2.14. Zasada zachowania energii mechanicznej

Stajesz na szczycie góry. Mocujesz deskę, zakładasz gogle i zaczynasz szaleńczy zjazd….

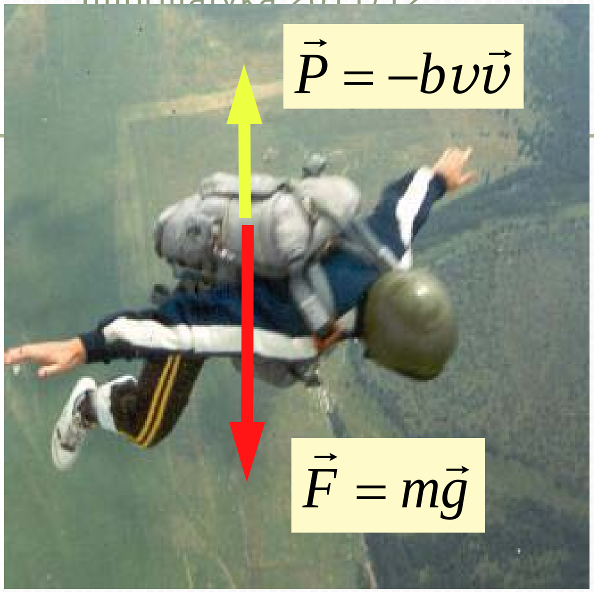
W miarę jak twoja energia potencjalna zamienia się w energię kinetyczną rośnie twoja szybkość.

Podczas ruchu ciał zmianie może ulegać nie tylko ich energia kinetyczna, ale również potencjalna.

Energia mechaniczna ciała /układu ciał to suma energii kinetycznej i potencjalnej :

$$E_m = E_p + E_k \,.$$

Rozpatrzmy przypadek, kiedy na ciało oprócz siły zachowawczej $\vec{F}$ działa siła niezachowawcza $\vec{P}$.



Obliczmy pracę wykonaną przez te siły na przemieszczeniu od *A* do *B*:

$$W_{AB}^{cała} = W_{AB}^{zach} + W_{AB}^{niezach} .$$

Praca siły zachowawczej może być wyrażona poprzez zmianę energii potencjalnej ciała:

$$W_{AB}^{cała} = -\Delta E_p + W_{AB}^{niezach} .$$

Całkowita praca wszystkich sił powoduje wzrost energii kinetycznej ciała: $W_{AB}^{cała} = \Delta E_k$.

Dostajemy: $$E_k^B - E_k^A = E_p^A - E_p^B + W_{AB}^{niezach} ,$$

a stąd: $$E_k^B + E_p^B = E_k^A + E_p^A + W_{AB}^{niezach} .$$

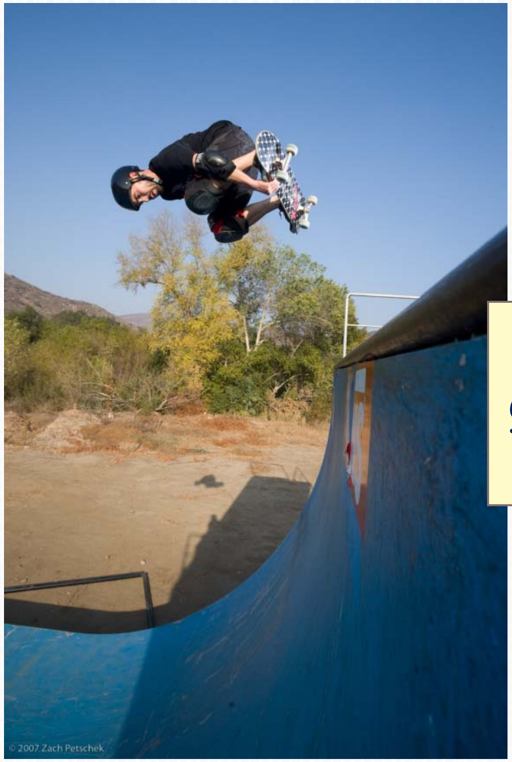
$$\boxed{E_m^B = E_m^A + W_{AB}^{niezach} .}$$

$$\boxed{E_m^B = E_m^A + W_{AB}^{niezach}.}$$

Jeśli $\vec{P} = \vec{0}$, to $W_{AB}^{niezach} = 0$ i mamy: $\boxed{E_m^B = E_m^A.}$

Doszliśmy do **zasady zachowania energii mechanicznej** (*można ją rozszerzyć na układ ciał*):

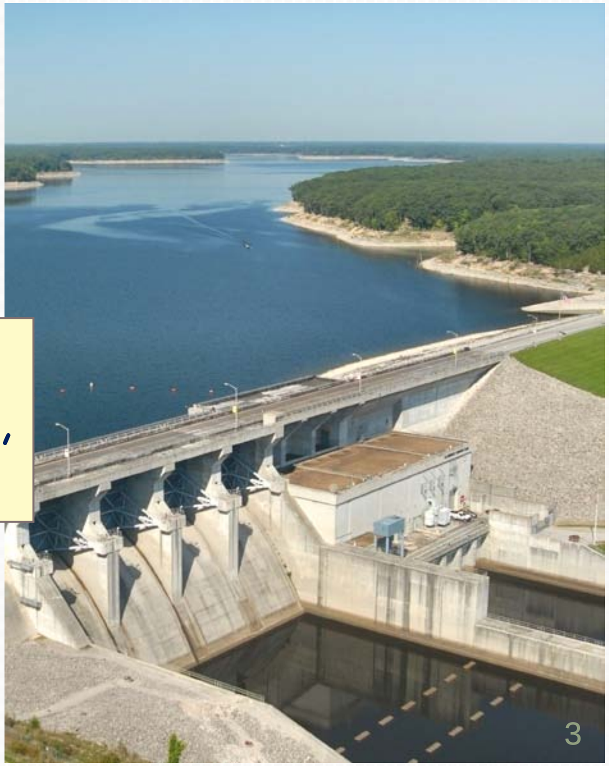
Całkowita energia mechaniczna ciała/układu ciał, na które działają tylko siły zachowawcze, jest stała.



Powyższe prawo może posłużyć do badania ruchu ciał wówczas, gdy rozwiązanie równań ruchu jest zbyt trudne.

Energia mechaniczna w polu grawitacyjnym byłaby zachowana, gdyby zaniedbać opory ruchu.

$$E_m = \tfrac{1}{2}m\upsilon^2 + mgh = \text{const}$$



Energia mechaniczna w polu grawitacyjnym byłaby zachowana, gdyby zaniedbać opory ruchu.

Przemiany energii w czasie skoków na bungee:

l

E_{m0} =grawitacyjna energia potencjalna

$$E_{m0} = mgh$$

(Wysokość liczona od końca rozciągniętej liny, $h=l+\Delta l$)

E_{m0} =energia kinetyczna ↑+ grawitacyjna energia potencjalna ↓

$$mgh = \tfrac{1}{2}m\upsilon^2 + mgy$$

Szarpnięcie liny - lina zaczyna się rozciągać

Δl

E_{m0} =energia kinetyczna ↓ + grawitacyjna energia potencjalna ↓ + sprężysta energia potencjalna↑

$$mgh = \tfrac{1}{2}m\upsilon^2 + mgy + \tfrac{1}{2}k(\Delta l - y)^2.$$

Koniec skoku - maksymalne rozciągnięcie liny Δl

E_{m0} =sprężysta energia potencjalna

$$E_{mk} = \tfrac{1}{2}k\Delta l^2 = E_{m0}$$

2.15. Jak znaleźć siłę, jeśli znana E_p?

Przypomnijmy sobie, że

Energię potencjalną ciała E_p, w polu siły zachowawczej $\vec{F}(\vec{r})$, zdefiniowaliśmy jako jednoznaczną funkcję skalarną położenia $E_p = E_p(\vec{r})$, niezależną od czasu, ciągłą i mającą ciągłe pochodne, spełniającą zależność:

$$\boxed{\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\,\mathrm{d}E_p}$$

Dla przypadku jednowymiarowego (np. oscylatora harmonicznego z ostatniego przykładu):

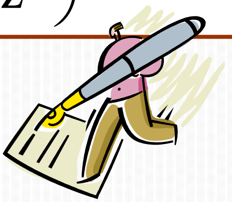
$$\mathrm{d}E_p = -F_x \cdot \mathrm{d}x \qquad \rightarrow \qquad \text{i stąd:} \qquad F_x = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$$

Czyli F_x jest równa ujemnej pochodnej funkcji E_p!

Uogólniając powyższe wyrażenie na trzy wymiary, otrzymujemy wzór pozwalający znaleźć siłę $\vec{F}$, jeśli znana jest funkcja $E_p(x,y,z)$:

$$\boxed{\vec{F} = -\left(\vec{i}\,\frac{\partial E_p}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial E_p}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial E_p}{\partial z}\right) = -\mathrm{grad}\,E_p(x,y,z)\,.}$$

$\frac{\partial E_p}{\partial x}, \frac{\partial E_p}{\partial y}, \frac{\partial E_p}{\partial z}$ - pochodne cząstkowe



Gradient: $$\text{grad} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Jeśli energia potencjalna oscylatora dwuwymiarowego dana jest wzorem: $$E_p(x,y) = \tfrac{1}{2}k(x^2 + y^2)$$

to siła:

$$\vec{F} = -\text{grad}\, E_p(x,y,z) = -\left(\vec{i}\frac{\partial E_p}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial E_p}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial E_p}{\partial z}\right) =$$

$$= -\tfrac{1}{2}k\left[\vec{i}(2x) + \vec{j}(2y) + \vec{k}\cdot 0\right] = -k(x\vec{i} + y\vec{j})$$

Dostaliśmy siłę sprężystą: $$\vec{F} = -k\vec{r}.$$

Jeśli $E_p = E_p(r)$, to

$$\boxed{\vec{F} = -\text{grad}\, E_p(r) = -\frac{dE_p}{dr}\text{grad}\, r = -\frac{dE_p}{dr}\frac{\vec{r}}{r}.}$$

Powyższy wzór można zastosować do znalezienia siły w każdym polu centralnym, jeśli tylko znamy E_p. Np.:

$$E_p = -G\frac{Mm}{r}, \quad \rightarrow \quad \vec{F} = -\frac{dE_p}{dr}\frac{\vec{r}}{r} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

2.16. Siły niezachowawcze a zasada zachowania energii

Jeśli podczas ruchu ciała występuje siła tarcia (lub inna siła niezachowawcza), to energia mechaniczna ulega rozproszeniu.

Praca wykonana przez siłę niezachowawczą:

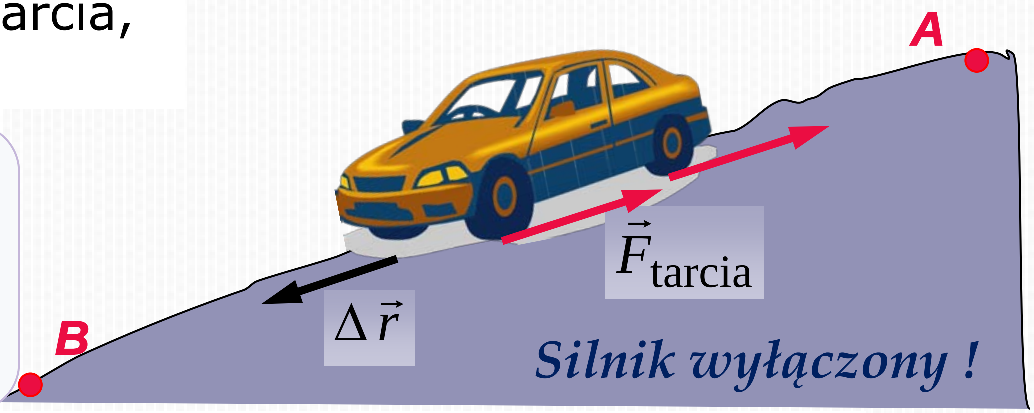
$$\boxed{W_{AB}^{niezach} = E_m^B - E_m^A}$$

jest ujemna, bo zwrot siły, np. tarcia, przeciwny do kierunku ruchu !

Np. dla samochodu na stoku:

$$E_m^A + W_{AB}^{niezach} = E_m^B,$$

$$mgh + (-F_{tarcia}s) = \tfrac{1}{2}mv^2$$



Stracona energia mechaniczna zamieniana jest na energię wewnętrzną przesuwanego ciała i podłoża (sumę energii kinetycznych i potencjalnych cząsteczek).

Jeśli uwzględnimy wzrost energii wewnętrznej ciał, to energia całkowita izolowanego układu jest zawsze zachowywana.

Podsumowanie
na zakończenie omawiania praw zachowania

- prawo zachowania pędu;
- prawo zachowania momentu pędu;
- prawo zachowania energii;

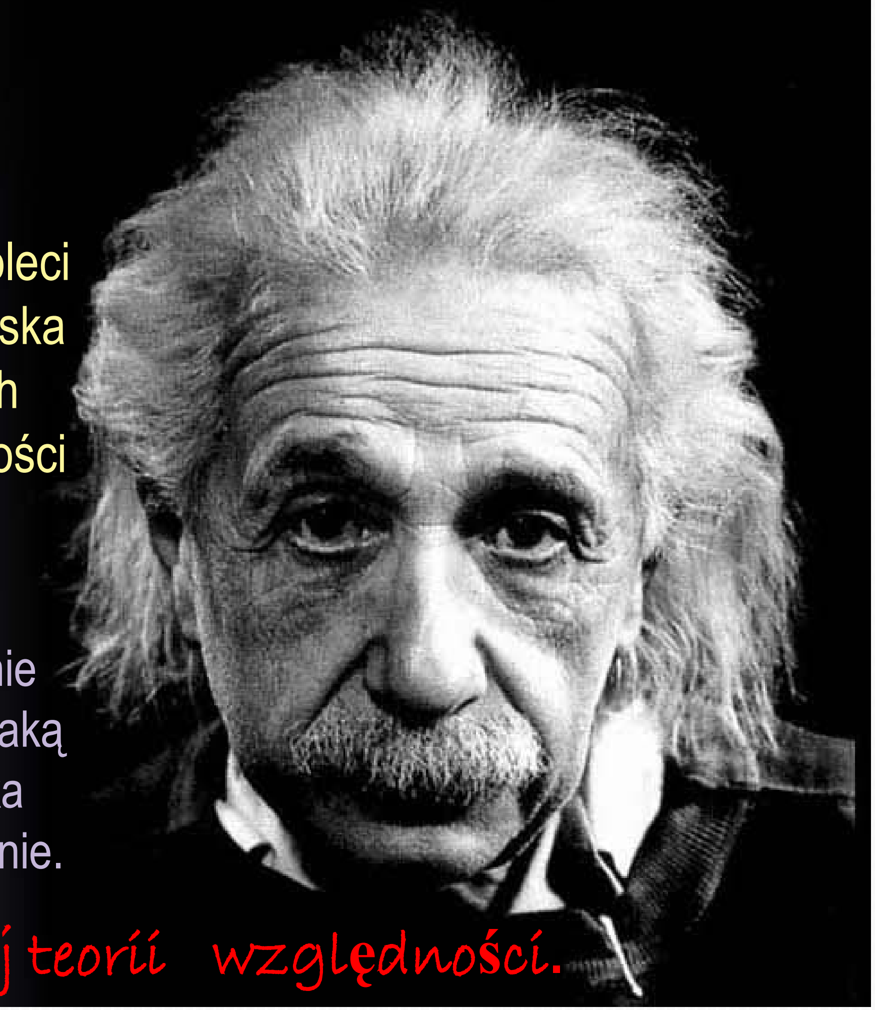
- Nie zależą one od charakteru występujących oddziaływań.

- Za pomocą praw zachowania można uzyskać szereg ważnych danych dotyczących zjawiska, bez konieczności rozwiązywania równań ruchu.

3. Elementy mechaniki relatywistycznej. Szczególna teoria względności

"Everything should be made as simple as possible, but not simpler."

Albert Einstein



Wyniki badań naukowych ostatnich dziesięcioleci pokazały, że klasyczna mechanika newtonowska nie jest w stanie opisać zjawisk występujących przy ruchu ciał z szybkościami bliskimi szybkości światła w próżni *c*.

Np. cząstki przyspieszane w akceleratorach nie mogą przekroczyć górnej granicy szybkości, jaką jest *c*. Gdyby stosowała się do nich mechanika klasyczna, ich szybkość rosłaby nieograniczenie.

Twórca szczególnej teorii względności.

3.1. Transformacja Galileusza. Zasada względności Galileusza

W mechanice klasycznej **transformacja Galileusza** pozwala obliczyć położenie i prędkość ciała w jednym inercjalnym układzie odniesienia, jeśli znamy jego położenie i prędkość w innym układzie inercjalnym.

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{u}t',$$
$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u},$$
$$\vec{a} = \vec{a}\,'.$$

$$t = t',$$

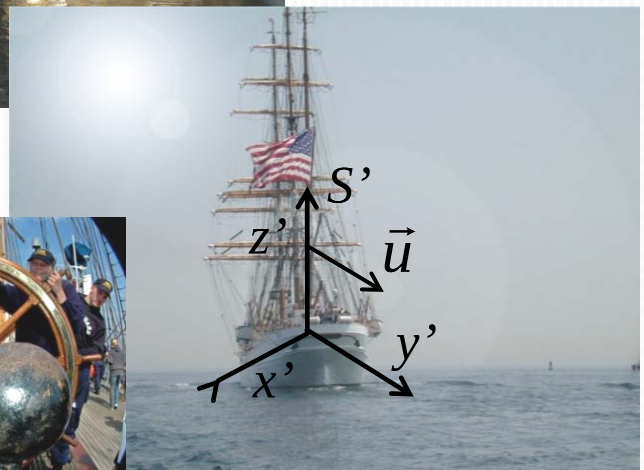
Czas w obu układach płynie tak samo.

W układzie S Beduina położenie motolotni dane wektorem $\vec{r}$.

W układzie S′ jeepa położenie motolotni dane wektorem $\vec{r}\,'$

Jeśli jeep porusza się ze stałą prędkością $\vec{u}$ względem Beduina, to oba układy odniesienia S i S′ możemy traktować jako inercjalne.

Jeśli obserwatorzy z obu układów inercjalnych S i S′ zmierzą jednakowe przyspieszenia danego ciała, to również zmierzą jednakową siłę działającą na to ciało.



Żyroskop, na jego zasadzie opiera się działanie żyrokompasu

W każdym układzie inercjalnym, na przycumowanym statku w porcie, czy statku płynącym po morzu, działanie żyrokompasu podlega tym samym prawom.

Zasada względności Galileusza: Prawa mechaniki są takie same we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

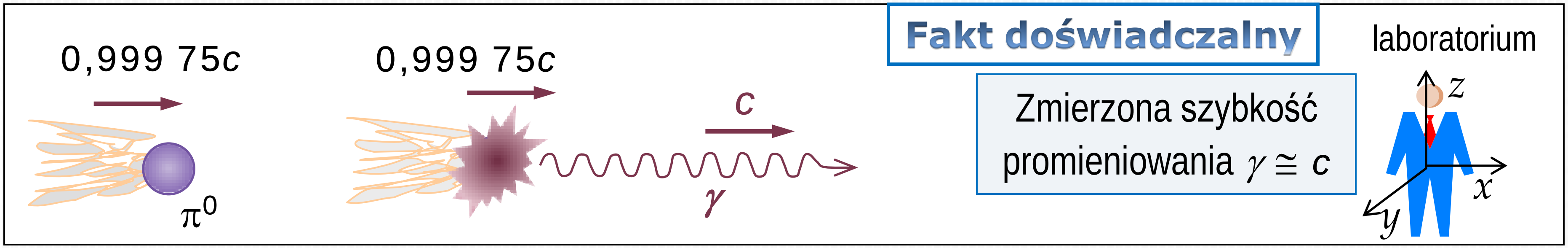
*Oznacza to, że **nie możemy wyróżnić jakiegoś układu** spośród innych za pomocą eksperymentów mechanicznych i twierdzić, że opis ruchu ciał jest w nim bardziej poprawny niż w pozostałych*.

Ograniczenia transformacji Galileusza

Fakt doświadczalny:
szybkość światła w próżni $c = 299\,792{,}458$ km/s jest górną granicą rozchodzenia się sygnałów oraz szybkości ciał i jest jednakowa we wszystkich układach odniesienia.

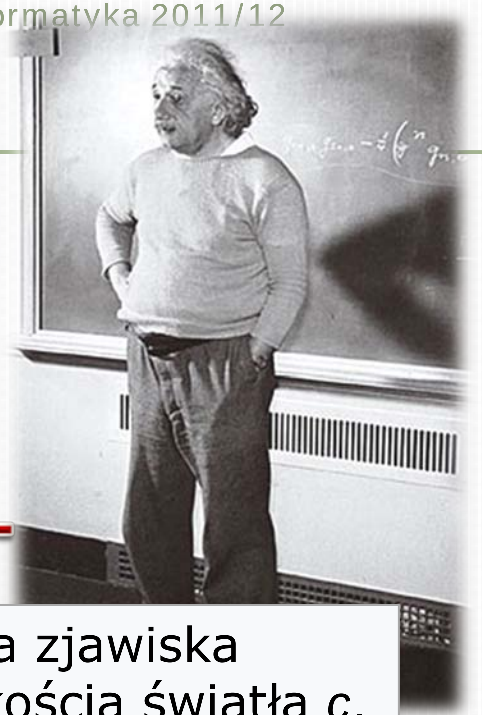
Poruszające się z bardzo dużą szybkością piony π^0 są nietrwałe i rozpadają się z emisją promieniowania γ. Z transformacji Galileusza wynika, że jeśli źródło porusza się z u=0,999 75c, to promieniowanie γ w układzie laboratoryjnym powinno mieć szybkość:

$$c_{lab} = c + u = 0{,}999\,75c + c = 1{,}999\,75c\ !$$



Widzimy, że transformacja Galileusza nie stosuje się w przypadkach, gdy ciała poruszają się z wielkimi szybkościami - relatywistycznymi, bliskimi szybkości światła w próżni, $v \approx c$.

Transformacja Galileusza i prawa fizyki klasycznej nie dają poprawnych wyników ,gdy $v \to c$.



Przy szybkościach większych niż ok. 10%*c* obserwuje się, że **czas i przestrzeń są wzajemnie powiązane** i zależności te są różne dla obserwatorów poruszających się względem siebie.

Szczególna teoria względności stworzona przez Einsteina -

– relatywistyczna teoria czasu i przestrzeni, obejmująca zjawiska zachodzące przy prędkościach porównywalnych z prędkością światła *c*. Jest podstawą do naszego zrozumienia przestrzeni fizycznej i czasu.

Podstawą tej teorii są dwa postulaty:

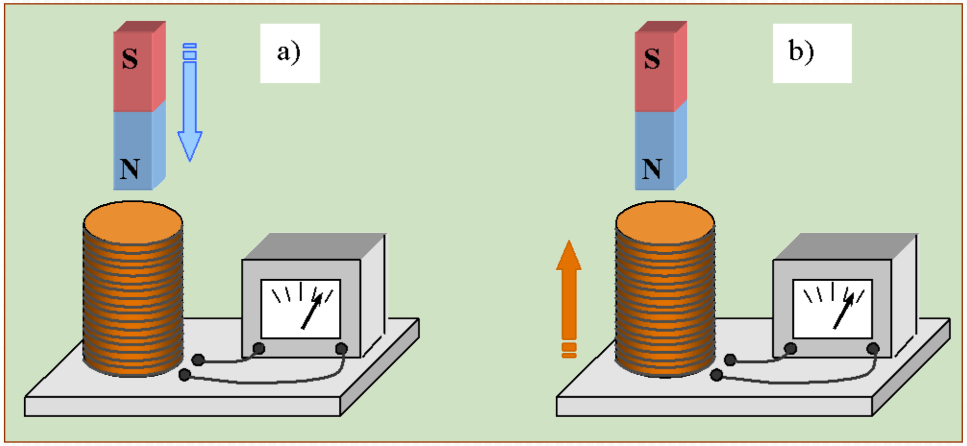
1. *Postulat stałej prędkości światła*: Prędkość rozchodzenia się światła w próżni jest taka sama we wszystkich inercjalnych układach odniesienia i nie zależy od ruchu źródła, ani ruchu obserwatora.
2. *Postulat względności*: Wszystkie prawa fizyki są identyczne we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

Dwa doświadczenia z indukowaniem prądu elektrycznego w zwojnicy za pomocą magnesu sztabkowego:

a) Zmieniamy położenie magnesu względem nieruchomej zwojnicy,

b) Unieruchamiamy magnes i poruszamy podstawkę ze zwojnicą w górę i w dół.

W każdym przypadku miernik wskazuje przepływ w obwodzie wyindukowanego prądu.



Einstein rozszerza zasadę względności Galileusza na **wszystkie prawa fizyki** (np. elektromagnetyzmu czy optyki).

Układy inercjalne są sobie całkowicie równoważne i żaden z nich nie może być wyróżniony.

Nie oznacza to, że obserwatorzy we wszystkich układach inercjalnych uzyskają te same wartości mierzonych wielkości fizycznych. Tylko prawa fizyki, wiążące ze sobą wyniki pomiarów, maja być takie same.

3.2. Względność czasu

Przez zdarzenie rozumiemy takie zjawisko fizyczne (lub jakiekolwiek inne), którego rozciągłość w czasie i przestrzeni możemy pominąć.

Obserwator dowolnemu zdarzeniu przypisuje współrzędne czasoprzestrzenne (trzy współrzędnych przestrzenne x,y,z oraz współrzędną czasową t) , bowiem w teorii względności czas i przestrzeń są ze sobą wzajemnie powiązane.

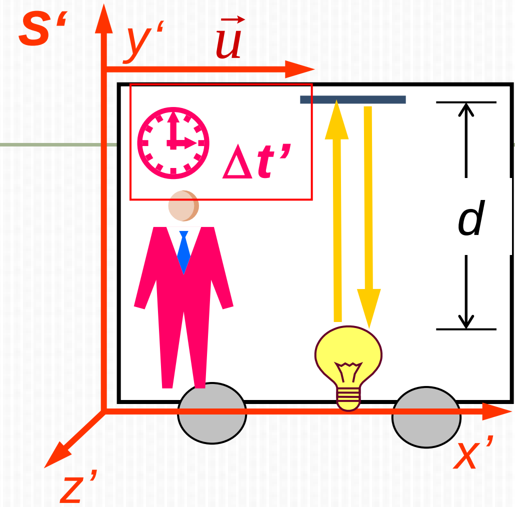
Obserwatorzy poruszający się względem siebie z dużą prędkością, mierząc odstęp czasu między dwoma zdarzeniami otrzymają na ogół różne wyniki.

Inaczej niż w transformacji Galileusza, czas w różnych układach odniesienia płynie inaczej.

W szczególnej teorii względności z postulatu Einsteina, że szybkość światła *c* nie zależy od układu odniesienia wynika zjawisko zwane dylatacją (wydłużeniem) czasu.

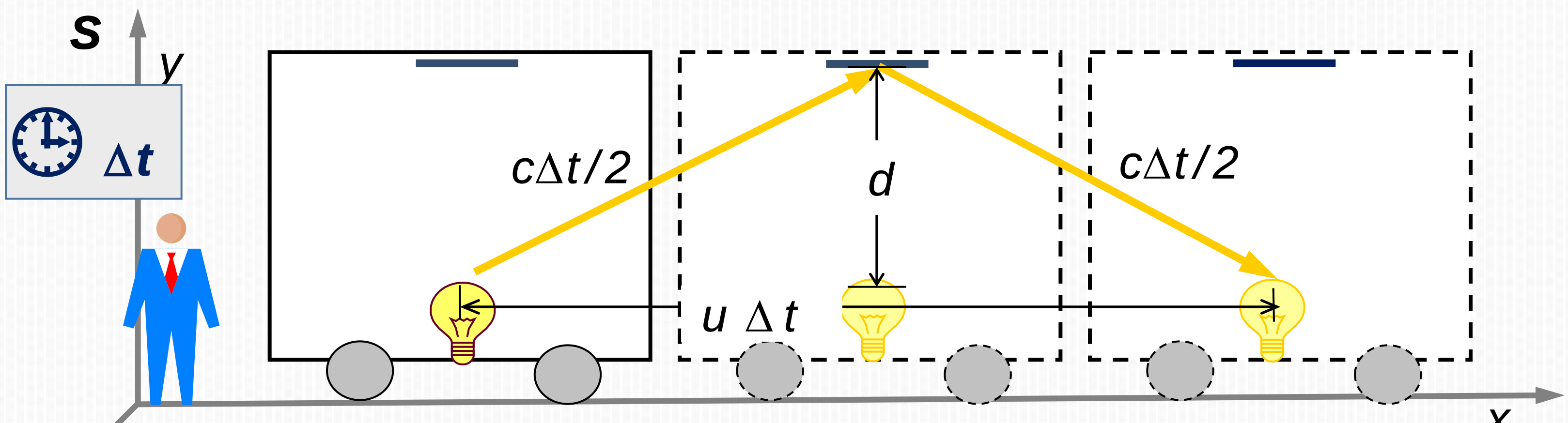
Przykład

Jaki czas biegu impulsu świetlnego zmierzą Jacek i Wacek, jeśli szybkość światła c jest taka sama w układzie każdego z nich?



W układzie odniesienia Jacka:

$$\Delta t' = \frac{2d}{c}$$



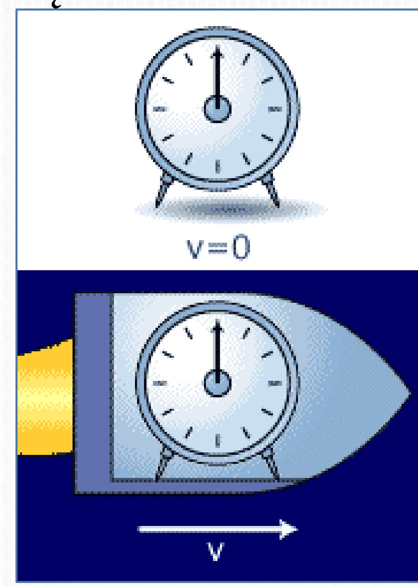
$$d^2 + \tfrac{1}{4}u^2\Delta t^2 = \tfrac{1}{4}c^2\Delta t^2$$

W układzie odniesienia Wacka:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Definiujemy **czas własny** $\Delta\tau = \Delta t'$ – przedział czasu zmierzony dla dwóch zdarzeń, które zaszły w tym samym miejscu w inercjalnym układzie odniesienia.

Pomiar w jakimkolwiek innym inercjalnym układzie odniesienia odstępu czasu między tymi zdarzeniami, da zawsze większą wartość.

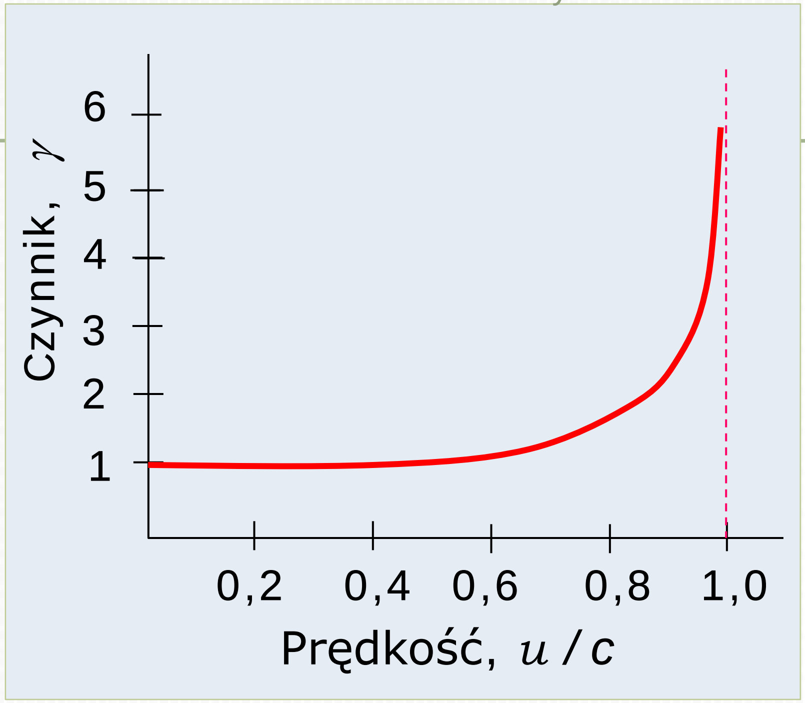


Zjawisko dylatacji czasu :

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Czas własny płynie wolniej – procesy zachodzące w układzie *S*' dla obserwatora w układzie *S* (jego zegar przemieszcza się względem miejsca, gdzie zachodzi zdarzenie) trwają dłużej niż dla obserwatora w układzie *S*' (mierzącego czas własny).

$$\gamma = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$



Sprawdźmy, że ze wzoru na dylatacje czasu wynika, że dla szybkości $u << c$

$\rightarrow \Delta t \approx \Delta\tau$ czasy mierzone w różnych układach są identyczne, tak jak w klasycznej transformacji Galileusza.

Zastanów się:

Wyprowadziliśmy wyrażenie na dylatację czasu przebiegu impulsu świetlnego mierzonego przez Wacka, podczas gdy Jacek w poruszającym się wagonie mierzył czas własny.

A jeśli eksperyment z impulsem świetlnym wykona Wacek, to jaki czas zmierzy on, a jaki Jacek w swoim wagonie? Który z nich będzie mierzył czas własny, a który wydłużony?

Czas własny – odstęp czasu między dwoma zdarzeniami - może być również mierzony przez zegar w układzie S (jeśli zdarzenia zachodzą w tym układzie); wówczas czas wydłużony zmierzy obserwator w układzie S′ poruszającym się względem S.

Gdzie należy uwzględnić zjawisko dylatacji czasu?

earthmagazine.org/mediafiles/i/2009/6/1/491

Błędy w lokalizacji obiektów naziemnych w systemie GPS udało się wyeliminować dopiero wówczas, gdy odpowiedzialni za system inżynierowie uwzględnili za radą fizyków **poprawki relatywistyczne, m.in. dylatację czasu (**7 μs/dzień, przy szybkości satelity *v* = 4 km/s)

http://kresy24.pl/upload/CERN_atom_akcelerator.jpg

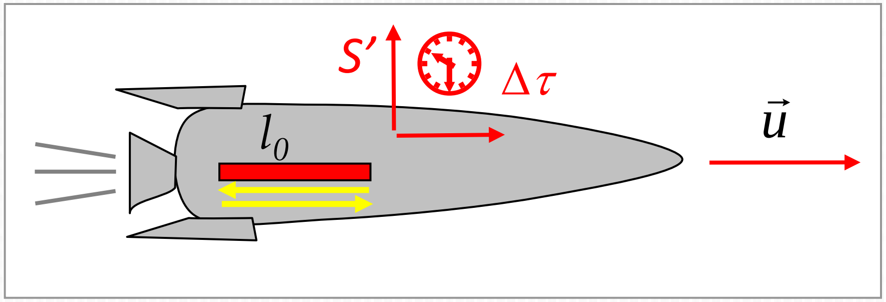
Wielki zderzacz hadronów (LHC) w CERNIe pod Genewą – tunel i urządzenie rejestrujące cząstki

http://www.wiz.pl/obrazki/najwiekszy_04_08.jpg

W akceleratorach cząstki elementarne przyspieszane są do szybkości bliskich *c*. Średni czas życia nietrwałych cząstek w układzie laboratoryjnym ulega wydłużeniu.

3.3. Skrócenie długości

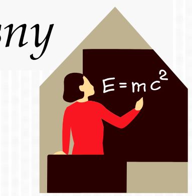
Długość własna ciała - długość zmierzona w inercjalnym układzie odniesienia, w którym ono spoczywa.

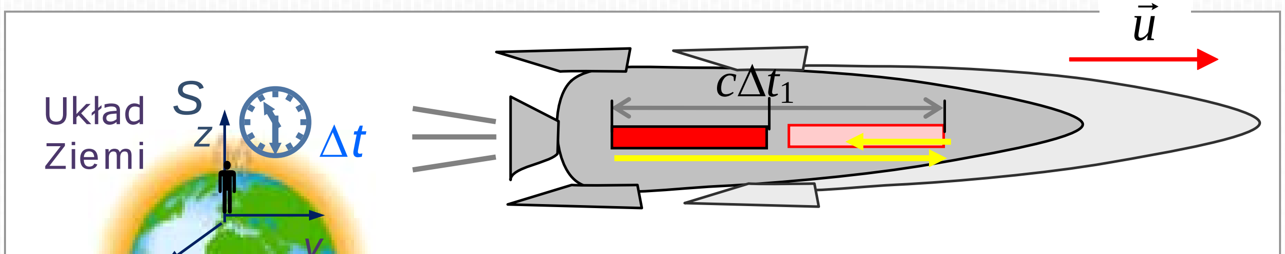


Mierzymy czas przebiegu impulsu świetlnego wzdłuż linijki w układzie rakiety:

$$\Delta\tau = \frac{2l_0}{c}$$

l_0 - *długość własna*,
$\Delta\tau$ - *czas własny*





$\rightarrow \quad d = c\Delta t_1 = l + u\Delta t_1$

$\leftarrow \quad d' = c\Delta t_2 = l - u\Delta t_2$

oraz w układzie obserwatora na Ziemi:

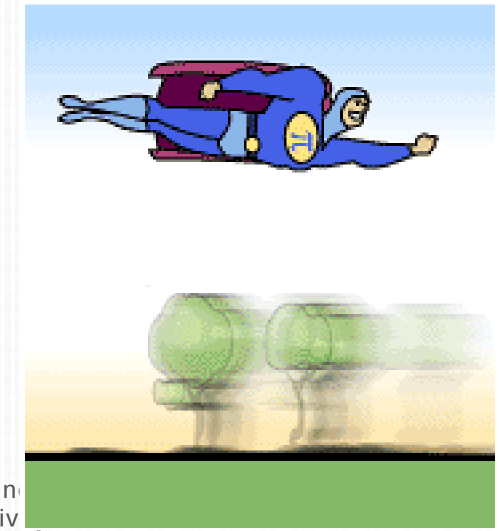
$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{l}{c-u} + \frac{l}{c+u} = \frac{2l}{c\left(1-u^2/c^2\right)} = \frac{2l}{c}\gamma^2$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta t = \Delta\tau\,\gamma = \dfrac{2l_0}{c}\gamma, \\ \dfrac{2l}{c}\gamma^2 = \dfrac{2l_0}{c}\gamma, \\ \boxed{l\gamma = l_0} \end{array}\right.$$

Skrócenie Lorentza długości zachodzi dla wymiarów **równoległych do kierunku ruchu**; długość linijki l zmierzona w układzie odniesienia, w którym ona się porusza, jest zawsze mniejsza niż jej długość własna l_0:

skrócenie Lorentza długości

$$\boxed{l = l_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\ .}$$



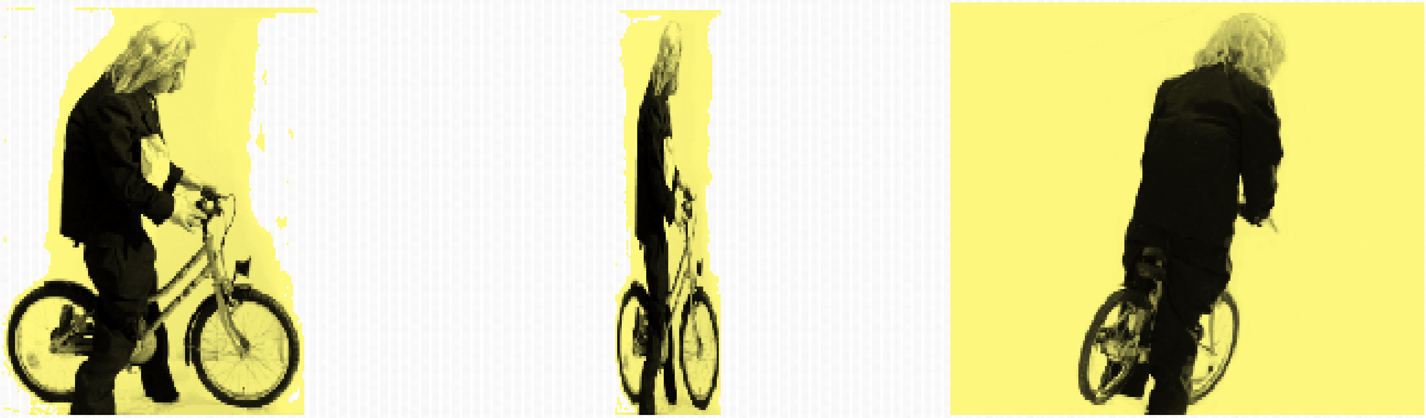
http://n…
s/relativ…
images/contraction2.gif

Natomiast wymiary **prostopadłe do kierunku ruchu** nie ulegają zmianie przy przejściu z jednego układu odniesienia do innego!

Długości l i l_0 występujące we wzorze to ***wielkości mierzone****, a nie postrzegane wzrokiem !*

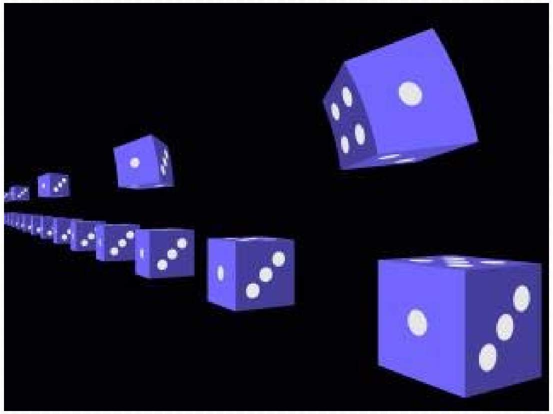
3.4. Różnica między długością mierzoną a „widzianą”

www.anu.edu.au/Physics/Savage/TEE/site/



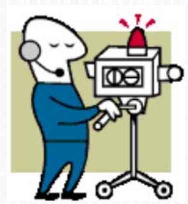
(a) (b) (c)

Rowerzysta w spoczynku (a), zmierzony w ruchu z szybkością 93% c (b), i widziany podczas ruchu z szybkością 93% c (c)

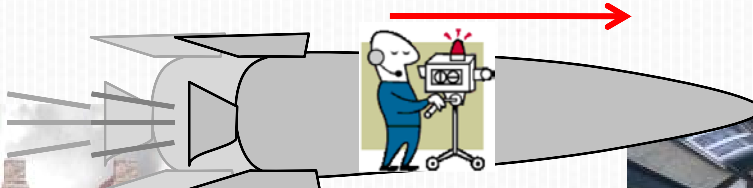


Obserwator (kamera) postrzega zniekształcony obiekt, ponieważ światło docierające do oka z dalszych punktów obiektu musiało być wyemitowane wcześniej, gdyż miało do przebycia dłuższy odcinek (*c* ma skończoną wartość!).

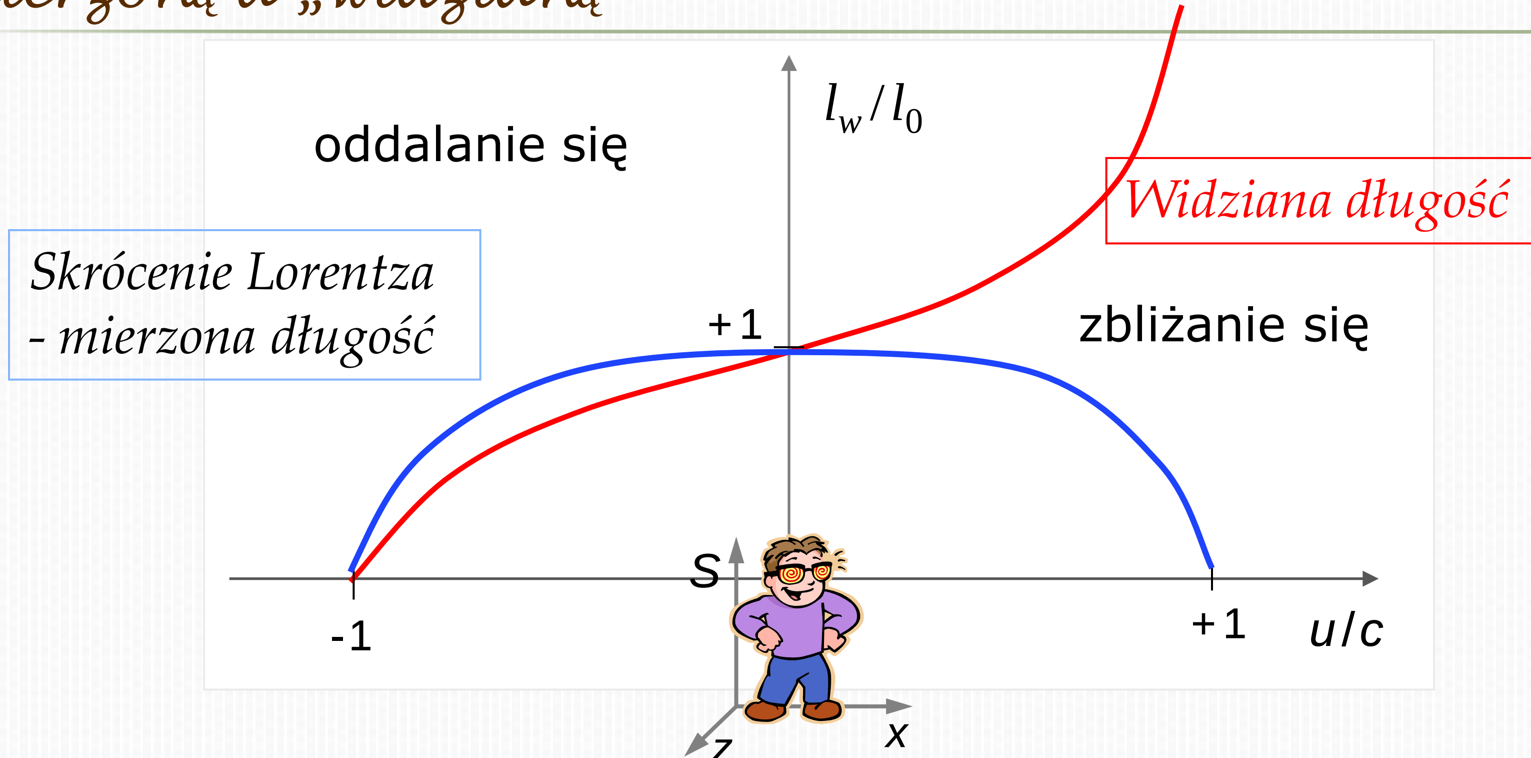
Stąd symulacje komputerowe obrazów rejestrowanych przez kamerę poruszającą się z $v \approx c$ przedstawiają inne efekty niż te, wynikające z „czystego” skrócenia długości, czy dylatacji czasu!



$v \approx c$



Na czym polega zasadnicza różnica między długością mierzoną a „widzianą"



Zapamiętaj:

pomiar długości polega na równoczesnym wyznaczeniu położeń początku i końca poruszającego się obiektu, tj. $t_1 = t_2$.

Widzenie (obserwacja) długości obiektu polega na tym, że do naszego oka w tej samej chwili dociera światło, które niejednocześnie opuściło początek i koniec poruszającego się obiektu.