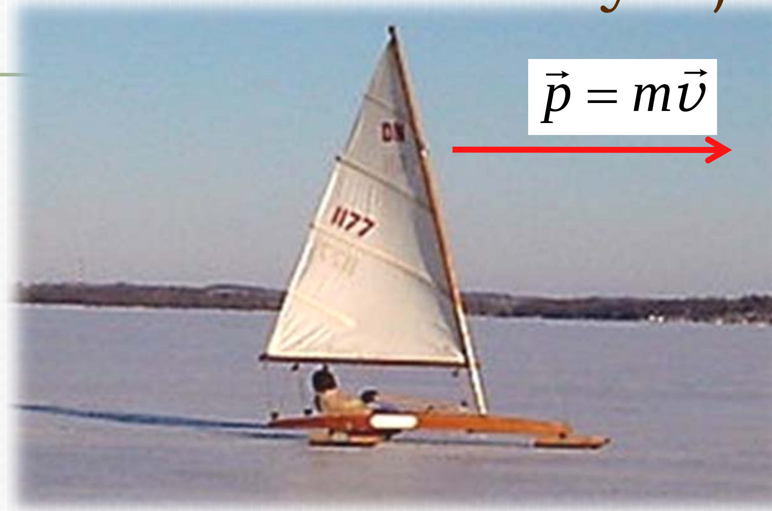
2.9. Zasada zachowania pędu (w układach izolowanych)



Z drugiego prawa dynamiki Newtona zapisanego w postaci

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

wynika **zasada zachowania pędu cząstki:**

gdy otoczenie nie oddziałuje na cząstkę lub siła wypadkowa jest równa zeru, $\vec{F} = \vec{0}$, to pochodna pędu względem czasu jest równa zeru, czyli pęd cząstki nie ulega zmianie.

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}} \Rightarrow \vec{p} = \overrightarrow{\text{const}}$$

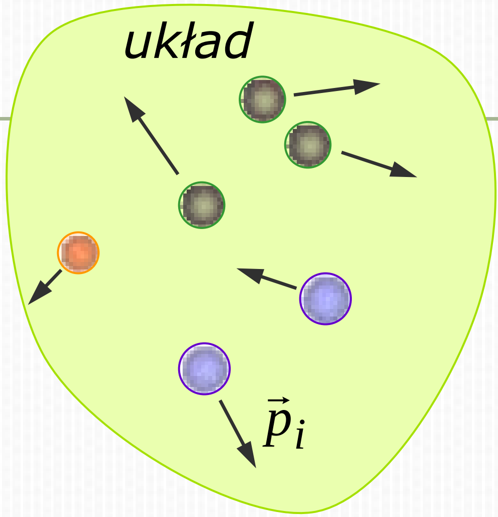
http://www.duisburg.de/worldgames_archiv/en/sportarten/praezisionssport/billard/images/billard2.jpg

Zasadę zachowania pędu możemy rozszerzyć na układ wielu cząstek.

Pęd całkowity układu jest sumą pędów wszystkich cząstek:

$$\vec{p}_{cał} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i.$$

Dla cząstki i –tej: $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{iz} + \vec{F}_{iw}$, gdzie

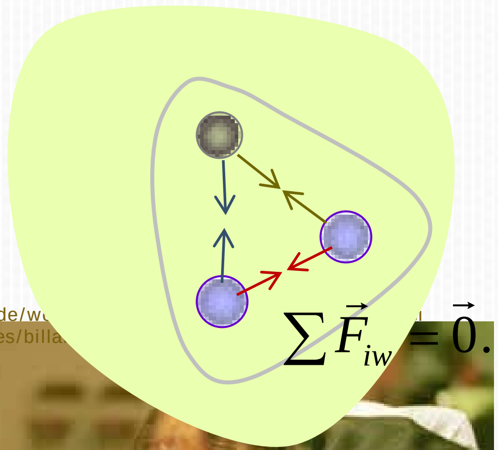


$\vec{F}_{iz}$ – siła zewnętrzna, $\vec{F}_{iw}$ – siła wewnętrzna,

Sumujemy po wszystkich cząstkach układu:

$$\sum \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_{iz} + \sum \vec{F}_{iw}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum \vec{p}_i = \sum \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}.$$

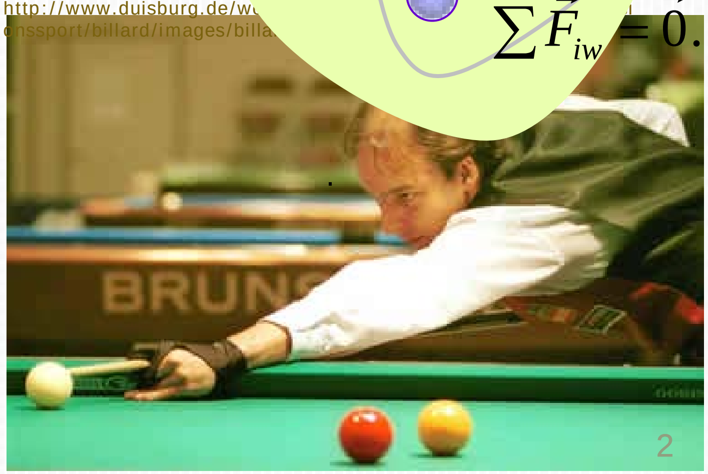
Z trzeciego prawa Newtona wynika, że suma sił wewnętrznych jest równa zeru: $\sum \vec{F}_{iw} = \vec{0}.$



A zatem: $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum \vec{p}_i = \sum \vec{F}_{iz}\ .}$

Oznacza to, że za zmianę pędu układu odpowiedzialne są siły zewnętrzne $\vec{F}_{iz}$.

http://www.duisburg.de/w... onssport/billard/images/billa...



Zasada zachowania pędu dla układu cząstek:

Pęd układu (podobnie jak pojedynczej cząstki) izolowanego, na który nie działa żadna wypadkowa siła zewnętrzna jest stały:

$$\vec{F}_z = \sum \vec{F}_{iz} = 0 \;\rightarrow\; \vec{p} = \sum \vec{p}_i = \overrightarrow{\text{const}}\,.$$

http://www.buzzle.com/img/articleImages/406000-35318-45.jpg

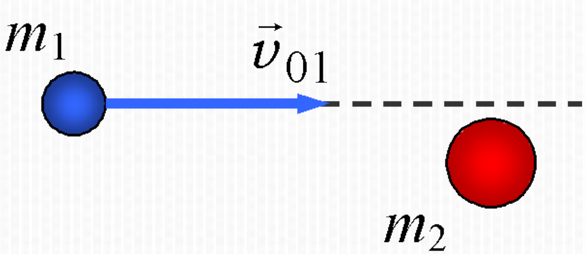
Pęd całkowity układu pocisk – karabin jest zachowany. Po wystrzeleniu pocisku karabin doznaje odrzutu.

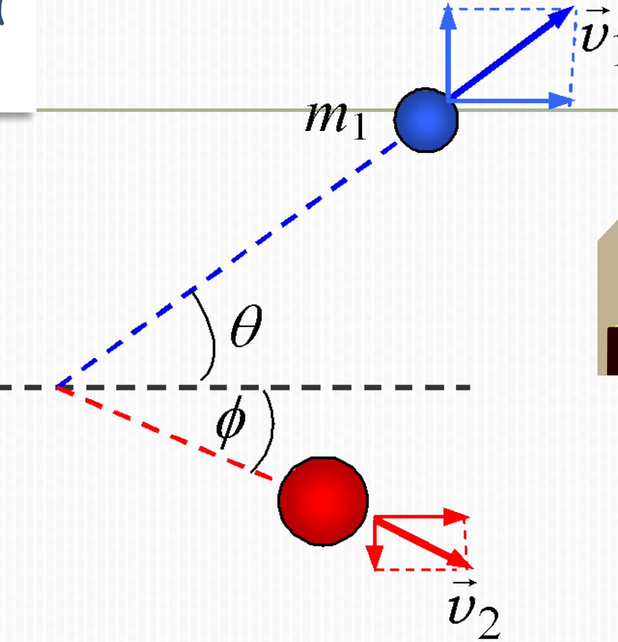
Przykład: Zderzenia

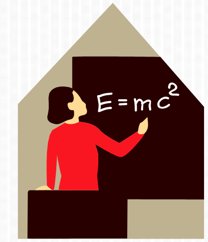
Zderzenia kul mogą być sprężyste lub niesprężyste, ale w obu przypadkach zachowany jest pęd całkowity układu.

http://hipparis.com/wp-content/uploads/2009/08/boules-jardin-du-luxembourg.jpg

W zderzeniach sprężystych zachowywana jest energia kinetyczna i pęd układu.







Zasada zachowania pędu:

pęd kulek przed … i po zderzeniu

$$\boxed{\vec{p}_{01} + \vec{p}_{02} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2}$$

czyli

$$m_1 v_{01} + 0 = m_1 v_1 \cos\theta + m_2 v_2 \cos\phi,$$

$$0 = m_1 v_1 \sin\theta - m_2 v_2 \sin\phi.$$

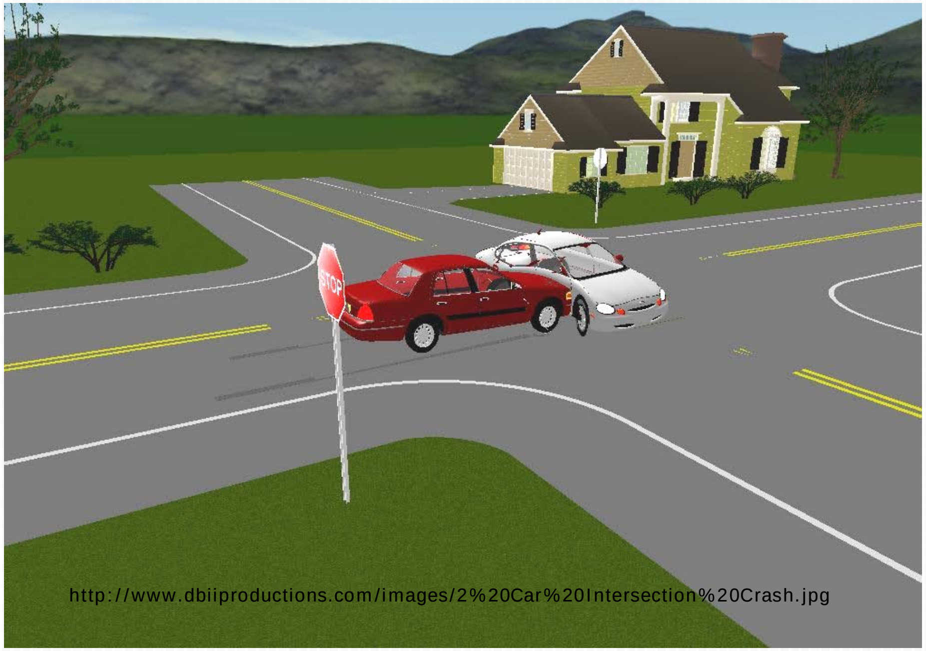
Zasada zachowania energii kinetycznej:

$$\boxed{\frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2}$$

W zderzeniach niesprężystych zachowywany jest jedynie pęd układu!

$$\vec{p}_{01} + \vec{p}_{02} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$m_1\vec{v}_{01} + m_2\vec{v}_{02} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$



http://www.dbiiproductions.com/images/2%20Car%20Intersection%20Crash.jpg

Część energii kinetycznej ciał idzie np. na ich deformację podczas zderzenia, rozprasza się w postaci ciepła.

2.10. Pęd w układach nieizolowanych

Szybkość zmian pędu w czasie jest równa sile działającej na ciało:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

Zatem zmiana pędu $\Delta\vec{p}$ ciała zależy od wartości siły oraz czasu w którym działa ona na ciało:

$$\boxed{\Delta\vec{p} = \vec{p}_k - \vec{p}_p = \vec{F}_{śr}\Delta t.}$$


http://static.howstuffworks.com/gif/baseball-player-physics-3.jpg


http://www.pbs.org/kcet/wiredscience/assets/story/45.jpg

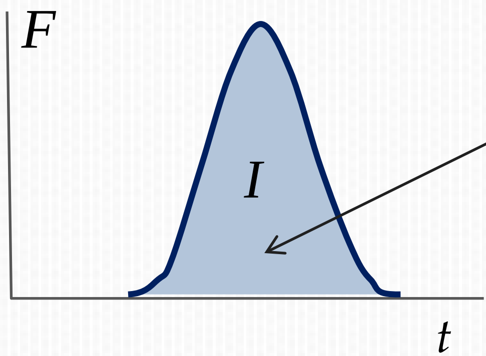
Wielkość po prawej stronie równości nosi nazwę impulsu siły (popędu siły):

$$\boxed{\vec{I} = \vec{F}_{śr}\Delta t.}$$

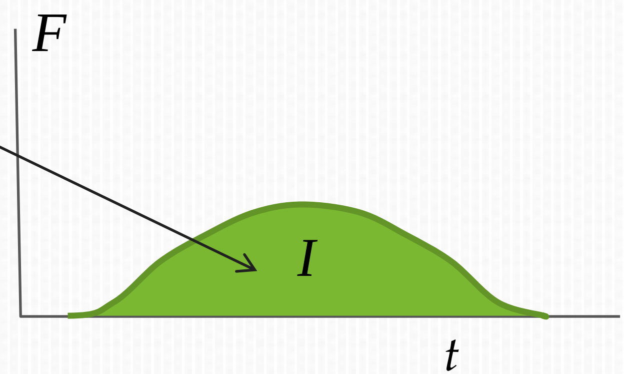
Zmiana pędu $\Delta\vec{p}$ ciała w przedziale czasu jest równa impulsowi siły $\vec{I}$ w tym przedziale czasu.

Taką samą zmianę pędu ciała $\Delta\vec{p}$ możemy uzyskać działając na niego dużą siłą przez krótki czas lub małą siłą przez długi czas, ale skutki działania siły mogą być różne.

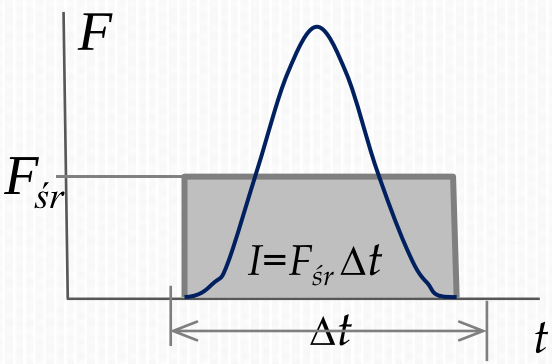
$$\Delta\vec{p} = \vec{F}_{śr}\Delta t.$$



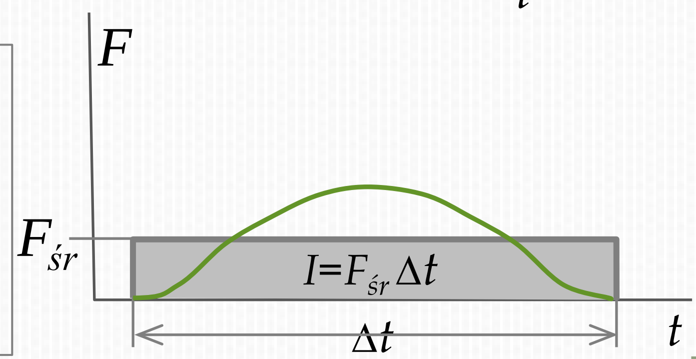
Impuls siły jest równy polu powierzchni pod wykresem F=F(t)



$$I = \int_{t_0}^{t_k} F dt.$$



Można go obliczyć za pomocą całki, albo w przybliżeniu jako iloczyn średniej siły i czasu jej działania



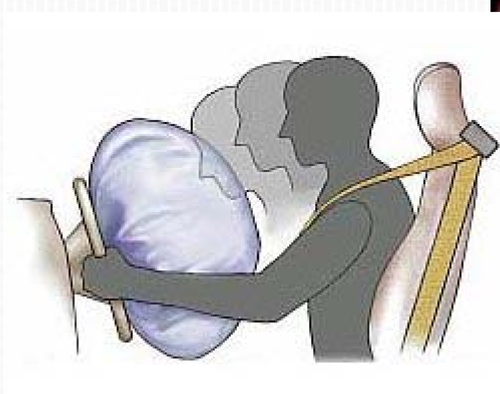
Zderzaki samochodów deformując się mają wydłużyć czas zderzenia i zmniejszyć średnią siłę, jaka wówczas działa na samochód.

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}_{śr}\Delta t\,.$$

Podobną rolę pełnią poduszki powietrzne w samochodach – mają wydłużyć czas, a zmniejszyć średnią siłę działającą na pasażera.

P0RzBE

ages?q=tbn:ANd9GcT



http://www.flickr.com/photos/imagined_horizons/3809880040/in/gallery-physicsclassroom-72157625280491634/

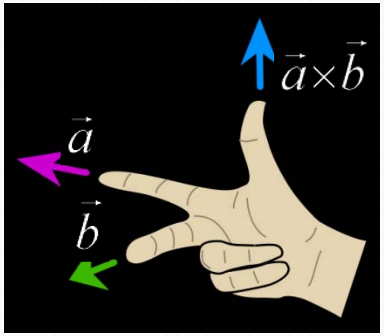
W czym tkwi sekret rozbicia dłonią cegieł?

W impulsie siły – dłonie o masie 4-5 kg osiągają szybkość 15m/s. Jeśli czas trwania kontaktu dłoni z układem cegieł jest bardzo krótki, rzędu milisekund, to średnia siła może wynieść 2800 N, a do rozbicia cegieł wystarczy już 2000 N. Uderzenie wywołuje wibracje w cegłach, które prowadzą do pęknięcia.

2.11. Moment pędu. Zasada zachowania momentu pędu

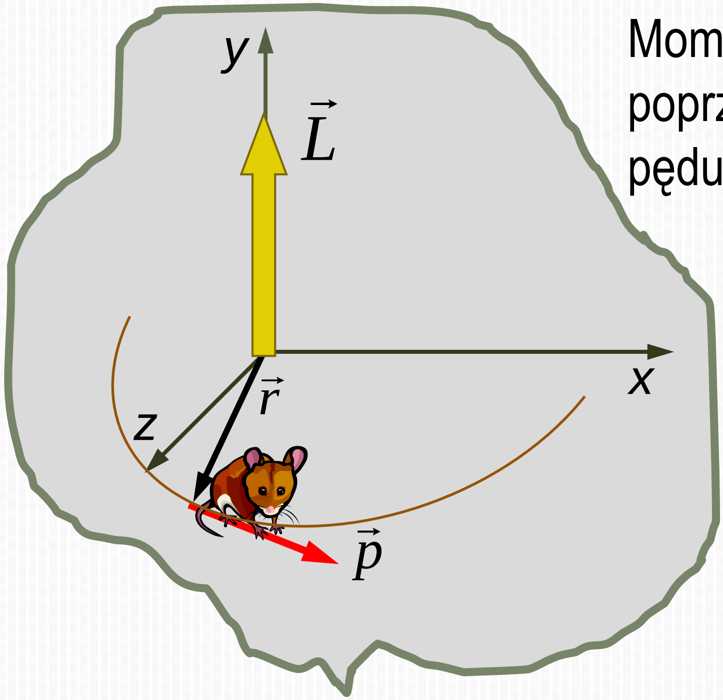
Iloczyn wektorowy wektora $\vec{r}$ i pędu cząstki $\vec{p}$ nazywamy **momentem pędu (krętem)** cząstki:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

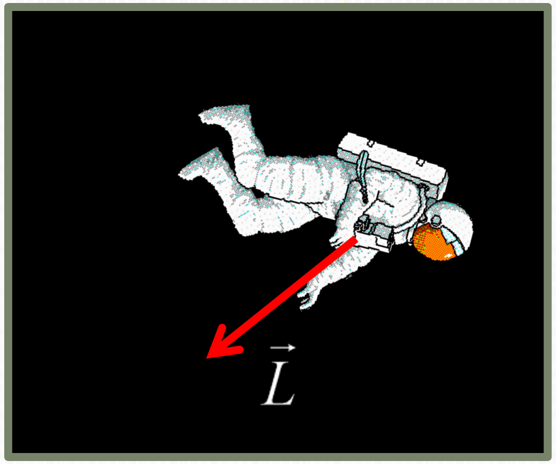


Jego wartość: $$|\vec{L}| = |\vec{r}||\vec{p}|\sin\alpha,$$

Jest on z definicji prostopadły do płaszczyzny, w której leżą wektory $\vec{r}$ i $\vec{p}$, a zwrot jest określony przez regułę śruby prawoskrętnej (regułę prawej dłoni).



Moment pędu może być również wyrażony poprzez współrzędne wektorów położenia i pędu (patrz. Wykład 1)



Wektor momentu pędu możemy wyrazić poprzez prędkość kątową

(jest ona związana z prędkością liniową zależnością $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$) :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}),$$

Korzystamy z tożsamości wektorowej: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}),$

$$\vec{L} = m\vec{\omega}\vec{r}^{\,2} - m\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega}) = mr^2\vec{\omega}\,.$$

Definiujemy **moment bezwładności** cząstki *I*:
(odpowiednik masy *m*, miara bezwładności)

$$I = mr^2$$

Dostajemy wówczas wyrażenie na moment pędu: $\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}\,.}$

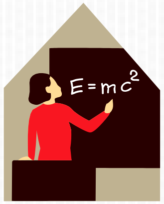
Moment bezwładności układu cząstek względem jakiejś osi obrotu jest sumą momentów bezwładności poszczególnych cząstek:

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^{\,2}\,.}$$

r_i - odległość i - tej cząstki o masie m_i od osi obrotu.

Moment bezwładności bryły ciągłej obliczymy zastępując sumowanie całkowaniem.
Np. moment bezwładności walca względem jego osi podłużnej $I = mr^2 / 2$

Moment siły cząstki definiujemy wzorem: $\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.}$



Pomnóżmy obie strony równania $\vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$ przez wektor $\vec{r}$:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}.$$

Dostajemy:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times m\vec{v}), \qquad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times m\vec{v}) = m\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} \right),$$

$$\boxed{\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}.}$$

Otrzymaliśmy równanie ruchu: szybkość zmian w czasie momentu pędu cząstki jest równa momentowi siły działającemu na tę cząstkę.

Równanie to jest szczególnie przydatne w ruchu obrotowym i w ruchach krzywoliniowych.

Zauważmy, że moment siły $\vec{M} = \vec{0}$, gdy brak oddziaływania, tj. $\vec{F} = \vec{0}$ oraz gdy siła jest równoległa do wektora $\vec{r}$, $\vec{F} \parallel \vec{r}$.

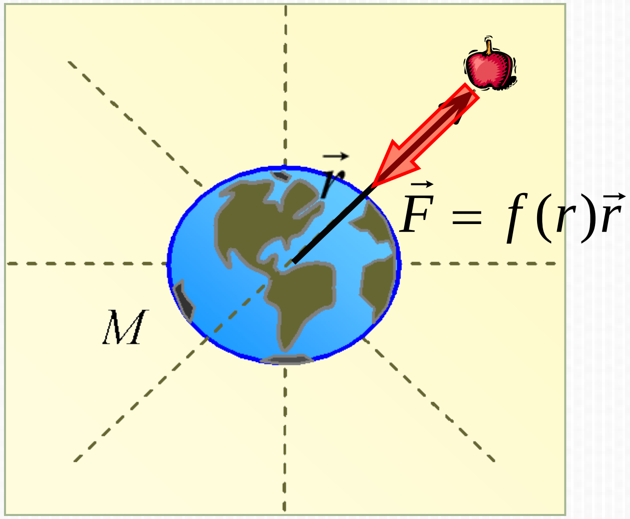
Ze znikania momentu siły wynika: $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$ i $\vec{L} = \overrightarrow{\mathrm{const}}$

zasada zachowania momentu pędu.

Jeśli wypadkowy moment siły działający na cząstkę równa się zeru, $\vec{M} = \vec{0}$, to moment pędu cząstki nie ulega zmianie.

Pola centralne to pola, w których kierunek działania siły przechodzi przez nieruchome centrum, a jej wartość zależy od odległości *r* od tego centrum:

$$\vec{F} = f(r)\vec{r}$$



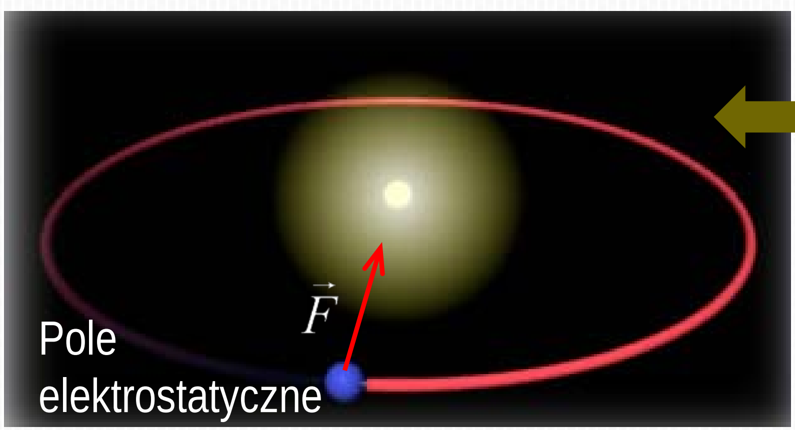
Podczas ruchu ciał w polu sił centralnych, np. w polu grawitacyjnym, $\vec{L}$ jest zachowany:

$$\vec{M} = \vec{r} \times f(r)\vec{r} = f(r)\vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}$$

Ruch ciała odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do $\vec{L}$.

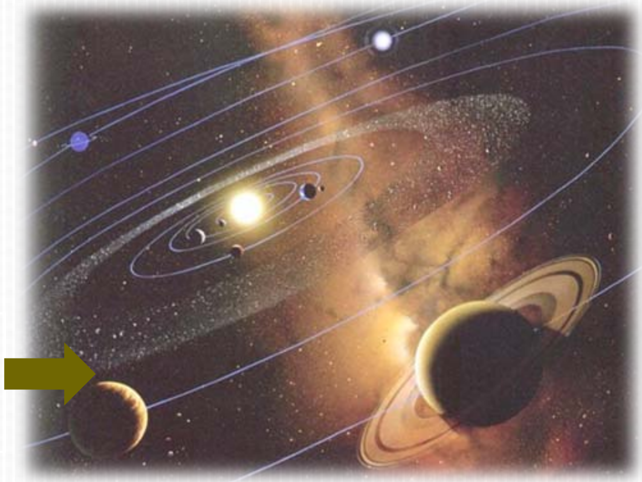
Przykładem jest tu ruch Ziemi po eliptycznym torze wokół Słońca, a ze stałości momentu pędu wynika drugie prawo Keplera, rządzące ruchem planet.

W atomie wodoru moment pędu elektronu krążącego wokół jądra również jest stały – jego ruch odbywa się bowiem w polu kulombowskim.



$$\vec{F} = k\frac{Qq}{r^2}\hat{r},$$

$$\vec{F}_g = -G\frac{Mm}{r^2}\cdot\hat{r}$$

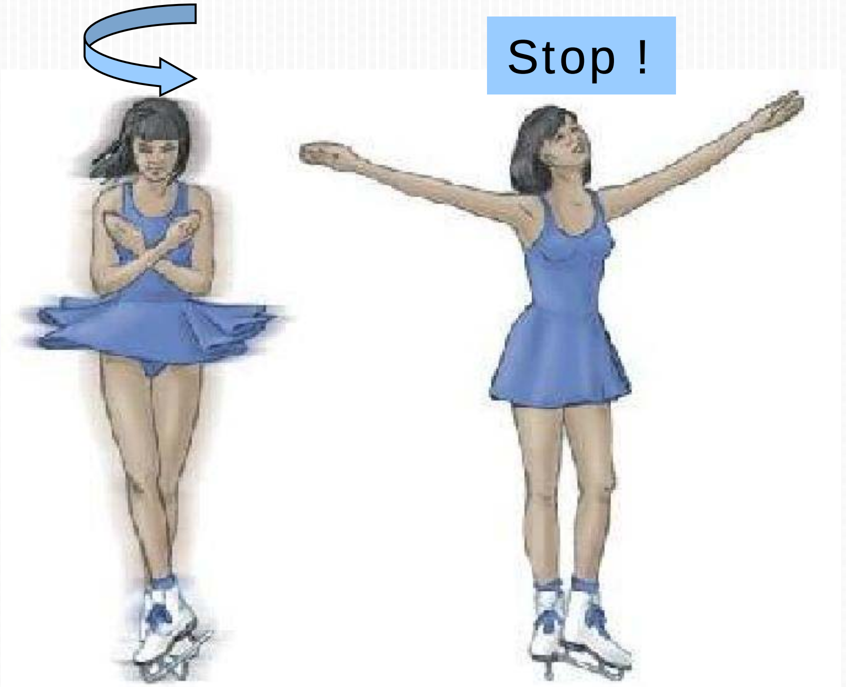


Zasadę zachowania momentu pędu możemy rozszerzyć na układ cząstek.

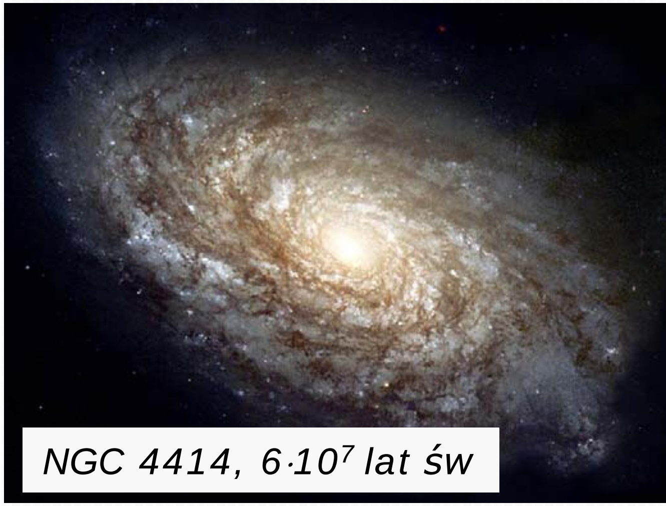
Moment pędu układu $\vec{L} = \sum \vec{L}_i$ jest zachowywany, jeśli wypadkowy moment sił zewnętrznych $\vec{M}_z = \sum \vec{M}_{iz}$ jest równy zeru (momenty sił wewnętrznych znoszą się).

Jeśli moment pędu zapiszemy w postaci $\vec{L} = I\vec{\omega}$, to widać, że gdy ma być on zachowany, zmianie momentu bezwładności musi towarzyszyć zmiana częstotliwości.

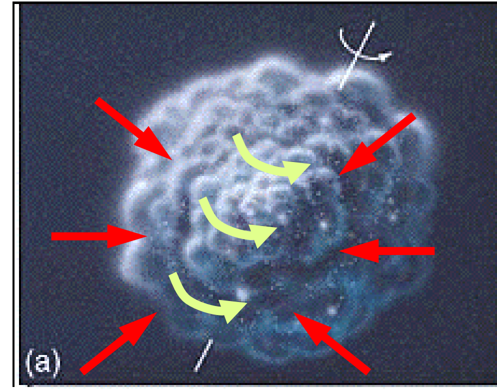
$$\vec{L}_0 = \vec{L}_k = \overrightarrow{const}$$



$$I_0\vec{\omega}_0 = I_k\vec{\omega}_k$$



NGC 4414, $6{\cdot}10^7$ lat św

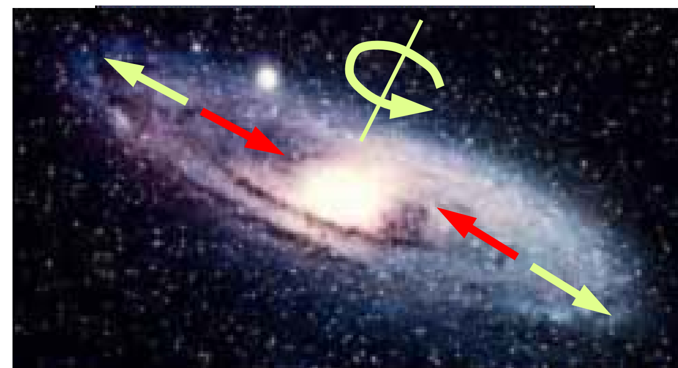


Obłok materii międzygwiezdnej powoli wiruje i zapada się pod wpływem własnej grawitacji $\rightarrow$ *I* maleje, wzrasta prędkość rotacji.

Zasada zachowania momentu pędu

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \overrightarrow{\text{const}}$$

wytłumaczeniem powszechności występowania dysków we Wszechświecie.



M31 (galaktyka Andromedy, grupa lokalna)

Najodleglejsza galaktyka

W płaszczyźnie równikowej obłoku rotacja (siła odśrodkowa) przeciwdziała sile grawitacji. Gaz z dala od tej płaszczyzny przemieszcza się ku centrum obłoku. Po pewnym czasie cała materia obłoku znajdzie się w płaszczyźnie równikowej.

Określenie całki – konieczne uzupełnienie

Już wkrótce poznacie całki na analizie matematycznej.

Niech f(x) będzie funkcją określoną w pewnym przedziale I.

Każdą funkcję F(x) różniczkowalną w przedziale I i spełniającą w całym przedziale związek: F′(x)=f(x) nazywamy funkcją pierwotną funkcji f(x) w przedziale I.

Dana funkcja f(x) ma nieskończenie wiele funkcji pierwotnych różniących się stałą C: $[F(x)+C]' = f(x)$

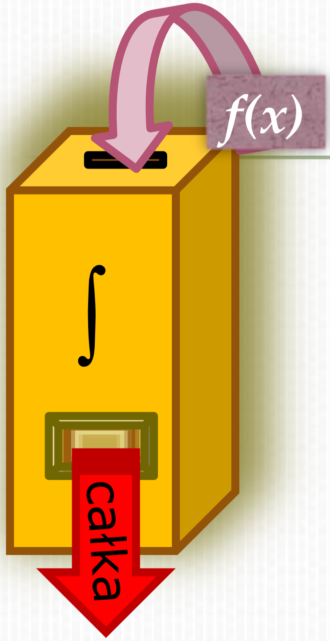
Wyrażenie ogólne:

$$F(x)+C=\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

nazywamy ***całką nieoznaczoną*** *funkcji f(x).*

Całka oznaczona *funkcji f (x):*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)}$$



Szukamy takiej funkcji $F(x)$,

żeby jej pochodna $F'(x) = f(x)$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

$$\int b\, f(x)\,dx = b\int f(x)\,dx, \quad b = const.$$

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$

W trakcie wykładu możesz spotkać się z następującymi całkami:

$$\int dx = x + C\,,$$

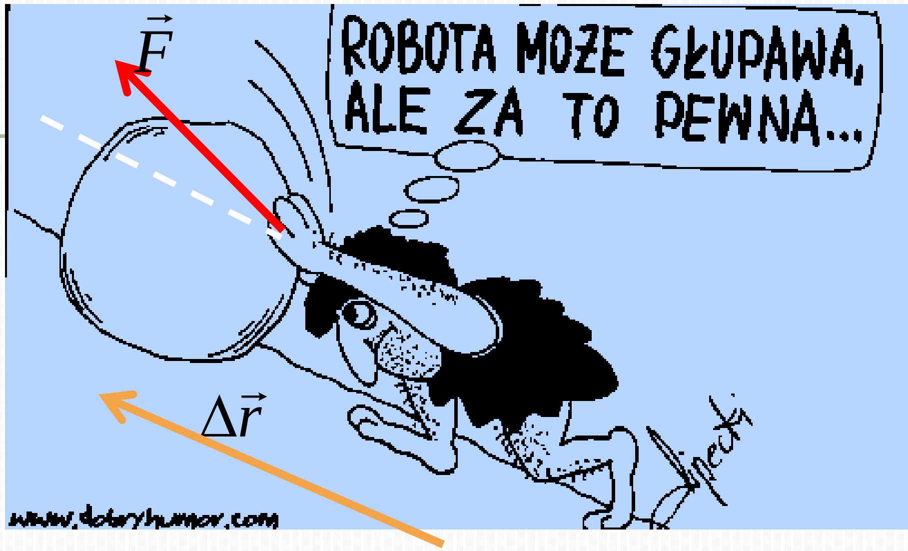
$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C\,,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C\,,$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C\,,$$

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C,$$

2.12. Praca



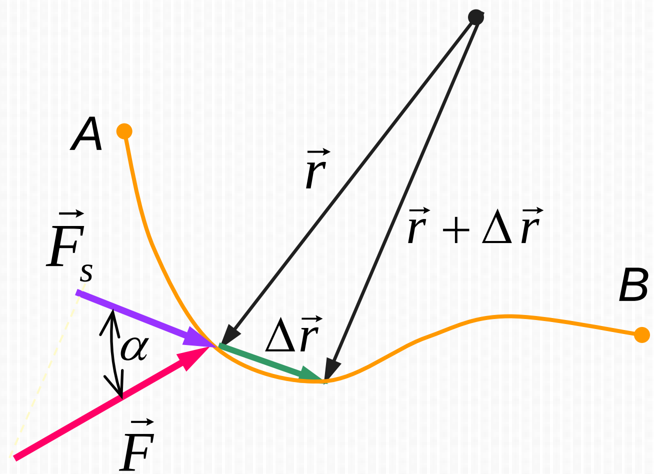
Wzór na pracę wykonaną przez stałą siłę $\vec{F}$ przy przemieszczeniu $\Delta\vec{r}$ ciała:

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}}$$

jest iloczynem skalarnym:

$$W = |\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{r}| \cos\alpha,$$

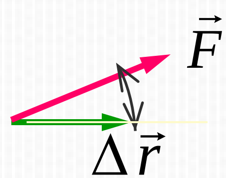
gdzie α – kąt jaki tworzą wektory $\vec{F}$ i $\Delta\vec{r}$.



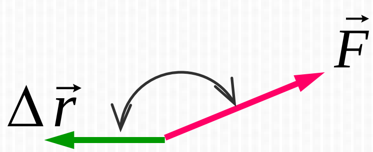
Z powyższego wynika, że tylko składowa siły w kierunku przemieszczenia wykonuje pracę.

Praca może być dodatnia lub ujemna – zależnie od wartości kąta α.

Praca dodatnia:



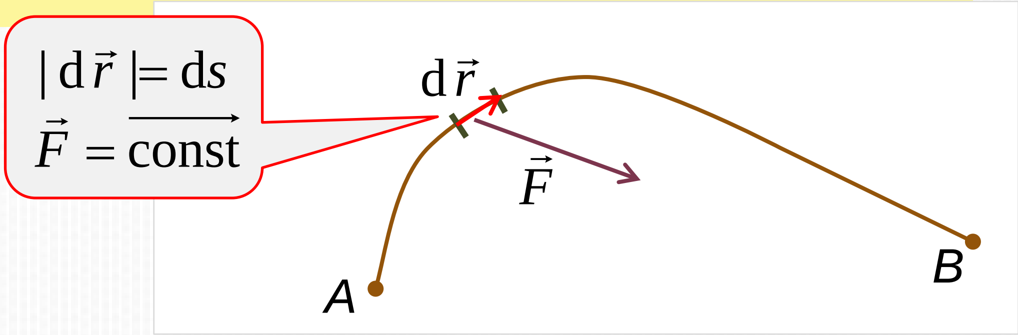
Praca ujemna:



Nie zawsze siła jest stała!

Jeśli mamy do czynienia ze **zmienną siłą**, pracę możemy obliczać dzieląc całkowite przemieszczenie $\Delta\vec{r}$ na bardzo małe, elementarne przemieszczenia $d\vec{r}$, aby dla każdego z nich można było uważać siłę za stałą. Wówczas całkowita praca równa jest sumie prac elementarnych:

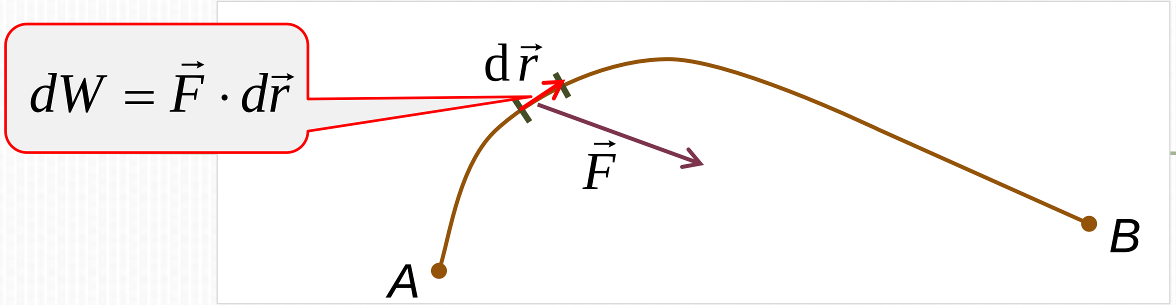
$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$



Przy bardzo małych elementarnych przemieszczeniach $|d\vec{r}| = ds$, gdzie ds jest elementem drogi.

Wówczas praca elementarna dW siły $\vec{F}$ na elementarnym przemieszczeniu $d\vec{r}$ jest iloczynem stycznej składowej siły F_s i elementarnej drogi ds:

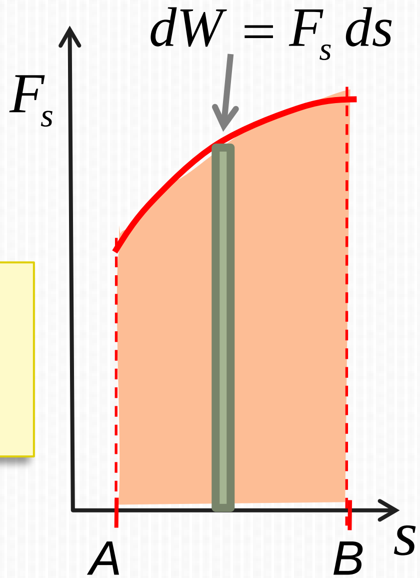
$$\boxed{dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_s\, ds,} \qquad \text{gdzie} \quad F_s = |\vec{F}| \cos\alpha.$$



Aby obliczyć pracę na przemieszczeniu skończonym, pomiędzy punktami *A* i *B* trzeba zsumować wszystkie prace elementarne, czyli policzyć całkę wzdłuż toru *AB* (na drodze *s* od *A* do *B*):

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F_s \, ds$$

F_S - składowa siły styczna do toru



Geometryczna interpretacja pracy:

praca jest równa polu powierzchni pod krzywą F_s (s).

Praca w ogólności zależy od kształtu drogi !

Przykład 1: praca stałej siły

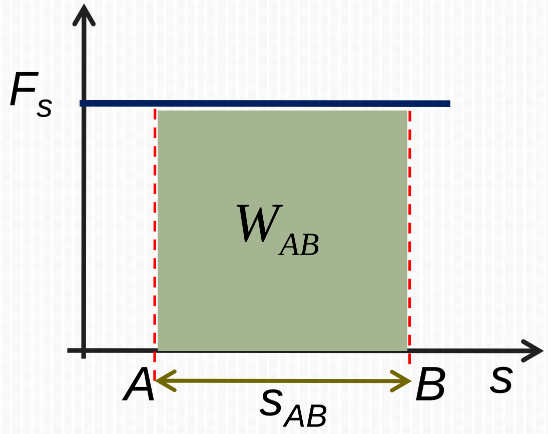
Jaką pracę wykona koń na drodze s_{AB} ciągnąc wóz stałą siłą $\vec{F}_k$?

Zauważmy, że dyszel, a tym samym wektor siły, nachylony jest pod kątem α do przemieszczenia $d\vec{r}$.

Pracę wykonuje tylko składowa

$$F_S = F_k \cos\alpha .$$

Praca obliczona graficznie będzie równa polu : $W_{AB} = F_S \cdot s_{AB} = F_k \cos\alpha \cdot s_{AB}.$

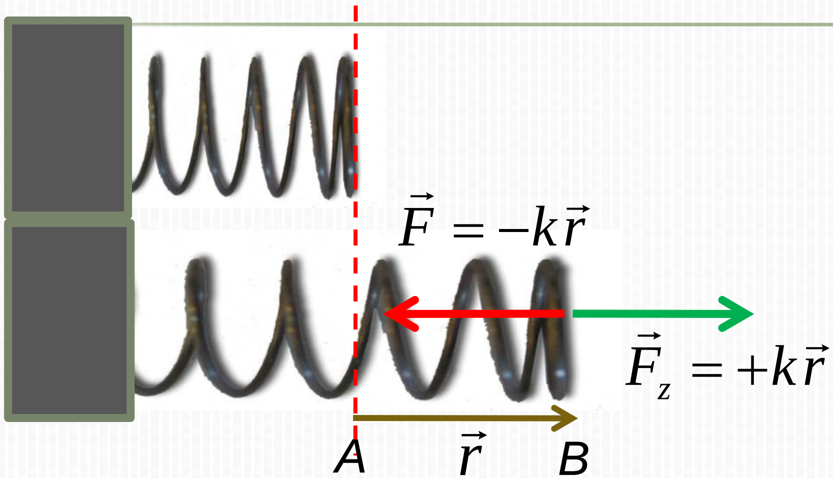


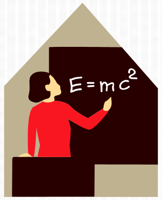
Obliczmy teraz pracę ze wzoru :

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_k \cdot d\vec{r} = \int_A^B F_k \cos\alpha \, ds = F_k \cos\alpha \int_A^B ds = F_k \cos\alpha \cdot s_{AB}$$

Praca konia zależy od długości drogi.

Przykład 2: praca siły sprężystej $\vec{F} = -k\vec{r}$





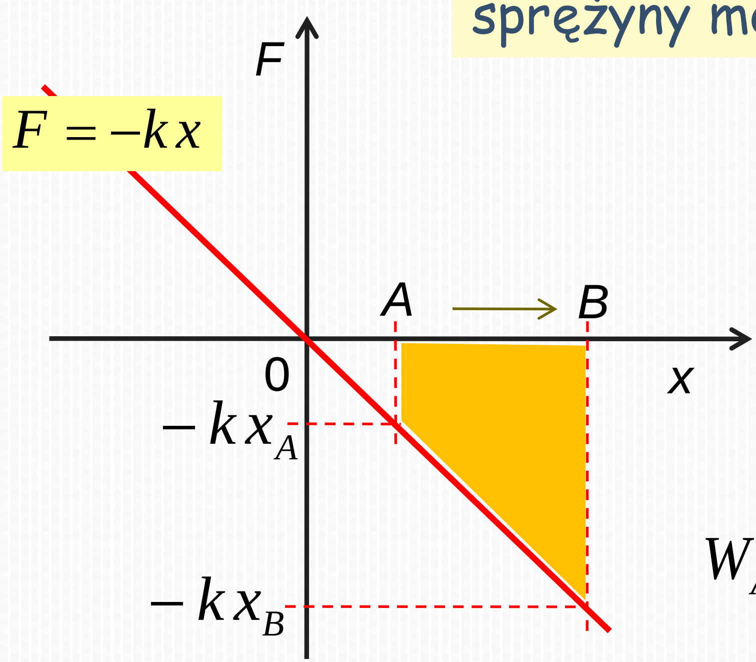
Praca siły sprężystej na drodze *AB* (rozciąganie sprężyny):

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{x_A}^{x_B} kx\,dx = -\tfrac{1}{2}kx_B^2 - (-\tfrac{1}{2}kx_A^2) = \tfrac{1}{2}kx_A^2 - \tfrac{1}{2}kx_B^2 .$$

A jaką pracę wykona siła przyłożona z zewnątrz, która ją rozciąga? Teraz siła będzie miała zwrot zgodny z wektorem przemieszczenia:

$$\vec{F} = -\vec{F}_z, \qquad W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_z \cdot d\vec{r} = \int_{x_A}^{x_B} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx_B^2 - \tfrac{1}{2}kx_A^2 .$$

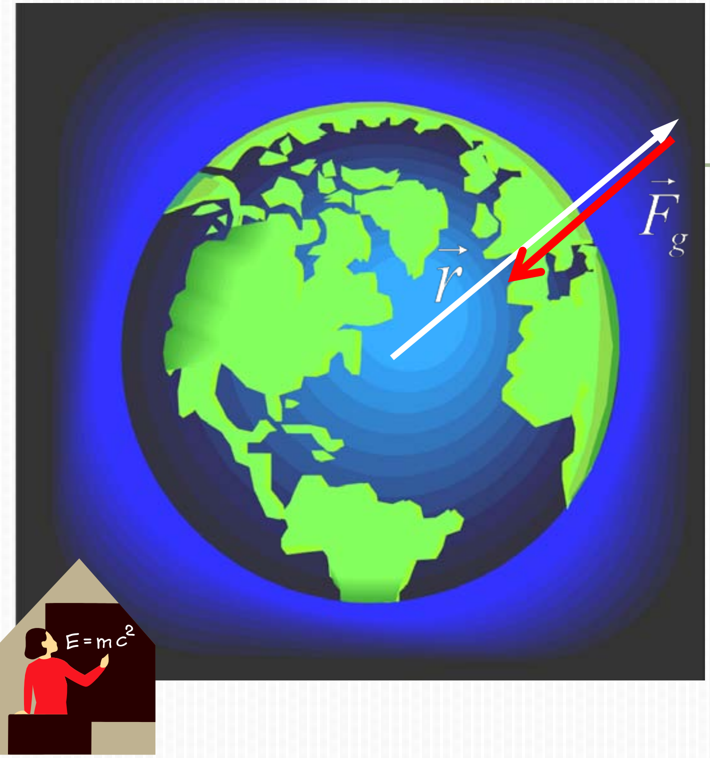
Pracę siły sprężystej wykonaną podczas rozciągania sprężyny możemy również obliczyć metodą graficzną:



Wartość bezwzględna pracy jest równa polu trapezu, a znak ujemny, bo zwrot siły jest przeciwny do zwrotu $d\vec{r}$:

$$W_{AB}=-\tfrac{1}{2}(kx_A+kx_B)\cdot(x_B-x_A)=\tfrac{1}{2}k(x_A^2-x_B^2).$$

Przykład 3: praca siły grawitacji



Praca wykonana przez siłę grawitacji:

$$W_{AB}=\int_A^B \vec{F}_g\cdot d\vec{r}=-\int_A^B G\frac{Mm}{r^3}\,\vec{r}\cdot d\vec{r}=$$

$$=-GMm\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2}=GMm\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)$$