1-tgx}\right)}{2tgx}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\sqrt{1+tgx}+\sqrt{1-tgx}\right)}{2\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}\left(\sqrt{1+tgx}+\sqrt{1-tgx}\right)=1$

141/ $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)\sin\frac{\pi\cdot x}{2}}{\cos\frac{\pi\cdot x}{2}}=\lim\limits_{x\to 1}\sin\frac{\pi x}{2}\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi\cdot x}{2}}=1\cdot\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\cdot x}{2}\right)}=$
$=\frac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\cdot x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\cdot x}{2}\right)}=\frac{2}{\pi}$

142/ $\lim\limits_{x\to 0}xctg\,2x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cdot\cos 2x}{2\sin 2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\cos 2x=\frac{1}{2}$

143/ $\lim\limits_{x\to\pi}\sin 2xctgx=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 2x\cdot\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{2\sin x\cos^2 x}{\sin x}=2\lim\limits_{x\to\pi}\cos^2 x=2$

144/ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{x(1-tgx)}{\cos 2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{x\left(1-\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{x\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}\right)}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos x(\cos x+\sin x)}=\frac{\pi}{4}$

145/ $\lim_{x\to 0}\sin 3x\cdot ctg5x=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\cos 5x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{15x\cdot\sin 3x\cdot\cos 5x}{15x\cdot\sin 5x}=$

$=\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cos 5x=\frac{3}{5}$

146/ $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{\arcsin 2x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{3x}\frac{2x}{\arcsin 2x}=\frac{3}{2}$

147/ $\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{2tgx}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot arctgx}{x\cdot tgx}=\frac{1}{2}$

148/ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg\,4x}{tg\,5x}=\left|\begin{array}{l}u=x-\frac{\pi}{2}\\ x=u+\frac{\pi}{2}\end{array}\right|=\frac{4}{5}\lim_{u\to 0}\frac{tg\,4\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}{4\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}\frac{5\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}{tg\,5\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{4}{5}$

149/

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{\arcsin(x+1)}=\left|\begin{array}{l}\quad\arcsin(x+1)=t\\ x+1=\sin t;\quad x=\sin t-1;\\ gdy\quad x\to -1\quad to\quad t\to 0\\ x^3=\sin^3 t-3\sin^2 t+3\sin t-1\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^3 t-3\sin^2 t+3\sin t}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t\left(\sin^2 t-3\sin t+3\right)}{t}=3$$

150/

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos ec\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)=\left|\begin{array}{l}\quad\frac{\pi}{4}-x=t\\ x=\frac{\pi}{4}-t\\ \frac{3\pi}{4}+x=\pi-t\\ gdy\quad x\to\frac{\pi}{4}\quad to\quad t\to 0\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}t\cos ec(\pi-t)=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1$$

W zadaniu **150/** wykorzystano własność: $\cos ecx=\frac{1}{\sin x}$

Warto zapamiętać także, że: $\sec x=\frac{1}{\cos x}$

151/ $\lim_{x\to -\infty}x\left(\frac{\pi}{2}+arctgx\right)=\left|\begin{array}{l}\quad arctgx=t\\ x=tgt\\ gdy\quad x\to -\infty\quad to\quad t\to -\frac{\pi}{2}\end{array}\right|=\lim_{t\to -\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}+t\right)tgt=$

$=\lim_{t\to -\frac{\pi}{2}}\frac{\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\sin t}{\cos t}=\lim_{t\to -\frac{\pi}{2}}\sin t\lim_{t\to -\frac{\pi}{2}}\frac{\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos t}=-1\cdot\lim_{t\to -\frac{\pi}{2}}\frac{\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}=-1$

152/ $\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{x}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{nx}{n}\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}=\left|\begin{array}{l}\frac{x}{n}=t;\quad n=\frac{x}{t};\\ n\to\infty\quad to\quad t\to 0\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}t\cdot n\frac{\sin t}{t}=\lim_{t\to 0}t\cdot n=\lim_{t\to 0}t\cdot\frac{x}{t}=x$

153/

$\lim_{n\to +\infty}2^n tg2^{-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sin 2^{-n}}{\cos 2^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin 2^{-n}}{2^{-n}\cos 2^{-n}}=\left|\begin{array}{l}2^{-n}=t;\quad\frac{1}{2^n}=t;\\ n\to\infty\quad to\quad t\to 0\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t\cdot\cos t}=1$

154/ $\lim_{x\to 0}\left(2\cos ec2x-ctgx\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin 2x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos^2 x}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(1-\cos^2 x\right)}{2\sin x\cos x}=$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{0}{1}=0$

155/

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\sqrt{tg^2x+\sec x}-tgx\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\left(\sqrt{tg^2x+\sec x}-tgx\right)\left(\sqrt{tg^2x+\sec x}+tgx\right)}{\left(\sqrt{tg^2x+\sec x}+tgx\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sec x}{\sqrt{tg^2x+\sec x}+tgx}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{1}{\cos x}}{\sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos x}}+\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{1}{\cos x}}{\sqrt{\frac{\sin^2 x+\cos x}{\cos^2 x}}+\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\sqrt{\sin^2 x+\cos x}+\sin x}=\frac{1}{2}$$

156/ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx-\sec x\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx-\sqrt{1+tg^2x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(tgx-\sqrt{1+tg^2x}\right)\left(tgx+\sqrt{1+tg^2x}\right)}{\left(tgx+\sqrt{1+tg^2x}\right)}=$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-1}{tgx+\sqrt{1+tg^2x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-1}{\frac{\sin x}{\cos x}+\sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-1}{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{1}{|\cos x|}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{\sin x+1}=\frac{0}{2}=0$$

W zadaniu 156/ wykorzystano własność: $1+tg^2x=\sec^2 x$

Warto także zapamiętać, że: $ctg^2x+1=\cos ec^2x$

157/ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot\left(3+\sqrt{2x+9}\right)\sin 3x}{3x\left(3-\sqrt{2x+9}\right)\left(3+\sqrt{2x+9}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\lim_{x\to 0}\frac{3x\left(3+\sqrt{2x+9}\right)}{-2x}=-9$

158/

$$\lim_{x\to 0^-}x^3arctg\frac{1}{x}=\left|\begin{array}{l}\frac{1}{x}=t;\quad x=\frac{1}{t};\\ x^3=\frac{1}{t^3}\\ x\to 0^-\quad to\quad t\to -\infty\end{array}\right|=\lim_{t\to -\infty}\frac{1}{t^3}arctgt=0\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

159/

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\sin\left(\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\sin\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\frac{:\sqrt{x}}{:\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$$

160/ $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+3}\sin\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+3}\sin\frac{x+2-x-1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+3}\sin\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+3}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}\sin\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}}{\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}\frac{:\sqrt{x}}{:\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$$

161/ $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$

162/ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10^{x}-2}{10^{x+1}+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{10^x}{10^x}-\frac{2}{10^x}}{\frac{10\cdot10^x}{10^x}+\frac{5}{10^x}}=\dfrac{1}{10}$

163/ $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3^x-1}{5^{\sqrt{x}}-1}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(3^x-1)x}{(5^{\sqrt{x}}-1)x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3^x-1}{x}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}{5^{\sqrt{x}}-1}=\ln3\cdot\dfrac{1}{\ln5}\cdot\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}=0$

164/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+4^x)}{3^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4^x\cdot\ln(1+4^x)}{4^x\cdot3^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4}{3}\right)^x=0$

(W ostatnim oszacowaniu wykorzystano własność funkcji wykładniczej)

165/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{15x\cdot(e^{5x}-1)}{15x\cdot\sin3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{5x}-1}{5x}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\cdot5x}{3\sin3x}=\dfrac{5}{3}$

166/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4^x-5^x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4^x-1+1-5^x}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{4^x-1}{x}-\dfrac{5^x-1}{x}\right]=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4^x-1}{x}-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5^x-1}{x}=$

$=\dfrac{1}{2}(\ln4-\ln5)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{5}$

167/ $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x^4-4}{x-e}=\begin{vmatrix}x-e=u; & x=u+e\\ x\to e\ \ to & u\to0\end{vmatrix}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\ln(u+e)^4-4}{u}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{4(\ln(u+e)-1)}{u}=$

$=4\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\ln(u+e)-\ln e}{u}=4\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\ln\frac{u+e}{e}}{u}=4\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\ln(\frac{u}{e}+1)}{\frac{u}{e}}\cdot\frac{1}{e}=\dfrac{4}{e}$

168/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-3x^4)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(-3)\ln(1-3x^4)}{(-3)x^4}=(-3)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln((-3)x^4+1)}{(-3)x^4}=-3$

169/
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4^x-8^x}{7^x-5^x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4^x+1-1-8^x}{7^x+1-1-5^x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4^x-1-(8^x-1)}{7^x-1-(5^x-1)}\dfrac{:x}{:x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{4^x-1}{x}-\frac{8^x-1}{x}}{\frac{7^x-1}{x}-\frac{5^x-1}{x}}=$

$=\dfrac{\ln4-\ln8}{\ln7-\ln5}=\dfrac{\ln\frac{1}{2}}{\ln\frac{7}{5}}$

170/ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6\cdot2^x-3\cdot5^x}{4\cdot3^x-7\cdot4^x}=\begin{vmatrix}u=x-1\\ x+u+1\end{vmatrix}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{6\cdot2^{u+1}-3\cdot5^{u+1}}{4\cdot3^{u+1}-7\cdot4^{u+1}}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{12\cdot2^u-15\cdot5^u}{12\cdot3^u-28\cdot4^u}=$

$=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{12\cdot2^u-12+12+3-3-15\cdot5^u}{12\cdot3^u-12+12+16-16-28\cdot4^u}\dfrac{:u}{:u}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\frac{12(2^u-1)}{u}-\frac{15(5^u-1)}{u}-\frac{3}{u}}{\frac{12(3^u-1)}{u}-\frac{28(4^u-1)}{u}-\frac{16}{u}}=\dfrac{12\ln2-15\ln5}{12\ln3-28\ln4}=$

$=\dfrac{3(4\ln2-5\ln5)}{4(3\ln3-7\ln4)}$

171/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{e^x-1}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

172/
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\ln\cos x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos^2x}{2x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-\sin^2x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(-\sin^2x)\cdot\ln(1+(-\sin^2x))}{(-\sin^2x)\cdot x^2}=$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+(-\sin^2x))}{(-\sin^2x)}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin x}{x}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=-\dfrac{1}{2}$

173/
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(1+\cos x)}{\ln(1+\cos3x)}=\begin{vmatrix}u=x-\frac{\pi}{2}\\ x=u+\frac{\pi}{2}\end{vmatrix}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\ln(1+\cos(u+\frac{\pi}{2}))}{\ln(1+\cos3(u+\frac{\pi}{2}))}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\frac{\ln(1+(-\sin u))}{(-\sin u)}\cdot(-\sin u)}{\frac{\ln(1+\sin3u)}{\sin3u}\cdot\sin3u}=$

$=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{-\sin u}{\sin3u}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{3u\cdot(-\sin u)}{3u\cdot\sin3u}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{3u}{\sin3u}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{(-\sin u)}{u}=-\dfrac{1}{3}$

174/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\infty$

175/ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n=\begin{vmatrix}n=ax; & x=\frac{n}{a}\\ n\to\infty\ \ to & x\to\infty\end{vmatrix}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{ax}\right)^{ax}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{ax}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^a=e^a$

176/ $\lim\limits_{x\to0}(1+kx)^{\frac{n}{x}}=\begin{vmatrix}kx=t; & x=\frac{t}{k};\\ x\to0\ \ to & t\to0\end{vmatrix}=\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{nk}{t}}=\lim\limits_{t\to0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{nk}=e^{nk}$

177/ $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t}{t+1}\right)^t=\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t+1-1}{t+1}\right)^t=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{t+1}\right)^t=\begin{vmatrix}-\frac{1}{t+1}=z; & t=-\frac{1}{z}-1;\\ t\to\infty\ \ to & z\to0\end{vmatrix}=\lim\limits_{z\to0}(1+z)^{-\frac{1}{z}-1}=$

$=\lim\limits_{z\to0}\dfrac{\left[(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]^{-1}}{(1+z)}=\dfrac{e^{-1}}{1}=\dfrac{1}{e}$

178/ $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t-3}{t+2}\right)^{2t+1}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t+2-5}{t+2}\right)^{2t+4-3}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{t+2}\right)^{(2t+4)-3}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{(1-\frac{5}{t+2})^{2(t+2)}}{(1-\frac{5}{t+2})3}=$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\left[(1-\frac{5}{t+2})^{t+2}\right]^2=\begin{vmatrix}\frac{-5}{t+2}=z; & t+2=-\frac{5}{z};\\ t\to\infty\ \ to & z\to0\end{vmatrix}=\lim\limits_{z\to0}\left[(1+z)^{-\frac{5}{z}}\right]^2=\lim\limits_{z\to0}\left[(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]^{-10}=e^{-10}$

179/ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+1}\right)^{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1-6}{2x+1}\right)^{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{6}{2x+1}\right)^{x-1}=\left|-\dfrac{6}{2x+1}=t;\quad x=-\dfrac{3}{t}-\dfrac{1}{2};\right|=$

$=\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{-\frac{3}{t}-\frac{3}{2}}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{-3}}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}=e^{-3}$

180/ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{2x-1}=\begin{vmatrix}x-3=t; & x=t+3;\\ x\to\infty\ \ to & t\to\infty\end{vmatrix}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{2(t+3)-1}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{2t+5}=\lim\limits_{t\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t\right]^2\cdot\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^5=e^2$

181/
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+4}{2x+7}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+7+(-3)}{2x+7}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-3)}{2x+7}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-3)}{2x+7}\right)^{\frac{2(x+2)}{2}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-3)}{2x+7}\right)^{\frac{(2x+7)-3}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-3)}{2x+7}\right)^{\left[\frac{(2x+7)-3}{-6}\right](-3)}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-3)}{2x+7}\right)^{\left(\frac{2x+7}{-6}(-3)-\frac{3}{2}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{-3}{2x+7}\right)^{\frac{2x+7}{-3}}\right]^{-\frac{3}{2}}}{\left(1+\frac{(-3)}{2x+7}\right)^{\frac{3}{2}}}=e^{-\frac{3}{2}}$$

182/
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{2x-5}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+1}+\frac{(-2)}{3x+1}\right)^{\frac{3(2x-5)}{-2}\left(\frac{-2}{3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{3x+1}\right)^{\frac{3(2x-5)}{-2}\left(\frac{-2}{3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{3x+1}\right)^{\frac{6x-15}{-2}\left(\frac{-2}{3}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{3x+1}\right)^{\left(\frac{3x+1}{-2}\right)2+\frac{17}{2}}\right]^{-\frac{2}{3}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1}{-2}}\right]^{-\frac{4}{3}}\left(1+\frac{-2}{3x+1}\right)^{\frac{-34}{6}}=e^{-\frac{4}{3}}\cdot 1=e^{-\frac{4}{3}}$$

183/
$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}=\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\left|\begin{matrix}-2x=t; & x=-\frac{t}{2};\\ x\to 0 \quad to & t\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{2}{t}}=\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{-2}=e^{-2}$$

184/
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg\,2x}=\left|\begin{matrix}tgx=1+t; & t=tgx-1;\\ x\to\frac{\pi}{4} \quad to & t\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(1+t)^{\frac{-2(1+t)}{t(2+t)}}=\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{-2(1+t)}{2+t}}=$$
$$=\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{-2-2t}{2+t}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

W zadaniu 184/ wykorzystano zależność:
$$tg\,2x=\frac{2tgx}{1-tg^2x}=\frac{2(1+t)}{(1-(1+t))(1+(1+t))}=\frac{2(1+t)}{-t(2+t)}$$

185/
$$\lim_{x\to\pi}(1+3tgx)^{ctgx}=\lim_{x\to\pi}(1+3tgx)^{\frac{3}{3tgx}}=\left|tgx\to 0 \quad ctgx=\frac{1}{tgx}\to\infty\right|=\lim_{x\to\pi}\left[(1+3tgx)^{\frac{1}{3tgx}}\right]^3=e^3$$

186/
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{2}{\cos x}}=\left|x\to\frac{\pi}{2} \quad \cos x\to 0 \quad \sec x\to\infty\right|=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}\right]^2=e^2$$

187/
$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin x}=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{\sin x}{x\sin x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=e^1=e$$

188/
$$\lim_{x\to 0}(1+tg2x)^{ctgx}=\left|2x=t; \quad x=\frac{t}{2}\right|=\lim_{t\to 0}(1+tgt)^{ctg\frac{t}{2}}=\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{\sin t}{\cos t}\right)^{\frac{1+\cos t}{\sin t}}=\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{\sin t}{\cos t}\right)^{\frac{\cos t}{\sin t}+\frac{1}{\sin t}}=$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{\sin t}{\cos t}\right)^{\frac{\cos t}{\sin t}}\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{\sin t}{\cos t}\right)^{\frac{1}{\sin t}}=e\cdot\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{\sin t}{\cos t}\right)^{\frac{1}{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{\cos t}}=e\lim_{t\to 0}\left[\left(1+\frac{\sin t}{\cos t}\right)^{\frac{\cos t}{\sin t}}\right]^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\cos t}}=e^2$$

189/
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x^2-x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{2}{x}}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^1}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2}{x}}=e^0=1$$

190/
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2-3}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3}{x^2-3}+\frac{5}{x^2-3}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x^2-3}\right)^{\frac{x^2-3+3}{5}5}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x^2-3}\right)^{\frac{x^2-3}{5}}\right]^5\left(1+\frac{5}{x^2-3}\right)^3=e^5$$

191/
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{1}{2x-\pi}}=\left|\begin{matrix}2x-\pi=t\\ x=\frac{t+\pi}{2}\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\left(1+\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\left(1+\left(-\sin\frac{t}{2}\right)\right)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\left(1+\left(-\sin\frac{t}{2}\right)\right)^{\frac{-\sin\frac{t}{2}}{-\sin\frac{t}{2}}\frac{1}{t}}=$$
$$\lim_{t\to 0}\left[\left(1+\left(-\sin\frac{t}{2}\right)\right)^{\frac{1}{-\sin\frac{t}{2}}}\right]^{\frac{-\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

192/
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+1}+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2(x+1)}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}+\frac{1}{2}}=\left|u=\frac{1}{2x+1}\right|=$$
$$=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}(1+u)^{\frac{1}{2}}=e$$

193/
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^4}{1-2x^4}-2^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{3x^4}{x^4}}{\frac{1}{x^4}-\frac{2x^4}{x^4}}-2^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}\right)=-\frac{3}{2}-1=-\frac{5}{2}$$

194/
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+25}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+25}}{\sqrt{x^2+1}}=5$$

195/
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}}{1}=\frac{1}{3}$$

196/
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{4x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos x}}=-\frac{1}{4}$$

(Symbol $\overset{H}{=}$ oznacza stosowanie tw. de L'Hospitala. Do obliczenia granicy, jeżeli zachodzi potrzeba oraz spełnione są założenia tw. de L'Hospitala można stosować wspomniane tw. wielokrotnie)

197/ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{2\sin x} = \dfrac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

198/ $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-(x+2)^2}}}{2x+2} = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{1}{2(x+1)\sqrt{1-(x+2)^2}} = \dfrac{1}{2(-1)\sqrt{1}} = -\dfrac{1}{2}$

199/ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{5x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x+e^{-x}}{5} = \dfrac{1+1}{5} = \dfrac{2}{5}$

200/ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{x^2\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^x-e^{-x}\right)}{2x\cos x - x^2\sin x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)}{2x\cos x - x^2\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{4e^{2x}+4e^{-2x}}{2\cos x - 2x\sin x - 2x\sin x - x^2\cos x} = \dfrac{8}{2} = 4$

201/ $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{e^{\pi-x}-e^{\sin x}}{(\pi-x)-\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{-e^{\pi-x}-e^{\sin x}\cdot\cos x}{-1-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{e^{\pi-x}-e^{\sin x}\cos^2 x+e^{\sin x}\sin x}{\sin x} =$

$= \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{-e^{\pi-x}-e^{\sin x}\cos^3 x+2\cos x\sin x e^{\sin x}+e^{\sin x}\sin x\cos x+e^{\sin x}\cos x}{\cos x} = 1$

202/ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2e^{2x}}{\frac{2}{1+2x}} = \lim\limits_{x\to0} e^{2x}(1+2x) = 1$

203/ $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{32-x^5}{x^4+5x^2-6x-24} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to2} \dfrac{-5x^4}{4x^3+10x-6} = -\dfrac{80}{38} = -\dfrac{40}{19}$

204/ $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^m-3^m}{x^n-3^n} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to3} \dfrac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \dfrac{m}{n}\cdot 3^{m-n}$

205/ $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^6-1}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to1} \dfrac{6x^5}{1} = 6$

206/ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{e^x} \overset{H}{=} \underset{n}{\cdots} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n\cdot(n-1)(n-2)\ldots1}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n!}{e^x} = \dfrac{k}{\infty} = 0$

Symbol $\overset{H}{=}\ldots\overset{H}{=}$ oznacza stosowanie reguły d'Hospitala n razy. Jako stałą n! przyjęto k. Iloraz stałej i wielkości nieskończenie dużej jest równy 0.

207/ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \dfrac{:x}{:x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}} = 1$

Praktyczny schemat obliczania granic z wykorzystaniem reguły d'Hospitala:

a/ Sprawdzić poprzez podstawienie granicznej wartości argumentu jaki symbol nieoznaczony otrzymujemy;

b/ Doprowadzić poprzez odpowiednie przekształcenie nieoznaczoności

do symbolu: $\frac{\infty}{\infty}$ lub $\frac{0}{0}$.

c/ Zastosować regułę d'Hospitala. Ponownie sprawdzić otrzymaną nieoznaczoność poprzez podstawienie wartości granicznej argumentu do wyrażenia.

d/ Operacje a/-c/ można powtarzać wielokrotnie.

208/ $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{2\ln x}{\sqrt{x^2-1}} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{\frac{2}{x}}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x^2} = \dfrac{0^+}{1} = 0$

209/ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{tgx-1}{\sin x-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\cos x+\sin x} = \dfrac{\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{2\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$

210/ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{5-\sqrt{25-x^2}}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\frac{2x}{2\sqrt{25-x^2}}}{2x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{2\sqrt{25-x^2}} = \dfrac{1}{10}$

211/ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x-\sin x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{6x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x}{6} = \dfrac{1}{6}$

212/ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{tg2x}{tg\left(\frac{\pi}{4}+x\right)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\frac{2}{\cos^2 2x}}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\cos^2 2x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{-4\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{-4\cos 2x\sin 2x} =$

$= \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{-2\sin^2 2x+2\cos^2 2x} = \dfrac{1}{2}$

213/
$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\sin x}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x+x\cos x}{6x} =$

$\left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2\cos x - x\sin x}{6} = \dfrac{1}{3}$

214/ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^{-1}}{ctgx} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2\sin x\cos x}{2x} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 2x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$\overset{H}{=} \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2\cos 2x}{1} = 1$

215/ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x+\cos x}{\sin 2x-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{-\cos x-\sin x}{2\cos 2x+\sin x} = \dfrac{-1}{-1} = 1$

216/ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{-2\sin^2 x-3\sin x+1} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{4\sin x\cos x+\cos x}{-4\sin x\cos x-3\cos x} = -\dfrac{3}{5}$

217/ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x(x-\sin x\cos x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\sin x}{-x\sin x+\cos x-\cos^3 x+2\cos x\sin^2 x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=}$

$= \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x + x\cos x}{-2\sin x - x\cos x + 3\cos^2 x\sin x - 2\sin^3 x + 4\cos^2 x\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=}$

$= \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2\cos x - x\sin x}{-3\cos x + x\sin x - 14\cos x\sin^2 x - 6\sin x\cos x + 7\cos^3 x} = \dfrac{1}{2}$

218/ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}=0$

219/ $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-tgx}{x^2tgx}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{\cos^2x}}{2xtgx+x^2\frac{1}{\cos^2x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\cos^2x-1}{\cos^2x}}{\frac{2x\sin x\cos x+x^2}{\cos^2x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2x-1}{x\sin2x+x^2}=$

$=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\cos x\sin x}{\sin2x+2x\cos2x+2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin2x}{\sin2x+2x\cos2x+2x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\cos2x}{4\cos2x-4x\sin2x+2}=-\frac{1}{3}$

220/ $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\sin2x}{\ln\sin6x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\sin2x}\cdot2\cos2x}{\frac{6\cos6x}{\sin6x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos2x}{\sin2x}\cdot\frac{\sin6x}{\cos6x}\cdot\frac{2x}{6x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos2x}{\cos6x}=1$

221/ $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sqrt{1+x}-1-\frac{3}{2}x}{2x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{3}{2\sqrt{1+x}}-\frac{3}{2}}{4x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3\left(1-\sqrt{1+x}\right)}{8x\sqrt{1+x}}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\frac{3}{8}\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{\frac{x}{2\sqrt{1+x}}+\sqrt{1+x}}=$

$=\frac{3}{8}\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{3x+2}=-\frac{3}{16}$

222/ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)5x}{5x\cdot\sin5x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{5x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+4}}}{5}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{10\sqrt{x+4}}=\frac{1}{20}$

223/ $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to\pi}\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{1}=-\frac{1}{2}$

224/ $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\left(\sqrt{1+x}-1\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1+\frac{x}{2\sqrt{1+x}}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x\sqrt{1+x}}{2+3x-2\sqrt{1+x}}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cos x\sqrt{1+x}+\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}}}{3-\frac{1}{\sqrt{1+x}}}=1$

225/ $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\pi(x+1)}{\sqrt[3]{x}+1}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to-1}\frac{\pi}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}=\pi\lim\limits_{x\to-1}3\sqrt[3]{x^2}=3\pi$

226/ $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to1}\frac{-1}{\frac{1}{x}}=-1$

227/ $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x}{2\cos x-\sin x}=\frac{0}{2}=0$

228/ $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to1}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{2}$

229/
$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$

230/ $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2xtgx}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx-x}{2x^2tgx}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2x}-1}{4xtgx+\frac{2x^2}{\cos^2x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{2x(\sin2x+x)}=$

$=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x}{2(\sin2x+x)+2x(2\cos2x+1)}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cos2x}{8\cos2x-8x\sin2x+4}=\frac{1}{6}$

231/ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x-1}\sin\frac{1}{x}=[\infty\cdot0]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{2x-1}{x^2}}\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{2x-1}{x^2}}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x}}{\frac{2x^2-(2x-1)2x}{x^4}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\cos\frac{1}{x}}{2x-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}}{2}=\frac{1}{2}$

232/ $\lim\limits_{x\to0}\left(1-e^{2x}\right)ctgx=[\infty\cdot0]=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-e^{2x}}{\frac{1}{ctgx}}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{-2e^{2x}}{\frac{\frac{1}{\sin^2x}}{ctg^2x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2e^{2x}}{\frac{1}{\sin^2x}\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2e^{2x}}{\frac{1}{\cos^2x}}=-2$

233/ $\lim\limits_{x\to\alpha}(\alpha-x)tg\left(\frac{\pi\cdot x}{\alpha}-\frac{\pi}{2}\right)=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{tg\left(\frac{\pi\cdot x}{\alpha}-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{\alpha-x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\pi}{\alpha}\frac{(\alpha-x)^2}{\cos^2\left(\frac{\pi\cdot x}{\alpha}-\frac{\pi}{2}\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\pi}{\alpha}\frac{(-2)(\alpha-x)}{(-2)\cos\left(\frac{\pi\cdot x}{\alpha}-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi\cdot x}{\alpha}-\frac{\pi}{2}\right)}\frac{\alpha}{\pi}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{-1}{-\frac{\pi}{\alpha}\sin^2\left(\frac{\pi\cdot x}{\alpha}-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{\alpha}\cos^2\left(\frac{\pi\cdot x}{\alpha}-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\alpha}{\pi}$

234/
$\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2arctgx)\ln x=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2arctgx}{\frac{1}{\ln x}}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{-2}{1+x^2}}{\frac{\frac{-1}{x}}{\ln^2x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x\ln^2x}{\left(1+x^2\right)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$

$\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\ln^2x+4\ln x}{2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}\ln x+\frac{4}{x}}{2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4(\ln x-1)}{2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}}{2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$

235/ $\lim\limits_{x\to1}(1-x)tg\frac{\pi\cdot x}{2}=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to1}\frac{tg\frac{\pi\cdot x}{2}}{\frac{1}{1-x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi\cdot x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{(1-x)^2}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\pi}{2}\frac{(1-x)^2}{\cos^2\frac{\pi\cdot x}{2}}=$

$=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to1}\frac{-2\pi(1-x)}{-2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi\cdot x}{2}\sin\frac{\pi\cdot x}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to1}\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}\sin^2\frac{\pi\cdot x}{2}+\frac{\pi}{2}\cos^2\frac{\pi\cdot x}{2}}=\frac{2}{\pi}$

236/ $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$

237/ $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2}tg\frac{\pi\cdot x}{2}=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{1}{tg\frac{\pi\cdot x}{2}}}=\left[\frac{0}{0}\right]\stackrel{H}{=}\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{2}{x^3}}{\frac{-\frac{1}{\cos^2\frac{\pi\cdot x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}}{tg^2\frac{\pi\cdot x}{2}}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{4}{x^3}\cdot tg^2\frac{\pi\cdot x}{2}}{\pi\left(-\frac{1}{\cos^2\frac{\pi\cdot x}{2}}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{4\cdot\sin^2\frac{\pi\cdot x}{2}\cdot\cos^2\frac{\pi\cdot x}{2}}{\pi\cdot x^3\left(-\cos^2\frac{\pi\cdot x}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{4\sin^2\frac{\pi\cdot x}{2}}{\pi\cdot x^3}=\frac{4}{\pi}$

238/ $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)\ln(1-x)=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{1-x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\stackrel{H}{=}\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{(1-x)^2}}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-1(1-x)^2}{(1-x)}=0^-$

239/ $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=\left[\infty^0\right]=\lim\limits_{x\to0}e^{\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}}=e^0=1$

Pomocniczo obliczono granicę: $\lim\limits_{x\to0}\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to0}\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\stackrel{H}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]\stackrel{H}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x}{\cos x-x\sin x}=0$

240/ $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}=\left[1^\infty\right]=\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{1}{1-x}\ln x}=e^{-1}$

Pomocniczo obliczono granicę: $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{1-x}\ln x$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{1-x}\ln x=[\infty\cdot0]=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}=\left[\frac{0}{0}\right]\stackrel{H}{=}\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-1$

241/ $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\left[1^\infty\right]=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{tgx}{x}\right)}=e^0=1$

Pomocniczo obliczono granicę: $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{tgx}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{tgx}{x}\right)=[\infty\cdot0]=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{tgx}{x}\right)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]\stackrel{H}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x}{tgx}\cdot\frac{\frac{x}{\cos^2x}-tgx}{x^2}}{1}=\lim\limits_{n\to0}\frac{x-\sin x\cos x}{x\cdot\cos^2x\cdot tgx}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$\stackrel{H}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^2x+\sin^2x}{x\cos2x+\frac{1}{2}\sin2x}=\left[\frac{0}{0}\right]\stackrel{H}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin2x}{-2x\sin2x+2\cos2x}=0$

242/ $\lim\limits_{x\to0^+}(1+x)^{\ln x}=\left[1^\infty\right]=\lim\limits_{x\to0}e^{\ln x\cdot\ln(1+x)}=e^0=1$

Pomocniczo obliczono granicę: $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x\cdot\ln(x+1)$

$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x\cdot\ln(x+1)=[\infty\cdot0]=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(1+x)}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\stackrel{H}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\frac{1}{1+x}}{\ln^2(1+x)}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{(1+x)\ln^2(1+x)}{-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$\stackrel{H}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2\ln(1+x)+\ln^2(1+x)}{-1}=0$

243/ $\lim\limits_{x\to0}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}}=\left[1^\infty\right]=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\left(e^{2x}+x\right)}=e^3$

Pomocniczo obliczono granicę: $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(e^{2x}+x\right)$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(e^{2x}+x\right)=[\infty\cdot0]=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(e^{2x}+x\right)}{\frac{1}{\frac{1}{x}}}=\left[\frac{0}{0}\right]\stackrel{H}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{2e^{2x}+1}{e^{2x}+x}=3$

244/ $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\left[\infty^0\right]=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^0=1$

Pomocniczo obliczono granicę: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

245/ $\lim\limits_{x\to0}(tgx)^{tgx}=\left[0^0\right]=\lim\limits_{x\to0}e^{tgx\ln tgx}=e^0=1$

Pomocniczo obliczono granicę: $\lim\limits_{x\to0}tgx\cdot\ln tgx$

$\lim\limits_{x\to0}tgx\ln tgx=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln tgx}{\frac{1}{tgx}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\stackrel{H}{=}\lim\limits_{x\to0}(-tgx)=0$

246/ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x\,tg3x=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg3x}{\frac{1}{\cos x}}=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]\stackrel{H}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{3}{\cos^23x}}{\frac{\sin x}{\cos^2x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos^2x}{\cos^23x\cdot\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3\sin2x}{-3\sin x\sin6x+\cos^23x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]\stackrel{H}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-6\cos2x}{-18\sin x\cos6x-6\sin6x\cos x-\cos^23x\sin x}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$

247/ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+e^x\right)^{\frac{1}{x}}=\left[\infty^0\right]=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}\ln\left(1+e^x\right)}=e$

Pomocniczo obliczono granicę: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(1+e^x\right)$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(1+e^x\right)=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\stackrel{H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\stackrel{H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$

248/ $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\left[1^\infty\right]=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}\ln\cos x}=e^{-\frac{1}{2}}$

Pomocniczo obliczono granicę: $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\cos x$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\cos x=[\infty\cdot0]=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\stackrel{H}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-tgx}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]\stackrel{H}{=}-\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2\cos^2x}=-\frac{1}{2}$

249/ $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\left[\infty^0\right]=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^0=1$

Pomocniczo obliczono granicę: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\stackrel{H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

250/ $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{5}{2+7\ln x}}=\left[0^0\right]=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{5}{2+7\ln x}\ln x}=e^{\frac{5}{7}}$

Pomocniczo obliczono granicę:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{5}{2+7\ln x}\cdot\ln x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{2+7\ln x}{5}}=\left[\tfrac{\infty}{\infty}\right]\overset{H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{7}{5x}}=\frac{5}{7}$$

251/ $$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{2}{x}\right)^{x}=[1^{\infty}]=\lim_{x\to\infty}e^{x\cdot\ln\cos\frac{2}{x}}=e^{0}=1$$

Pomocniczo obliczono granicę:

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\cos\frac{2}{x}=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\cos\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\left[\tfrac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos\frac{2}{x}}\cdot\sin\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^2}\cdot tg\,\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=$$
$$=-\lim_{x\to\infty}2tg\,\tfrac{2}{x}=0$$

252/ $$\lim_{x\to 0^+}x^{\sqrt{x}}=[0^0]=\lim_{x\to 0^+}e^{\sqrt{x}\ln x}=e^{0}=1$$

Pomocniczo obliczono granicę:

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\left[\tfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}}=\lim_{n\to 0^+}\left(-2\sqrt{x}\right)=0$$

253/ $$\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=[\infty^0]=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x}=e^{0}=1$$

Pomocniczo obliczono granicę:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\left[\tfrac{\infty}{\infty}\right]\overset{H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$$

254/ $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tgx}=[\infty^0]=\lim_{x\to 0}e^{tgx\cdot\ln\frac{1}{x^2}}=e^{0}=1$$

Pomocniczo obliczono granicę:

$$\lim_{x\to 0}tgx\ln\frac{1}{x^2}=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{tgx}}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2}{x^3}x^2}{\frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{tg^2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin x\cos x}{1}=0$$

255/ $$\lim_{x\to 0}[\cos(\sin x)]^{\frac{1}{x^2}}=[1^{\infty}]=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos(\sin x))}=e^{-\frac{1}{2}}$$

Pomocniczo obliczono granicę:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\cos(\sin x)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos(\sin x)}{x^2}=\left[\tfrac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin(\sin x)}{\cos(\sin x)}\cos x}{2x}=\left[\tfrac{0}{0}\right]\overset{H}{=}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(\sin x)\cdot\cos^2 x+\sin(\sin x)\cdot\sin x}{-2x\sin(\sin x)\cdot\cos x+2\cos(\sin x)}=-\frac{1}{2}$$

256/ $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^{x}=[1^{\infty}]=\lim_{x\to\infty}e^{x\ln\left(\frac{2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}}{2}\right)}=e^{\ln\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

Pomocniczo obliczono granicę:

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\left(\frac{2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}}{2}\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}}{2}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2^{\frac{1}{x}}\ln 2+3^{\frac{1}{x}}\ln 3\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{\ln 2+\ln 3}{2}=\frac{\ln 6}{2}=\ln\sqrt{6}$$

257/

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\left|\begin{matrix}t=1+\frac{1}{x}; & x=\frac{1}{t-1};\\ x\to\infty\ \ to & t\to 1^+\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 1^+}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{(t-1)^2}\ln t\right)=\lim_{t\to 1^+}\left(\frac{t-1-\ln t}{(t-1)^2}\right)=$$
$$=\left[\tfrac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim_{t\to 1^+}\frac{1-\frac{1}{t}}{2(t-1)}=\left[\tfrac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim_{t\to 1^+}\frac{\frac{1}{t^2}}{2}=\frac{1}{2}$$

258/ $$\lim_{x\to -3^-}\frac{x^2-9}{x+3}=\lim_{x\to -3^-}\frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)}=\lim_{x\to -3^-}(x-3)=-6$$

Przy obliczaniu granic jednostronnych stosujemy te same metody obliczania jak dla granic funkcji w punkcie. Często jednak zachodzi potrzeba oszacowania granicy na podstawie własności funkcji.

259/ $$\lim_{x\to 0^-}\frac{x\cos x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\cos x}{-x}=-\lim_{x\to 0^-}\cos x=-1$$

260/ $$\lim_{x\to 0^-}3^{\frac{1}{x}}=3^{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}}=3^{\frac{1}{0^-}}=3^{-\infty}=0$$

261/ $$\lim_{x\to 0^+}4^{\frac{1}{x}}=4^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}}=4^{\infty}=\infty$$

262/ $$\lim_{x\to 0^-}\frac{8}{1-2^{ctgx}}=\frac{8}{1-2^{\lim\limits_{x\to 0^-}ctgx}}=\frac{8}{1-2^{-\infty}}=\frac{8}{1-0}=8$$

263/ $$\lim_{x\to 0^+}\frac{8}{1-2^{ctgx}}=\frac{8}{1-2^{\lim\limits_{x\to 0^+}ctgx}}=\frac{8}{1-2^{\infty}}=\frac{8}{1-\infty}=\frac{8}{-\infty}=0$$

Ponieważ granice jednostronne w zadaniach 262/ i 263/ są różne, granica funkcji $\frac{8}{1-2^{ctgx}}$ nie istnieje.

264/

$$\lim_{x\to\infty}x\,arcctgx=\left|\begin{matrix}arcctgx=t & x=ctgt\\ x\to\infty\ \ to & t\to 0^+\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0^+}t\,ctgt=\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{\sin t}\cos t=1$$

265/ $\lim\limits_{x\to 0^-} arctg\,\frac{1}{x} = \left| \begin{matrix} u = \frac{1}{x} \\ x \to 0^- \quad to \quad u \to -\infty \end{matrix} \right| = \lim\limits_{u\to -\infty} arctgu = -\frac{\pi}{2}$

266/ $\lim\limits_{x\to 0^+} arctg\,\frac{1}{x} = \left| \begin{matrix} u = \frac{1}{x} \\ x \to 0^+ \quad to \quad u \to +\infty \end{matrix} \right| = \lim\limits_{u\to +\infty} arctgu = \frac{\pi}{2}$

Brak równości granic 265/ i 266/ dowodzi, że funkcja $y=arctg\frac{1}{x}$ nie ma granicy w punkcie 0.

267/ $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2}{\ln x} = \left| x \to 1^+ \quad to \quad \ln x \to 0^+ \right| = \frac{2}{0^+} = +\infty$

268/ $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{3}{2+4e^{\frac{1}{x}}} = \left| \begin{matrix} u = \frac{1}{x} \\ x \to 0^- \quad to \quad u \to -\infty \quad e^u \to 0 \end{matrix} \right| = \lim\limits_{u\to -\infty} \frac{3}{2+4e^u} = \frac{3}{2}$

269/ $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{2+e^{\frac{1}{x}}} = \left| \begin{matrix} u = \frac{1}{x} \\ x \to 0^- \quad to \quad u \to -\infty \quad e^u \to 0 \end{matrix} \right| = \lim\limits_{u\to -\infty} \frac{\frac{1}{u}}{2+u} = \lim\limits_{u\to -\infty} \frac{1}{2u+u^2} = 0$

270/ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ nie istnieje ponieważ granice jednostronne są różne.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \left| x \to 0^- \quad to \quad \tfrac{1}{x} \to -\infty \quad e^{-\infty} \to 0 \right| = \frac{e^{-\infty}}{1+e^{-\infty}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \left| \begin{matrix} x \to 0^+ \quad to \quad \frac{1}{x} \to +\infty \quad e^{\infty} \to \infty \\ e^{\infty} \approx 1+e^{\infty} \end{matrix} \right| = \frac{e^{\infty}}{1+e^{\infty}} = \left[\tfrac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}} = 1$$

Do obliczenia granicy dla $x \to 0^+$ można nie korzystając z reguły d'Hospitala wykorzystać informację, że $e^{\infty} \approx 1+e^{\infty}$. Dla bardzo małych x wyrażenia można uznać za równe, a zatem ich iloraz jako równy 1.

271/ $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}-2}{e^{\frac{1}{x}}+3} = \frac{e^{-\infty}-2}{e^{-\infty}+3} = \frac{0-2}{0+3} = -\frac{2}{3}$

272/ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+5} = \left[\tfrac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}} = 1$

273/ $\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{2}{1-x^3}} = \left| x \to 1^- \quad to \quad \frac{2}{1-x^2} \to \frac{2}{0^+} = +\infty \quad e^{+\infty} \to +\infty \right| = e^{\infty} = \infty$

274/ $\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{1-x^3}} = \left| x \to 1^+ \quad to \quad \frac{1}{1-x^3} \to \frac{1}{0^-} = -\infty \quad e^{-\infty} \to 0 \right| = e^{-\infty} = 0$

275/ $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot e^{\frac{1}{x}} = [0\cdot\infty] = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \left[\tfrac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\infty} = \infty$

276/ $\lim\limits_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = \left| x \to 0^- \quad to \quad e^{\frac{1}{x}} \to e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} \to 0 \right| = 0\cdot 0 = 0$

277/ $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{\frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}} = \lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{\frac{1}{1+\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

278/ $\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{x} = \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{|x+1|}{x} = \frac{0^-}{-1} = 0$

279/ $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}\sin x = \left[\tfrac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{2x} = \frac{1}{2\cdot 0^-} = -\infty$

280/ $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{1-\sqrt{x}} = \frac{1}{1-(1^+)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

Oznaczenie: (1^+) oznacza wartości bardzo bliskie 1 po prawej stronie „1", a zatem większe od „1". Oznaczenie 0^- oznacza wartości prawie równe „0" po lewej stronie „0", a zatem ujemne.

281/ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{|x|} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} & dla \quad x \to 0^+ \\ \lim\limits_{x\to 0^-} -\frac{\sin x}{x} & dla \quad x \to 0^- \end{cases} = \begin{cases} 1 & dla \quad x \to 0^+ \\ -1 & dla \quad x \to 0^- \end{cases}$

A zatem granica funkcji nie istnieje.

282/ $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{\sqrt{|\sin x|}} = \left[\tfrac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2\sqrt{|\sin x|}}{-\cos x} = \frac{2\cdot 0^-}{-1} = 0$

283/ $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^3-x^2}{|1-x|} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x(x^2-1)}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = -\lim\limits_{x\to 1^-} x(x+1) = -1\cdot 2 = -2$

284/ $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right] = 1$ na mocy tw. o trzech ciągach:

$$\tfrac{1}{x} - 1 < \left[\tfrac{1}{x}\right] \le \tfrac{1}{x} \,/\cdot x$$

$$1 - x < x\cdot\left[\tfrac{1}{x}\right] \le 1$$

$$\lim_{x\to 0^+}(1-x) = 1; \quad \lim_{x\to 0^+} 1 = 1; \quad zatem \quad \lim_{x\to 0^+} x\left[\tfrac{1}{x}\right] = 1$$

3. Granice funkcji dwóch zmiennych

Granica właściwa ciągu (x_n, y_n):

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0) \Leftrightarrow \left[\lim_{n\to\infty} x_n = x_0; \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0\right]$$

Granica właściwa funkcji w punkcie (wg Heinego)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = g \Leftrightarrow \underset{\substack{(x_n,y_n)\subset S(x_0,y_0) \\ (x_n,y_n)\neq(x_0,y_0)}}{\forall} \left[\left(\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (x_0,y_0)\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = g\right)\right]$$

Granica niewłaściwa funkcji w punkcie (wg Heinego)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\infty \Leftrightarrow \underset{\substack{(x_n,y_n)\subset S(x_0,y_0)\\(x_n,y_n)\neq(x_0,y_0)}}{\forall}\left[\left(\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(x_0,y_0)\right)\Rightarrow\left(\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=\infty\right)\right]$$

Granica właściwa funkcji w punkcie (wg Cauchy'ego)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=g \Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{(x,y)\in S(x_0,y_0)}{\forall}\left[0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-g|<\varepsilon\right]$$

Granica niewłaściwa funkcji w punkcie (wg Cauchy'ego)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\infty \Leftrightarrow \underset{M>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{(x,y)\subset S(x_0,y_0)}{\forall}\left[0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \Rightarrow f(x,y)>M\right]$$

PRZYKŁADY

285/ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Niech $x_n=\frac{1}{n}$; $y_n=0$. Dla $n\to\infty$, $x_n\to 0$ oraz $y_n\to 0$. Wówczas

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)} \frac{\frac{1}{n^2}-0}{\frac{1}{n^2}+0}=1$$

Jeżeli weźmiemy ciągi $x_n=0$ $y_n=\frac{2}{n}$. Dla $n\to\infty$, $x_n\to 0$, $y_n\to 0$.

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)} \frac{0-\frac{4}{n^2}}{0+\frac{4}{n^2}}=-1$$

Ponieważ dla dwóch różnych ciągów otrzymaliśmy różne granice oznacza to, że granica funkcji w punkcie (0,0) nie istnieje.

286/ $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{x^2}{x^2+y^2}=\left|\begin{matrix}x_n=\frac{1}{n}; & y_n=\frac{a}{n}\\ n\to\infty & x_n\to 0 \quad y_n\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{a^2}{n^2}}=\frac{1}{1+a^2}$

Ponieważ wartość granicy jest zależna od parametru a, wnioskujemy, że granica nie istnieje.

287/ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{1+xy}{x^2+y^2}=\frac{1+2\cdot 3}{4+9}=\frac{7}{13}$

Podstawową metodą wyznaczania granic w punkcie jest podstawienie wartości granicznych argumentu.

288/ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5}{2x^2+6y^2}=\frac{5}{0^+}=+\infty$

289/ $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{\sqrt{25+x^2+y^2}-5}{2(x^2+y^2)}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{\left(\sqrt{25+x^2+y^2}-5\right)\left(\sqrt{25+x^2+y^2}+5\right)}{2(x^2+y^2)\left(\sqrt{25+x^2+y^2}+5\right)}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{2(x^2+y^2)\left(\sqrt{25+x^2+y^2}+5\right)}=$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{1}{2\left(\sqrt{25+x^2+y^2}+5\right)}=\frac{1}{20}$$

290/

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=\left|\begin{matrix}x^2+y^2=u\\(x,y)\to(0,0)\quad to \quad u\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{u\to 0}\frac{3u}{\sqrt{u+1}-1}=\lim_{u\to 0}\frac{3u\left(\sqrt{u+1}+1\right)}{\left(\sqrt{u+1}-1\right)\left(\sqrt{u+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{3u\left(\sqrt{u+1}+1\right)}{u}=\lim_{u\to 0}3\left(\sqrt{u+1}+1\right)=6$$

Jak pokazują przykłady 289/ i 290/ do obliczania granic funkcji dwóch zmiennych można wykorzystać te same metody, jakie stosuje się dla funkcji jednej zmiennej. Poprzez odpowiednie podstawienie można sprowadzić granicę funkcji dwóch zmiennych do granicy funkcji jednej zmiennej.

291/ $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{5\sin(x\cdot y)}{3x\cdot y}=\left|\begin{matrix}u=xy\\(x,y)\to(0,0)\quad to \quad u\to 0\end{matrix}\right|=\frac{5}{3}\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=\frac{5}{3}$

Do obliczania granic funkcji dwóch zmiennych wykorzystuje się twierdzenia stosowane przy obliczaniu granic funkcji jednej zmiennej.

292/ $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{4-\sqrt{xy+16}}{xy}=\left|\begin{matrix}u=xy\\(x,y)\to(0,0)\quad to \quad u\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{u\to 0}\frac{4-\sqrt{u+16}}{u}=\left[\tfrac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim_{u\to 0}\frac{\frac{-1}{2\sqrt{u+16}}}{1}=-\frac{1}{8}$

W przykładzie 292/ wykorzystano regułę d'Hospitala.

293/ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\left|x^2+y^2=u\right|=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos u}{u^2}=\left[\tfrac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{2u}=\left[\tfrac{0}{0}\right]\overset{H}{=}$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{\cos u}{2}=\frac{1}{2}$$

294/ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\left|\begin{matrix}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=u\\(x,y)\to(0,0)\quad to \quad u\to\infty\end{matrix}\right|=\lim_{u\to\infty}ue^{-u}=\lim_{u\to\infty}\frac{u}{e^u}=\left[\tfrac{\infty}{\infty}\right]\overset{H}{=}$

$$=\lim_{u\to\infty}\frac{1}{e^u}=\frac{1}{\infty}=0$$

295/ $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\y\to 0}} \sin\frac{2\pi}{x^2+y^2}$

Dla obliczenia granicy 295/ można obliczyć dwie granice iterowane:

$$\lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 0}\sin\frac{2\pi}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 1}\sin\frac{2\pi}{x^2}=\sin 2\pi=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 1}\sin\frac{2\pi}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\sin\frac{2\pi}{1+y^2}=0$$

Ponieważ funkcja sin jest ciągła w całej dziedzinie więc jest ciągła dla (x,y) =(1,0). W tym przypadku równość granic wystarcza do stwierdzenia, że granica dla funkcji 295/ jest równa 0.

296/ $\lim\limits_{(x,y)\to((0,0))}\frac{x^3+y}{2x+y^3}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^3+y}{2x+y^3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2x}=\left[\tfrac{0}{0}\right]^H=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2}=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^3+y}{2x+y^3}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{y}{y^3}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y^2}=+\infty$$

Ponieważ obydwie granice iterowane są różne, jest to dowód na brak granicy funkcji 296/ w (0,0).

297/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-x+y-x^2-y^2}{x+y};\quad x+y\neq 0$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{-x+y-x^2-y^2}{x+y}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x-x^2}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x(-1-x)}{x}=-1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{-x+y-x^2-y^2}{x+y}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{y-y^2}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y(1-y)}{y}=1$$

Granica funkcji 297/ nie istnieje ponieważ granice iterowane są różne.

Równość granic iterowanych nie zawsze wystarcza na stwierdzenie istnienia granicy. Jeżeli granice iterowane są różne to wystarcza aby stwierdzić, że granica podwójna funkcji nie istnieje.

298/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}+y}{x^2+y^2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}+y}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\sin\tfrac{1}{x}$$

Jedna z granic iterowanych (powyższa) nie istnieje, co wystarcza aby stwierdzić, że granica funkcji 298/ nie istnieje.

299/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{e^{2(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2}=\left|x^2+y^2=u\right|=\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^{2u}-1}{u}=2\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^{2u}-1}{2u}=2$

300/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\left|\begin{matrix}x_n=\frac{2}{n^2} & y_n=\frac{3}{n^2}\\ n\to\infty\ \ to & x_n\to 0\quad y_n\to 0\end{matrix}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^2}\cdot\frac{9}{n^4}}{\frac{4}{n^4}+\frac{81}{n^{16}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{18n^{10}}{4n^{12}+81}=0$

Niech teraz ciągi $x_n=\frac{1}{n}\quad y_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

Ponieważ wartość granicy jest zależna od wyboru ciągów, granica nie istnieje

301/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin xy}{x}=\left|x_n=\frac{a}{n};\quad y_n=\frac{1}{n};\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{n^2}}{\frac{a}{n}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sin\frac{a}{n^2}}{\frac{a}{n^2}}=\left|n\to\infty\ \ to\ \ \frac{a}{n^2}\to 0\right|=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

Niech teraz ciągi $x_n=\frac{1}{n}\qquad y_n=\frac{a}{n}$ oraz a jest dowolną stałą.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin xy}{x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{n^2}}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{\frac{a}{n}}{\frac{a}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{n}\sin\frac{a}{n^2}}{\frac{a}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}=0$$

Jakkolwiek będziemy dobierać ciągi x_n oraz y_n granice iterowane są równe.

302/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\left|x_n=\frac{1}{n};\quad y_n=\frac{a}{n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}-\frac{a^2}{n^2}}{\frac{1+a^2}{n^2}}=\frac{1-a^2}{1+a^2}$

Granica 302/ jest zależna od wartości parametru a, stad granica nie istnieje.

303/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}1+\frac{x^2}{x^2+y^2}$

W przykładzie 286/ wykazano, że $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}$ nie istnieje, a zatem granica 303/ także nie istnieje.

304/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\left|x_n=\frac{1}{n^2}\quad y_n=\frac{a}{n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{a^2}{n^4}}{\frac{1+a^4}{n^4}}=\frac{a^2}{1+a^4}$

Wartość granicy jest zależna od parametru a, a zatem granica nie istnieje.

305/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2x^3}{3x^2+y^4}=\left|x_n=\frac{1}{n}\quad y_n=\frac{a}{n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^3}}{\frac{3}{n^2}+\frac{a^4}{n^4}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{3n^2+a^4}\,\frac{:n^2}{:n^2}=0$

Jakkolwiek dobierzemy ciągi x_n oraz y_n granica zawsze będzie równa „0”.

306/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x+y} = \left| x_n = \frac{1}{n} \quad y_n = \frac{a}{n} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{a}{n}} = \dfrac{1}{1+a}$

Wartość granicy jest zależna od parametru a, stąd granica nie istnieje.

307/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{x^2+y^2}} = \left| x^2+y^2 = u \right| = \lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{3}{u}} = \lim\limits_{u\to 0}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{1}{u}}\right)^{\frac{1}{u}}\right]^3 = e^3$

308/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$

Niech $x_n \to 0$ oraz $y_n \to 0$ oraz $a_n = \max(|x_n|, |y_n|) > 0$, czyli $a_n \to 0$.
Wówczas:
$|x_n^3| \le a_n^3 \quad i \quad x_n^2 + y_n^2 \ge a_n^2$
Oznaczmy: $\dfrac{x_n^3}{x_n^2+y_n^2} = k(x_n, y_n)$
Prawdziwe jest wówczas: $0 \le |k(x_n, y_n)| \le \dfrac{a_n^3}{a_n^2} = a_n$. Na mocy tw. o trzech ciągach granica jest równa 0.

309/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = \left| \begin{matrix} x=\rho\cos\phi & y=\rho\sin\phi \\ (x,y)\to(0,0) & to \quad \rho\to 0 \end{matrix} \right| = \lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\rho^3\cos^2\phi\sin\phi}{\rho^2\cos^2\phi+\rho^2\sin^2\phi} =$
$= \lim\limits_{\rho\to 0} \rho\cos^2\phi\sin\phi = 0$

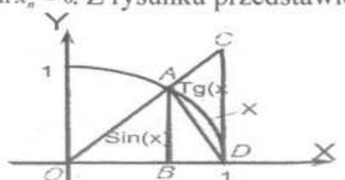
Wykorzystano tu fakt, że: $\left|\cos^2\phi\sin\phi\right| \le 1$ oraz $\rho \to 0$. Stąd na mocy tw. o granicy iloczynu ciągu o granicy 0 oraz ograniczonego granica wynosi „0".

310/ $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,2)} \left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x = \lim\limits_{(x,y)\to(\infty,2)} \left[\left(1+\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}\right]^y = e^2$

4. Dowody wybranych twierdzeń o granicach

1/ Wykazać, że $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Niech x_n będzie dowolnym ciągiem o wyrazach należących do przedziału $(0, \pi/2)$, takim, że $\lim\limits_{n-} x_n = 0$. Z rysunku przedstawionego poniżej wynika, że:



Pole trójkąta OAD jest mniejsze od pola wycinka kołowego OAD, które jest mniejsze od pola trójkąta OCD. Możemy to zapisać następująco:
$\frac{1}{2}\sin|x_n| < \frac{1}{2}|x_n| < \frac{1}{2}tg|x_n|$
Stąd po przekształceniach otrzymujemy: $\cos|x_n|\sin|x_n| < |x_n|\cos|x_n| < \sin|x_n|$
Biorąc pod uwagę obydwie nierówności otrzymujemy:
$|x_n|\cos|x_n| < \sin|x_n| < |x_n| / |x_n|$
$\cos|x_n| < \dfrac{\sin x_n}{x_n} < 1 \qquad \forall_{x\in D} \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin(-x)}{(-x)}$
Ponieważ:
$\cos|x_n| = 1 - 2\sin^2\dfrac{|x_n|}{2} > 1 - 2\sin\dfrac{|x_n|}{2} > 1 - 2\dfrac{|x_n|}{2} = 1 - |x_n|$
więc $1 - |x_n| < \dfrac{\sin x_n}{x_n} < 1$
A zatem na mocy tw. o trzech ciągach $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ x_n\to 0}} \dfrac{\sin x_n}{x_n} = 1$.

2/ Wykazać, ze granica $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ ***nie istnieje.***
Dowód nie wprost:
Załóżmy, że badana granica istnieje i jest równa „a". Wybierzmy dwa ciągi:
$x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}; \quad y_n = \dfrac{1}{-\frac{\pi}{2}+2n\pi} \qquad n = 1,2\ldots$
Obydwa ciągi są różne i zbieżne do 0.

$\lim\limits_{x_n\to 0}\sin\dfrac{1}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) = 1$

$\lim\limits_{y_n\to 0}\sin\dfrac{1}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) = -1$

Otrzymując dwie różne granice dla tego samego ciągu, jednocześnie dowiedliśmy, że granica nie istnieje.

3/ Wykazać, że granica $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ ***nie istnieje.***
Podobnie jak w poprzednim przykładzie, bierzemy dwa ciągi x_n oraz y_n, takie że są one rozbieżne do ∞.
Niech $x_n = 2\pi n \quad y_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ x_n\to\infty}}\cos(2\pi\cdot n) = \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ x_n\to\infty}} 1 = 1 \qquad \lim\limits_{\substack{y_n\to\infty\\ n\to\infty}}\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) = -\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ x_n\to\infty}}\sin(2\pi\cdot n) = 0$

Ponieważ obydwie granice są różne, dowiedliśmy, że granica nie istnieje.

4/ Pokazać, że: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

Zauważmy, że:

$\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{x}\ln(1+x)=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

Wiadomo także, że: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Ostatecznie więc:

$\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

5/ Wykazać, że: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}=1$ ***gdzie k jest dowolną liczbą dodatnią.***

Dla k = 1, $\underset{n\in N}{\forall}\sqrt[n]{k}=\sqrt[n]{1}=1$. A zatem na mocy def. Cauchy'ego spełniony

jest warunek $\left|\sqrt[n]{k}-1\right|<\varepsilon$ dla każdego wyrazu ciągu.

Dla k >1 możemy zapisać, że: $\sqrt[n]{k}=1+x_n$

Z nierówności Bernouliego mamy:

$k=(1+x_n)^n>1+nx_n$

$nx_n<k-1$

$x_n<\frac{k-1}{n}$ *czyli* $\left|\sqrt[n]{k}-1\right|<\frac{k-1}{n}$

Dla każdej liczby ε >0 istnieje więc taka liczba $\delta=\frac{k-1}{\varepsilon}$, że dla każdej liczby naturalnej n >δ spełniona jest nierówność:

$\left|\sqrt[n]{k}-1\right|<\varepsilon$

Dla 0 < k < 1. Wówczas $\frac{1}{k}>1$. Na podstawie poprzedniego przypadku dla każdego ε > 0 istnieje liczba δ:

$\delta=\frac{\frac{1}{k}-1}{\varepsilon}$

taka, że dla każdej liczby naturalnej n > δ spełniona jest nierówność

$\left|\frac{1}{\sqrt[n]{k}}-1\right|<\varepsilon$ *czyli* $\left|\sqrt[n]{k}-1\right|<\varepsilon$

Co kończy dowód.

5. Pochodne niektórych funkcji

Przy obliczaniu granic z wykorzystaniem tw. de L'Hospitala obliczamy pochodne funkcji. W rozdziale tym można znaleźć wzory przydatne do obliczania pochodnych oraz kilka przykładów obliczania pochodnych funkcji.

Wzory do obliczania pochodnych funkcji elementarnych

Funkcja	Pochodna
$y=x^n \quad n\in R \quad x>0$	$y'=nx^{n-1}$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
$y=tgx \quad \cos x\neq 0$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2x$
$y=ctgx \quad \sin x\neq 0$	$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+ctg^2x)$
$y=e^x$	$y'=e^x$
$y=a^x$	$y'=a^x\ln a$
$y=\ln\|x\| \quad x\neq 0$	$y'=\frac{1}{x}$
$y=\log_a\|x\| \quad a>0; \quad a\neq 1; \quad x\neq 0;$	$y'=\frac{1}{x\ln a}=\frac{1}{x}\log_a e$
$y=\arcsin x \quad -\frac{\pi}{2}\leq\arcsin x\leq\frac{\pi}{2}$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad -1<x<1$
$y=\arccos x \quad 0\leq\arccos x\leq\pi$	$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad -1<x<1$
$y=arctgx \quad -\frac{\pi}{2}<arctgx<\frac{\pi}{2}$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$
$y=arcctgx \quad 0<arcctgx<\pi$	$y'=\frac{-1}{1+x^2}$
$y=shx; \quad y=chx$	$y=chx; \quad y=shx;$
$y=thx; \quad y=cthx;$	$y'=\frac{1}{ch^2x}; \quad y'=\frac{-1}{sh^2x}$

Wzory przydatne do obliczania pochodnych

Funkcja	Zastosowane przekształcenie lub wzór
$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$f \pm g$	$f' \pm g'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$f \circ g$	$f'(g) \cdot g'$
f^g	$e^{g \ln f}$
$\log_f g$	$\frac{\ln g}{\ln f}$
$(f \cdot g)''$	$f'' \cdot g + 2f' \cdot g' + f \cdot g''$
$(f \cdot g)^{(3)}$	$f^{(3)}g + 3f'' \cdot g' + 3f' \cdot g'' + f \cdot g^{(3)}$
$\sin x$ - pochodna n-tego rzędu	$\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
cos x - pochodna n-tego rzędu	$\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
$(f \cdot g)^{(n)}$	$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n-k} g^k$

Przykłady obliczania pochodnych funkcji

1/ $y = x - 3\sqrt{x}$

$$y' = 1 - \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

2/ $y = \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt{2}\right)^2 = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{2}\sqrt[3]{x} + 2 = x^{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{2} \cdot x^{\frac{1}{3}} + 2$

$$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

3/ $y = \frac{3x^2}{5 + \sqrt{x}}$

$$y' = \frac{6x \cdot \left(5 + \sqrt{x}\right) - 3x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(5 + \sqrt{x}\right)^2} = \frac{30x - \frac{9}{2}\sqrt{x^3}}{\left(5 + \sqrt{x}\right)^2}$$

4/ $y = \frac{2 + 4\sin\alpha}{3 - \sin\alpha}$

$$y' = \frac{4\cos\alpha \cdot (3 - \sin\alpha) - (2 + 4\sin\alpha)(-\cos\alpha)}{(3 - 4\sin\alpha)^2} = \frac{14\cos\alpha}{(3 - 4\sin\alpha)^2}$$

5/ $y = \left(x^3 - 3x\right)ctgx$

$$y' = \left(3x^2 - 3\right)ctgx + \left(x^3 - 3\right)\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

6/ $y = (4x + 5)^6$

$$y' = 6(4x + 5)^5 \cdot 4 = 24(4x + 5)^5$$

7/ $y = tg\sqrt{x^3}$

$$y' = \frac{1}{\cos^2\sqrt{x^3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3}} \cdot 3x^2$$

8/ $y = \sqrt{2x + \sqrt{2x}}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2x + \sqrt{2x}}}\left(2 + \frac{2}{2\sqrt{2x}}\right) = \frac{2 + \frac{1}{\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x + \sqrt{2x}}} = \frac{2 + \frac{\sqrt{2x}}{2x}}{\sqrt{2x + \sqrt{2x}}} = \frac{4x + \sqrt{2x}}{2x\left(\sqrt{2x + \sqrt{2x}}\right)}$$

9/ $y = \cos 5x \cdot \sin\frac{4}{x}$

$$y' = 5(-\sin 5x)\sin\frac{4}{x} + \cos 5x \cdot \cos\frac{4}{x}\left(-\frac{4}{x^2}\right)$$

10/ $y = 3\sin^3\frac{2 + x}{x}$

$$y' = 3 \cdot 3\sin^2\frac{2 + x}{x}\cos\frac{2 + x}{x}\left(\frac{1 \cdot x - (2 + x) \cdot 1}{x^2}\right) = -\frac{9}{x}\sin^2\frac{2 + x}{x}\cos\frac{2 + x}{x}$$

11/ $y = \frac{\sin x}{2\cos^2 x}$

$$y' = \frac{\cos x \cdot 2\cos^2 x - \sin x \cdot 4\cos x(-\sin x)}{4\cos^4 x} = \frac{2\left(\cos^2 x + 2\sin^2 x\right)}{4\cos^3 x}$$

12/ $y = \sin^2 x + \sin x^2$

$$y' = 2\sin x\cos x + 2x\cos x^2$$

13/ $y = \cos\frac{3}{x} + \cos\frac{x}{3}$

$$y' = \left(-\sin\frac{3}{x}\right) \cdot \left(-\frac{3}{x^2}\right) - \frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}$$

14/
$$y=\sqrt[5]{1+tgx^3}=\left(1+tgx^3\right)^{\frac{1}{5}}$$
$$y'=\frac{1}{5}\left(1+tgx^3\right)^{-\frac{4}{5}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x^3}\cdot 3x^2=\frac{3x^2}{5\cos^2 x^3\sqrt[5]{\left(1+tgx^3\right)^4}}$$

15/
$$y=3x^4\cdot 5^x$$
$$y'=12x^3\cdot 5^x+3x^4\cdot 5^x\ln 5$$

16/
$$y=\ln^3 3\sin x$$
$$y'=3\ln^2\sin 4x\cdot\frac{1}{\sin 4x}\cdot 4\cos 4x=12\ln^2(\sin 4x)\cdot\frac{\cos 4x}{\sin 4x}=12\ln^2(\sin 4x)\cdot ctg\,4x$$

17/
$$y=\ln\frac{5-x^2}{\sin x}$$
$$y'=\frac{\sin x}{5-x^2}\cdot\frac{-2x\cdot\sin x-\left(5-x^2\right)\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-2x\sin^2 x-5\sin x\cos x+x^2\cos x\sin x}{\left(5-x^2\right)\sin x}$$

18/
$$y=\ln\sqrt[3]{\frac{x}{e^{4x}}}$$
$$y'=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{x}{e^{4x}}}}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{x}{e^{4x}}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{e^{4x}-4xe^{4x}}{e^{8x}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{\left(e^{4x}\right)^3}{(x)^3}}\cdot\frac{e^{4x}(1-4x)}{e^{8x}}=\frac{1-4x}{3x}$$

19/
$$y=5\sqrt{x}e^{-4x}$$
$$y'=\frac{5}{2\sqrt{x}}e^{-4x}-20\sqrt{x}e^{-4x}$$

20/
$$y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$
$$y'=\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)^2-\left(e^x+e^{-x}\right)^2}{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}=\frac{-4}{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}$$

21/
$$y=\sin^3 x-4\ln tgx$$
$$y'=3\sin^2 x\cos x-\frac{4}{tgx}\cdot\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right)=3\sin^2 x\cos x+\frac{4}{\sin x\cos x}$$

22/
$$y=4^{x^2}-2e^{-3x^2}$$
$$y'=4^{x^2}\ln 4\cdot 2x+12xe^{-3x^2}$$

23/
$$y=\ln\left(3x^3-\sin x\right)$$
$$y'=\frac{1}{3x^3-\sin x}\cdot\left(9x^2-\cos x\right)$$

24/
$$y=3x\left(2x^2-2\ln x\right)$$
$$y'=3\left(2x^2-2\ln x\right)+3x\left(4x-\frac{2}{x}\right)=6\left(3x^2-\ln x-1\right)$$

25/
$$y=e^{2x}\cdot\cos 2x\cdot\ln x$$
$$y=2e^{2x}\cos 2x\cdot\ln x-e^{2x}\cdot 2\sin 2x\cdot\ln x+e^{2x}\cdot\cos 2x\cdot\frac{1}{x}$$

26/ $y=\ln\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$
$$y'=\frac{1}{\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}}\cdot\frac{(-1)(2+x)-(2-x)}{(2+x)^2}=\frac{-4}{(2+x)^2}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$$

27/ $y=\arcsin\ 2\sqrt{x}$
$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{2}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x\left(1-x^2\right)}}$$

28/ $y=3arctg\,\frac{3x^2+1}{2x}$
$$y'=\frac{3}{1+\left(\frac{3x^2+1}{2x}\right)^2}\cdot\frac{6x\cdot 2x-2\left(3x^2+1\right)}{4x^2}=\frac{18x^2-6}{9x^4+10x^2+1}$$

29/ $y=2e^{2x}\arcsin x-2\sqrt{x^3+2}$
$$y'=4e^{2x}\arcsin x+\frac{2e^{2x}}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2\cdot 3x^2}{2\sqrt{x^3+2}}=4e^{2x}\arcsin x+\frac{2e^{2x}}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{3x^2}{\sqrt{x^3+2}}$$

30/ $y=4x\sqrt{3+x^2}+tg5x$
$$y'=4\sqrt{3+x^2}+\frac{4x\cdot 2x}{2\sqrt{3+x^2}}+\frac{5}{\cos^2 5x}=4\sqrt{3+x^2}+\frac{4x}{\sqrt{3+x^2}}+\frac{5}{\cos^2 5x}$$

31/ $y=arcctg\,\frac{5+x^2}{1-2x}$
$$y'=\frac{-1}{1+\left(\frac{5+x^2}{1-2x}\right)^2}\cdot\frac{2x(1-2x)+2\left(5+x^2\right)}{(1-2x)^2}=\frac{2x^2-2x-10}{x^4+14x^2-4x+26}$$

32/ $y=\arcsin(\cos x)$
$$y'=\frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=-\frac{\sin x}{|\sin x|}$$

33/ $y=\left|1-x^2\right|$
$$y'=\begin{cases}-2x & -1<x<1\\ 2x & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\end{cases}$$

34/ $y=2\sin x+|\sin x|$
$$y'=\begin{cases}2\cos x+\cos x; & \sin x>0\\ 2\cos x-\cos x & \sin x<0\end{cases}=\begin{cases}3\cos x & \sin x>0\\ \cos x & \sin x<0\end{cases}$$

(W punktach, w których $\sin x=0$ funkcja nie jest różniczkowalna)

35/ $y=\left(5-\sqrt[5]{2x}\right)^2$

$$y'=2\left(5-\sqrt[5]{2x}\right)\cdot\frac{(-2)}{\sqrt[5]{(2x)^4}}=\frac{-4\left(5-\sqrt[5]{2x}\right)}{\sqrt[5]{(2x)^4}}$$

36/

$y=\cos^3 x-\sin^4 x$

$$y'=-3\cos^2 x\sin x-4\sin^3 x\cos x=\sin x\cos x\left(-3\cos x-4\sin^2 x\right)$$

37/

$y=\sqrt{\sin\left(3x^3+2\right)}$

$$y'=\frac{9x^2\cos\left(3x^3+2\right)}{2\sqrt{\sin\left(3x^3+2\right)}}$$

38/ $y=\dfrac{3^{3x}}{3+\sqrt{3+3^{3x}}}$

$$y'=\frac{3\cdot 3^{3x}\ln 3\left(3+\sqrt{3+3^{3x}}\right)-3^{3x}\frac{3\cdot 3^{3x}\ln 3}{2\sqrt{3+3^{3x}}}}{\left(3+\sqrt{3+3^{3x}}\right)^2}=\frac{3^{3x+1}\ln 3\left(3+\sqrt{3+3^{3x}}\right)-3^{6x+1}\ln 3\frac{1}{2\left(\sqrt{3+3^{3x}}\right)}}{\left(3+\sqrt{3+3^{3x}}\right)^2}$$

39/ $y=x^x$

$$y'=[e^{x\ln x}]'=e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$$

40/ $y=(\sin x)^{\cos x}=e^{\cos x\ln(\sin x)}$

$$y'=e^{\cos x\ln(\sin x)}\cdot\left(-\sin x\ln(\sin x)+\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)=(\sin x)^{\cos x}(\cos x ctgx-\sin x\ln(\sin x))$$

41/

$y=\sqrt[x]{x}$

$$y'=\left(x^{\frac{1}{x}}\right)'=\left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)'=e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(-\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1-\ln x)$$

42/ $y=x^{x^x}$

$$y'=(e^{e^{x\ln x}\ln x})'=\left(e^{e^{x\ln x}\ln x}\right)\cdot\left(e^{x\ln x}\ln x\right)'=x^{x^x}\left(e^{x\ln x}(x\ln x)'\ln x+e^{x\ln x}\frac{1}{x}\right)=$$

$$=x^{x^x}\cdot e^{x\ln x}\left(\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{x}\right)$$

43/ $y=x^{\cos x}$

$$y'=\left[e^{\cos x\ln x}\right]'=e^{\cos x\ln x}\left(-\sin x\cdot\frac{1}{x}+\frac{\cos x}{x}\right)=x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x}\right)$$

Do tej pory z serii **BOM** ukazały się:

Zeszyt 1
210 całek nieoznaczonych z pełnymi rozwiązaniami krok po kroku..
Zeszyt 2
100 układów równań liniowych z pełnymi rozwiązaniami krok po kroku..
Zeszyt 3
102 równania różniczkowe I rzędu z pełnymi rozwiązaniami krok po kroku..
Zeszyt 4
107 równań różniczkowych wyższych rzędów z pełnymi rozwiązaniami krok po kroku..
Zeszyt 5
105 przykładów zastosowań całki oznaczonej z pełnymi rozwiązaniami krok po kroku..
Zeszyt 6
114 całek funkcji wielu zmiennych z pełnymi rozwiązaniami krok po kroku..
Zeszyt 7
155 zadań o szeregach z pełnymi rozwiązaniami krok po kroku..
Zeszyt 8
Tablice matematyczne – matematyka wyższa.
Zeszyt 9
310 przykładów granic z pełnymi rozwiązaniami krok po kroku..