2.12. Moc

W technice często interesuje nas szybkość wykonywania pracy przez dane urządzenie. W tym celu wprowadzamy pojęcie mocy.

Moc (chwilową) definiujemy jako pracę wykonaną w jednostce czasu:

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$$

$[P] = 1\text{W} = 1\text{J/s}$

1KM = 746W

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\,\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v},$$

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

Znając moc jako funkcję czasu $P=P(t)$ możemy znaleźć pracę wykonaną w określonym przedziale czasu:

$$\boxed{W = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt}$$

Przykład

Porsche Carrera:

masa m=1251 kg,
współczynnik tarcia tocznego kół f=0,015,
siła oporu powietrza: $F_{op} = bv^2$, b=0,40 N·s²/m² .

Siła potrzebna do zrównoważenia oporów ruchu w czasie jazdy ze stałą szybkością po poziomej nawierzchni:

$$F_{sil} = F_{tar} + F_{op} = fmg + bv^2 = 180\ \text{N} + (0{,}40\ \text{N}\cdot\text{s}^2/\text{m}^2)\, v^2$$

Moc silnika potrzebna do jazdy z szybkością:

v= 36 km/h : F_{sil} =220 N $\rightarrow$ $P = F_{sil}\, v$ = 220 N · 10 m /s = 2,2 kW= 2,9 KM

v= 110 km/h : F_{sil} =540 N $\rightarrow$ $P = F_{sil}\, v$ = 540 N · 30 m /s = 16 kW = 22 KM

2.13. Siły zachowawcze

Pole grawitacyjne Księżyca

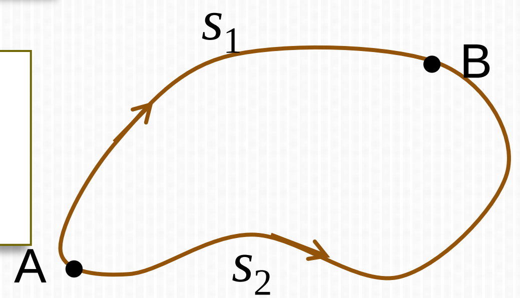
Wiemy, że oddziaływania między ciałami przenoszą się w przestrzeni za pośrednictwem pól fizycznych.

Jeśli praca wykonana przez siły pola przy przemieszczaniu ciała zależy tylko od początkowego i końcowego położenia ciała, a nie zależy od drogi, po której ciało się poruszało, to pole nazywamy zachowawczym.

O siłach takiego pola mówimy, że są zachowawcze.

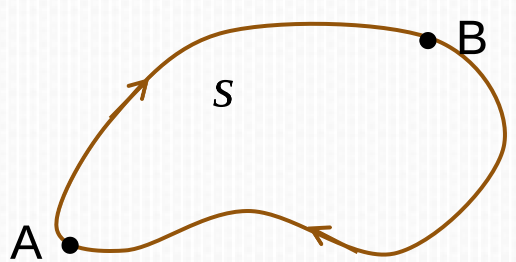
- W przypadku sił zachowawczych kształt toru, po którym porusza się ciało nie ma wpływu na wielkość wykonanej pracy.

$$W_{AB} = \int_{s_1} F_s\, ds = \int_{s_2} F_s\, ds$$

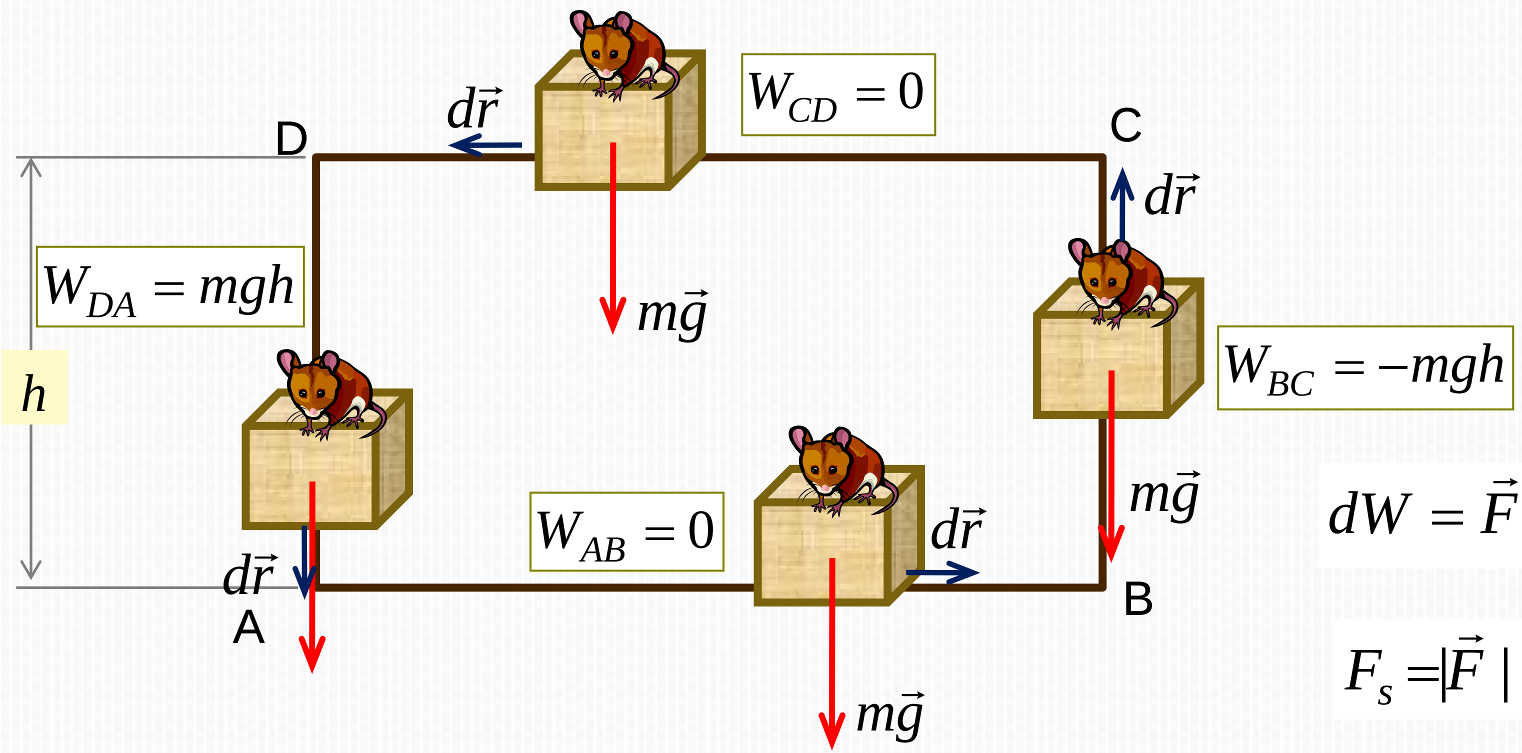


- Praca wykonana przez siłę zachowawczą po zamkniętej pętli jest równa zeru.

$$W = W_{AB} + W_{BA} = \oint_{s} F_s\, ds = 0$$



Praca wykonana przez siłę ciężkości na drodze zamkniętej:



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_s\, ds,$$

$$F_s = |\vec{F}| \cos \angle(\vec{F}, d\vec{r})$$

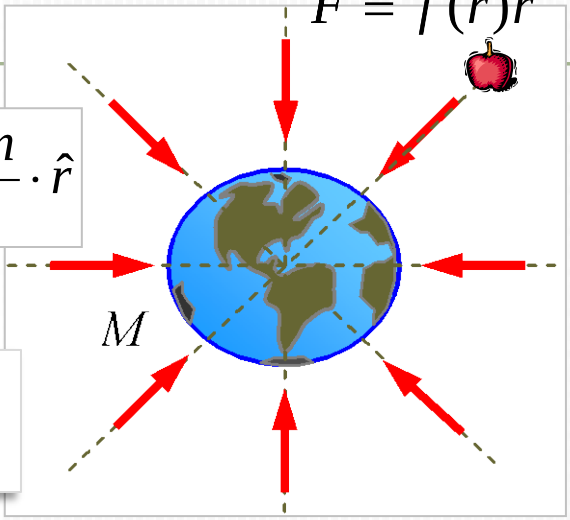
$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = \oint_s m\vec{g}\, d\vec{r} = 0$$

Praca wykonana przez siłę ciężkości, która jest siłą zachowawczą, po zamkniętej pętli jest równa zeru.

Polami zachowawczymi są wszystkie pola centralne, tj. pola w których siła da się przedstawić w postaci:

$$\vec{F} = f(r)\vec{r}$$

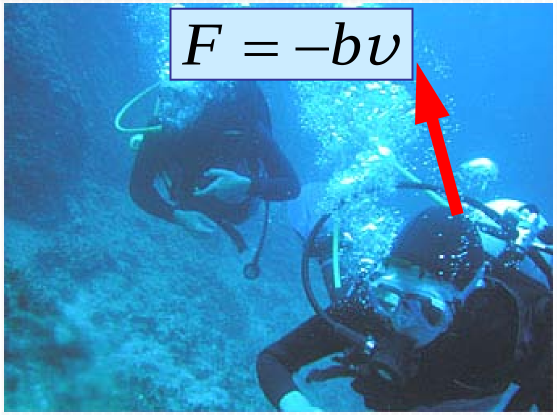
$$\vec{F}_g = -G\,\frac{Mm}{r^2}\cdot\hat{r}$$

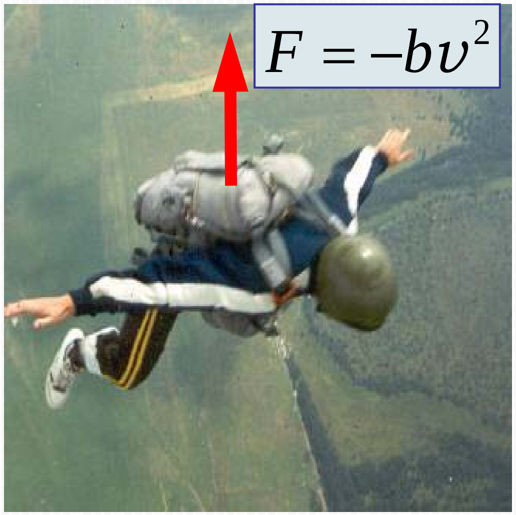


Przykładem pól centralnych (a tym samym zachowawczych) są: pole grawitacyjne, pole kulombowskie.

Siły oporu lepkiego, siła tarcia kinetycznego nie są siłami zachowawczymi.

Praca tych sił zależy od drogi.





2.14. Energia kinetyczna

Zmiana prędkości ciała wymaga wykonania pracy.

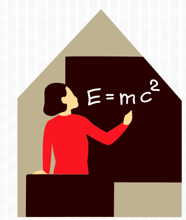
Zapiszmy pracę elementarną i sprowadźmy ją do postaci:

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = m\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}\vec{r} =$$

$$= m\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}\cdot \vec{\upsilon}\,\mathrm{d}t = m\vec{\upsilon}\cdot \mathrm{d}\vec{\upsilon}.$$

Obliczmy teraz pracę na skończonej drodze od *A* do *B:*

$$\boxed{W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B m\vec{\upsilon}\cdot \mathrm{d}\vec{\upsilon} = \frac{m\upsilon_B^2}{2} - \frac{m\upsilon_A^2}{2}}$$



Wielkość występującą po prawej stronie wyrażenia daną wzorem:

$$\boxed{E_k = \frac{m\upsilon^2}{2}}$$

nazywamy **energią kinetyczną** ciała.

Przyspieszający pojazd kosmiczny – energia kinetyczna rośnie.

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

- Energia kinetyczna jest tylko funkcją prędkości ciała.
- Energia kinetyczna jest zawsze dodatnia lub równa zeru (ciała w spoczynku).

Zmiana energii kinetycznej wiąże się z pracą sił, które rozpędzają ($W>0$) lub hamują ($W<0$) ciało.

$$\Delta E_k = W$$

Położenie i prędkość określają stan mechaniczny ciała – są to parametry stanu.

Energia kinetyczna zależy tylko od prędkości, czyli jest **funkcją stanu**.

Lądowanie promu kosmicznego – jego energia kinetyczna maleje.

2.13. Energia potencjalna

Podczas podnoszenia kamienia ze stałą prędkością jego energia kinetyczna nie ulega zmianie, ale wykonana przez sportowca praca zmienia jego stan mechaniczny – zmienia się położenie kamienia.

Podnosząc kamień działa on <u>stałą</u> siłą równoważącą jego ciężar:

$$\vec{F} = -m\vec{g}$$

i wykonuje pracę:

$$W_{AB} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = -m\vec{g} \cdot \Delta\vec{r} = mgH\,.$$

Uwaga: cosinus kąta między wektorami $d\vec{r}$ *i* $\vec{g}$ *jest równy* -1.

Lub ze wzoru

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{r} = mg\int_0^H dr = mgH$$

Wyrażenie, które otrzymaliśmy po prawej stronie: mgH kojarzy się zapewne każdemu z energią potencjalną.

Energię związaną z położeniem jakiegoś ciała względem innego ciała nazywamy jego **energią potencjalną**.

Jeśli praca wykonana przez siłę zachowawczą pola $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ (będącą jedynie funkcją położenia) przy przemieszczeniu cząstki da się wyrazić w postaci:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\left[E_p(B) - E_p(A)\right]$$

gdzie E_p jest jednoznaczną funkcją skalarną położenia $\vec{r}$, niezależną od czasu, ciągłą i mającą ciągłe pochodne,

to funkcję $E_p = E_p(\vec{r})$ nazywamy **energią potencjalną ciała** w położeniu $\vec{r}$, w polu siły zachowawczej $\vec{F}(\vec{r})$.

Z powyższej definicji widać, że zmiana energii potencjalnej ΔE_p ciała jest równa ujemnej pracy wykonanej przez siłę zachowawczą przy zmianie położenia cząstki z punktu *A* do *B*:

$$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = -\int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

Jeśli ustalimy punkt początkowy A to praca siły zachowawczej zależy tylko od punktu końcowego B i jest tylko funkcją położenia tego punktu $\vec{r}$.

Czyli energia potencjalna ciała w położeniu B zależy od wyboru punktu A i jest liczona względem tego punktu odniesienia.

W dowolnym punkcie *P*

$$E_p(P) = -\int_A^P \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + E_p(A)$$

i jeśli przyjmiemy, że w punkcie odniesienia $E_p(A) = \mathrm{const}$, to:

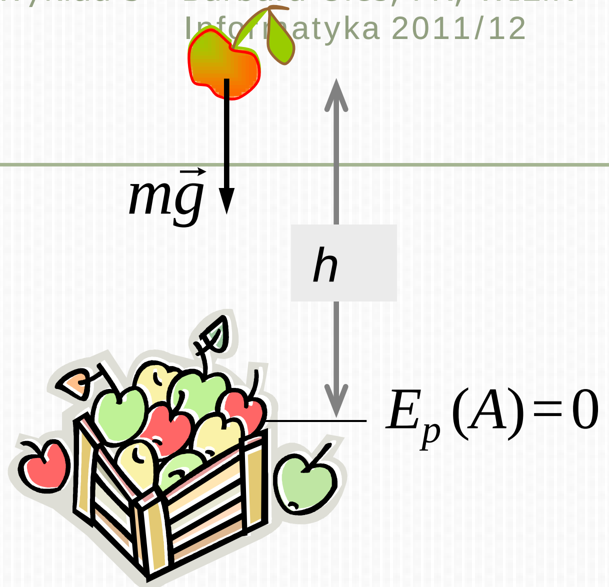
$$\boxed{E_p(P) = -\int_A^P \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + E_p(A) = -\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \mathrm{const}.}$$

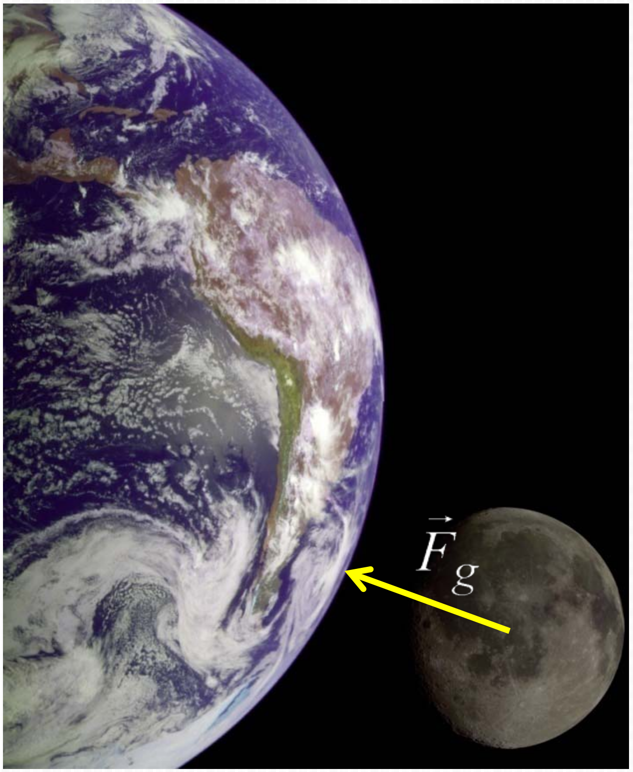
Często punkt *A* wybieramy tak, żeby można było przyjąć, że $E_p(A) = 0$.

Zapamiętajmy: fizyczny sens mają jedynie zmiany E_p; addytywna stała, z dokładnością do której jest określona E_p, nie jest istotna !

Grawitacyjna energia potencjalna (gdy $g \approx$ const):

$$E_p(P) = mgh$$





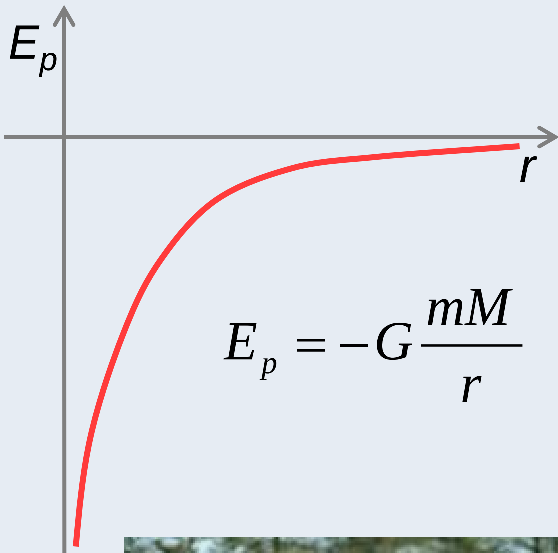
Grawitacyjna energia potencjalna:

$$E_p(P) = -\int_{\infty}^{P} \vec{F}_g \cdot \mathrm{d}\vec{r} + E_p(\infty) =$$

$$= -\int \left(-G\frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\boxed{E_p(P) = -G\frac{mM}{r}}$$

Grawitacyjna energia potencjalna przyjmuje zawsze wartości ujemne. Jej zmiany mogą być dodatnie !



$$E_p = -G\frac{mM}{r}$$

I dodatnia zmiana energii potencjalnej promu

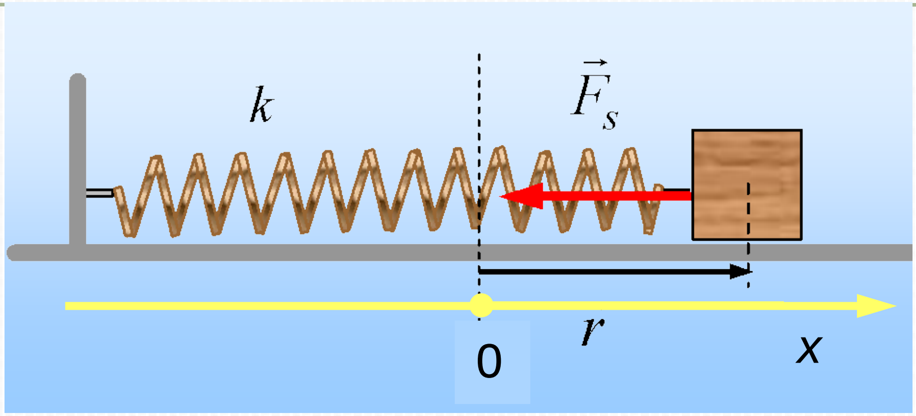
Ujemna zmiana energii potencjalnej jeźdźca

Sprężysta energia potencjalna

Siła sprężysta dana jest wzorem:

$$\vec{F}_s = -k\,\vec{r} = -kx\,\vec{i}$$

gdzie r jest wychyleniem z położenia równowagi końca sprężyny.



Obliczmy energię potencjalną siły sprężystej względem położenia równowagi:

$$E_p(P) = -\int_0^x (-kx\,\vec{i}\,)\cdot \mathrm{d}\vec{r} + E_p(0) = \tfrac{1}{2}kx^2 .$$

$$\boxed{E_p(P) = \tfrac{1}{2}kx^2 .}$$

Podczas rozciągania sprężyny i podczas jej ściskania energia potencjalna rośnie. A kiedy maleje?

Zapamiętaj:

Wyrażenie na energię potencjalną: $\boxed{E_p = mgh}$

nie definiuje energii potencjalnej w ogólności!

Postać wzoru na energie potencjalną zależy od oddziaływania z jakim mamy do czynienia. Np.

$$E_p = -G\frac{mM}{r}, \qquad E_p(P) = \tfrac{1}{2}kx^2.$$

Zmiana energii potencjalnej a praca siły zewnętrznej

Zmiana energii potencjalnej ciała nastąpi również wówczas, gdy pracę wykona siła zewnętrzna równoważąca w każdym punkcie siły pola.

$$\vec{F}_{zew} = -\vec{F}_{pola}$$

Zmiana energii potencjalnej ciała jest równa dodatniej pracy wykonanej przez siły zewnętrzne:

$$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = \int_A^B \vec{F}_{zew} \cdot \mathrm{d}\vec{r}\,.$$

Przekonaliśmy się o tym obliczając pracę wykonaną przez sportowca podnoszącego kamień:

$$\Delta E_p = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = -m\vec{g} \cdot \Delta\vec{r} = mgH\,.$$

Rozciągając sprężynę wykonamy pracę i zmienimy jej energię potencjalną o :

$$\Delta E_p = W_{AB}^{zew} = \int_{x_A}^{x_B} kx\vec{i} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \tfrac{1}{2}kx_B^2 - \tfrac{1}{2}kx_A^2\,.$$

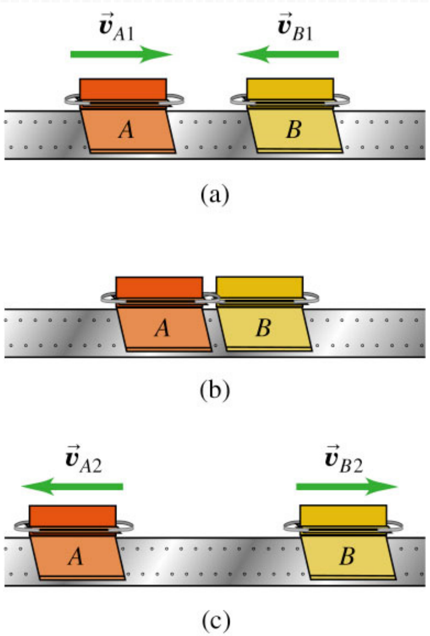
DEMONSTRACJE

Zderzenia elastyczne i nieelastyczne wagoników.

W zderzeniach sprężystych zachowywana jest energia kinetyczna i pęd układu.

$$m_1\vec{\upsilon}_{01} + m_2\vec{\upsilon}_{02} \quad = \quad m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_{01}^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_{02}^2 \quad = \quad \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2$$



W zderzeniach niesprężystych zachowywany jest jedynie pęd układu!

$$\vec{p}_{01} + \vec{p}_{02} \quad = \quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

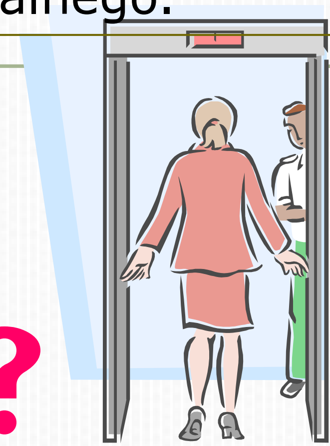
$$m_1\vec{\upsilon}_{01} + m_2\vec{\upsilon}_{02} \quad = \quad m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2$$

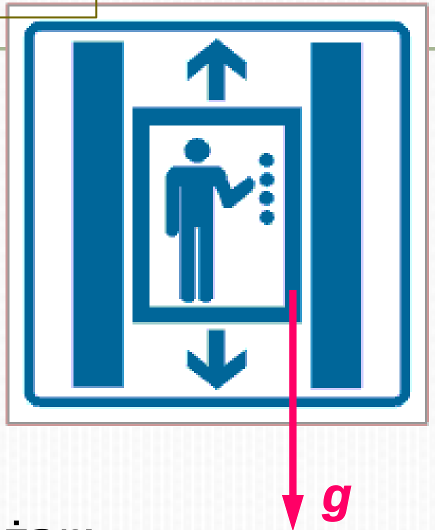
Układy nieinercjalne tj poruszające się z przyspieszeniem względem referencyjnego układu inercjalnego.

Spadek swobodny

Wsiadamy do windy, która w pewnym momencie się urywa i spada swobodnie.

Co odczuwamy ?





Pasażerowie windy jadącej z przyspieszeniem odczuwają działanie siły bezwładności, która zmienia ich pozorny ciężar:

$$\vec{Q}_{poz} = m\vec{g} + \vec{F}_{bez},$$

W spadającej swobodnie windzie z przyspieszeniem g : $\vec{F}_{bez} = -m\vec{g},$

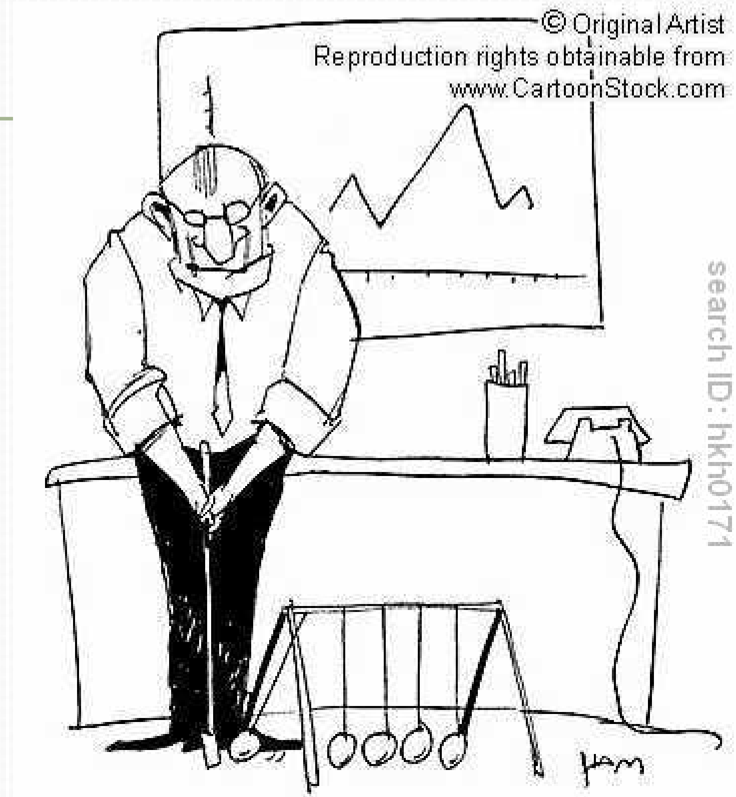
$$\vec{Q}_{poz} = m\vec{g} - m\vec{g} = \vec{0},$$

Siły bezwładności znoszą ciężar ciała! Mamy do czynienia z pozornym stanem nieważkości.

W przypadku spadającej sprężyny „slinky” nie jest ona rozciągana przez siłę ciężkości, ponieważ ciężar sprężyny jest równoważony przez siłę bezwładności.

W układach swobodnie spadających słuszne I i II prawo Newtona.

Wahadło Newtona



Dla małych wychyleń możemy z dobrym przybliżeniem traktować ruch kulek jako ruch liniowy.

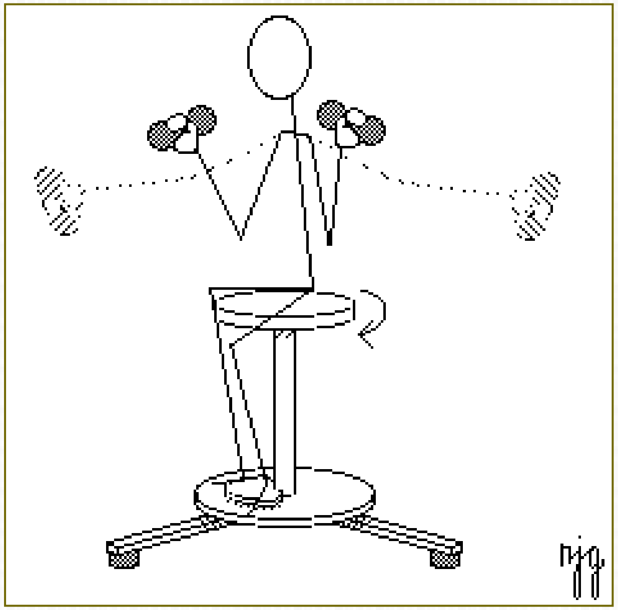
Ruch kulek tłumaczy zasada zachowania pędu układu i energii kinetycznej:

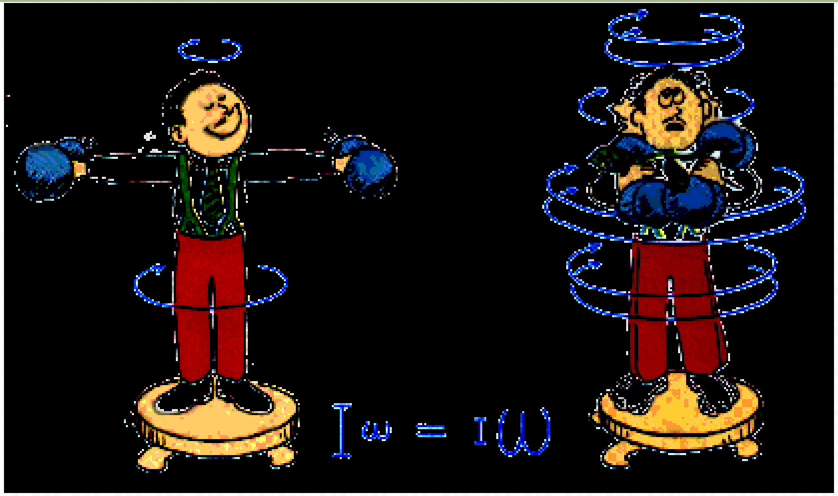
$$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_{0i} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_{ki},$$

$$\sum_{i=1}^{n} E_{ki}^{pocz} = \sum_{i=1}^{n} E_{ki}^{koń}.$$

Zawsze tyle samo kulek odskoczy, co zostanie wychylonych na początku.

Zasada zachowania momentu pędu

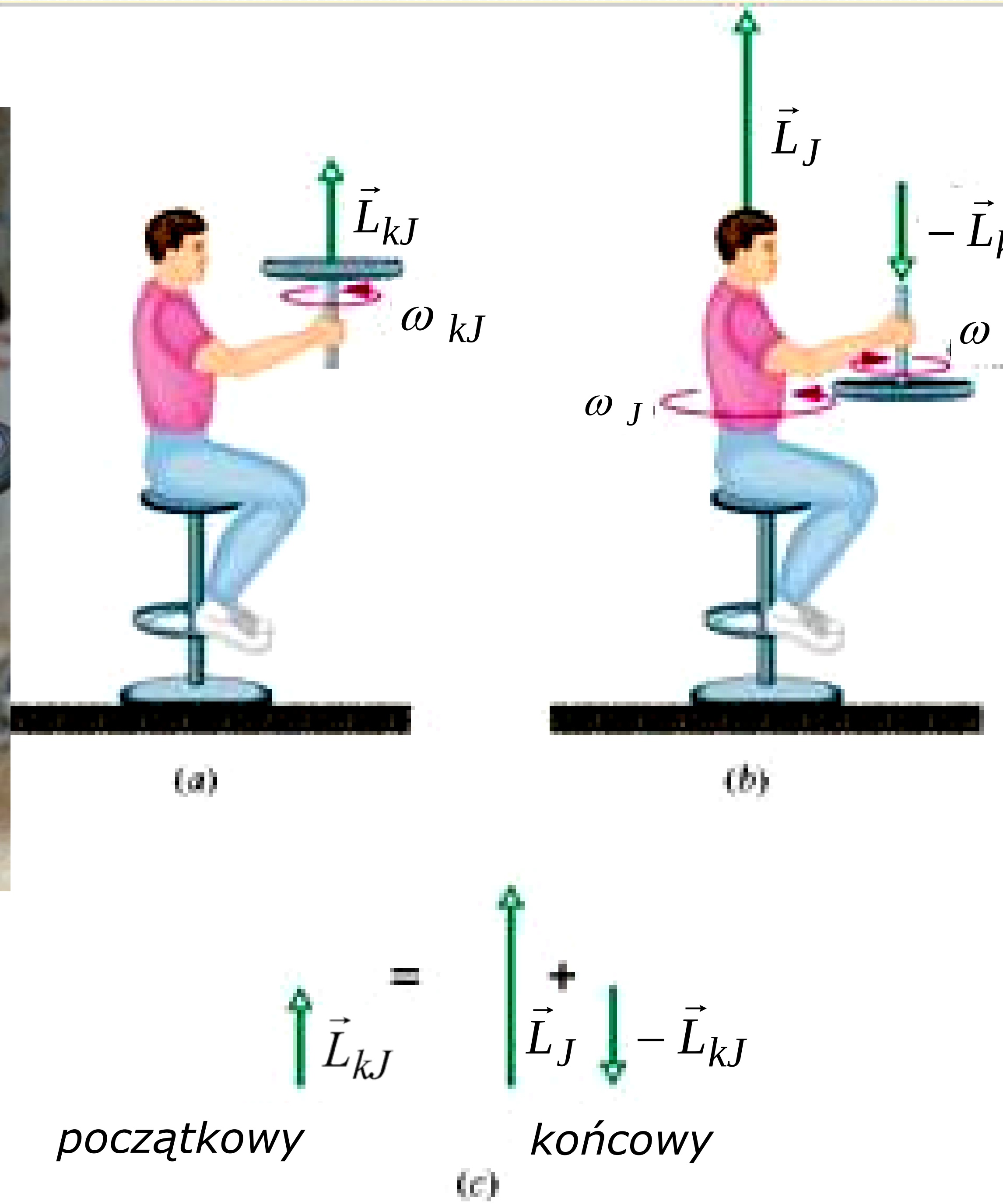




$$\vec{L}_0 = \vec{L}_k = \overrightarrow{const}$$

Moment bezwładności *I* rośnie po wyciągnięciu ramion z obciążnikami o ~2mr², stąd musi zmaleć prędkość kątowa:

$$I_0 \vec{\omega}_0 = I_k \vec{\omega}_k$$


$\vec{L}_{kJ}$
ω_{kJ}
$\vec{L}_J$
$-\vec{L}_{kJ}$
ω_{kJ}
ω_J
(a)
(b)
$\vec{L}_{kJ} = \vec{L}_J + -\vec{L}_{kJ}$
początkowy
końcowy
(c)

Zasada zachowania energii mechanicznej – pętla śmierci

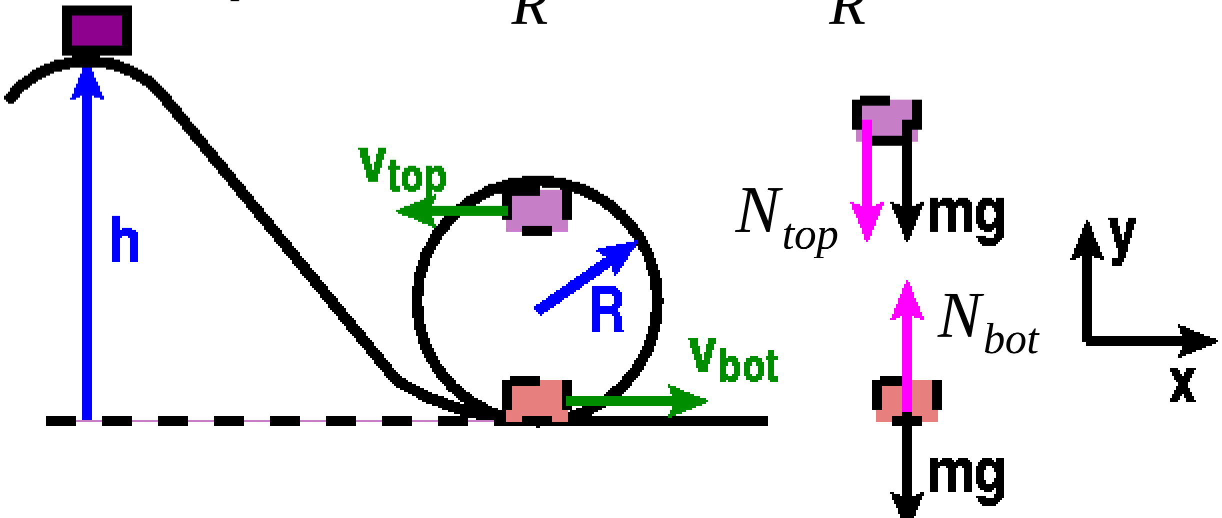
$$mgh = mg(2R) + \tfrac{1}{2} m\upsilon_{\mathrm{top}}^2$$

Siły działające na wózek (u nas kulkę) w czasie pokonywania pętli są równe sile dośrodkowej :

$$F_{doś} = \frac{m\upsilon^2}{R}$$

Siła reakcji szyny N_{top} musi być większa od 0:

$$N_{top} + mg = \frac{m\upsilon_{top}^2}{R} \quad \rightarrow \quad \frac{m\upsilon_{top}^2}{R} - mg > 0 \quad \rightarrow \quad h \geq \tfrac{5}{2} R$$



W dolnym punkcie:

$$mgh = \tfrac{1}{2} m\upsilon_{\mathrm{bot}}^2$$

$$N_{bot} - mg = \frac{m\upsilon_{bot}^2}{R}$$

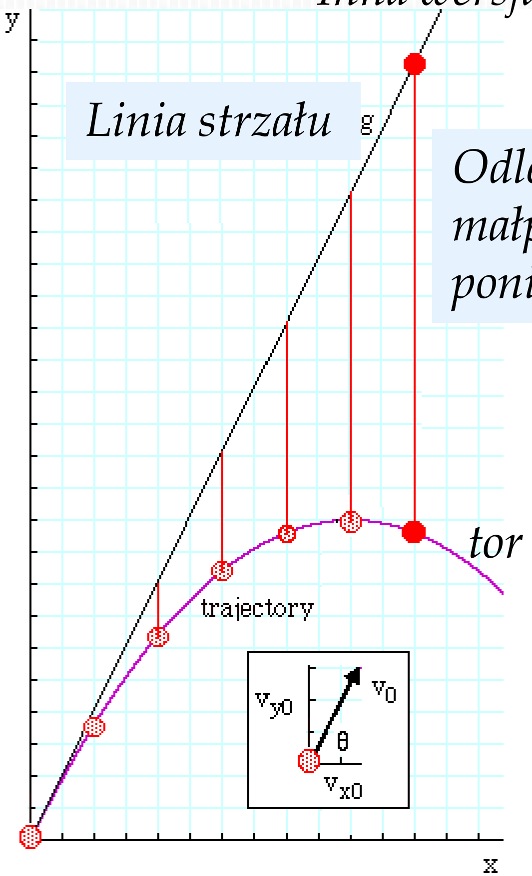
$$N_{bot} = ?\, mg$$

Kulka spadająca i wystrzelona poziomo

Dotkną podłoża zawsze po tym samym czasie, bo o czasie spadku decyduje $a_y=-g$!

Inna wersja tego pokazu, to

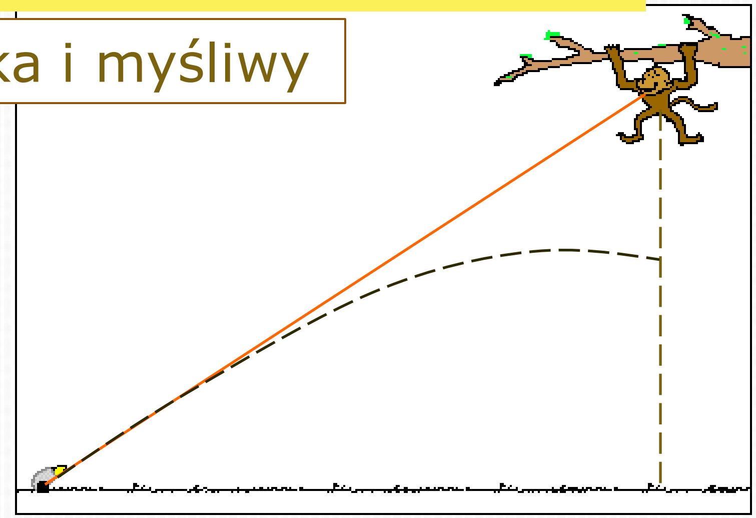
Małpka i myśliwy



Linia strzału

Odległość, na którą małpka spadła poniżej linii strzału

tor



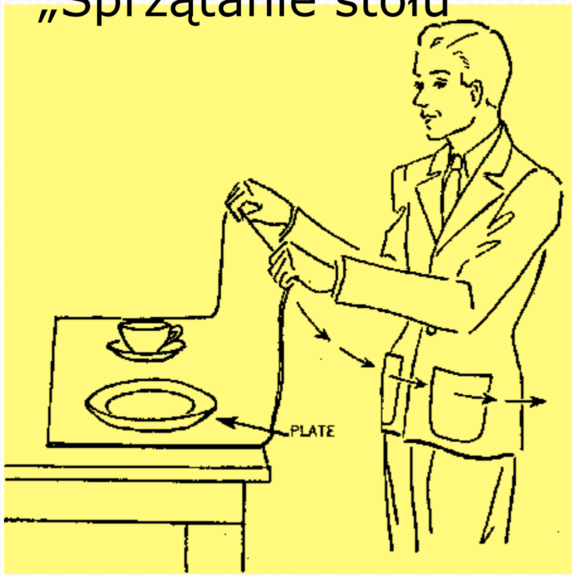
Myśliwy zawsze trafia w spadającą małpkę!

Małpka i kula mają to samo przyspieszenie w kierunku pionowym: $a_y=-g$.

Jeśli małpka spadnie w dół o $\Delta y=gt^2/2$, to kula straci wysokość odpowiadającą tej wielkości.

Ruch kuli w kierunku poziomym jest ruchem jednostajnym prostoliniowym i czas, po którym kula trafi w małpkę zależy od odległości w poziomie myśliwy-małpka.

„Sprzątanie stołu”



Impuls siły.

Z drugiej zasady dynamiki:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \rightarrow \quad \Delta\vec{p} = \int_{t_0}^{t_k} \vec{F} dt,$$

Gdzie po prawej mamy wielkość zwaną impulsem siły (popędem siły):

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t_k} \vec{F} dt,$$

Impuls siły, jakiego doznaje obiekt na serwecie zależy od czasu działania siły:

$$I \approx F\,\Delta t$$

Impuls siły zmienia pęd obiektu na serwecie.

Siła działająca na obiekt zależy od siły tarcia i prawie nie zależy od szybkości obiektu (współczynniki tarcia statycznego i kinetycznego mają zbliżone wartości):

$$F = f\,N$$

gdzie siła normalna N jest stała.

Zatem wartość impulsu zależy tylko od czasu działania siły. Dla krótkiego czasu, jest on mały i mała zmiana pędu obiektu, który nie zdąży się „rozpędzić”.