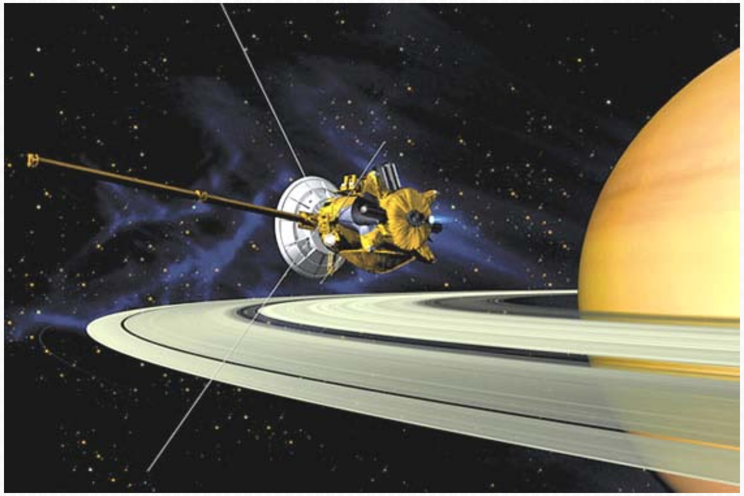
2.3. Pierwsza zasada dynamiki Newtona

15 X 1997 r. z przylądka Canaveral na Florydzie została wystrzelona sonda Cassini.

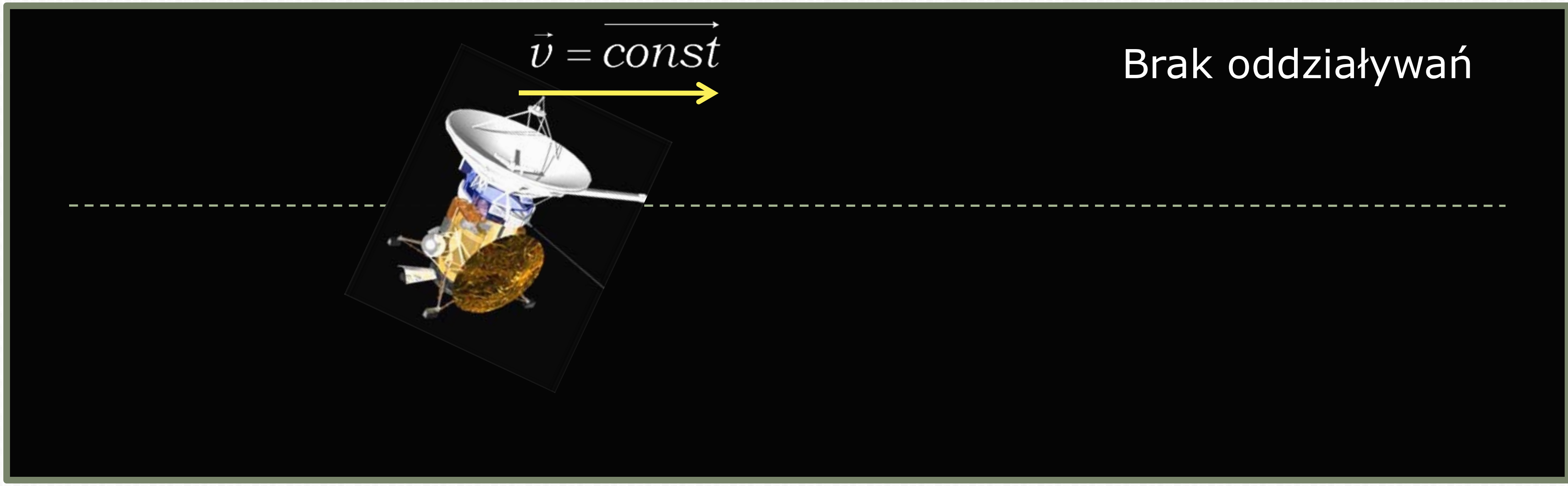


W 2004r. minęła Saturna i wszystko wskazuje na to, że będzie dalej kontynuować lot poza układ słoneczny.

Po opuszczeniu przez sondę układu słonecznego możemy przyjąć, że nie podlega ona żadnym oddziaływaniom.

Jak będzie wyglądać jej ruch?

Do ruchu sondy możemy zastosować pierwsze prawo dynamiki.



Dla cząstki nie podlegającej oddziaływaniu z otoczeniem istnieje układ odniesienia, w którym ona spoczywa lub porusza się bez przyspieszenia (tj. ruchem jednostajnym prostoliniowym)

$$\boxed{\vec{v} = \overrightarrow{const}} \qquad \vec{a} = \vec{0}$$

Pierwsze prawo dynamiki (tzw. zasada bezwładności)

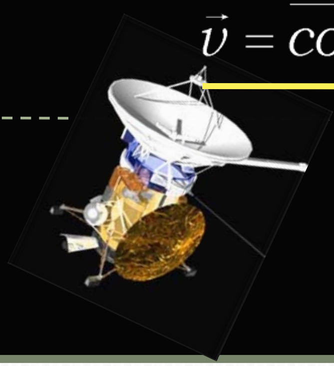
Prawo to nie jest spełnione we wszystkich układach odniesienia!

2.4. Układy inercjalne.

Układ odniesienia, w którym jest słuszna pierwsza zasada dynamiki, nazywamy *inercjalnym*.

Pierwsza zasada dynamiki postuluje istnienie układów inercjalnych.

Istnieje nieskończenie wiele układów inercjalnych, poruszających się względem siebie jednostajnie i prostoliniowo.



$\vec{v} = \overrightarrow{const}$

Brak oddziaływań

Sonda jako ciało odosobnione jest układem inercjalnym.

Gdy na sondę działają siły grawitacji planet jej ruch jest zmienny, prędkość nie jest stała i układ z nią związany jest **układem nieinercjalnym**. Pierwsza zasada nie jest spełniona.

Np. pewien nieumocowany element pozostaje w spoczynku względem ścianki, gdy prędkość sondy jest stała. Jeśli zacznie przyspieszać, to element zachowa się jak pasażer przyspieszającego samochodu.

Zauważmy, że

Pierwsza zasada dynamiki nie mówi nic o sytuacji, gdy na ciało działają siły, których wypadkowa jest równa zeru!

Zachowanie ciał w takiej sytuacji wyjaśnia druga zasada.

W nieobecności zewnętrznych sił i w układzie inercjalnym ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ze stałą prędkością (po linii prostej).

2.5. Masa i pęd ciała

Oddziaływanie innych ciał na dane ciało powoduje zmianę jego prędkości $\vec{v}$ i pojawienie się przyspieszenie $\vec{a}$.

Fakt doświadczalny:
Jednakowe działania wywołują różne przyspieszenia dla różnych ciał.

Opór stawiany przez ciało przy próbie zmiany jego ruchu (czyli $\vec{v}$) nosi nazwę **bezwładności**. Miarą bezwładności ciał jest **masa bezwładna** m_b. Jest właściwością ciała, która wiąże siłę przyłożoną do ciała z uzyskiwanym przez nie przyspieszeniem.

Jak wyznaczyć masę m_b?

Należy przyjąć wzorzec m_0 i porównać przyspieszenie a danego ciała z przyspieszeniem a_0 wzorca, wywołane takim samym oddziaływaniem

$$\frac{a_0}{a} = \frac{m_b}{m_0} \rightarrow m_b = m_0 \frac{a_0}{a}.$$

Masa występuje w dwóch różnych prawach:

- w prawie powszechnej grawitacji (masa grawitacyjna m_g), gdzie charakteryzuje zdolność ciał do oddziaływań grawitacyjnych,

- w drugim prawie dynamiki Newtona (masa bezwładna m_b), gdzie jest miarą bezwładności ciała.

Czy istnieje różnica między m_g a m_b?

Fakty doświadczalne przemawiają za tym, że m_g i m_b są z dużą dokładnością proporcjonalne do siebie, a przy odpowiednim doborze jednostek mamy $m_g = m_b$; stąd mówimy tylko o masie, bez rozróżniania na masę grawitacyjną i bezwładną.

Eksperymenty Galileusza ze spadaniem ciał spuszczanych z krzywej wieży w Pizie doprowadziły go do wniosku, że wszystkie ciała spadają z takim samym przyspieszeniem g (przy zaniedbaniu oporu powietrza).

http://www.sanders-studios.com/illustration/artpics/historical/european/GalileosExperiment_H2O.jpg

http://passion4science.files.wordpress.com/2011/06/leaningtower1.jpg?w=460&h=616

Jeśli każde ciało przyciągane przez Ziemię siłą o wartości

$$F = \gamma \frac{M_z m_g}{R_z^2}$$

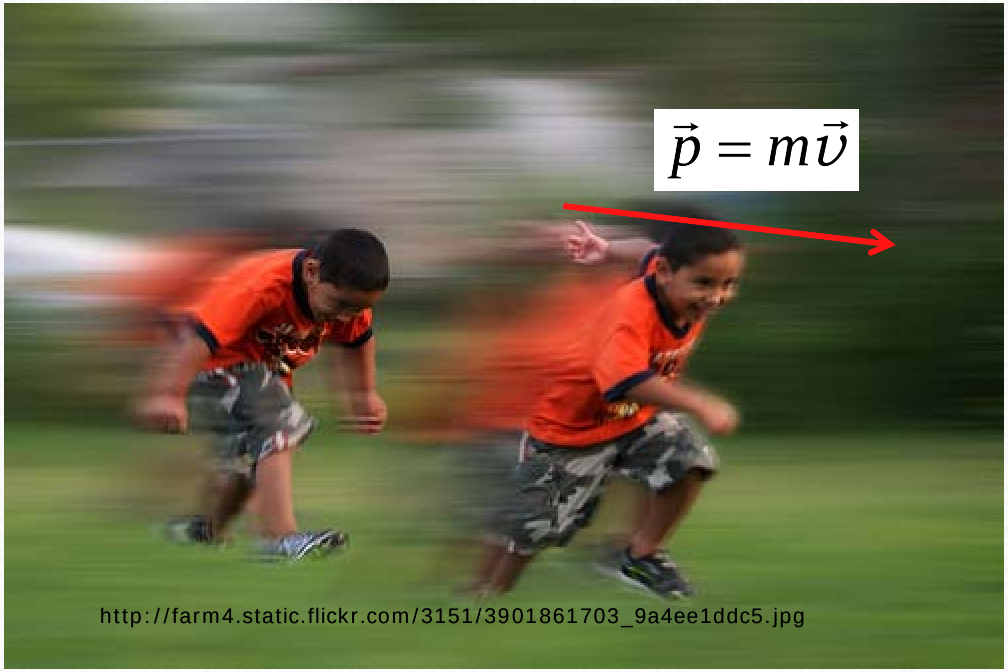
to uzyskuje przyspieszenie

$$a = \frac{F}{m_b} = \gamma \frac{M_z m_g}{R_z^2 m_b}$$

Z doświadczenia wynika, że to przyspieszenie jest jednakowe dla wszystkich ciał (γ również). Stąd stosunek $m_g = m_b$ ma taką samą wartość dla wszystkich ciał.

W mechanice klasycznej masa ciała przyjmowana jest za wielkość stałą. Jeśli chcemy opisywać zmiany ruchu wygodnie jest wprowadzić pęd cząstki, wielkość zdefiniowaną jako iloczyn masy (miary bezwładności) i prędkości:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$



2.6. Druga zasada dynamiki Newtona

http://sportbet.pl/photos/tenis.jpg

Za zmianę ruchu ciała jest odpowiedzialna siła.

W inercjalnym układzie odniesienia, przyspieszenie ciała jest wprost proporcjonalna do wartości siły wypadkowej, a kierunek i zwrot są zgodne z kierunkiem i zwrotem siły wypadkowej. Współczynnik proporcjonalności jest równy odwrotności masy bezwładnej.

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}_{wyp}}$$

Prawo to jest słuszne w układach inercjalnych i dla ciał o stałej masie.

Nie można go stosować np. w przypadku ruchu rakiety wynoszącej satelitę na orbitę, bowiem jej masa ulegała zmianie w miarę spalania paliwa w silnikach rakietowych.

W dynamice klasycznej przyjmuje się, że masa ciała nie ulega zmianie, m=const. Stąd

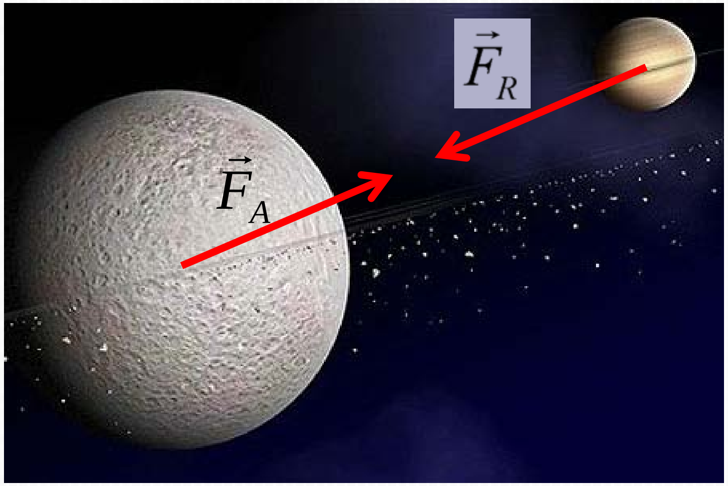
$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

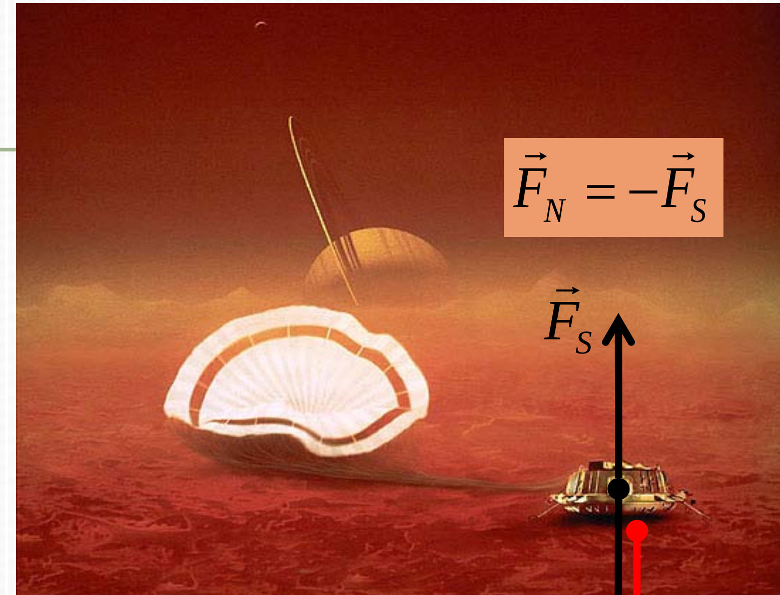
I drugie prawo Newtona można wyrazić następująco:

szybkość zmiany pędu ciała jest równa wypadkowej sile działającej na to ciało:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{wyp}}$$

2.7. Trzecia zasada dynamiki





Siła akcji - $\vec{F}_A$. Siła reakcji - $\vec{F}_R$.

$$\boxed{\vec{F}_A = -\vec{F}_R}$$

Siła grawitacji Tytana - $\vec{F}_g$

Siła nacisku na powierzchnię Tytana - $\vec{F}_N = \vec{F}_A$

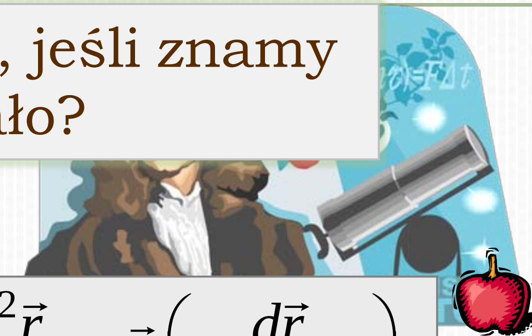
Siła sprężystości - $\vec{F}_S = \vec{F}_R$

Gdy dwa ciała oddziałują wzajemnie na siebie, to siła wywierana przez pierwsze ciało na drugie (siła akcji) jest równa i przeciwnie skierowana do siły, jaką ciało drugie wywiera na pierwsze (siła reakcji). Siły te nie równoważą się, gdyż każda jest przyłożona do innego ciała.

Oddziaływania nie mogą rozchodzić się z prędkością większą niż prędkość światła w próżni $c \approx 300\,000$ km/s. Wynika stąd ograniczenie trzeciej zasady dynamiki.

2.8. Zastosowanie drugiej zasady dynamiki

Jak znaleźć ruch ciała, tj. zależność $\vec{r} = \vec{r}(t)$, jeśli znamy siłę wypadkową działającą na to ciało?



Druga zasada dynamiki może być zapisana w postaci równania wektorowego - równania ruchu Newtona:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t\right),$$

gdzie $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, $\vec{F}\left(\vec{r}, \dfrac{d\vec{r}}{dt}, t\right)$ - siła wypadkowa, która może być zależna od położenia, prędkości oraz czasu.

Jeśli znane są warunki początkowe, tj. w chwili początkowej t_0 znamy:

$$\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \quad \text{i} \quad \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$$

możemy znaleźć z równania ruchu $\vec{v}(t)$ (całkując równanie ruchu),

a następnie $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$

Zapamiętaj!

Znajomość sił działających na cząstkę (inaczej: ciało) i warunków początkowych ($\vec{v}_0$ i $\vec{r}_0$ w chwili t_0) pozwala znaleźć jednoznaczny opis stanu ruchu cząstki w dowolnej chwili, czyli funkcję $\vec{r}(t)$.

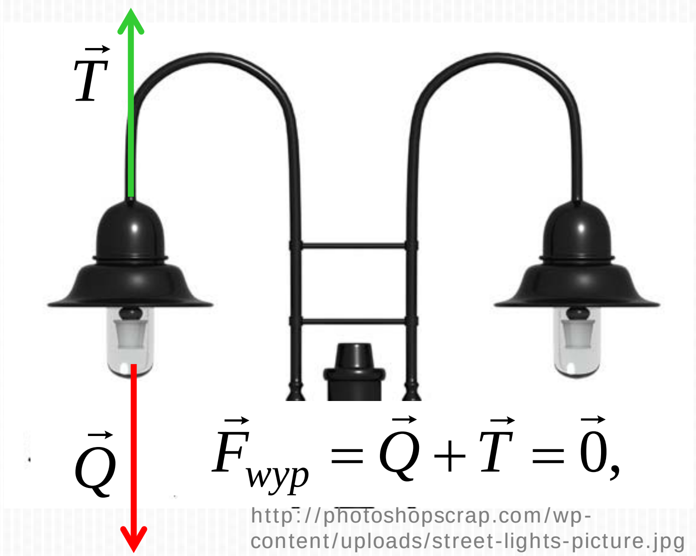
Rozważmy przypadek równoważenia się wszystkich sił działających na ciało.

Jeśli wypadkowa siła równa się zeru

$$\vec{F}_{wyp} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0} \rightarrow \quad \vec{a} = \vec{0}$$

i ciało może pozostawać w **równowadze**

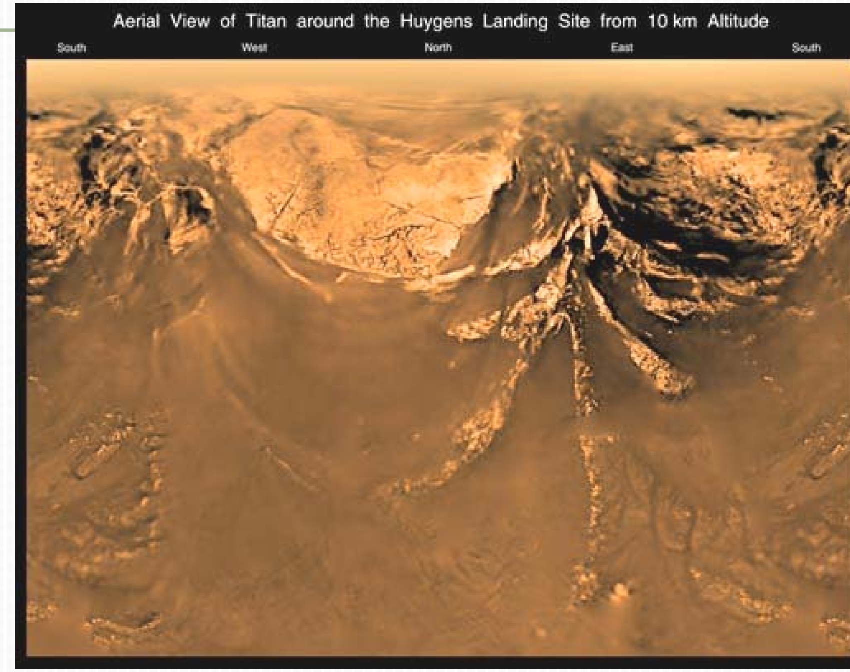
lub poruszać się ze **stałą prędkością** $\vec{v}$.

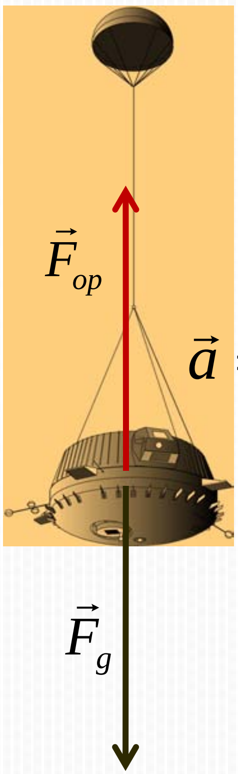


$$\vec{F}_{wyp} = \vec{Q} + \vec{T} = \vec{0},$$

http://photoshopscrap.com/wp-content/uploads/street-lights-picture.jpg

W styczniu 2005 r. na Tytanie, księżycu Saturna wylądował próbnik Huyghens, który odłączył się od Cassini.





$$\vec{a} = \vec{0}.$$

Gdy siły działające na próbnik lądujący na Tytanie: siła grawitacji i siła oporu zrównoważyły się:

$$\vec{F}_g + \vec{F}_{op} = \vec{0}, \quad \rightarrow \quad \vec{a} = \vec{0}.$$

to jego przyspieszenie a=0 i zaczął się on poruszać ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Rozważmy przypadek stałej siły wypadkowej.

$$\boxed{\vec{F} = \overrightarrow{const}}$$

Rozwiązując równanie ruchu $\boxed{m\vec{a} = \vec{F},}$

z warunkami początkowymi $\boxed{\vec{\upsilon}(t_0) = \vec{\upsilon}_0}$ i $\boxed{\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0}$

dostajemy wyrażenia na prędkość i wektor położenia:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \rightarrow \boxed{\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 + (\vec{F}/m)(t - t_0)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \upsilon_x(t) &= \upsilon_{0x} + F_x \cdot (t - t_0)/m \\ \upsilon_y(t) &= \upsilon_{0y} + F_y \cdot (t - t_0)/m \\ \upsilon_z(t) &= \upsilon_{0z} + F_z \cdot (t - t_0)/m \end{aligned}}$$

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0+(\vec{F}/m)(t-t_0)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}_0+\tfrac{1}{m}\vec{F}\cdot(t-t_0)\rightarrow$$

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}_0\cdot(t-t_0)+[\vec{F}/(2m)](t-t_0)^2$$

o składowych:

$$x(t)=x_0+v_{0x}(t-t_0)+F_x\cdot(t-t_0)^2/(2m)$$
$$y(t)=y_0+v_{0y}(t-t_0)+F_y\cdot(t-t_0)^2/(2m)$$
$$z(t)=z_0+v_{0z}(t-t_0)+F_z\cdot(t-t_0)^2/(2m)$$

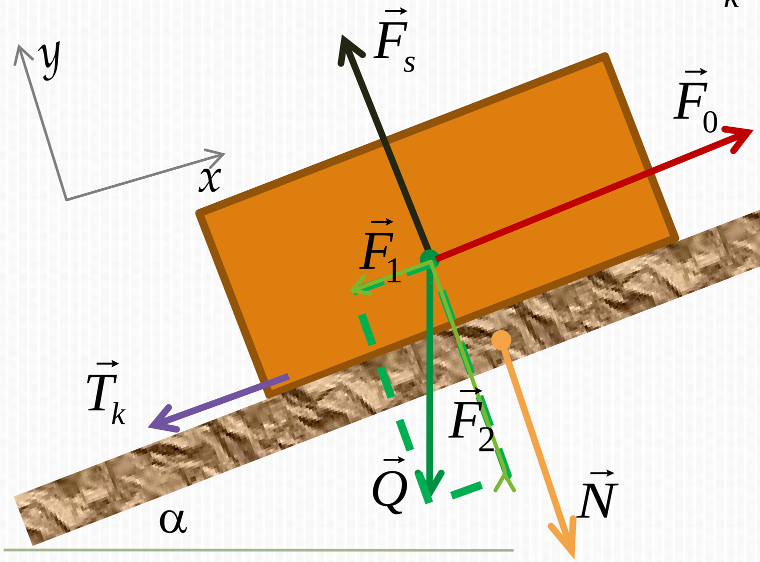
Jeśli wypadkowa siła jest stała mamy do czynienia z ruchem jednostajnie przyspieszonym, a prędkość $\vec{v}(t)$ i wektor położenia $\vec{r}(t)$ dane są równaniami

Stałe siły, to np. siła ciężkości $\vec{Q}=m\vec{g}$, siła tarcia kinetycznego (po jednorodnym podłożu) $T_k=f_kN$, siła działająca na ładunek w stałym, jednorodnym polu elektrycznym $\vec{F}=q\vec{E}$

Przykład stałej siły

Podczas przesuwania jednego ciała po drugim występuje stała siła tarcia kinetycznego $\vec{T}_k$, proporcjonalna do siły wzajemnego nacisku ciał $\vec{N}$:

$T_k = f_k N$, - f_n współczynnik tarcia kinetycznego



$$\vec{Q} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$\vec{F}_0$ – stała siła działająca na klocek,

$\vec{F}_s$ – siła sprężystości podłoża, $F_s = N$

Równanie ruchu: $\boxed{m\vec{a} = \vec{F}_0 + \vec{Q} + \vec{F}_s + \vec{T}_k}$

Obieramy układ współrzędnych x,y.

Równanie ruchu zastępujemy przez równania skalarne:

$$ma_x = F_0 - f_k N - F_1, \qquad ma_y = F_s - F_2,$$

Wzdłuż osi x: $ma_x = F_0 - f_k N - mg\sin\alpha$,
ruch jednostajnie przyspieszony, jeśli

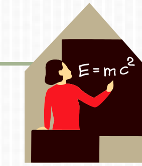
$$F_0 > f_k N + mg\sin\alpha,$$

$$a_x = (F_0 - mg(f_k\cos\alpha + \sin\alpha)/m.$$

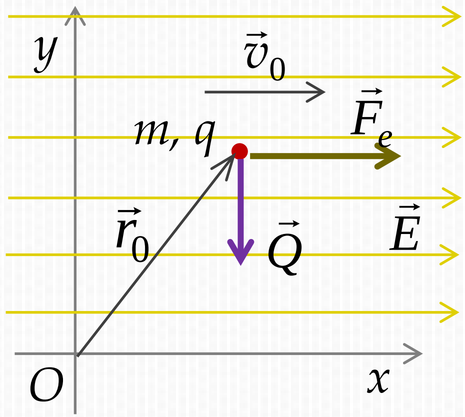
Wzdłuż osi y: $0 = F_s - mg\cos\alpha$,
brak ruchu.

Prędkość i położenie klocka w obu przypadkach znajdziemy korzystając z równań ☆

Ruch w polu stałej siły, cd.



Rozwiążmy przypadek ruchu cząstki o masie m i ładunku q w jednorodnym, stałym polu elektrycznym o natężeniu E.



Równanie ruchu:

$$m\vec{a} = \vec{Q} + \vec{F}_e,$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + q\vec{E},$$

Warunki początkowe:

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = (x_0, y_0), \quad \vec{v}(0) = \vec{v}_0 = (v_0, 0).$$

Analiza ruchu

- W kierunku osi x działa stała siła $F_x = F_e = qE$; ruch jednostajnie przyspieszony.
- W kierunku osi y działa stała siła $F_y = Q = -mg$; ruch jednostajnie przyspieszony.
- W kierunku osi z nie działa żadna siła, cząstka nie ma składowej prędkości początkowej więc nie ma ruchu.

$$ma_x = qE, \quad ma_y = -mg.$$

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 + (\vec{F}/m)(t - t_0)$$

obliczamy składową prędkości dla każdego kierunku:

$$\upsilon_x(t) = \upsilon_0 + \frac{qE}{m}t, \qquad \upsilon_y(t) = -gt, \qquad \vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 + \frac{q\vec{E}}{m}t + \vec{g}\,t.$$

$$\vec{\upsilon}(t) = \left(\upsilon_0 + \frac{qE}{m}t\right)\hat{i} - g\,t\,\hat{j}.$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 \cdot (t - t_0) + [\vec{F}/(2m)](t - t_0)^2$$

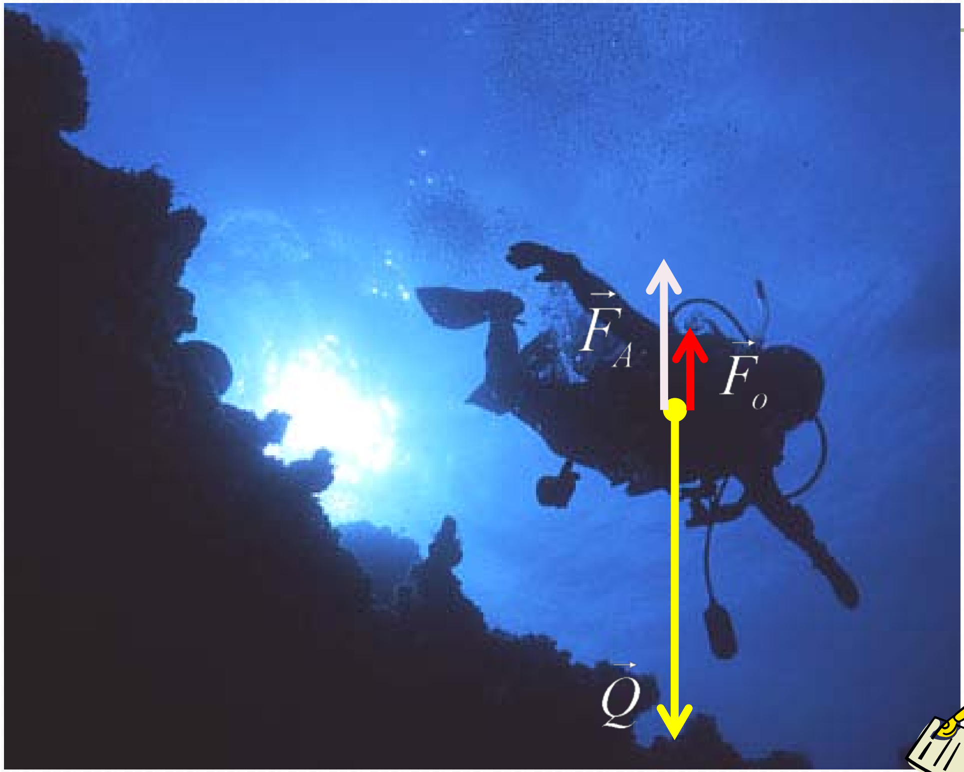
obliczamy współrzędne położenia :

$$x(t) = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{qE}{2m}t^2, \qquad y(t) = y_0 - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0\,t + \tfrac{1}{2m}\vec{E}\,t^2 + \tfrac{1}{2}\vec{g}\,t^2 = \left(x_0 + \upsilon_0 t + \frac{qE}{2m}t^2\right)\vec{i} + (y_0 - \tfrac{1}{2}gt^2)\,\vec{j}$$

Zapamiętaj – każde równanie ruchu, w którym siła wypadkowa jest stała rozwiązuj według przedstawionego wyżej schematu.

Ruch pod wpływem siły zależnej od prędkości



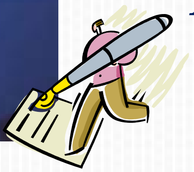
Czy potrafimy przewidzieć ruch nurka opadającego w głębiny morza?

Zacznijmy od ustalenia jakie działają na niego siły:

siła ciężkości: $\vec{Q} = m\vec{g}$

siła wyporu: $\vec{F}_A = -\rho_w V \vec{g}$

Pamiętasz prawo Archimedesa ?



siła oporu lepkiego: $\vec{F}_o = -b\vec{v}$

(b – stała)

A następnie zapisujemy drugą zasadę dynamiki: $m\vec{a} = \vec{Q} + \vec{F}_A + \vec{F}_o$.

Z niej możemy wyznaczyć przyspieszenie: $\vec{a} = (m\vec{g} - \rho_w V\vec{g} - b\vec{v})/m$,

Zauważmy, że przyspieszenie nurka jest funkcją prędkości! $\vec{a} = \vec{a}(\vec{v})$

Przeanalizujmy jego ruch.

Dwie pierwsze siły są stałe, zmienia się tylko siła lepkości.

Od jej wielkości zależy, czy prędkość nurka będzie rosła, czy malała.

Należy się spodziewać, że dla pewnej prędkości granicznej $\vec{\upsilon}_{gr}$

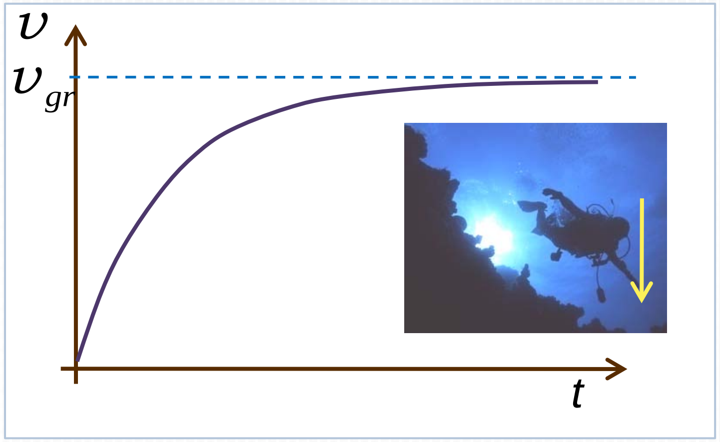
$$\vec{a} = \vec{0}, \qquad \vec{\upsilon}_{gr} = (m\vec{g} - \rho_w V\vec{g})/b,$$

i nurek zacznie się poruszać ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Wyrażenie na prędkość nurka $\vec{\upsilon}(t)$ *do momentu osiągnięcia* $\vec{\upsilon}_{gr}$ *znajdziemy* ***całkując równanie ruchu*** *i znając jego prędkość w momencie zanurzenia.*

Jeśli w momencie zanurzenia wartość prędkości nurka była równa 0, to dostaniemy:

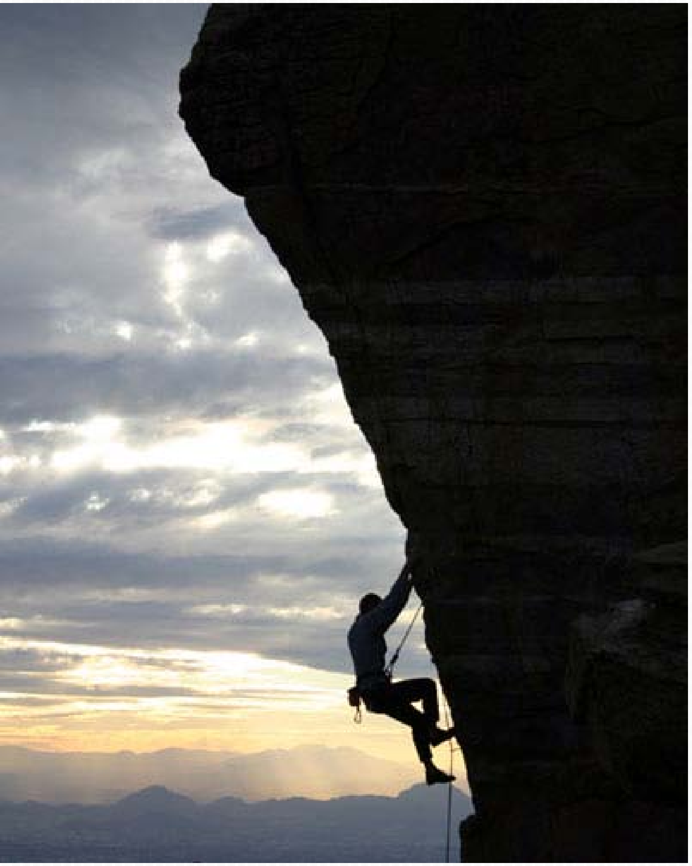
$$\boxed{\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_{gr}(1 - \mathrm{e}^{-bt/m})}$$



Kolejne całkowanie pozwoli znaleźć położenie nurka w dowolnej chwili t.

Podsumowanie

Ruch ciała, będący rezultatem występujących oddziaływań, możemy przewidzieć rozwiązując odpowiednie równania klasycznej dynamiki opartej na prawach (zasadach) Newtona.



$$\boxed{m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i}$$

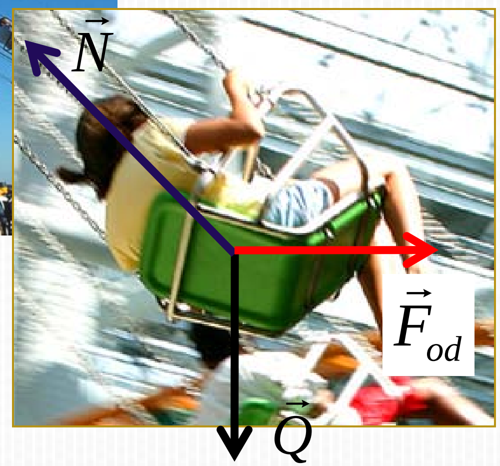
Stwierdzenie to wyraża zasadę przyczynowości (determinizmu) mechaniki klasycznej.

Przejaw determinizmu mechaniki klasycznej

2.8. Nieinercjalne układy odniesienia

Na karuzeli poruszamy się ruchem przyspieszonym.

Jakie siły działają na osobę poruszająca się na karuzeli?



Siła ciężkości: $\vec{Q} = m\vec{g}$

Siła sprężystości liny: $\vec{N}$

Siła odśrodkowa: $\vec{F}_{od}$

Dwie pierwsze są miarą rzeczywistych oddziaływań. Skąd się bierze ta trzecia $\vec{F}_{od}$?

Jest to *siła bezwładności,* pozorna siła nie będąca miarą żadnego oddziaływania, którą uwzględniamy w układach nieinercjalnych, aby stosować zasady dynamiki Newtona.

Nieinercjalne układy odniesienia to układy poruszające się z przyspieszeniem $\vec{a}_0$ względem pewnego referencyjnego układu inercjalnego *S*.

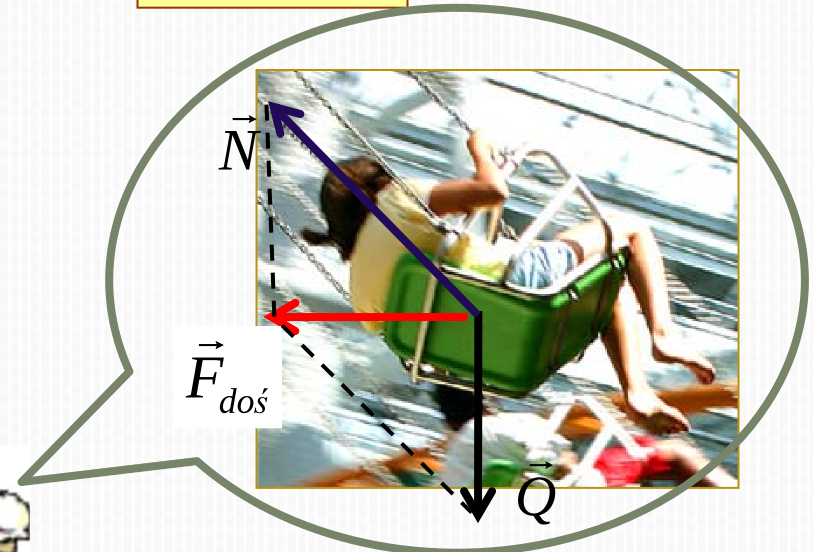
Siły bezwładności mają przeciwne zwroty do przyspieszenia układu:

$$\vec{F}_b = -m\vec{a}_0$$

Obserwator w układzie inercjalnym opisze ruch zasadami dynamiki bez korzystania z sił bezwładności.

$$\vec{F}_{doś} = \vec{Q} + \vec{N},$$

$$m\vec{a} = \vec{F}_{doś}.$$



W układzie inercjalnym obserwator stwierdza działanie siły dośrodkowej.

Zapamiętaj: *o sile odśrodkowej mówimy tylko w układzie nieinercjalnym, w inercjalnym mamy do czynienia z siłą dośrodkową, która jest odpowiedzialna za zakrzywienie toru ciała.*

Inne przykłady układów nieinercjalnych

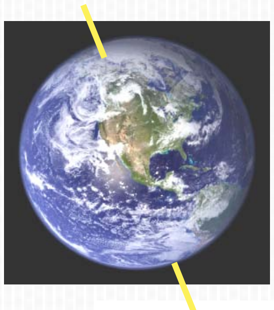
Ruszająca/hamująca winda

Startująca rakieta

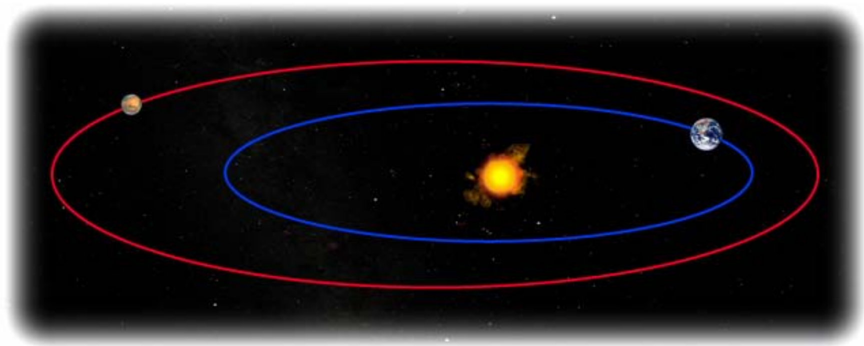
Przyspieszający bolid

Uwaga!

W warunkach ziemskich układy są tylko w przybliżeniu inercjalnymi układami odniesienia! Ziemia wykonuje:



- ruch wirowy – $a_w \approx 3{,}34 \cdot 10^{-2}$ m/s^2



- ruch po orbicie okołosłonecznej – $a_S \approx 6 \cdot 10^{-3}$ m/s^2

- i wraz ze Słońcem ruch względem środka galaktyki – $a_G \approx 3 \cdot 10^{-10}$ m/s^2

i z każdym z tych ruchów związane jest przyspieszenie!