Liczby zespolone

Jak to przystało na prawdziwy i nudny wykład, mała praca domowa. Ten jeden z nielicznych razy wymagam lekkiego przystosowania się do tego, o czym tu będę pierdo... znaczy się – pisał.

Wielce zalecana jest jakaś tam znajomość funkcji trygonometrycznych... cokolwiek to nie znaczy. Podstawowo – zamiana kąta na radiany. Dobrze też, gdybyście wiedzieli, co to są za funkcje sinus i cosinus, co one tam wypluwają za liczby. Powinniście zapamiętać... no dobra, wydrukować kilka podstawowych wartości dla kilku częstych kątów, które zdarzają się w zadaniach. No i odzwierciedlenie tych funkcji w układzie współrzędnych – czyli wiedzieć np. co w której ćwiartce (nie mylić „po której ćwiartce") ma jaki znak, dodatkowa wiedza – wielce przydatna. Dodatkowo, dobrze wiedzieć, co to jest *wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias*, czy jakoś coś podobnego.

Oczywiście, nie jakiś tam kosmiczny i rozszerzony poziom, wystarczy to, co tam piszą w podręcznikach do technikum na obojętnie którym poziomie. Jak to zwykle bywa – trochę teorii, jeżeli komuś się nudzi czy jest pod wpływem – może spokojnie poczytać, kilka przykładów i rozwiązań też się znajdzie.

1. Liczba zespolona – postać algebraiczna

Zaczynamy od pytania – co to jest liczba zespolona? Na razie uznajmy, że to jest takie gówienko:

$$z = a + bi$$

Czyli taki „twór", składający się z właściwie dwóch liczb, dwóch elementów. Pierwszy z nich jest częścią *rzeczywistą* liczby zespolonej, druga, ta przy literce *i* jest częścią *urojoną*.

O, na przykład mamy taką liczbę:

$$z = 1 + 2i$$

Jest to takie coś, składające się z części rzeczywistej – równej w naszym przypadku liczbie 1, oraz części urojonej, równej liczbie 2.

Zatrzymajmy się przy tym tajemniczym *i*:

$$z = i$$

Czym, do chuja, jest to *i* i po jaką cholerę ono tam stoi? Uznajmy, że przy tej części urojonej to *i* ma tam stać. I niech sobie stoi w spokoju, no, chyba, że jest podnoszone do kwadratu, to wtedy się w automagiczny i dziwny sposób staje liczbą – 1:

$$i^2 = -1$$

W tym jednym przypadku coś się faktycznie dzieje z tą tajemniczą literką, a jak się tylko da

– zostawiamy w spokoju.

A jednak, postanawiam sobie poeksperymentować.

Zapewne w szkole średniej było takie coś, jak „funkcje kwadratowe”. I tam było takie coś, jak wyliczanie jakiejś delty, pierwiastków, ogólnie – daj Pan spokój.

Każdy kiedyś coś pierwiastkował. I tak, na przykład pierwiastek z liczby 4:

$$\sqrt{4}=2 \qquad lub$$

$$\sqrt{4}=-2$$

Daje liczbę dwa albo minus dwa. Proste sprawdzenie – podnosimy do kwadratu to lub tamto i też mamy cztery. Ale każdy zapis typu:

$$\sqrt{-4}$$

powodował, że nauczyciel się po przyjacielsku pytał „Co Ty, kurwa, odpierdalasz”, a jak zachowywaliśmy się pokojowo – to po prostu pisaliśmy „Nie ma, nie istnieje”. Tak, patrząc tylko przez pryzmat tego, co się tam dzieje w liczbach rzeczywistych.

To popatrzmy, wykorzystując posiadaną wiedzę. Zapiszmy pierwiastek trochę inaczej:

$$\sqrt{-4}=\sqrt{-1*4}$$

No i teraz patrzymy pod koniec poprzedniej strony i wykorzystamy, czemu tam równa się (-1) :

$$\sqrt{-1*4}=\sqrt{i^2*4}$$

I rozpierdalamy na dwa pierwiastki (jak mamy mnożenie pod pierwiastkiem, to hulaj dusza, piekła nie ma):

$$\sqrt{i^2*4}=\sqrt{i^2}*\sqrt{4}$$

Tutaj traktujemy liczbę *i* jako nudną i zwykłą literkę pod pierwiastkiem, jak np. *n* w analizie matematycznej w granicach. Zauważmy, że z pierwszego czynnika możliwe wyniki to *i* oraz *–i* (czemu? Podnieście sobie np. *n* i (– *n*) do kwadratu, też wyjdzie tylko i wyłącznie n^2), a z drugiego możliwe to 2 i (– 2). Pomijając wszelkie logiczne rozwiązania i inne niemoralne sposoby rozwiązań, wychodzi ostatecznie, że

$$\sqrt{i^2*4}=2i \qquad lub$$

$$\sqrt{i^2*4}=-2i$$

Czyli pierwiastek z liczby:

$$\sqrt{-4}$$

jest równy: 2i lub (-2i).

Warto zapamiętać sobie taki wzorek:

$$\sqrt{-a} = a\,i \qquad lub \qquad \sqrt{-a} = -a\,i$$

Gdzie *a* jest czymkolwiek rzeczywistym.

I tym sposobem, proszę ja was, dzięki powyższemu wzorkowi oraz takiej zależności:

$$i^2 = -1$$

właściwie mamy załatwione całe liczenie liczb zespolonych w tej normalnej, algebraicznej postaci.

Przykłady:
a) dodaj do siebie liczby z1 = 5 + 3i; oraz liczbę z2 = 6 + i.

Nic prostszego. Przy dodawaniu (jak i przy odejmowaniu) po prostu liczymy osobno to, co stoi przy tym jebniętym *i* i to, co stoi przy reszcie.

Z3 = z1 + z2 = (5 + 3i) + (6 + i) = 5 + 6 + 3i + i = 11 + 4i

I wsio. Zabawa zaczyna się przy mnożeniu.

b) pomnóż przez siebie te same liczby.

I tutaj również nie ma wielkiej filozofii. Wymnażamy nawiasy tak, jak Bóg nakazał (każdy element pierwszego nawiasu z każdym elementem drugiego), czyli:

$$z3 = z1 * z2 = (5 + 3i) * (6 + i)$$

$$(5 + 3i) * (6 + i) = 30 + 5i + 18i + 3i^2 = 30 + 23i + 3i^2$$

pamiętamy, że $i^2 = (-1)$, więc:

$$30 + 23i + 3i^2 = 30 + 23i + 3 * (-1) = 30 + 23\,i - 3 = 27 + 23\,i$$

To jest nasz ostateczny wynik. Dobrze, dobrze... ale nie beznadziejnie.

2. Liczba zespolona – sprzężenie, moduł

Liczba zespolona ma takie swoje dwie charakterystyczne, wypluj to słowo, funkcje.

Pierwsza z nich to:

$$Re(z)$$

Oraz druga:

$$Im(z)$$

Funkcja Re(z) ma taką specyfikację (sygnaturę):

$$Re: C \longrightarrow R$$

gdzie C oznacza zbiór liczb zespolonych, a R – zbiór liczb rzeczywistych.

Co robi ta funkcja? Wrzucamy do niej liczbę zespoloną, a ona w zamian „wypluwa” nam to, co jest w niej częścią rzeczywistą.

Na przykład, mamy liczbę 3 + 2i. Funkcja Re(3 + 2i) wypluje nam po prostu liczbę 3. Podobnie przy -10 + 25i funkcja Re(-10 + 25i) wypluje nam -10.

Funkcja Im(z) ma taką specyfikację:

$$Im: C \longrightarrow R$$

gdzie C oznacza zbiór liczb zespolonych, a R – zbiór liczb rzeczywistych.

Można się domyślić. Wrzucamy do funkcji liczbę zespoloną, a w zamian dostajemy to, co stoi przy części urojonej. Czyli po prostu to, co stoi przy liczbie i. Kilka już czystych przykładzików:

$$Im(3 + 2i) = 2$$
$$Im(-10 + 25i) = 25$$

Jeżeli nie chcecie, by coś złego wylazło z tej ściągi, nie czytajcie tego akapitu. Ponieważ zbiór liczb zespolonych jest nadzbiorem liczb rzeczywistych (liczby rzeczywiste „mieszczą” się w zbiorze liczb zespolonych), więc w powyższe funkcje możemy wrzucać nawet liczby rzeczywiste (fani teorii mnogości się ucieszą, a szaleni programiści się nieludzko uśmiechną, widząc zatajony polimorfizm).

Pierwszy nietypowy przykład:

$$Re(i)$$

Co zrobić z takim fantem? Jak do rozgłośni radiowej w Toruniu możemy wysyłać kwoty bliskie zeru (i tym samym narażać rozgłośnię na koszty transportu), to i tutaj dodajmy sobie zero:

$$Re(0 + i)$$

No co? Przecież to normalna, spokojna, miła i cicha liczba zespolona z = 0 + i. Czyli, jak się domyślacie, wynik brzmi:

$$Re(0 + i) = 0$$

Tak na marginesie, liczbę, która nie ma nic rzeczywistego, a tylko jakieś śmieci przy *i*, nazywamy liczbą *czysto urojoną*. Co oddaje dobrze atmosferę tej całej, błe, algebry.

Analogicznie wygląda sprawa z takim przypadkiem:

Im(666)

Ponownie, powyższą liczbę rzeczywistą:

666

zapiszę sobie w postaci liczby zespolonej (nic tu, broń Boże nie zmieniam, więc mogę):

666 + 0 * i

Czyli:

Im (666) = Im(666 + 0 * i) = 0

Liczba zespolona ma też takie cudo, jak sprzężenie, które fachowo się tak zapisuje:

$$\textit{Jeżeli}\ z = a + b i \qquad \rightarrow \qquad \bar{z} = a - b i$$

Liczba sprzężona do danej liczby zespolonej jest po prostu jakąś tam liczbą zespoloną, która ma tylko zmieniony znaczek przy *i*. Na przykład:

$$z = 5 + 8 i$$

to:

$$\bar{z} = 5 - 8 i$$

A jeżeli:

$$z = 5 - 8 i$$

to:

$$\bar{z} = 5 + 8 i$$

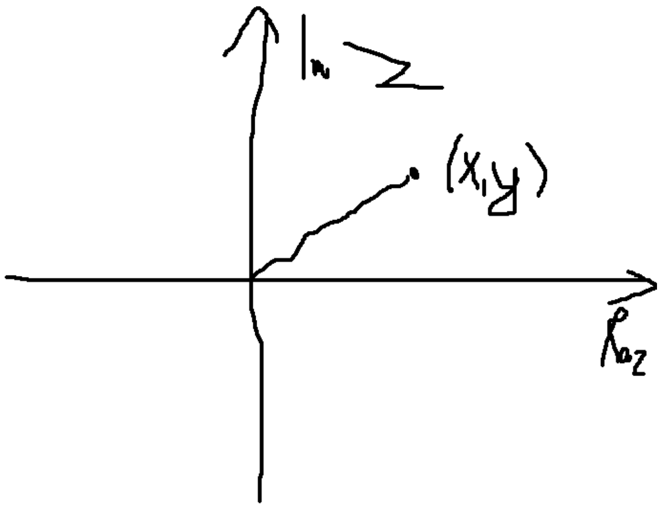
Zboczeńcy, znający algebrę Boola, ucieszą się z tych kreseczek nad literą z, bo, jak widać, podwójne sprzężenie, niczym podwójna negacja... tak – chuja robi. A sama znajomość znajdowania liczb sprzężonych do danej (jak widać – nie jest to specjalnie trudne) będzie przydatna przy znajdowaniu pierwiastków równania, korzystając z ogólnego twierdzenia algebry... cokolwiek to znaczy.

Teraz przechodzimy niemal do „meritum” liczb zespolonych, czyli – modułu z liczby zespolonej, co prowadzi w konsekwencji do raka płuc, impotencji i postaci trygonometrycznej.

Moduł liczby zespolonej liczymy z takiego wzorku:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

A skąd się on wziął? Spójrzmy na profesjonalny rysunek, stworzony z pomocą najdoskonalszych programów matematycznych:



Mamy profesjonalną tzw. płaszczyznę zespoloną, która różni się od tej normalniejszej tym, że dla jaj nazwano inaczej osie liczbowe. Każdą liczbę możemy se narysować w takim układzie jako punkcik, gdzie część rzeczywista jest „iksem”, a reszta urojonych śmieci - „igrekiem”.

Zaznaczyłem sobie jakąś tam liczbę zespoloną z = x + yi. Modułem liczbyt zespolonej nazwiemy długość tego prostego niczym... no, coś tam, odcinka. Czyli, z tw. Pitagorasa, wychodzi, że:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

Przykład:
Obliczmy |z| z takiej liczby:

$$z = 12i - 5$$

Bierzemy pod pierwiastek wszystkie współczynniki, podnosimy do kwadratu, sumujemy i zobaczmy, co za dziadostwo nam wyjdzie:

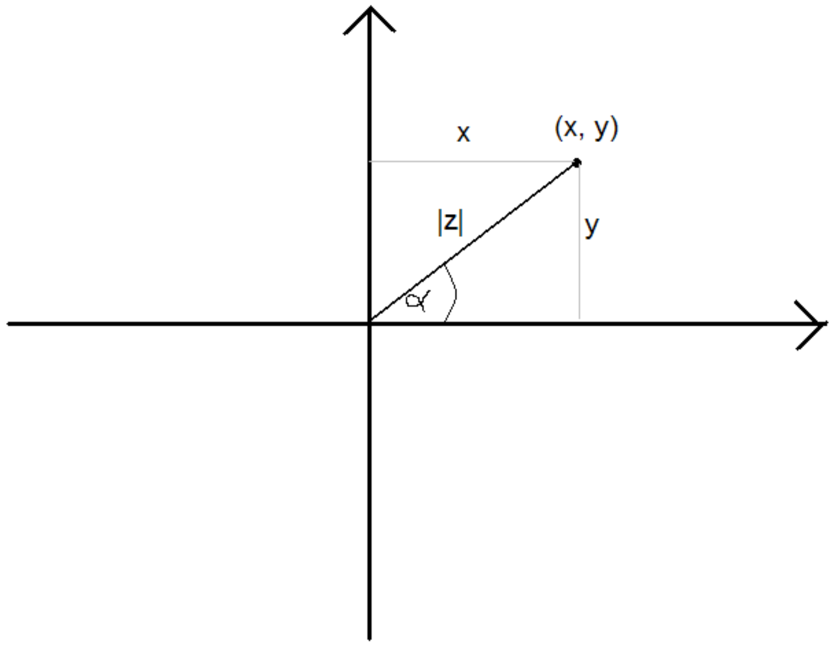
$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-5)^2+12^2}=\sqrt{169}=13$$

Więc |z| = 13.

Jeżeli ktoś jest idiotą, trochę tam znającym fizykę, to zauważy, że mamy jakiś tam układ współrzędny. Jeżeli tak, to przecież punkt możemy zapisać jako *wektor wodzący* i *kąt pomiędzy tym wektorem i osią ReZ*, czyli...

3. Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Spójrzmy raz jeszcze na, już bardziej profesjonalny, rysunek:



Nadal jest właściwie do dupy, ale mniejsza z tym. Zauważmy (albo przyjmijcie na wiarę), że każdy punkt można zapisać jako długość odcinka, łączącego go z początkiem układu wraz z kątem, jaki on tworzy z osią X (czy też, jak tutaj na płaszczyźnie zespolonej – z osią ReZ).

Spójrzmy na ten pionowy, szary odcinek. Jego długość to jakieś tam y (bo o tyle dany punkt jest oddalony od osi „iksów”). Hmm... Kretyni matematyczni od razu będą chcieli władować w to wszystko kąty... i dajmy im tą przyjemność.

Zauważmy, że sinus kąta α możemy zapisać jako (patrząc tylko na rysunek):

$$\sin \alpha = y / |z|$$

Mnożąc obustronnie przez |z|:

$$\underline{|z| * \sin \alpha = y}$$

Dobra, wyliczyliśmy sobie „igreki”, tylko po co, do cholery?

Za chwilę będziecie bluzgać za wprowadzanie jakichś tam udziwnień, ale zobaczmy teraz na poziomy szary odcinek, mający długość x (jest to odległość punktu od osi y):

Zauważmy również, że cosinus tego samego kąta, zgodnie z rysunkiem, można zapisać:

$$\cos \alpha = x / |z|$$

Czyli:

$$\underline{|z| * \cos \alpha = x}$$

No dobra, a teraz spójrzmy na wzór, najnormalniejszy w świecie na liczbę zespoloną:

z = x + y*i

Podstawmy za „iks" i „igrek" to, co wyliczyliśmy (podkreślone wzorki z poprzedniej strony):

z = |z| * cos α + |z| * sin α * i

Wyłączamy |z| przed nawias:

<u>z = |z| (cos α + sin α * i)</u>

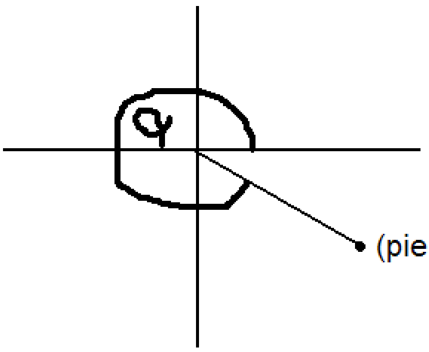
Powyższy wzór jest <u>postacią trygonometryczną</u> liczby zespolonej. Często, zamiast |z|, pisze się literke *r* (jak już wspomniałem, ktoś mógł być fizycznie kopnięty i wszystko sprowadzał do wektora – promienia – wodzącego). Mniejsza z tymi nudziarstwami, przykład:

Zamień liczbę:

$$z=\sqrt{3}-i$$

na postać trygonometryczną.

Nie powinno być z tym nic trudniejszego, nie mniej jednak, zróbmy sobie rysunek pomocniczy:



Wzór ogólny wygląda tak: z = |z| (cos α + sin α * i), więc wyliczmy, co się da. Pamiętamy także, że x = $\sqrt{3}$, a y = (-1).

Jak pamiętamy, wzór na |z| wygląda tak:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

czyli:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$

Jak kiedyś tam pisaliśmy,

$$\sin \alpha = y / |z|$$

Więc jebnijmy w ten wzór to, co wiemy:

$$\sin \alpha = (-1) / 2 = (-0,5)$$

Niestety, kultura wymaga tego, by policzyli od nas ten kąt, ba nawet lepiej, by podać go – o zgrozo – w radianach. Niestety również, wyliczania kątów dla funkcji trygonometrycznych nie będę tłumaczyć – wszystko powinno być opisane w jakimkolwiek podręczniku do matmy.

Dlatego, nie znając za bardzo poszczególnych wartości, spójrzmy na wykres funkcji i na układ współrzędnych. Widzimy, że sinus przyjmie wartość (- 0, 5) gdzieś w okolicach 330 stopni, inaczej mówiąc:

$$\sin \alpha = (-0,5) \rightarrow \alpha = 2\pi - \pi/6 = 11\pi / 6$$

Jedziemy teraz z cos α. Walnijmy co tam wiemy do wzoru, który sami sobie wyznaczyliśmy kiedyś:

$$\cos \alpha = x / |z| = \sqrt{3} / 2$$

Patrząc na rysunek (odpowiedź, że α = 30 stopni, jest „trochę” za mała) i na wykres funkcji, widzimy, że $\alpha = 11\pi / 6$.

Jaki z tego wniosek? Wystarczy policzyć |z|, z jakiejkolwiek funkcji wyliczyć kąt α (patrząc na to, gdzie punkt, oznaczający liczbę zespoloną się znajduje – w której ćwiartce) – i mamy zamienioną liczbę na postać trygonometryczną. Przy okazji, kąt α zwany jest również *argumentem głównym*, a ta wiedza będzie nam przydatna przy pierwiastkowaniu liczb zespolonych.

Czyli naszą liczbę możemy zapisać w postaci:

$$z = |z| (\cos \alpha + \sin \alpha * i) = 2 [\cos (11\pi / 6) + i \sin (11\pi / 6)]$$

Znów się zapytacie – a po cholerę tak kombinować z liczbą? Normalne x, y, kilka znaczków i jest zapisana, a nie jakieś cudowanie z Bóg wie jakimi sinusami czy modułami.

No tak, ale przy potęgowaniu i pierwiastkowaniu się tak nie da, bo istnieje taki jeden, specjalny wzorek na potęgowanie liczb zespolonych...

4. Pierwiastki/potęgi liczb zespolonych

Zaczniemy od końca, czyli od przykładu:

Oblicz $z = (\sqrt{3} - i)^6$

Od razu leniwy człowiek złapie się za głowę. Rany Boskie, jakie znowu podnoszenie do szóstej potęgi? Owszem, do kwadratu – można, jest wzorek. Do potęgi trzeciej – też można. Ale do szóstej? Człowiek się zaliczy na śmierć.

Na szczęście, istnieje taki jeden wzorek, zwany <u>wzorem de Moivre`a</u> (takiego francuskiego zboczeńca matematycznego):

$$\underline{z^n = |z|^n (\cos n\alpha + i * \sin n\alpha)}$$

Czyli wystarczy podstawiać, co wiemy (za kąt α podstawiamy argument główny) i mamy wyliczone... no, prawie, bo najczęściej żądają wyniku w normalnej, ludzkiej postaci x + yi.

Jedziemy. Pamiętamy z poprzedniego przykładu, że

$$z = (\sqrt{3}-i) = 2 [\cos (11\pi / 6) + i \sin (11\pi / 6)]$$

Podnieśmy do potęgi, korzystając ze wzoru de Moivre`a:

$$z^6 = 2^6 [\cos (6 * 11\pi / 6) + i \sin (6 * 11\pi / 6)]$$

Po posprzątaniu:

$$2^6 [\cos (6 * 11\pi / 6) + i \sin (6 * 11\pi / 6)] = 64 (\cos 11\pi + i \sin 11\pi)$$

Zauważmy, że $\cos 11\pi = \cos (10\pi + \pi)$

Ponieważ funkcja cosinus jest okresowa (z okresem 2π), blablabla... więc możemy wyrzucić parzystą wielokrotność liczby π:

$$\cos (10\pi + \pi) = \cos \pi = (-1)$$

Podobnie postąpimy z sinusem:

$$\sin 11\pi = \sin (10\pi + \pi) = \sin (\pi) = 0$$

Podstawmy, co sobie wyliczyliśmy:

$$64 (\cos 11\pi + i \sin 11\pi) = 64 [(-1) + 0 * i]$$

Wymnóżmy to, co stoi przed nawiasem kwadratowym z tym, co jest w nawiasie:

$$64 [(-1) + 0 * i] = 64 * (-1) + 64 * 0 * i$$

Wiadomo, że nawet najszczersze chęci nie spowodują, by coś pomnożone przez zero było inne od zera:

$$64 * (-1) + 64 * 0 * i = (-64) + 0 = (-64)$$

Więc

$$z^6 = (-64)$$

Z pierwiastkowaniem sprawa wygląda trochę bardziej zabawnie. Jak wam wiadomo,

$$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$$

Dlatego wzór de Moivre`a będzie wyglądał podobnie, z jedną jednak różnicą:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}[\cos(\frac{\alpha+2\mathrm{k}\pi}{n})+i\sin(\frac{\alpha+2\mathrm{k}\pi}{n})]$$

po prostu dodatni pierwiastek któregoś tam stopnia z liczby rzeczywistej

Omówienia wymaga symbol „k”. Otóż, jeżeli spierwiastkujemy chuj wie co, to wyłazi nam *n* pierwiastków. Na przykład, pierwiastek sześćsetnego stopnia z liczby 1 da nam... sześćset pierwiastków!

Gdy już policzymy liczbę zgodnie ze wzorem, wstawiamy po kolei za liczbę *k* najpierw liczbę 0, liczymy, zapisujemy wynik, później liczbę 1, liczymy, zapisujemy itd. aż dojdziemy do liczby o jeden mniejszą, od stopnia pierwiastka. Zapisując po bardzo mądremu:

k należy do zbioru {0, 1, 2, ... , n -1}

Mam nadzieję, że rozjaśni to trochę taki trywialny przykład:

Korzystając ze wzorów de Moivre`a, wylicz $\sqrt[2]{1}$.

Zgodnie ze wzorem, n = 2 (bo taki jest stopień pierwiastka):

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}[\cos(\frac{\alpha+2\mathrm{k}\pi}{n})+i\sin(\frac{\alpha+2\mathrm{k}\pi}{n})]$$

będziemy potrzebować |z| oraz α. Zapiszmy sobie też liczbę 1... tak w postaci zespolonej, czyli z = 1 + 0 * i.

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+0^2}=\sqrt{1}=1$$

Teraz policzmy dodatni pierwiastek $\sqrt[2]{1}$, czyli to będzie po prostu 1. Teraz kąt:

sin α = y / |z| = 0 / 1 = 0 -> α = 0

Zapiszmy do wzoru to, co wyliczyliśmy:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}[\cos(\frac{\alpha+2k\pi}{n})+i\sin(\frac{\alpha+2k\pi}{n})]$$
$$\sqrt[n]{|z|}[\cos(\frac{\alpha+2k\pi}{n})+i\sin(\frac{\alpha+2k\pi}{n})]=1[\cos(\frac{0+2k\pi}{2})+i\sin(\frac{0+2k\pi}{2})]$$
$$1[\cos(\frac{0+2k\pi}{2})+i\sin(\frac{0+2k\pi}{2})]=1(\cos k\pi+i\sin k\pi)$$

Najpierw za *k* podstawiamy, zgodnie z tym, co napisałem na poprzedniej stronie, 0:

dla k = 0

$$1(\cos k\pi+i\sin k\pi)=1(\cos 0\pi+i\sin 0\pi)=1(\cos 0+i\sin 0)=1(1+0*i)=1$$

Czyli naszym pierwszym pierwiastkiem będzie z = 1, a teraz za *k* podstawiamy 1:

dla k = 1

$$1(\cos k\pi+i\sin k\pi)=1(\cos 1\pi+i\sin 1\pi)=1(\cos\pi+i\sin\pi)=1(-1+0*i)=-1$$

Czyli drugim pierwiastkiem jest (– 1).

Czyli zgadza się, w mordę strzelił, ze zwykłym pierwiastkiem kwadratowym z liczby 1.

Spróbujemy jednak zrobić ambitniejszy i żmudny (nawet bardzo) w liczeniu przykład, o taki:

$$z=\sqrt[3]{-1+i}$$

Spokojnie. Najpierw należy to, co pod pierwiastkiem, zapierdolić na postać trygonometryczną (pamiętajmy, że z = -1 + i -> x = -1 i y = 1):

(- 1) + i = |z| (cos α + sin α * i)

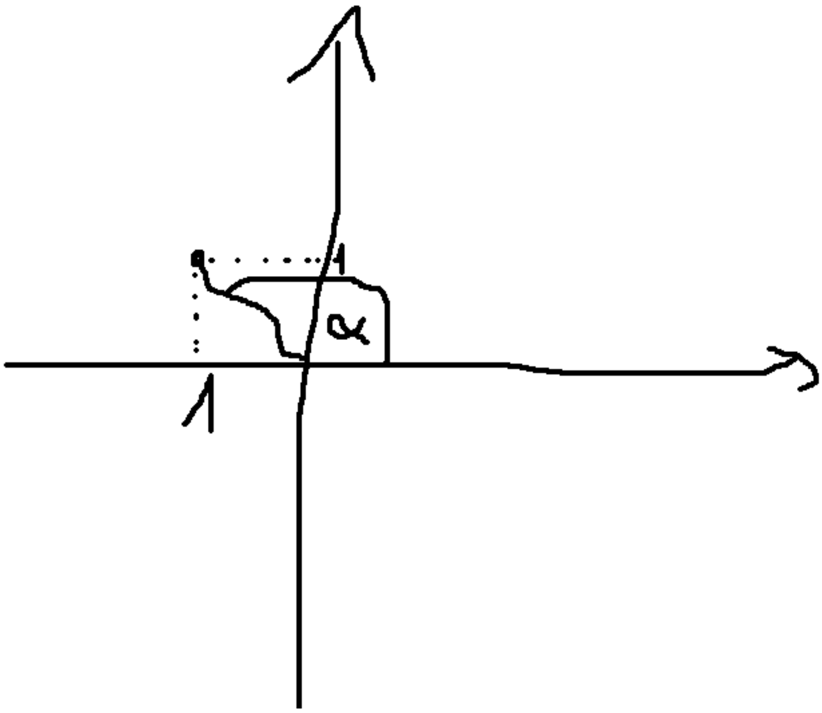
Korzystając ze znanych już wzorów:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$
sin α = y / |z|
cos α = x / |z|

obliczmy najpierw |z|:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$$

Przed wyznaczaniem kąta najpierw narysujmy sobie artystyczny burdel:



Jak widzimy na tym pięknym rysunku, kąt α będzie większy od 90, ale mniejszy od 180 stopni. A więc – zgadujemy.

$$\sin \alpha = y / |z| = 1 / \sqrt{2} = \sqrt{2} / 2$$

W drugiej ćwiartce sinus osiągnie taką wartość przy kącie π/2 + π/4 = 3π/4

W związku z tym, nasz kąt α = 3π/4.

Zapiszmy tę naszą liczbę pod pierwiastkiem, znając już kąt i |z|, więc przystępujemy do najgorszej czynności, czyli wjebnięcia we wzór de Moivre`a tego, co wiemy:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\right]=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi/4+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi/4+2k\pi}{3}\right)\right]$$

bo $\sqrt[3]{\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\sqrt[2]{2}}=\sqrt[6]{2}$

wyliczmy nawias (tak samo dla obydwu funkcji):

$$\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}k\pi$$

czyli nasze „prawie” pierwiastki wyglądają tak:

$$\sqrt[6]{2}[\cos(\frac{3\pi/4+2k\pi}{3})+i\sin(\frac{3\pi/4+2k\pi}{3})]=\sqrt[6]{2}[\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}k\pi)+i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}k\pi)]$$

Teraz za *k* wstawiamy, co się nam podoba... no, prawie:

dla k = 0

$$\sqrt[6]{2}[\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}k\pi)+i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}k\pi)]=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$
$$\sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=\sqrt[6]{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$$

I tak to zostawimy, żeby nic złego, broń Boże, nie wylazło. Oczywiście, można to poskracać, ale to już takie rachunkowe śmieci do policzenia. Analogicznie:

dla k = 1:

$$\sqrt[6]{2}[\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}k\pi)+i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}k\pi)]=\sqrt[6]{2}[\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi)+i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi)]$$
$$\sqrt[6]{2}[\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi)+i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi)]=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi)$$

Tutaj pozwalam sobie na zamianę na stopnie:

$$\sqrt[6]{2}(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi)=\sqrt[6]{2}(\cos 165+i\sin 165)$$

Niestety, wyszły nam dosyć szpetne stopnie do policzenia, ale i z tym da się coś zrobić. Korzystamy ze wzorów na funkcje sumy dwóch kątów:

sin(a + b) = sin a * cos b + cos a * sin b
cos(a + b) = cos a * cos b – sin a * sin b

Zauważmy, że kąt 165 stopni możemy zapisać jako sumę kątów 120 i 45 stopni. Skorzystajmy z tego:

sin(165) = sin (120 + 45) = sin 120 * cos 45 + cos 120 * sin 45 =

$$=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}*\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{2}*1}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}*(\sqrt{3}-1)$$

cos(165) = cos (120 + 45) = cos 120 * cos 45 – sin 120 * sin 45

Obliczenia, bądź co bądź, samych funkcji pominę, wynik wychodzi następujący:

$$\cos 165=\frac{\sqrt{2}}{4}*(1-\sqrt{3})$$

A więc drugi pierwiastek wygląda tak:

$$\sqrt[6]{2}(\cos 165+i\sin 165)=\sqrt[6]{2}(\frac{\sqrt{2}}{4}*(1-\sqrt{3})+i\frac{\sqrt{2}}{4}*(\sqrt{3}-1))$$

Oczywiście, można to wszystko powyłączać przed nawias, a nawet należy, ale to już – również – czysto rachunkowo robota.

Wracamy na momencik na początek poprzedniej strony, bo we wzorze:

$$\sqrt[6]{2}[\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}k\pi)+i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}k\pi)]$$

Musimy za *k* wstawić jeszcze liczbę 2, by znaleźć trzeci – i na szczęście – ostatni pierwiastek.

Dla k = 2:

$$\sqrt[6]{2}[\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}k\pi)+i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}k\pi)]=\sqrt[6]{2}[\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{4}{3}\pi)+i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{4}{3}\pi)]$$
$$\sqrt[6]{2}[\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{4}{3}\pi)+i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{4}{3}\pi)]=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{19}{12}\pi+i\sin\frac{19}{12}\pi)$$

Zamieniając 19π / 12 na stopnie, otrzymujemy 285 stopni. Należy z takiej wartości wyliczyć sinusa i cosinusa, ale postępujemy podobnie, jak przy poprzednim zadaniu:

sin(a + b) = sin a * cos b + cos a * sin b
sin (240 + 45) = sin 240 * cos 45 + cos 240 * sin 45 =
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}*(-1-\sqrt{3})$$

cos(a + b) = cos a * cos b – sin a * sin b
cos (240 + 45) = cos 240 * cos 45 – sin 240 * sin 45 =
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}*(-1+\sqrt{3})$$

czyli:

$$\sqrt[6]{2}(\cos\frac{19}{12}\pi+i\sin\frac{19}{12}\pi)=\sqrt[6]{2}[\frac{\sqrt{2}}{4}*(-1+\sqrt{3})+i\frac{\sqrt{2}}{4}*(-1-\sqrt{3})]$$

To również można sobie powymnażać, ale, prawdę mówiąc, na takie luksusy jestem za leniwy.

Uff... zdecydowanie najgorszą rzeczą jest późniejsze liczenie kątów, ale wydaje mi się, że wystarczy dojść do postaci z początku poprzedniej strony, bo potem – już tylko, przepraszam za słowo, jebane funkcje trygonometryczne, a nie liczenie na liczbach zespolonych.

Podsumujmy:

W wyniku działania:

$$z = \sqrt[3]{-1+i}$$

wylezą nam trzy rozwiązania:

$$\sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad ,$$

$$\sqrt[6]{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{4}*(1-\sqrt{3})+i\frac{\sqrt{2}}{4}*(\sqrt{3}-1)\right] \quad \text{oraz}$$

$$\sqrt[6]{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{4}*(-1+\sqrt{3})+i\frac{\sqrt{2}}{4}*(-1-\sqrt{3})\right]$$

Jak widzicie, wyniki nie są takie „łatwe” do strawienia, ale wydaje mi się, że był to przykład takiego najbardziej... żmudnego pierwiastkowania czegokolwiek, co by nam wlazło pod rękę.

Polecam poczytanie sobie i przejrzenie przykładowych rozwiązań z Algebry Liniowej 1: Przykłady i zadania. Zapewne przykłady dobrali tam trochę łatwiejsze, nie wymagające wielkiego rżnięcia w liczby. Wystarczy postępować wedle schematu, ewentualnie czasem pobawić się w kąty.

Mam nadzieję, że powyższy bryk, chociaż w kawałku – w czymś się przydał.

pj
poap[at]interia.pl

Linki do innych pomocy (być może naukowych):
http://www.poap.yoyo.pl/matd/