Całki funkcji elementarnych jednej zmiennej
całkowanie przez części i przez podstawienie

Ten bryk będzie się nieco różnić od pozostałych. Tym razem skupimy się głównie na przykładach, gdyż o ile liczenie pochodnych było dosyć „schematyczne" i polegało głównie na zaglądaniu w tablice, to liczenie całek jest to **głównie korzystanie z doświadczenia i obycia w nich**. Wiem, że to przykro zabrzmi, ale kilkanaście przykładów trzeba zrobić, gdyż praktycznie każdy przykład wymaga osobnego potraktowania.

Ponieważ będą tutaj obecne głównie przykłady (a byście nie byli zdziwieni – głównie zadania z książki jak zwykle bezcennego tandemu Gewert&Skoczylas „Analiza Matematyczna 1 Przykłady i Zadania"), raczej te łatwiejsze – bo trudniejszych sam nie umiem, a na łatwiejszych być może łatwiej jest załapać, pozwolę sobie zamieścić poniżej króciutki spis treści:

W pierwotnej wersji tych rozdziałów było siedem, ale, przyznam się szczerze – nie wiem, jak wyrobię się z czasem, bo lubię być leniwy, mogę być pijany, skacowany albo kujonować, ile wlezie, a nie na wszystkie egzaminy mogę zdążyć.

Dlatego, na razie – podstawowe metody przy całkowaniu.

Przypomnijmy sobie najpierw, o czym tak naprawdę mówimy.

1. Przypomnienie o całkach

Przy poprzedniej ściądze (z pochodnych) użyliśmy po raz pierwszy słowa „całka" przy tzw. funkcji pierwotnej, uznając, że jeżeli:

$$F'(x) = f(x)$$

to wtedy ta funkcja F (x) jest *funkcją pierwotną funkcji f(x).*

Na przykład, funkcją pierwotną $\frac{1}{x}$ był logarytm naturalny:

$$F(x) = \ln x + C$$

gdzie C jest dowolną stałą (bo, jak wiadomo, pochodna z samej liczby równa się gów... zero).

Takie „znajdowanie" funkcji pierwotnej to *całkowanie*, zaś funkcję pierwotną można nazwać *całką nieoznaczoną*:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Znaczek *dx*, nie wdając się w szczegóły, pokazuje nam, która zmienna rozpieprza cały przykład i przyprawia nas o ból głowy. Nie powinno się zapominać o pisaniu *dx*, tak samo jak nie powinno się zapominać o *lim* przed granicami. O ile przy granicach – da się przeżyć, ewentualnie na końcu piszemy „dąży do”, to nie powinniśmy zapominać o tym *dx* – jak się później okaże, ten „wskaźnik” jest bardzo ważny... ale nie niezastąpiony.

Wiele całek możemy obliczyć przez zgadywanie, albo zerżnięcie z tablic.

Na przykład, obliczmy taką całkę:

$$\int (x^3+5x^2)dx$$

Wiemy, korzystając z *liniowości całki*, że jak mamy plus albo minus i nigdzie poza nawiasem nie przeszkadzają nam pierwiastki, to możemy rozpieprzyć całkę na dwie:

$$\int (x^3+5x^2)dx=\int x^3\,dx+\int 5x^2\,dx \qquad *)$$

Na spokojnie obliczymy sobie osobno te całki, dla przejrzystości – tą stałą *C* dowalimy, jak policzymy wszystko.

Z tablic wiemy, że:

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Więc nasz pierwszy wężyk zamieni się w:

$$\int x^3\,dx=\frac{x^{3+1}}{3+1}=\frac{x^4}{4}$$

Pomajstrujmy z drugim. Wiemy, że stałe czynniki można wypieprzyć przed całki (analogicznie, jak przy liczeniu pochodnych):

$$\int 5x^2\,dx=5\int x^2\,dx$$

Zabawa z policzeniem tego, co jest po prawej stronie wężyka, wygląda tak, jak poprzednio:

$$5\int x^2\,dx=5*\frac{x^3}{3}$$

Podstawiając wszystko do naszego wzorku *):

$$\int x^3\,dx+\int 5x^2\,dx=\frac{x^4}{4}+\frac{5x^3}{3}+C$$

I wsio, przykład policzony.

Problem w tym, że rzadko kiedy zdarzają się przykłady właśnie typu „weź i rżnij w ulubiony przez siebie sposób”.

O, na przykład każą nam policzyć taką całkę:

$$\int \arcsin x\, dx$$

Pewno niejeden (niejedna) z was spojrzy na tablice, „tak, elegancka pochodna z tego jest, ale gdzie, do ciężkiej cholery, jest całka z tego?”.

Do liczenia tego typu całek (gdy np. pochodna tej funkcji w środku jest przyjemna w całkowaniu albo przy dwóch, zupełnie różnych funkcjach) korzystamy z metody *całkowania przez części*.

2. Całkowanie przez części

Być może wytrwali Czytelnicy (każdy taki jest chyba nienormalny) pamiętają, jak wspominałem pod koniec bryku o pochodnych, by poeksperymentować z wzorem na iloczyn pochodnych.

Przypomnę – jeżeli mamy se do policzenia pochodną z mnożenia dwóch jakiśtam cosiów, to stosujemy taką fantazyjną, rodem z Kamasutry, roszadę:

$$[f(x)*g(x)]'=f'(x)*g(x)+f(x)*g'(x)$$

Jeżeli ja ją teraz obustronnie scałkuję (a co, moja kartka, mogę bazgrać, co tylko zechcę), jednocześnie dodając to *dx*, by ludzie wiedzieli, która zmienna jest skazana, to wyjdzie nam taki potworek:

$$\int [f(x)*g(x)]'\, dx=\int [f'(x)*g(x)+f(x)*g'(x)]dx$$

Korzystając z faktu, że jeżeli pod całką mamy sumę – to mogę ją „rozbić” oraz z tego, że całka wypierdala pochodną, to dojdziemy do takiego wzorku:

$$f(x)*g(x)=\int f'(x)*g(x)\,dx+\int f(x)*g'(x)\,dx$$

Przenosząc pierwsze zwierzątko z prawej strony na lewą, dochodzimy do ostatecznego wzoru na liczenie przez części:

$$\int f(x)*g'(x)=f(x)*g(x)-\int f'(x)*g(x)\,dx$$

No dobra, ale co to nam w ogóle da? Pojawia się dodatkowa całka po prawej stronie? Dwie pochodne?

Panie, daj pan spokój, gdzie wódka?

Okazuje się jednak, że w tym szaleństwie jest metoda, którą pokażę na początku na prostym przykładzie:

<u>*Przykład a) [jak np. Aleksandria]*</u>

$$\int \ln x \, dx$$

Patrzymy w podstawowe wzory... i tutaj lipa, bo brakuje logarytmu naturalnego.

Spokojnie, najpierw – ot tak, dla picu – dopiszę sobie jedynkę w tym przykładzie:

$$\int \ln x * 1 \, dx$$

Nic w tym nie ma zdrożnego, wartość się na pewno nie zmieniła. Ale ta funkcja powyżej jest funkcją „wyjściową”, od której zaczniemy zabawę, czyli tym naszym początkiem wzoru na całkowanie przez części:

$$\int f(x) * g'(x) = \int \ln x * 1 \, dx$$

I teraz zbudujemy sobie taką prostą tabelkę 2 x 2, w którą wpiszę sobie to, co na razie wykombinowaliśmy (korzystając ze strzałek):

$f(x) = \ln x$	$g'(x) = 1$
...	...

Teraz w miejsce kropek wpisujemy:

$f(x) = \ln x$	$g'(x) = 1$
$f'(x)$	$g(x)$

… no, na co czekamy, wypełnijmy ją do końca:

$f(x) = \ln x$	$g'(x) = 1$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	$g(x) = x$ *

Zauważcie, że w miejscu oznaczonym gwiazdką my g`(x) niejako całkujemy, ale przecież obliczenie całki z jedynki nie jest takie trudne (oczywiście, olewamy również tą stałą całkowania *C*).

I teraz robimy takiego numera: mnożymy to, co leży na przekątnej (z lewej do prawej) tej tabelki:

$f(x)=\ln x$	$g'(x)=1$
$f'(x)=\frac{1}{x}$	$g(x)=x$

$$\ln x * x$$

I odejmujemy całkę z iloczynu tego, co leży w drugim wierszu:

$f(x)=\ln x$	$g'(x)=1$
$f'(x)=\frac{1}{x}$	$g(x)=x$

$$\ln x * x - \int \frac{1}{x} * x \, dx$$

Teraz, gdy spojrzymy sobie na ten nasz wymyślony wzór na całkowanie przez części:

$$\int f(x) * g'(x) = f(x) * g(x) - \int f'(x) * g(x) \, dx$$

Kurde, zgadza się, wyszedł nam tworek, którego da się wyliczyć, a więc:

$$\int \ln x \, dx = \ln x * x - \int \frac{1}{x} * x \, dx$$

Dla porządku – policzmy tę całkę po prawej stronie:

$$\int \frac{1}{x} * x \, dx$$

(dx można traktować podobnie jak „i" w liczbach zespolonych – nic to to w sumie nie robi, ale możemy ją w przekształceniach traktować jako zwykłą zmienną – czyli w powyższym przypadku np. wyrzucić do mianownika)

Jak od razu zauważyliśmy, iksy się zniosą – pozostaje nam do policzenia prosta całka $\int dx$, która to oczywiście, zgodnie ze wzorami, jest równa *x*.

Więc $\int \ln x \, dx$ równa się:

$$\int \ln x \, dx = \ln x * x - x + C$$

Właśnie na tym polega całkowanie przez części. Z tego, co jest pod całką, wybieramy se funkcję, z której dosyć łatwo wyliczyć (albo zgadnąć przy pomocy tablic) całkę, jednocześnie dbając o to, by ta druga część miała znośną pochodną.

Wiem, że to może się wydawać z pozoru dosyć abstrakcyjne, ale myślę, że po kilku przykładach docenicie zalety całkowania przez części.

Boże... zalety czegokolwiek w matematyce... docenicie... rasowy ze mnie kujon, gdzie moje okulary, koszula flanelowa i książka?

Przykład b) [jak np. Blachownia]

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$$

Moglibyśmy od razu zacząć tak:

$f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$	$g'(x)=x$
...	...

Ale wydaje mi się, że policzenie pochodnej *f (x)* byłoby nie lada wyzwaniem, a i wówczas to, co wyjdzie, ciężko byłoby scałkować.

Dlatego ja pokombinuję w innej kolejności i dodatkowo uzupełnię brakujące pola:

$f(x)=x$	$g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$
$f'(x)=1$	(Wzorek z tablic:) $g(x)=tg\, x$

Zanim przypierdolimy – mała dygresja, nie związana z aktualnym tematem.

Znamy wzór na pochodną logarytmu naturalnego, wypiszmy go:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

Jednakże, znany jest inny wzór, notabene bardzo ściśle związany z fizyką doświadczalną, mianowicie – na *pochodną logarytmiczną:*

$$[\ln f(x)]'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

Bierze się on z niczego innego, jak tylko reguł na różniczkowanie (znajdowanie pochodnych) funkcji złożonych. Przy logarytmie naturalnym to, co było w środku, leci na dół, a pochodna „środka" - spierdala do góry.

Pochodna logarytmiczna jest ściśle związana również z całkami, ponieważ prawdziwy jest wzór (udowodnimy go w następnym rozdziale):

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

Argument logarytmu jest pod modułem (bo tak musi być, a nie będę wymyślać, dlaczego), ale często będę go skracać po prostu do nawiasu, za co z góry przepraszam, a Wy macie pamiętać, że na kolokwiach czy egzaminach – wartość bezwzględna!

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x)) + C$$

Mówiąc prosto – jeżeli w całce licznik jest pochodną mianownika, to całka będzie równa temu logarytmowi z tego mianownika.

Wyposażeni w tą dodatkową wiedzę, atakujmy:

$f(x)=x$	$g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$
$f'(x)=1$	$g(x)=tg\, x$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x * tg\, x - \int tg\, x\, dx \quad *)$$

Znów – na spokojnie policzmy całkę z $tg\, x$.

$$\int tg\, x\, dx$$

Pamiętacie, jak pisałem, że gdy mamy całkę z pojedynczej, ładnej funkcji, to możemy ją brać w auc... przez części?

Zapomnijcie o tym w tym momencie, bo zapiszemy tangensa tak, jak nas uczyli:

$$\int tg\, x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

I przypomnijcie, co pisałem o pochodnej logarytmicznej. Hmm... ta nasza „góra" jest prawie pochodną „dołu" (pochodna z *cos x* jest równa (– *sin x)*).

Ale co powiedzielibyście na taki numer:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-1*-1*\sin x}{\cos x} dx$$

Z czego jednego minusa wypieprzymy przed całkę (pamiętacie? Stały czynnik można wypieprzyć przed całkę):

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -1 \int \frac{-1*\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$$

A ponieważ już teraz „góra" jest pochodną „dołu", to (pomijając *C*, które dodamy na końcu):

$$-\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x|$$

I wracając do gwiazdeczki:

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x*tg\,x - \int tg\,x\,dx = x*tg\,x - (-\ln|\cos x|) + C = x*tg\,x + \ln|\cos x| + C$$

I wsio, kolejny przykład położony na łopatki.

Przykład c) [jak np. Częstochowa]

$$\int x^2 \sin x\, dx$$

Tutaj znów sobie podziubiemy w środku całki, przyjmując, że to nasze *f(x)* to x^2 (zauważcie, że *f(x)* będziemy rozpieprzać na pochodną, przez co nieco się ten iks zredukuje), a *g'(x)* to sin x:

$f(x) = x^2$	$g'(x) = \sin x$
$f'(x) = 2x$	$g(x) = -\cos x$

Więc, zgodnie z tym, co czyniliśmy wcześniej – mnożymy to, co jest na krzyż. Dodatkowo, odejmujemy całkę z pomnożenia dolnych wierszy:

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 * \cos x - \int 2x(-\cos x)\, dx$$

Minus z cosinusa niech wypierdala przed całkę... zresztą, dwójka też:

$$-x^2 * \cos x - \int 2x(-\cos x)\, dx = -x^2 * \cos x + 2 * \int x \cos x\, dx \quad *)$$

Problemem jest teraz policzenie tej drugiej całki, którą jednak rozpieprzymy niemal identycznie jak poprzednio:

$f(x)=x$	$g'(x)=\cos x$
$f'(x)=1$	$g(x)=\sin x$

I to, co nam wyjdzie:

$$\int x\cos x\,dx = x*\sin x - \int \sin x\,dx$$

Całkę z sinusa możemy zerżnąć z tablic, więc (jak zwykle, *C* dodamy sobie na samym końcu):

$$\int x\cos x\,dx = x*\sin x+\cos x$$

Wróćmy do naszego „głównego" przykładu, oznaczonego gwiazdką i podstawmy to, co se wyliczyliśmy:

$$-x^2*\cos x+2*\int x\cos x\,dx=-x^2*\cos x+2*(x*\sin x+\cos x)$$

Co też, po uporządkowaniu:

$$-x^2*\cos x+2*(x*\sin x+\cos x)=-x^2*\cos x+2x\sin x+2\cos x$$

Więc odpowiedź:

$$\int x^2\sin x\,dx=-x^2*\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$$

Jak widzicie, użyliśmy tutaj metody całkowania przez części dwukrotnie. W przykładzie trochę nas „uwierał" ten x^2 (bo całkę z samego sinusa czy cosinusa zerżniemy bez problemu z tablic). W takim przypadku spróbowaliśmy się pozbyć tego iks kwadrat – jak widać, z całkiem niezłym skutkiem.

Przykład d) [jak np. Dębowiec]

$$\int e^{2x}\sin x\,dx$$

Tutaj po raz pierwszy spotykamy się w całkach z liczbą *e*. Całka z niej jest całkiem przyjemna, bo całkowanie na funkcję e^x kompletnie nie działa. Tutaj jednak napotykamy na dwa problemy. Pierwszy – to pałętający się sinus, a drugi – ta dwójka w potędze *e*. Uprzedzę już na początku – stałą całkowania *C* walniemy jak zwykle już na samym końcu.

Proponuję, byście poniższy przykład „przerabiali" powoli, notując sobie spokojnie na boku, co tu się dzieje, albo sami podziałali, sprawdzając ewentualnie, czy się gdzieś nie pomyliłem.

Ostateczne rozwiązanie będzie nieco zaskakujące, nie mniej jednak, policzmy to, całkując przez części. Przypomnę – jeden kawałek będziemy przerabiać na pochodną, a drugi – właściwie, to całkować. Ponieważ nie potrafimy jeszcze liczyć całek z *e* do takiej skomplikowanej potęgi, to popiszemy se tą tabelkę tak:

$f(x)=e^{2x}$	$g'(x)=\sin x$
$f'(x)=e^{2x}*(2x)'=2e^{2x}$	$g(x)=-\cos x$

Znowu – majstrujemy, mnożąc to, co jest na krzyż, i całkując dolne wiersze:

$$\int e^{2x}\sin x\,dx=-e^{2x}*\cos x-\int 2e^{2x}*(-\cos x)\,dx$$

Wywalając stałe, które znajdują się w tej drugiej całce:

$$-e^{2x}*\cos x-\int 2e^{2x}*(-\cos x)\,dx=-e^{2x}*\cos x+2*\int e^{2x}*\cos x\,dx \quad *)$$

Ponownie zajmiemy się osobno tą drugą całką:

$f(x)=e^{2x}$	$g'(x)=\cos x$
$f'(x)=e^{2x}*(2x)'=2e^{2x}$	$g(x)=\sin x$

Raz jeszcze się pokrzyżuje:

$$\int e^{2x}*\cos x\,dx=e^{2x}*\sin x-\int 2*e^{2x}*\sin x\,dx$$

Wywalmy dwójkę przed całkę:

$$\int e^{2x}*\cos x\,dx=e^{2x}*\sin x-2*\int e^{2x}*\sin x\,dx$$

Hmm... zaryzykuję pewne szaleństwo, a więc nie będziemy liczyć już tego wężyka (wprawne oko już coś powinno zauważyć), który nam tu został, tylko wstawmy to do głównego (*) przykładu:

$$e^{2x}*\cos x+2*\int e^{2x}*\cos x\,dx=-e^{2x}*\cos x+2*(e^{2x}*\sin x-2*\int e^{2x}*\sin x\,dx)$$

Wygląda to nieco skomplikowanie, ale po uporządkowaniu powinno się to trochę rozjaśnić:

$$=-e^{2x}*\cos x+2*e^{2x}*\sin x-4*\int e^{2x}*\sin x\,dx=e^{2x}(2\sin x-\cos x)-4*\int e^{2x}*\sin x\,dx$$

Czyli, wiedząc, co liczymy:

$$\int e^{2x}\sin x\,dx=e^{2x}(2\sin x-\cos x)-4*\int e^{2x}*\sin x\,dx$$

Hmm... jeżeli tego jeszcze nie widać – zastąpmy $\int e^{2x}\sin x\,dx$ jakąś ładną literką, np. I :

$$I=e^{2x}(2\sin x-\cos x)-4*\int e^{2x}*\sin x\,dx$$

Ale chwila, moment, przecież po prawej stronie też właściwie wyszło nam $\int e^{2x} \sin x \, dx$! Co z tym fantem zrobić? Też zastąpimy literką *I:*

$$I = e^{2x}(2\sin x - \cos x) - 4 * I$$

Ponieważ my właściwie *I* mamy znaleźć, to potraktujmy ją jako jakąś śmierdzącą niewiadomą, przenosząc wszystkie niewiadome na lewą stronę:

$$5 * I = e^{2x}(2\sin x - \cos x)$$

I pozostaje nam tylko podzielić przez pięć:

$$I = \frac{e^{2x}(2\sin x - \cos x)}{5}$$

A *I* to przecież $\int e^{2x} \sin x \, dx$, więc „odpodstawmy” to, co trzeba:

$$\int e^{2x} \sin x \, dx = \frac{e^{2x}(2\sin x - \cos x)}{5} + C$$

Być może to nieco topornie zapisałem, za co z góry przepraszam – właśnie dlatego poprosiłem, by powoli przerobić ten przykład. Jak widzimy, całkujemy dwukrotnie przez części, ale potem zauważamy, że po prawej stronie wychodzi nam to, co mamy policzyć. Możemy potraktować to jako „niewiadomą”, a potem prostymi operacjami wyliczamy tą „niewiadomą”.

Jeżeli to nadal mgliście wygląda – a nie wątpię, że widać tu niezły burdel – samodzielnie, całkując przez części, zróbcie ten przykład, dojdziecie do tego samego momentu i poeksperymentujcie.

Ale, oczywiście, zadziała to właściwie tylko, gdy pod całką mamy *e* i jakąś jeszcze prostą funkcję, bo w przeciwnym wypadku zapewne do niczego nie dojdziemy. Takie obliczanie ma nawet swoją nazwę. Matematycy powiedzą o *rekursywnym* podejściu czy całce – bo w wyniku obliczeń otrzymujemy to, co mamy obliczyć, prawie wracamy do punktu wyjścia (ale w końcu szczęśliwie dochodzimy do końca). Informatycy zapewne dostaną gęsiej skórki o *rekurencyjnym* wnioskowaniu – jak zapewne wiedzą, rekurencja to, w skrócie mówiąc, wywołanie funkcji przez samą siebie.

Rekursja czy rekurencja (obydwa słowa oznaczają właściwie to samo, z czego pierwszego chętnie używają matematycy, bo oni to z angielskiego wprost wszystko zżynają, a drugiego – informatycy, bo po łacinie *recurrere* wygląda dziwaczniej, a komputerowcy normalni nie są) jest bardzo użyteczna w logice (przy definiowaniu funkcji zliczającej np. zmienne w jakimś tam zdaniu albo przy zbiorach), a jak i w logice – to i w informatyce, gdzie niektóre algorytmy czy struktury danych elegancko rozwiązuje się rekurencyjnie – choćby tzw. drzewa binarne.

Dobra, podniosłem swoje ego, używając terminów, których nie znam albo po raz pierwszy widzę na oczy, wróćmy jednak do całek. Jeżeli gdzieś pod całką znajdzie się *e* i funkcja trygonometryczna – to prawie na pewno trzeba będzie ją rozwiązać tak, jak pokazałem.

3. Całkowanie przez podstawienie

Przed czynieniem tutaj takich rzeczy, że ludzkie pojęcie przechodzi, a duchowni wyciągną krzyż w naszą stronę, małe przypomnienie.

Jak liczymy pochodną – no cóż, musicie wiedzieć, albo chociaż wiedzieć, jak się to zapisuje:

$$f'(x)=jakaś\ tam\ pochodna$$

Jak być może pamiętacie, wprowadziliśmy również taki zapis:

$$\frac{df}{dx}=jakaś\ tam\ pochodna \quad *$$

I teraz po cichutku, żeby żaden matematyk nie zobaczył – pomnożymy sobie obie strony przez dx:

$$df=[jakaś\ tam\ pochodna]dx$$

a prawą stronę nazwaliśmy sobie *różniczką* funkcji *f*.

A teraz zrobimy taki eksperyment. Chciałbym głównie, byście zapamiętali z niej nie to, co pieprzę – ale samą metodę.

Załóżmy, że mamy se taką funkcję:

$$f(x)=x^2$$

Zapiszemy ją sobie za pomocą zmiennej (*zmiennej zależnej*) y (albo dla maniaków si plas plusa – zrobimy sobie taki ułomnie zapisany „wskaźnik”):

$$y=x^2 \quad **$$

To wtedy, korzystając z zapisu oznaczonego *):

$$\frac{dy}{dx}=2\mathrm{x}$$

I znów po cichutku mnożąc przez dx:

$$dy=2\mathrm{x}*dx$$

Możemy zaryzykować stwierdzenie, że wyrażenie **) obustronnie *zróżniczkowaliśmy.* <u>Policzyliśmy sobie osobno pochodną po lewej stronie (tam, gdzie się pałęta zmienna y), osobno pochodną po prawej stronie (gdzie się panoszy, niczym autor bryku, zmienna x), a żeby wszystko było cacy – zapis uzupełniliśmy o dopisanie po obydwu stronach literką d z odpowiednią zmienną.</u>

Kilka przykładów do pokazania, co mam na myśli:

$$2y = 5x^6$$

obustronnie różniczkując (licząc pochodne):

$$(2y)'\,dy = (5x^6)'\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$2\,dy = 30x^5\,dx$$

Albo taki przykład:

$$t^2 = \sin x$$

więc znów obustronnie różniczkując:

$$2t\,dt = \cos x\,dx$$

To, co zaznaczyłem tymi elipsami – to po prostu pochodne tego, co tam na górze siedzi, dla niepoznaki dopisaliśmy te *dt* i *dx* (bo tak mi się podoba).

Pytanie brzmi – po cholerę to wszystko? Kurwa, pacan jedzie z jebanymi całkami, za szybko, a tu jeszcze pierdoli mi o jakimś obustronnym różniczkowaniu?

Po odstresowaniu się powyższymi epitetami, popatrzmy na kilka prostszych przykładów, potem jeden z dłuższym tłumaczeniem, a potem zobaczymy, jak ładnie idzie mi przepisywanie z tajnych zeszytów.

*

$$\int \sin 2x\,dx$$

Byłoby strasznie miło, gdyby pod sinusem siedziała pojedyncza zmienna, bez żadnych udziwnień... A tak w ramach eksperymentów – podstawimy sobie za 2x jakąś pojedynczą literkę:

$$t = 2x$$

Co „prawie” da nam takie coś:

$$\int \sin t\,\underline{dx}$$

Jest jednak pewien problem. Jak napisałem (i jak sam to intuicyjnie rozumiem, chociaż tak naprawdę jest to zupełnie co innego) to *dx* to taki „wskaźnik”, wichajster, który pokazuje nam „która zmienna jest tą do rżnięcia”. Zauważmy, że gdy użyjemy takiego podstawienia, to mamy zupełnie inną zmienną w sinusie, a zupełnie inną mamy (ponieważ mamy *dx*) całkować.

Jest na to rozwiązanie, mianowicie, przy podstawianiu wykonujemy również drugą czynność: obustronnie różniczkujemy.

Jeżeli wykombinowaliśmy se takie podstawienie:

$$t=2x$$

to obustronnie różniczkując:

$$(t)'\,dt=(2x)'\,dx$$

czyli:

$$dt=2\,dx \quad *$$

I tu właściwie koniec zabawy – mamy czym zastąpić to nieszczęsne *dx*, co więcej, automagicznie powstanie nam *dt*, czyli teraz ten „wskaźnik”, pokazujący nam, którą zmienną całkujemy, pokaże na dobrą zmienną – tą, która będzie występować przy całce.

$$\int \sin t\,\underline{dx}$$

By w pełni zastąpić *dx* tym magicznym *dt*, to brakuje nam dwójki. Dopiszmy se – ale wiemy, że nie możemy zmienić wartości wyrażenia, więc będzie takie cudo:

$$\int \frac{1}{2} 2\sin t\,\underline{dx}$$

Jedna-druga - wypierdalać:

$$\int \frac{1}{2} 2\sin t\,\underline{dx}=\frac{1}{2}\int 2\sin t\,dx$$

I zauważmy, że:

$$\frac{1}{2}\int 2\sin t\,dx$$

To, co zaznaczyłem takim „mostkiem”, znamy – zaznaczyłem to gwiazdką kilka linijek wyżej:

$$dt=2\,dx$$

Więc bez zbędnego pieprzenia podstawmy to:

$$\frac{1}{2}\int 2\sin t\,dx=\frac{1}{2}\int \sin t\,dt$$

Tutaj już wyliczenie całki z sinusa będzie łatwe – doskonale wiemy, że będzie to minus cosinus:

$$\frac{1}{2}\int \sin t\,dt=\frac{1}{2}(-\cos t)+C$$

W ostatnim kroku – jak dostaliśmy przykład z iksami, to ładnie byłoby podać odpowiedź z iksami, innymi słowy mówiąc: ponownie „odpodstawić” t :

$$\frac{1}{2}(-\cos t)+C=\frac{1}{2}(-\cos(2x))+C$$

Względy estetyczne – ten minus – to już wasza działka.

**

$$\int e^{\frac{1}{2}x}\,dx$$

Znów – wygodnie by było, gdyby w wykładniku „siedziała” jakaś pojedyncza literka. Więc użyjemy takiego podstawienia:

$$t=\frac{1}{2}x$$

Obustronnie różniczkując, wyjdzie takie zwierzątko:

$$dt=\frac{1}{2}dx$$

Widzimy, że aby pozbyć się *dx*, to potrzebna jest nam ½ w całce. Dopiszemy ją sobie, ale niczym emo – popełnimy samobójstwo tak, żeby broń Boże nie wyszło:

$$\int e^{\frac{1}{2}x}\,dx=\int 2*\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\,dx$$

Dwójka pójdzie przed całkę i od razu podstawimy (w miejsce ½ *x* pójdzie literka *t*, a w miejsce ½ *dx* pójdzie *dt*, zgodnie z tym, co wypisaliśmy sobie w podstawianiu):

$$\int 2*\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\,dx=2\int e^{t}\,dt$$

A wyliczenie całki nie powinno być już problemem:

$$2\int e^{t}\,dt=2e^{t}+C$$

I „odpodstawiając”, dochodzimy do końcowego wyniku:

$$2e^{t}+C=2*e^{\frac{1}{2}x}+C$$

***

Pamiętacie wzór na *pochodną logarytmiczną* z poprzedniego rozdziału? Przypomnę dwa wzorki:

$$[\ln f(x)]'=\frac{f'(x)}{f(x)}\quad ;\quad \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln|f(x)|+C$$

Sprawdzimy eksperymentalnie, czy mamy rację, licząc taką całkę:

$$\int\frac{3x^{2}+5}{x^{3}+5x}\,dx$$

Dla przejrzystości zapisu – *dx* walniemy w licznik tak, jakby to była jakaś normalna zmienna:

$$\int \frac{(3x^2+5)\,dx}{x^3+5x}$$

Użyjemy takie podstawienia:

$$t=x^3+5x$$

Przez co, obustronnie różniczkując:

$$dt=(3x^2+5)\,dx$$

Jak widzimy, przy pomocy samej literki *t* pozbędziemy się szkaradnego mianownika, a po obustronnym zróżniczkowaniu – również licznik pójdzie w cholerę:

$$\int \frac{(3x^2+5)\,dx}{x^3+5x}=\int \frac{1}{t}\,dt$$

I teraz wyliczenie całki (po prostu, zerżnięcie wzorku z tablic):

$$\int \frac{1}{t}\,dt=\ln|t|+C$$

„Odpodstawiając” (ponownie przywracając *x* w rozwiązaniu):

$$\ln|t|+C=\ln|x^3+5x|+C$$

Wsio, kolejny przykład rozwiązany, a jednocześnie, doświadczalnie pokazaliśmy sobie, że wzory na pochodną logarytmiczną działają.

Poniżej zaczynają się już przykłady, przy których jeszcze szybciej zaczniemy liczyć.

Poniższy przykład będzie wyjaśniony dosyć dokładnie, bo miał być pierwszym w tym rozdziale. Po wnikliwych crash-testach na sobie uznałem jednak, że jest za ciężki, by go od razu podawać. Mam nadzieję, że wybaczycie dodatkowe komentarze w tym zadaniu, ale wolę 10 razy napisać to samo, niż napisać raz, a potem liczyć, że poszukamy tego w gugle.

Przykład a) [jak np. Aleksandrów]

$$\int 3x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$$

Ło Jezu przenajświętszy, co tutaj się porobiło? Jakiś pierwiastek, i do tego jeszcze wszędzie iksy się porozpieprzały.

Zauważmy, że całkowanie przez części byłoby dosyć niewygodne – nie potrafimy policzyć tak „na czysto" całki z pierwiastka, a pochodna byłaby bardzo nieprzyjemna.

Ale zauważmy, że byłoby miło, gdyby pod pierwiastkiem występował czysty iks. Wtedy dosyć łatwo obliczymy całkę, dla przypomnienia:

$$\int \sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+C$$

Hmmm... a gdyby to, co jest pod pierwiastkiem, zastąpić jakąś pojedynczą literką? Chuj nas na razie obchodzi, czy dobrze, czy źle, ale przykład trzeba sobie ułatwić, może coś drgnie.

Zastosujemy takie podstawienie:

$$u=1+x^3$$

Po prostu ułatwimy sobie życie pod pierwiastkiem. Wstawmy to, co wykombinowaliśmy powyżej.

$$\int 3x^2\sqrt{1+x^3}\,dx \underset{\text{takie trochę udawane}}{=} \int \underline{3x^2}\sqrt{u}\,\underline{dx}$$

Hmm... mamy jednak pewien mały problem, który podkreśliłem. Możecie uznać, że to, co zrobiłem, jest trochę bez sensu... ba, wszystko tutaj jest bez sensu. Przede wszystkim – siedzi nam w całce x^2. To jednak i tak mniejsze zło, bo mieszając z tym wzorkiem u góry, dałoby się je zastąpić. Największym utrapieniem jest to dx .

Zauważmy, że tutaj:

$$\int \underline{3x^2}\sqrt{u}\,\underline{dx}$$

Mamy zupełnie inną literkę pod pierwiastkiem, a zupełnie inna literka jest w dx . Obrazowo – załóżmy, że literka u to pomarańcza, a dx – piekarnik elektryczny – no ni chuja nie da się wycisnąć soku, albo już bardziej matematycznie – mając dwie zupełnie różne zmienne pod całką.

Właściwie, to można, ale na pewno nie w tym czasie, nie w tym miejscu i nie w takiej pojedynczej całce.

Okej, jakoś musimy ten galimatias uporządkować. Szukamy czegoś, co pozwoliłoby się pozbyć tego dx.

Przepiszmy raz jeszcze podstawienie, którego użyliśmy:

$$u=1+x^3$$

i zróżniczkujmy obydwie strony (praktycznie, kluczowy moment w całkowaniu przed podstawienie, bo od razu wiemy, czy wyjdzie nam coś interesującego):

$$(u)'\,du=(1+x^3)'\,dx$$

Czyli:

$$du=3x^2\,dx$$

Wracając do całki...

$$\int \underline{3x^2}\sqrt{u}\,\underline{dx}$$

Strzałkami narysowałem, co powinno się wydarzyć – nie dość, że za jednym razem pozbywamy się tego pieprzonego iksa, to jeszcze *dx* nam zwieje:

$$\int \underline{3x^2}\sqrt{u}\,\underline{dx}=\int \sqrt{u}\,du$$

I mamy sukces, proszę państwa. Nareszcie mamy pasującą literkę w *du* (załóżmy, że tutaj już się pojawiła prawdziwa wyciskarka do soków), a scałkowanie tego zawodnika, to tylko proste rachunki (spójrzcie na początek poprzedniej strony):

$$\int \sqrt{u}\,du=\int u^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}+C$$

Ale to nie wszystko, bo jak nam przykład dali z iksami, to i dobrze byłoby odpowiedzieć w iksach (wiedząc, że $u=1+x^3$):

$$\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}+C=\frac{2(1+x^3)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$$

I wsio, przykład rozwalony.

Tylko techniczna uwaga. Powinno się podstawiać jakąś zmienną *równocześnie* ze zmianą różniczki (czyli jednocześnie podstawiamy coś za *x* i jednocześnie zmieniamy *dx*).

Przykład b) [jak np. Biskupice]

Rozwalimy sobie takiego zawodnika:

$$\int (5-3x)^{10}\,dx$$

Zdecydowanie lepiej by to wyglądało, gdyby pod potęgą była jakaś pojedyncza zmienna. Zrobimy więc tak:

$$t=5-3x \quad *$$

Ale musimy się pozbyć *dx* i niejako „pokazywać”, że bierzemy pod uwagę zmienną *t* (potrzebujemy *dt*), więc obustronnie zróżniczkujmy:

$$dt = -3\,dx \quad **$$

By w jakikolwiek działać, potrzebujemy jak zwykle coś sobie w całce dopisać:

$$\int \frac{-1}{3} * (-3) * (5-3x)^{10}\, dx$$

To co zaznaczyłem taką „nerką”, zamieniamy na *dt* (zgodnie z tym, co przed sekundą wyliczyliśmy – podwójna gwiazdka), to co jest w nawiasie – zamieniamy na *t* (zgodnie z podstawieniem, którego użyliśmy – gwiazdka):

$$\int \frac{-1}{3} * t^{10}\, dt$$

Pozwólcie, że tę całkę wyliczę od razu w jednym rządku:

$$\int \frac{-1}{3} * t^{10}\, dt = \frac{-1}{3} \int t^{10}\, dt = \frac{-1}{3} * \frac{t^{11}}{11} = \frac{-t^{11}}{33}$$

Ponownie przywracając iksa i dodając stałą całkowania *C*, wynik wygląda następująco:

$$\int (5-3x)^{10}\, dx = \frac{-(5-3\mathrm{x})^{11}}{33} + C$$

Przykład c) [jak np. Choroń]

Od razu powalczymy z ambicjami i tablicami:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$$

Hmm... jak tak popatrzeć w tablice, to jesteśmy całkiem niedaleko takiego wzorku:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

Więc, jak widzimy, wypadałoby się pozbyć tej 4 w mianowniku... co więcej, nawet chyba się to uda!

Dla przypomnienia, pewna życiowa prawda (pomijając w tym momencie moduł):

$$a x^2 = (\sqrt{a}\, x)^2$$

Dziwny wzorek? Ale okazuje się, że to wcale nie gówno prawda:

$$(\sqrt{a}\, x)^2 = \sqrt{a^2} * x^2 = a x^2$$

Więc wróćmy do przykładu i „wrzućmy” w potęgę tą czwórkę:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}}$$

Hmm... ładnie wyglądałaby zwykła, pojedyncza literka (wtedy od razu wyskoczy nam ładna całka na arcus sinus, co przed chwilą podawałem), więc użyjemy takiego podstawienia:

$$t=2x \quad *$$

Różniczkując:

$$dt=2\,dx \quad **$$

Majstrując przy całce, by od razu wszystko ładnie podstawić:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \int \frac{\frac{1}{2}*2\,dx}{\sqrt{1-(2x)^2}}$$

I pół (litra) wypieprzmy przed całkę:

$$\int \frac{\frac{1}{2}*2\,dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{\sqrt{1-(2x)^2}}$$

I podstawmy to (oznaczone, tradycyjnie, gwiazdkami), co sobie wyliczyliśmy:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Zrzynając z tablic:

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin t$$

I na koniec „odpodstawiając”, mamy konkretny wynik:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2}\arcsin 2x + C$$

<u>Przykład d) [jak np. Dąbrowa Zielona]</u>

Teraz zrobimy przykład, stosując takie rzeczy, które pewno matematykom... średnio się spodobają.

$$\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$$

Hmm... pozbędziemy się pierwiastka (może wtedy coś z logarytmem wyjdzie) w taki sposób:

$$t=\sqrt{x} \quad *$$

Obustronnie różniczkując (i tu zaczną się cuda):

$$dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

Obustronnie mnożąc przez $2\sqrt{x}$:

$$2\sqrt{x}\,dt=dx$$

Ale wiemy też, że $t=\sqrt{x}$, więc nasze *dx* będziemy mogli zastąpić takim dziwolągiem:

$$2t\,dt=dx \quad **$$

Więc nasza całka:

$$\int\frac{dx}{2+\sqrt{x}}$$

po dokonaniu powyższych podstawień (zaznaczone gwiazdkami) zamieni się w coś takiego:

$$\int\frac{2t\,dt}{2+t}$$

Jest to przykład prostej całki z *funkcji wymiernej* (tj. takiej, w której jeden wielomian dzielimy przez drugi). Rozwiążemy ją w sposób następujący: najpierw podzielimy licznik przez mianownik (technika dzielenia wielomianów jest wyjaśniona w dowolnym podręczniku matematyki ze szkoły średniej):

$$\frac{2t}{2+t}=2+\frac{-4}{t+2}$$

Wracając do całki, wykorzystamy to, że sumę możemy rozbić na dwie osobne zagadki:

$$\int\frac{2t\,dt}{2+t}=\int[2+\frac{-4}{t+2}]dt=\int 2\,dt+\int\frac{-4}{t+2}dt$$

Pierwszą całkę od razu wyliczymy, na końcu wracając do iksa:

$$\int 2\,dt=2t=2\sqrt{x}$$

Przy drugiej zauważamy, że u góry niewiele brakuje, by znalazła się pochodna dołu:

(t + 2)' = 1

a mamy (– 4)

Ale i mamy ułatwienie, gdyż wystarczy, że (– 4) wyrzucimy przed wężyka, a problem się sam zredukuje:

$$\int \frac{-4}{t+2}dt=-4\int \frac{dt}{t+2}$$

A niedawno eksperymentalnie pokazaliśmy sobie, że jeżeli licznik jest pochodną mianownika, to z całki wylezie nam logarytm naturalny:

$$-4\int \frac{dt}{t+2}=-4\ln|t+2|$$

Wracając do iksa:

$$-4\ln|t+2|=-4\ln|\sqrt{x}+2|$$

Wyliczyliśmy sobie te dwie całki, więc nic prostszego, jak tylko wstawić:

$$\int 2\,dt+\int \frac{-4}{t+2}dt=2\sqrt{x}-4\ln|\sqrt{x}+2|+C$$

I koniec zadania, wynik:

$$\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}=2\sqrt{x}-4\ln|\sqrt{x}+2|+C$$

Muszę od razu was przeprosić – pokazałem przykład całkowania funkcji wymiernej, czyli właśnie dzielenie wielomianu przez jakiś inny. Niestety, czasowo raczej nie wyrobię się przed kolokwiami czy egzaminami z rozwiązywania podobnych przykładów, jak powyżej (a choćby w książce rodem z Politechniki Wrocławskiej na to przeznaczony jest aż całe jedno zadanie, z milionem podpunktów).

W skrócie – jeżeli mamy całkę jakiejś funkcji wymiernej:

$$\int \frac{jakiś\ tam\ wielomian}{inny,\ jeszcze\ głupszy}dx$$

to w wyniku ma prawo znaleźć się ***tylko***:

- jakiś inny wielomian, na przykład $x^2 - 5x$;
- lub logarytm naturalny z iksem w pierwszej potędze, na przykład $\ln|5x|$;
- lub logarytm naturalny z równaniem kwadratowym (z iksem do potęgi drugiej), ale wtedy delta tego, co siedzi w środku, musi być ujemna;
- lub arcus tangens z iksem w co najwyżej pierwszej potędze, np. $\mathrm{arctg}(35x)$.

Oczywiście, bardzo często zdarza się, że wynik jest kombinacją – ostatecznie otrzymujemy, na przykład, logarytm plus arcus plus iksy w dziwnych potęgach. Ale wyliczanie takich całek wymaga m.in. rozkładu wielomianu na ułamki proste, z czym do dzisiaj się mylę, a nie chcę wam (jeszcze więcej) mącić.

Więc mój komentarz proszę traktować z przymrużeniem oka, jako ciekawostkę i odnośnik do innych podręczników z analizy (polecam choćby dodatkowo *Analiza matematyczna w zadaniach, cz. 1* pióra tandemu Krysicki & Włodarski). Jeden prosty przykład z funkcjami wymiernymi jednak jeszcze się zdarzy.

Zamiast niepotrzebnie smucić się powyższym, głupkowatym komentarzem – jedźmy dalej.

Przykład e) [jak np.CisiE]

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx$$

Jak zwykle, szukamy gdzieś w przykładzie jakiejś pochodnej, tak, aby później pieprznąć jakieś wymyślne podstawienie i w ostateczności rozwiązać zadanie.

Jeżeli zapiszemy sobie powyższą całkę w ten sposób:

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx=\int \ln x*\frac{1}{x}\,dx$$

To od razu zauważymy, że można się pozbyć i logarytma, i iksa w mianowniku. W jaki sposób? Użyjemy takiego podstawienia:

$$t=\ln x \quad *$$

Różniczkując:

$$dt=\frac{1}{x}\,dx \quad **$$

Widzimy, że można od razu podstawiać, żadnych rytuałów czy szamaństw nie musimy czynić.

$$\int \ln x*\frac{1}{x}\,dx=\int t\,dt$$

I bez wstydu możemy wyliczyć tą całkę:

$$\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+C=\frac{(\ln x)^2}{2}+C$$

I wszystko. Przykład był o tyle prostszy od poprzednich (tak dla wytchnienia), że odpowiednie podstawienie od razu „skasuje” nam wszystkie śmieci, zmieni ten „wskaźnik” (*dx*) na już odpowiednią zmienną (*dt*).

Przykład f) [jak np.jestem Frajer]

$$\int \frac{x^3}{x+1}\,dx$$

Tutaj trochę elastycznie podejdziemy do podstawienia, odrobinkę mieszając w nim.

Pomijając to – znowu, nie pasuje nam odrobinkę mianownik (iks do trzeciej w liczniku, mianownik jakiś szatański), którego – jak zwykle – się pozbędziemy takim podstawieniem:

$$t=x+1 \quad *$$

Wyliczając iksa:

$$x=t-1 \quad **$$

I różniczkując:

$$dx=dt \quad ***$$

Podstawimy wszystkie te „trzy” gwiazdki tam, gdzie się to tylko da:

$$\int \frac{x^3}{x+1}dx=\int \frac{(t-1)^3}{t}dt$$

Wydawać by się mogło, że „zaraz, kurwa, pieprznąłeś jakieś podstawienie, a tu jeszcze większy chuj, niż był, bo teraz jakieś skomplikowane działania do trzeciej, ale Ty pierdolisz”.

Owszem, zgodzę się z taką argumentacją, ale tak naprawdę, ułatwiłem sobie robotę.

Stosując wzór:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

mogę mianownik „rozwinąć”:

$$\int \frac{(t-1)^3}{t}dt=\int \frac{t^3-3t^2+3\mathrm{t}-1}{t}dt$$

Teraz ten ułamek mogę „roztrzaskać” na cztery ułamki (ponieważ $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$):

$$=\int \frac{t^3}{t}+\frac{(-3)t^2}{t}+\frac{3t}{t}+\frac{(-1)}{t}dt$$

„budując” z tego cztery osobne całki (już pozwolę sobie powyrzucać stałe przed nawiasy i poskracać):

$$=\int t^2 dt-3\int t\,dt+3\int dt-\int \frac{1}{t}dt$$

których wyliczenie sprowadza się do zaglądnięcia w tablice:

$$=\frac{t^3}{3}-3\frac{t^2}{2}+3t-\ln|t|+C$$

na koniec, wracając do iksa (pierwsza gwiazdka):

$$=\frac{(x-1)^3}{3}-3\frac{(x-1)^2}{2}+3(x-1)-\ln|x-1|+C$$

I po robocie. Być może problem był w wymyśleniu podstawienia (grunt to pozbyć się *dx* i nie skomplikować za bardzo przykładu) i w obliczeniach, ale daliśmy se radę.

Przykład g) [jak... nawet chyba nie muszę brzydko mówić, co]

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$$

Hmm... znowu spróbujemy pozbyć się tych śmieci z mianownika, stosując takie podstawienie:

$$t=e^{2x}+1$$

Jebiąc obustronnie pochodne:

$$dt=2e^{2x}dx$$

Oj, widzimy, że z tego podstawienia nic nie wyjdzie (bo będziemy mieć problem z zastąpieniem dx). To może spróbujmy inaczej zapisać ten przykład:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx=\int \frac{e^x dx}{(e^x)^2+1}$$

Hmm... pomijając e^x, jesteśmy całkiem niedaleko wzorku na arcus tangens, przypomnę:

$$\int \frac{dx}{x^2+1}=arctg\, x$$

Spróbujmy więc użyć takiego podstawienia:

$$t=e^x \quad *$$

Różniczkując:

$$dt=e^x dx \quad **$$

No i teraz jesteśmy w domu:

$$\int \frac{e^x dx}{(e^x)^2+1}=\int \frac{dt}{t^2+1}$$

Całkując:

$$=arctg\, t+C$$

Wracając do iksów, ostateczne rozwiązanie:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx=arctg\, e^x+C$$

Przykład h) [jak np. Herby]

$$\int \frac{5\sin x\, dx}{3-2\cos x}$$

Tutaj pierwszy i ostatni przykład całkowania funkcji trygonometrycznych. Po rozwiązaniu podam pewną ciekawostkę, my jednak zajmijmy się rozwiązaniem właśnie tego przykładu. Możemy użyć (by pozbyć się sinusa z licznika, a i przejść z pieprzonych funkcji trygonometrycznych na jakieś inne potworki) takiego podstawienia:

$$t=\cos x \quad *$$

Wiadomo, co:

$$dt=-\sin x\,dx \quad **$$

Trochę zamieszamy w przykładzie, zanim podstawimy (po prostu, stworzymy minusa przed sinusem):

$$\int \frac{5\sin x\,dx}{3-2\cos x}=-5\int \frac{-\sin x\,dx}{3-2\cos x}$$

Czyńmy swoją powinność:

$$=-5\int \frac{dt}{3-2t}$$

Jesteśmy blisko logarytmu naturalnego, więc zróbmy wszystko, by szybko scałkować i skończyć:

$$=\frac{5}{2}\int \frac{-2\,dt}{3-2t}$$

Całkując:

$$=\frac{5}{2}\ln|3-2t|+C$$

Więc i nasz wynik tej groźnie wyglądającej całki:

$$\int \frac{5\sin x\,dx}{3-2\cos x}=\frac{5}{2}\ln|3-2\cos x|+C$$

W przypadku całek z funkcji trygonometrycznych, których nikt nie lubi, możemy zastosować pewne podstawienie, zwane *podstawieniem uniwersalnym* – bo idealnie nadaje się na wszelkie całki z funkcji trygonometrycznych. Ta funkcja pod całką automagicznie zmieni się w ułamek jakiegoś wielomianu przez jakiś wielomian (czyli funkcję wymierną).

W takim podstawieniu zaczyna się od takiego dziwnego założenia i podstawienia:

$$t=tg\,\frac{x}{2}$$

Z funkcji odwrotnej itp. wyłazi wzorek na zastąpienie *dx*:

$$dx=\frac{2\,dt}{1+t^2} \quad *$$

Wyliczono również, czym należy zastąpić sinusa:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2} \quad **$$

Jak i również cosinusa:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ***$$

Wystarczy znajomość tych trzech wzorków, by poradzić sobie z najbardziej potworną całką z funkcji trygonometrycznych. Zamieniamy ją sobie na całkę z funkcji wymiernej, którą da się policzyć już bez zaglądania w tablice trygonometryczne.

Ja jednak (ze względu na moje, przyznam się szczerze, braki w zagadnieniach z funkcji wymiernej, do czego się przyznałem) takich nie będę przedstawiać w tym bryku, powyższe wzorki należy uznać za ciekawostkę do zastosowania w sytuacji podbramkowej, przynajmniej może punkt będzie.

Przykład i) [jak np.jestem Idiotą]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$$

Obliczenie powyższej całki na pierwszy, drugi i trzeci rzut oka jest... no, nawet powiedziałbym, że w chuj trudne. Przyznam szczerze, że to chyba najżmudniejszy przykład z tych, które znalazłem, więc tutaj proszę szczególnie powoli śledzić przebieg zdarzeń.

Zauważmy, że np. podstawienie:

$$t = x^2$$

nic nie da, bo trudno będzie się pozbyć *dx*.

Przede wszystkim, sprawia nam niezły problem ta czwórka razem z iksem. Gdyby można się tego iksa jakoś pozbyć, to wtedy łatwiej byłoby zakombinować i otrzymać coś, z czego później można uzyskać arcusa sinusa – przypomnę:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

Więc, jak można zauważyć, problem właściwie rozwiązałby się (liczyliśmy już taką całkę), gdyby zamiast:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$$

tu siedział x^2 i potem normalna liczba, ewentualnie *(x plus/minus jakaś liczba)* ^{2} . Wtedy – wzorując się na przykładzie *c)* – moglibyśmy wyliczyć tą całkę.

To, co siedzi pod pierwiastkiem:

$$4x - x^2 = -x^2 + 4x$$

jest funkcją kwadratową.

Ale istnieje sposób na zapis takiej funkcji, używając tylko jednego iksa.

Każdą funkcję kwadratową można zapisać w *postaci kanonicznej*. Przypomnę wzorek:

$$a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{delta}{4a}$$

gdzie a i b – to współczynniki przy iksach, a delta – wiadomo.

W takim razie tą naszą funkcję:

$$-x^2+4x$$

możemy se zapisać w takiej postaci:

$$=-(x-2)^2+4$$

Okej, wykorzystajmy tą wiadomość, ale na razie zajmując się samym mianownikiem naszej całki:

$$\sqrt{4x-x^2}$$

Podstawmy tą dziwnawą postać tej funkcji z środka:

$$=\sqrt{-(x-2)^2+4}$$

Hmm... wyłączmy czwórkę przed nawias (jednocześnie zmieniając kolejność, dodawanie, więc mogę):

$$=\sqrt{4(1-\frac{(x-2)^2}{4})}$$

Wiedząc, że jeżeli mamy pod pierwiastkiem mnożenie, to mogę całego pierwiastka rozpieprzyć na dwa, to:

$$=\sqrt{4}*\sqrt{1-\frac{(x-2)^2}{4}}=2*\sqrt{1-\frac{(x-2)^2}{4}}$$

Podobnie jak w przykładzie *c*) – wrzućmy tą czwórkę „pod kwadrat":

$$=2*\sqrt{1-(\frac{x-2}{2})^2}$$

Wróćmy z tym całym majdanem do całki:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}=\int\frac{dx}{2*\sqrt{1-(\frac{x-2}{2})^2}}$$

I by więcej aż takich dziwnych rzeczy nie było – połówka wypierdala przed całkę... albo nawet nie – do licznika:

$$=\int\frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{1-(\frac{x-2}{2})^2}}$$

Dopiero w tym miejscu zastosujemy podstawienie:

$$t=\frac{x-2}{2} \quad *$$

Po zróżniczkowaniu:

$$dt=\frac{1}{2}dx \quad **$$

Stosując powyższe podstawienia, otrzymujemy bardzo ładną całkę do przeliczenia:

$$\int \frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{1-(\frac{x-2}{2})^2}}=\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Wykorzystując to, co sobie na początku przykładu zapisaliśmy, wiemy, że:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t$$

I „odpowiadstawiając", kończymy z przytupem rozwiązywać ten pojebany przykład:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}=\arcsin\frac{x-2}{2}+C$$

Jak widzimy, przykład idealny na kolokwia – od razu można poznać, czy delikwent rozwiązywał zadania, bo przyznacie sami, że jest dosyć ciężkawy, wymaga sięgnięcia aż do własności funkcji kwadratowej, poza tym – nietrudno o pomyłkę. Mnie samemu pierwsza próba rozwiązania tego przykładu zajęła 5 stron A4 (!), co tylko dowiodło, że z całości matematyki raczej dupa jestem, jeżeli chodzi o wzory... a o resztę także.

Przykład j) [jak np. Jaskrów]

$$\int \frac{x^3 dx}{(x-1)^{100}}$$

Przykład ciekawy i podobny do przykładu *f)* . Można go rozwiązać na miliony sposobów, my spróbujemy trochę ten przykład rozbić na mniejsze problemy.

Możemy licznik zapisać w takiej postaci (a żeby było ładnie i cacy z mianownikiem):

$$=\int \frac{[(x-1)+1]^3 dx}{(x-1)^{100}}$$

Wartość pod potęgą nie zmieniła się, więc nic złego się nie stało.

Teraz, stosując wzór na sześcian sumy (przykład *f*):

$$=\int \frac{(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+1}{(x-1)^{100}}dx$$

Również jak już w cytowanym przykładzie, rozbijmy sobie ten wielki ułamek na mniejsze, jednocześnie już skracając w nich *(x – 1):*

$$=\int\left[\frac{1}{(x-1)^{97}}+\frac{3}{(x-1)^{98}}+\frac{3}{(x-1)^{99}}+\frac{1}{(x-1)^{100}}\right]dx$$

Rozbijając na cztery całki i wypieprzając stałe przed wężyki, dostaniemy dosyć osobliwe przykładziki:

$$=\int\frac{dx}{(x-1)^{97}}+3\int\frac{dx}{(x-1)^{98}}+3\int\frac{dx}{(x-1)^{99}}+\int\frac{dx}{(x-1)^{100}}$$

Zastosujemy dopiero teraz podstawienie:

$$t=x-1 \quad *$$

Licząc to, co trzeba:

$$dt=dx \quad **$$

O, bardzo ładnie – pozbędziemy się niepotrzebnych minusów pod potęgą, a ten „wskaźnik" sam się ustawi na interesującą nas zmienną:

$$=\int\frac{dt}{t^{97}}+3\int\frac{dt}{t^{98}}+3\int\frac{dt}{t^{99}}+\int\frac{dt}{t^{100}}$$

Już „przygotowując" tego zawodnika (a właściwie – zawodników) do bezpośredniego zastosowania wzora z tablic:

$$=\int t^{(-97)}dt+3\int t^{(-98)}dt+3\int t^{(-99)}dt+\int t^{(-100)}dt$$

co też uczynimy:

$$=\frac{t^{(-96)}}{-96}+3\frac{t^{(-97)}}{-97}+3\frac{t^{(-98)}}{-98}+\frac{t^{(-99)}}{-99}$$

I pomijając wszelkie kosmetyczne poprawki w wyglądzie (poza wyłączeniem minusa przed wszystko), „odpodstawiając" otrzymujemy:

$$\int\frac{x^3\,dx}{(x-1)^{100}}=-\left[\frac{(x-1)^{(-96)}}{96}+3\frac{(x-1)^{(-97)}}{97}+3\frac{(x-1)^{(-98)}}{98}+\frac{(x-1)^{(-99)}}{99}\right]+C$$

Oj, koszmarny wygląd, ale ostatecznie wyliczyliśmy tę źle wyglądającą z początku całkę. Zazwyczaj, gdy gdzieś się trafi taka niebanalna potęga (coś do potęgi 50, 100 itp.), to zazwyczaj trzeba trochę pokombinować, pogmatwać, a potem już dojdziemy do momentu, w którym podobny przykład już rozwiązywaliśmy.

Ostatni przykład będzie takim symbolicznym ukoronowaniem tego bryku, gdyż zastosujemy tutaj również całkowanie przez części.

Przykład k) [jak np. Konopiska]

$$\int x^3 e^{(x^2)}dx$$

Zazwyczaj przy całce z e to jakiejś potęgi, podczas gdy ta potęga jest jeszcze bardziej zwyżkująca stosujemy takie triki, by uzyskać $e^{\text{jakaś ładna liczba albo literka}}$. Zauważmy, że także i tutaj trudno użyć od razu podstawienia:

$$t=x^2$$

bo co później zrobić z *dx?*

Hmm... nie, zaraz, czekaj, gdyby inkasenta zapisać w ten sposób:

$$\int x^2 e^{(x^2)} * x\,dx$$

O, już coś lepszego, więc chwytamy byka za rogi:

$$t=x^2 \quad *$$

i go różniczkujemy... Boże, co za żałosny kujon to wszystko pisze:

$$dt=2x\,dx$$

Tutaj już nawet oszczędzimy sobie mieszanie w całce przed podstawieniem, po prostu przekształcając powyższe równanie:

$$\frac{dt}{2x}=dx \quad **$$

Podstawmy, zauważając, że już od razu ten „wolny" iks się skróci z tym z **):

$$\int x^2 e^{(x^2)} * x\,dx=\int t\,e^t \left(\frac{1}{2}\right) dt$$

Pół – wypierdalać:

$$=\frac{1}{2}\int t\,e^t\,dt$$

Powyższą całkę obliczymy – tak dla ładnego skończenia tego nudnego bryku – metodą całkowania przez części. Dlatego wygospodarujemy sobie kawałek kartki dla tej niby tabelki:

$f(x)=t$	$g'(x)=e^t$
$f'(x)=1$	$g(x)=e^t$

Co da nam takie cuda:

$$=\frac{1}{2}\left(t\,e^t-\int e^t\,dt\right)$$

Ale całkę z tak prostej postaci liczby e znamy:

$$=\frac{1}{2}\left(t\,e^t-e^t\right)$$

Wyłączając e^t przed nawias:

$$=\frac{1}{2}e^t(t-1)$$

I „odpodstawiając, otrzymujemy ostateczne rozwiązanie ostatniego przykładu z tej strony, i z tego bryku:

$$\int x^3 e^{(x^2)} dx=\frac{e^{(x^2)}(x^2-1)}{2}+C$$

No, koniec, bomba, kto czytał, ten trąba.

I takim to oto sposobem, rozwiązując kilkanaście przykładów, doszliśmy do dosyć niezłej wprawy... Hmm, właściwie powinienem napisać „do niezłych” początków, bo jak wiele razy zaznaczałem – ten bryk ma Was zachęcić do zadań (ta, jasne, mnie już zniechęcił), byście nie przestraszyli się dziwnych przykładów, bo te wyglądają tak na pierwszy rzut oka.

A nawet jak na kolokwium czy egzaminie nie idzie, to chociaż napiszcie coś – dla szczęścia w nieszczęściu, to nie wy musicie sprawdzać sto prac w dwa dni, a może kilka punktów zyskacie.

Mówiąc poważniej, mam nadzieję, że powyższa pomoc chociaż odrobinkę wyjaśniła podstawy całkowania. Bo pominąłem choćby całki z funkcji wymiernych czy trygonometrycznych, ale te – na szczęście – są wyjaśnione w wielu podręcznikach do analizy.

Autorów na pewno nie nudzących tak, jak ja.

pj
poap[at]interia.pl

Linki do innych pomocy (być może naukowych):
http://www.poap.yoyo.pl/matd/