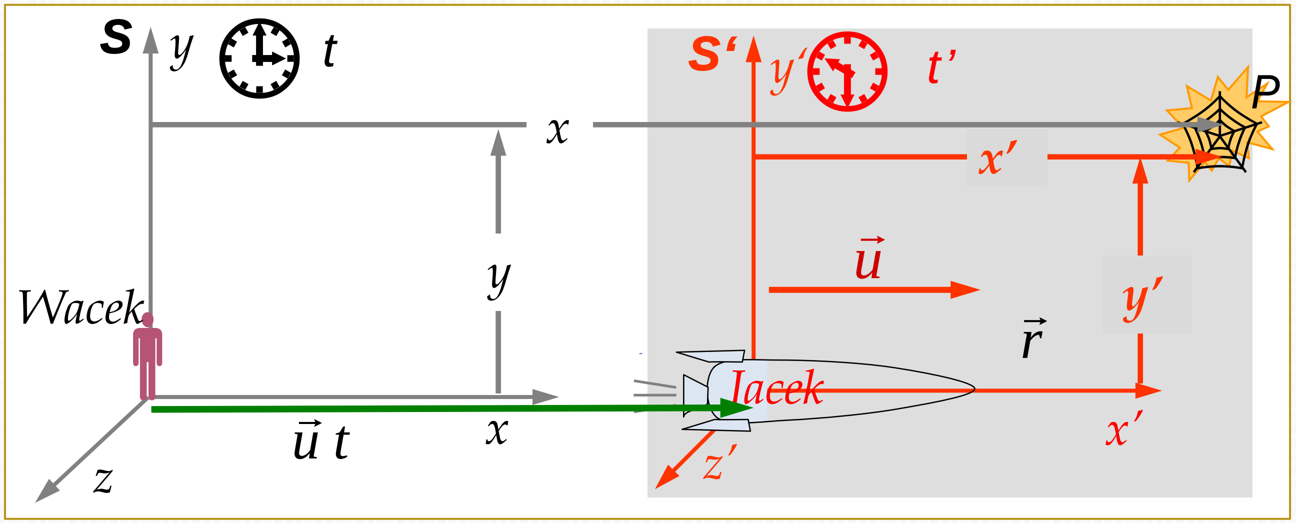
3.5. Transformacja Lorentza

Rozważmy dwa inercjalne układy odniesienia: Wacka S i poruszający się względem niego układ Jacka S′.

Przyjmijmy, że w chwili $t=t'=0$ początki obu układów pokrywają się, osie są do siebie odpowiednio równoległe, a prędkość $\vec{u}$ układu Jacka jest równoległa do osi x i x'.



Po czasie t Jacek przesuwa się o ut względem Wacka.

Współrzędne pająka (zdarzenie) w układzie S: x,y,z,t, w układzie S′: x',y',z',t'.

Każdy z nich zmierzy:

Wacek w ukł.S skrócenie x':

$$x = ut + x'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

Jacek w ukł.S′ skrócenie x:

$$x' = -ut' + x\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

Z powyższych wzorów dostaniemy związki pomiędzy współrzędnymi w obu układach.

Transformacja współrzędnych Lorentza pozwala powiązać ze sobą współrzędne różnych układów inercjalnych poruszających się względem siebie z $u \approx c$.

Transformacja Lorentza współrzędnych

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}, \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}. \end{cases}$$

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}},$$

$$y = y',$$

$$z = z',$$

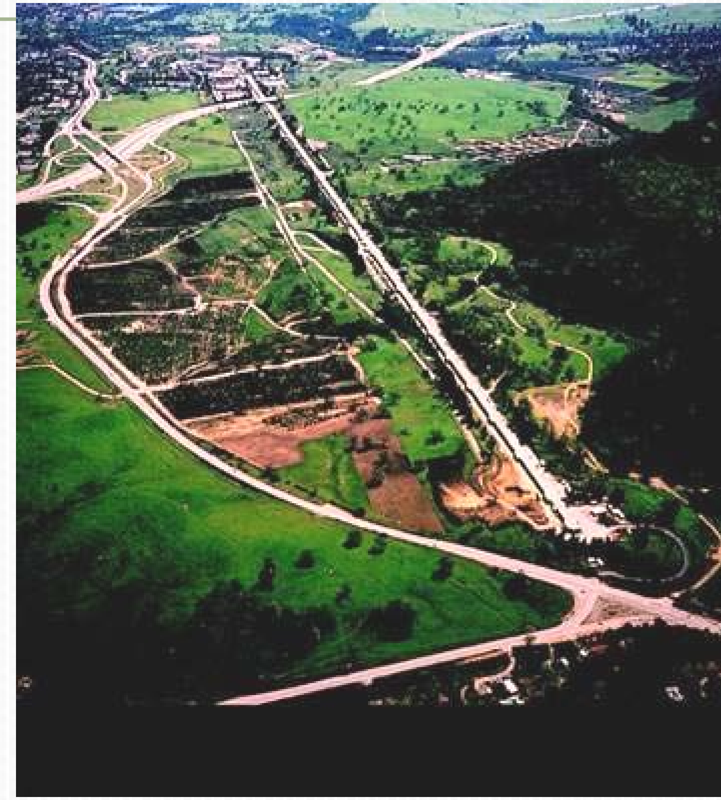
$$t = \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}.$$

Dla $\frac{u}{c} \to 0$, $\gamma \to 1$ i transformacja Lorentza przechodzi w transformację Galileusza.

Obserwacja efektów relatywistycznych

http://www.fuw.edu.pl/~ajduk/Public/SCIENCE/cosmicshower_H300.jpg

- *Wydłużenie czasu życia mionów*

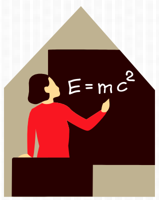


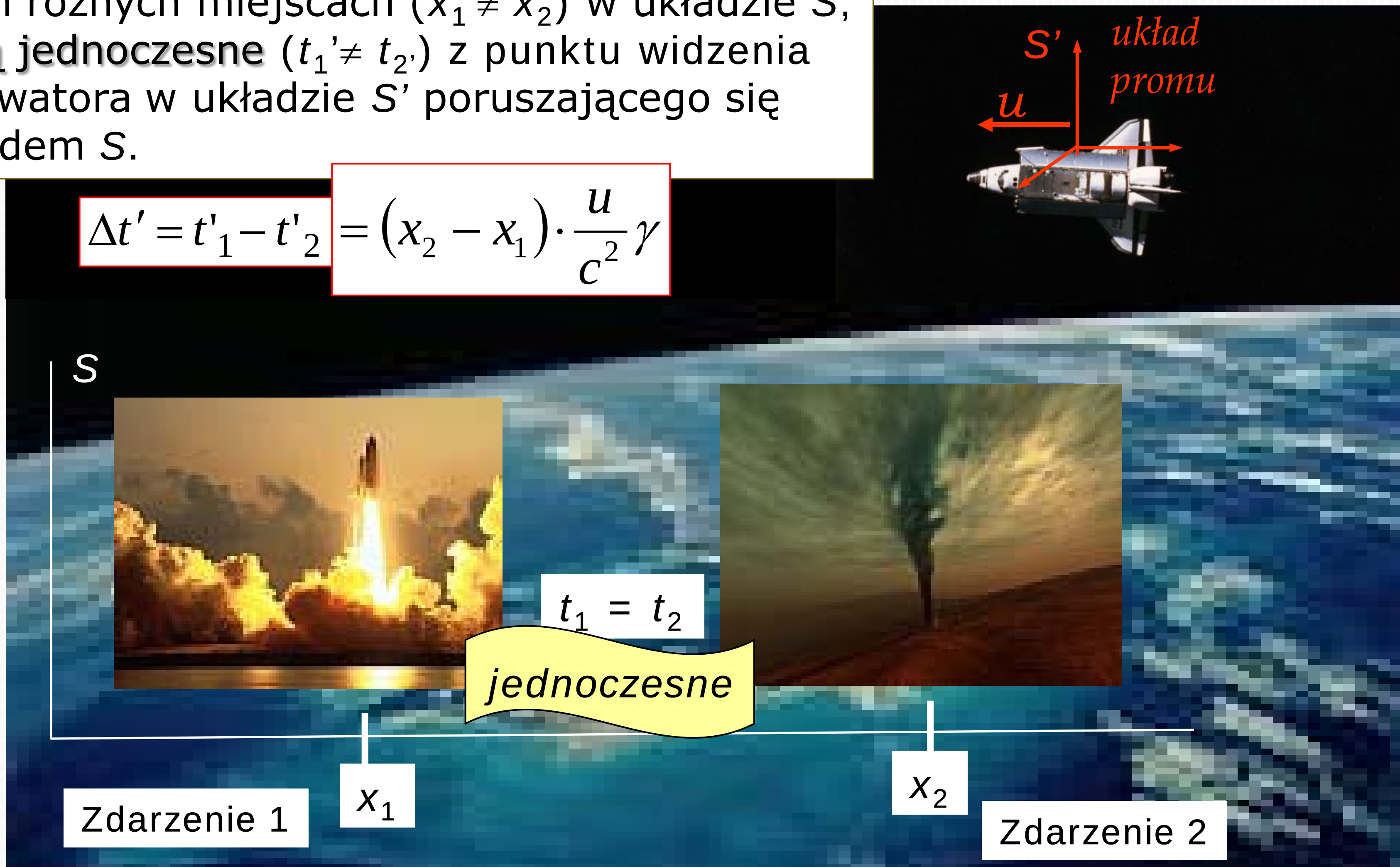
- *Liniowy akcelerator w Stanford – 3,2 km długości. Dla elektronów poruszających się z szybkością 0,9999995c jego długość wynosi tylko 3,2 metra.*

3.6. Względność równoczesności zdarzeń oddalonych

Zjawiska zachodzące **jednocześnie** ($t_1 = t_2$) w dwóch różnych miejscach ($x_1 \neq x_2$) w układzie *S*, **nie są jednoczesne** ($t_1' \neq t_2'$) z punktu widzenia obserwatora w układzie *S'* poruszającego się względem *S*.

$$\Delta t' = t'_1 - t'_2 = (x_2 - x_1) \cdot \frac{u}{c^2} \gamma$$



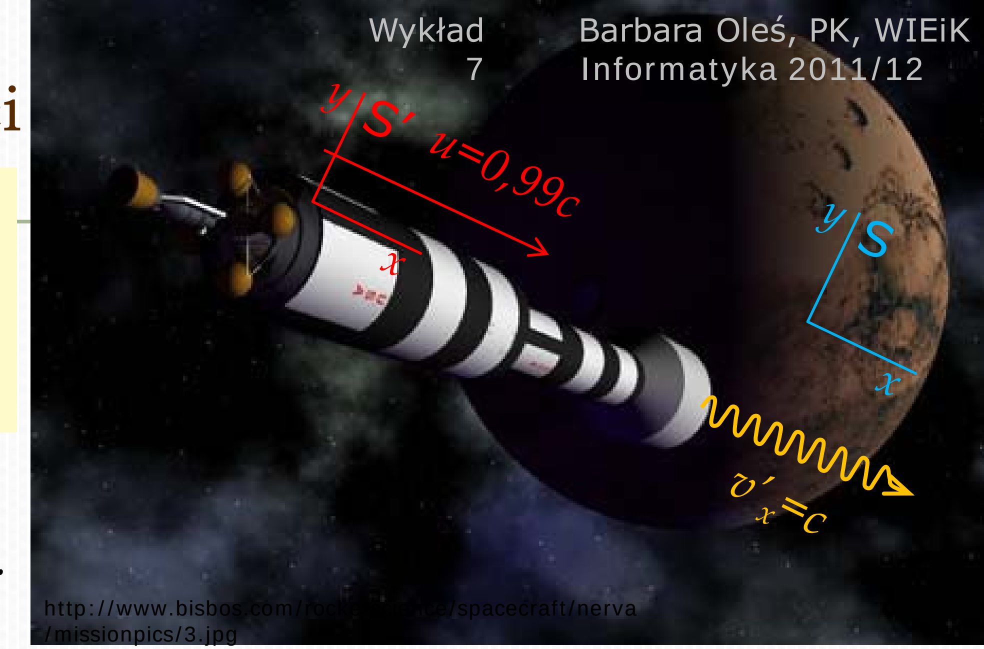



Jednocześnie !

3.7. Transformacja prędkości

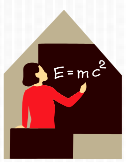
Ze statku kosmicznego lecącego w kierunku Marsa z szybkością u=0,99c wysłano impuls świetlny. Jaką prędkość impulsu zarejestruje obserwator na Marsie?

Transformacja Galileusza dałaby wynik sprzeczny z postulatem Einsteina, że c=const.



http://www.bisbos.com/rocketscience/spacecraft/nerva/missionpics/3.jpg

Dla składowej v_x wyrażenie otrzymane z transformacji Lorentza ma postać:



$$\boxed{v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}\cdot v_x}},$$

lub

$$\boxed{v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2}\cdot v'_x}}.$$

Sprawdźmy, co otrzymamy jeśli zastosujmy transformację Lorentza :

$$v_x = \frac{c + 0{,}99c}{1 + \frac{0{,}99c}{c^2}\cdot c} = \frac{1{,}99c}{1{,}99} = c$$

Szybkość światła w układzie *S*' statku wynosiła c, i taki sam wynik dostaliśmy w układzie *S* Marsa zastosowawszy transformacje Lorentza!

Wyprowadzenie wzorów na transformację składowych wektora prędkości:

$$\mathrm{d}\,x' = (\mathrm{d}\,x - u\,\mathrm{d}\,t)\gamma \qquad \gamma = \left(1 - u^2/c^2\right)^{-1/2} \qquad \mathrm{d}\,t' = \left(\mathrm{d}\,t - \frac{u}{c^2}\mathrm{d}\,x\right)\gamma$$

$$\upsilon'_x = \frac{\mathrm{d}\,x'}{\mathrm{d}\,t'} = \frac{(\mathrm{d}x - u\,\mathrm{d}\,t)\gamma}{\left(\mathrm{d}\,t - \frac{u}{c^2}\mathrm{d}x\right)\gamma} = \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - u}{1 - \frac{u}{c^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \boxed{\frac{\upsilon_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}\cdot\upsilon_x} = \upsilon_x{}'}$$

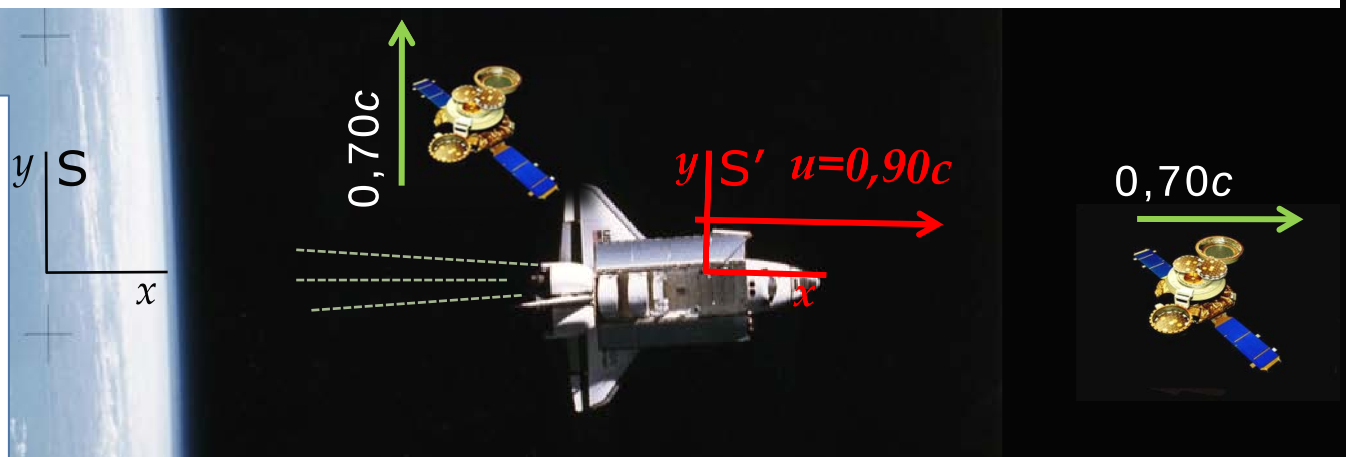
$$\upsilon'_y = \frac{\mathrm{d}\,y'}{\mathrm{d}\,t'} = \frac{\mathrm{d}y}{\left(\mathrm{d}\,t - \frac{u}{c^2}\mathrm{d}x\right)\gamma} = \boxed{\frac{\upsilon_y}{\left(1 - \frac{u}{c^2}\cdot\upsilon_x\right)\gamma} = \upsilon_y{}'}$$

$$\upsilon'_z = \frac{\mathrm{d}\,z'}{\mathrm{d}\,t'} = \frac{\mathrm{d}z}{\left(\mathrm{d}\,t - \frac{u}{c^2}\mathrm{d}x\right)\gamma} = \boxed{\frac{\upsilon_z}{\left(1 - \frac{u}{c^2}\cdot\upsilon_x\right)\gamma} = \upsilon_z{}'}$$

Transformacja składowych prędkości

przykład

Statek kosmiczny oddalający się od Ziemi z prędkością 0,90*c* wysyła jedną sondę w kierunku swojego ruchu, drugą w kierunku prostopadłym. Prędkości sond względem statku w obu przypadkach wynoszą 0,70*c*. Jaka jest prędkość sond względem Ziemi?



Szybkość sondy 0,70 *c* jest zmierzona w układzie *S'* statku kosmicznego, czyli jest to v'_x lub v'_y .Szybkość układu *S'* wynosi u =0,90*c*. Mamy wyznaczyć v_x w układzie *S* Ziemi.

Korzystamy ze wzorów na transformację prędkości:

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2}\cdot v'_x} = \frac{0{,}70c + 0{,}90c}{1 + \frac{0{,}90c}{c^2}\cdot 0{,}70c} = \frac{1{,}60c}{1{,}63} = 0{,}98c$$

$$\vec{v}_{s1} = v_x\,\hat{i} = 0{,}98c,$$

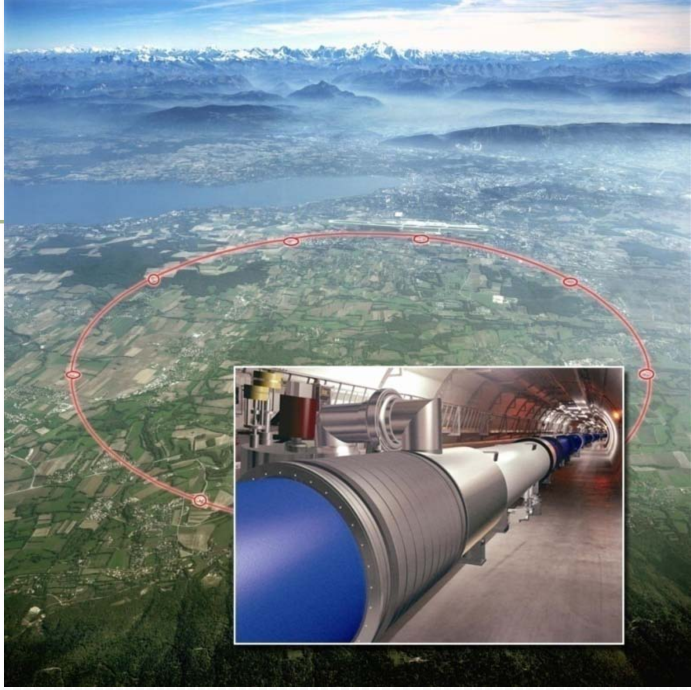
$$v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\left(1+\frac{u}{c^2}\cdot v'_x\right)} = \frac{0{,}70c\sqrt{1-0{,}90^2}}{1+\frac{0{,}90c}{c^2}\cdot 0} = 0{,}31c$$

$$\vec{v}_{s2} = v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j} = 0{,}90c\,\hat{i} + 0{,}31c\,\hat{j}.$$

DYNAMIKA RELATYWISTYCZNA

3.8. Pęd relatywistyczny

Akcelerator w CERN-ie o obwodzie 27 km.
Znajduje się w tunelu na głębokości około 100 m.

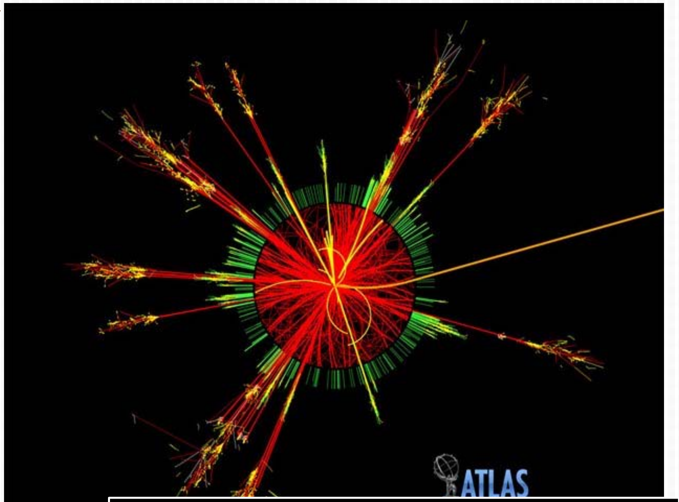


W największym na świecie akceleratorze cząstek elementarnych, tzw. Wielkim Zderzaczu Hadronów (LHC) w CERN w pobliżu Genewy, protony są rozpędzane do <u>prędkości relatywistycznych</u> i poddawane zderzeniom.

Czy przy takich prędkościach spełnione jest prawo zachowania pędu?

W mechanice klasycznej obserwatorzy w różnych inercjalnych układach odniesienia obserwując zderzenie dwóch cząstek wprawdzie zmierzą różne ich prędkości, ale każdy stwierdzi, że jeśli na cząstki nie działają siły zewnętrzne, to pęd układu jest zachowany.

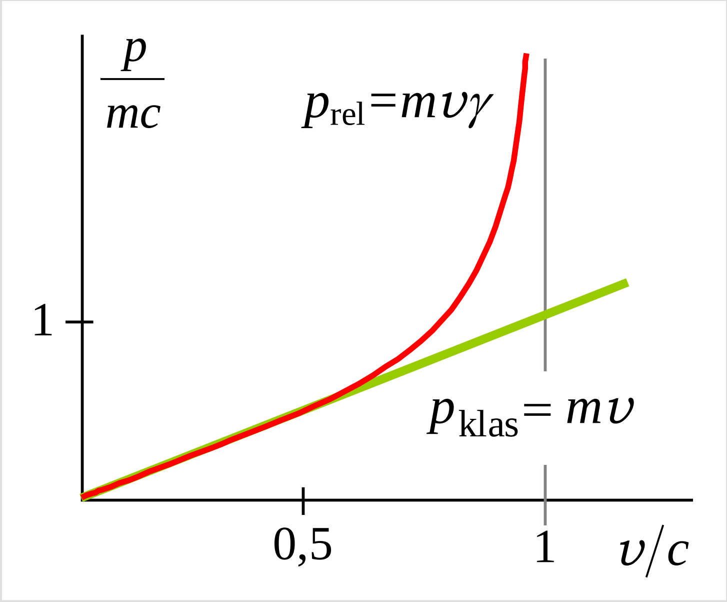
Aby podczas zderzeń cząstek relatywistycznych pęd był zachowany, należy zmienić jego definicję.



Symulacja efektu zderzenia cząstek w LHC.

Pęd w dynamice relatywistycznej definiujemy wzorem:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = m\vec{\upsilon}\gamma .$$



m to masa spoczynkowa cząstki, tj. zmierzona dla cząstki znajdującej się w spoczynku.

Przy takiej definicji u prawo zachowania pędu jest spełnione.

Wprowadza się pojęcie masy relatywistycznej: $m_{\mathrm{rel}} = m\gamma$.

Dla $\upsilon << c$ wzór przechodzi w definicję klasyczną:

$$\vec{p} = m_{\mathrm{rel}}\vec{\upsilon} \xrightarrow{\upsilon \to 0} \vec{p}_{\mathrm{klas}} = m\vec{\upsilon}$$

3.9. Uogólnienie drugiej zasady dynamiki

Przypomnijmy, że najbardziej ogólna postać drugiej zasady dynamiki Newtona wyrażona jest poprzez zmianę pędu w czasie:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Doświadczenia potwierdzają słuszność tak sformułowanej zasady dynamiki również w przypadkach relatywistycznych, pod warunkiem, że występujący w niej pęd jest zdefiniowany wzorem ★:

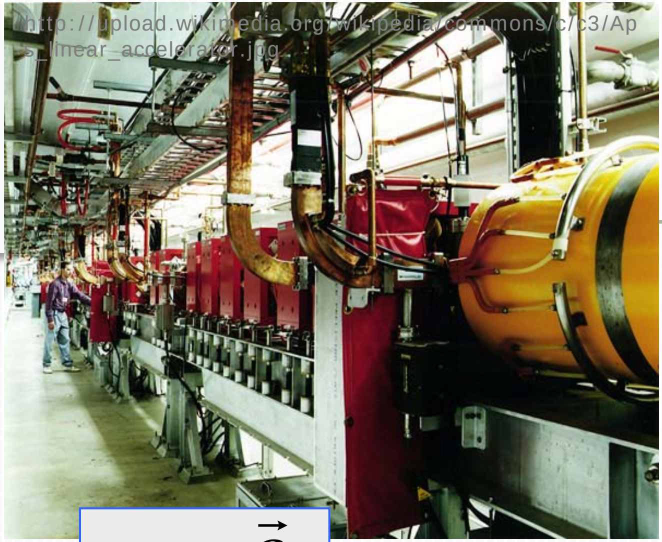
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right] = \vec{F}.$$

Ponieważ relatywistyczny pęd nie jest wprost proporcjonalny do prędkości, szybkość zmiany pędu w czasie nie jest wprost proporcjonalna do przyspieszenia (jak w przypadkach klasycznych):

$$\frac{d}{dt}(m\vec{\upsilon}\gamma) = m\gamma\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} + m\vec{\upsilon}\frac{d\gamma}{dt} = m\gamma\,\vec{a} + m\vec{\upsilon}\frac{d\gamma}{dt},$$

W konsekwencji **stała siła nie powoduje stałego przyspieszenia**, a w ogólnym przypadku przyspieszenie nie jest równoległe do siły wypadkowej .

Relatywistyczne pędy cząstki elementarne (elektron, proton) osiągają w **akceleratorach liniowych**, przyspieszane polem elektrycznym:



$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{p}_{\mathrm{rel}}}{\mathrm{d}t} = q\vec{\mathcal{E}}, \quad \rightarrow \vec{p}_{rel} = q\vec{\mathcal{E}}t,$$

gdzie $\vec{\mathcal{E}}$ - natężenie pola elektrycznego, a prędkość początkowa równa zeru.

Mamy tu do czynienia z przypadkiem siły równoległej do prędkości, w którym przyspieszenie cząstki:

$$\vec{a} = \frac{q\vec{\mathcal{E}}}{m\gamma^3}$$

Widzimy, że w miarę wzrostu prędkości cząstki przyspieszenie wywołane przez stałą siłę maleje! W konsekwencji cząstka o niezerowej masie spoczynkowej nie może osiągnąć szybkości równej szybkości światła c.

Klasyczne podejście do zagadnienia ruchu cząstki pod wpływem stałej siły nie narzuca żadnego ograniczenia – po dostateczni długim czasie cząstka może uzyskać dowolną prędkość.

Obserwatorzy w różnych inercjalnych układach odniesienia mierzą różne siły działające na tę samą cząstkę. Oznacza to, że siła nie jest niezmiennicza względem transformacji Lorentza (w klasycznej transformacji Galileusza była niezmiennicza).

http://www.insidestory.iop.org/images/linear_accelerator.jpg

Akceleratory znalazły zastosowanie do walki z rakiem. Są źródłami promieniowania x, γ, protonów, neutronów lub ciężkich jonów, stosowanych w diagnostyce medycznej i terapii.

3.10. Energia relatywistyczna

Wiemy, że praca sił zmieniających prędkości cząstki jest równa przyrostowi jej energii kinetycznej. Obliczając pracę wykonaną przez siłę rozpędzającą cząstkę ze stanu spoczynku do relatywistycznej prędkości υ znajdujemy relatywistyczną energię kinetyczną $E_k = W_{0\to\upsilon}$:

$$\boxed{E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} - mc^2 = mc^2\gamma - mc^2 .}$$

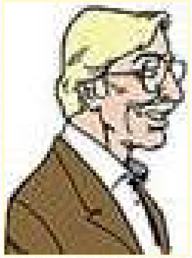
Wyrażenie mc^2 to energia spoczynkowa, którą cząstka posiada będąc w spoczynku:

$$\boxed{E_0 = mc^2}$$

$E_0 = mc^2$ oznacza, że każdej masie bezwładnej odpowiada ściśle określona energia.

Całkowita energia cząstki swobodnej będącej w ruchu jest sumą jej energii kinetycznej i spoczynkowej: $E = E_k + mc^2$,

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} = mc^2\gamma .$$

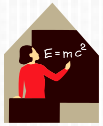


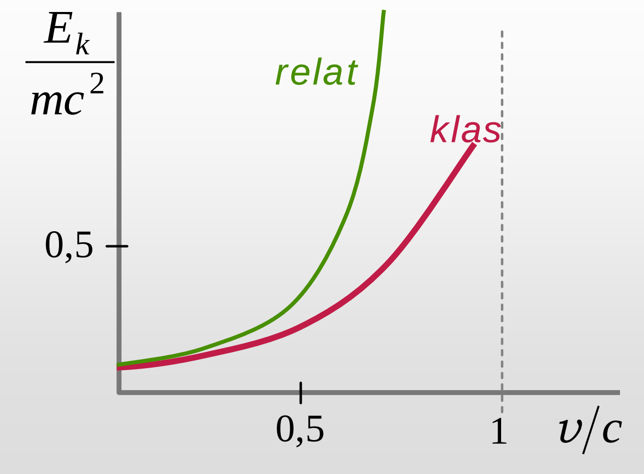
Zapamiętaj, że

1. *Energia relatywistyczna zawsze dodatnia i ściśle określona.*

2. *Dla* $\upsilon << c$ *wzór relatywistyczny na* E_k *przechodzi w klasyczny:*

$$E_k \xrightarrow{\upsilon \to 0} \frac{1}{2}m\upsilon^2$$





3. *Całkowita energia układu izolowanego* $E = mc^2\gamma$ *jest zachowywana (w danym układzie inercjalnym).*

4. *Zależność między całkowitą energią a pędem :*

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 .$$

3.11. Równoważność masy i energii

Powróćmy do zrewidowanej zasady zachowania energii:

całkowita energia układu izolowanego nie ulega zmianie.

Jeśli zatem zmaleje sumaryczna energia spoczynkowa takiego układu cząstek, musi się pojawić energia w jakiejś innej postaci.

Z takimi sytuacjami mamy do czynienia podczas reakcji chemicznych lub jądrowych:

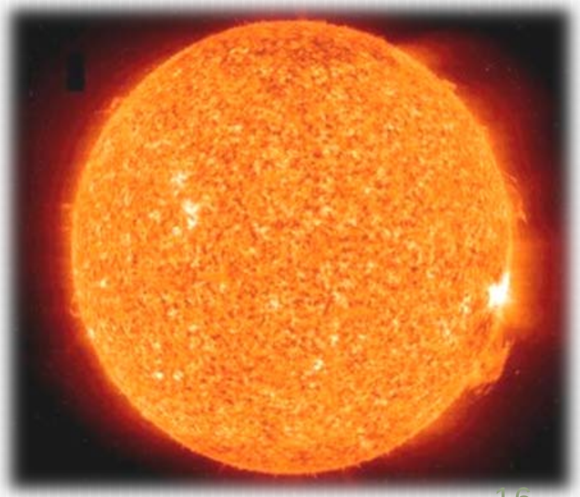
$$m_{pocz}c^2 = m_{koń}c^2 + \Delta E$$

gdzie ΔE *to energia reakcji powstała kosztem zmiany masy:* $\Delta E = \Delta m_{rel} c^2 .$

Niewielkie ilości materii mogą zamieniać się w wielkie ilości energii!

W gwiazdach reakcja syntezy, w której dwa jądra wodoru łączą się w jedno jądro wyzwala olbrzymie ilości energii powstałej kosztem masy nowego jądra.

Wnętrze gwiazdy to wysokotemperaturowa plazma. Jej energia kinetyczna (temperatura!) wystarczająca do przezwyciężenia odpychania elektrostatycznego między protonami.



Przykład równoważności masy i energii

Masa układu związanego jest mniejsza od sumy mas jego cząstek o E_b/c^2, gdzie E_b to energia wiązania.

energia spoczynkowa protonu p, $m_p c^2$:	938,272 MeV
energia spoczynkowa neutronu n, $m_n c^2$:	939,565 MeV
suma energii spoczynkowych p i n: =	1877,837 MeV
energia spoczynkowa jądra deuteru ^{2}H:	1875,613 MeV

Energia wiązania jądra deuteru E_b = 2,22 MeV

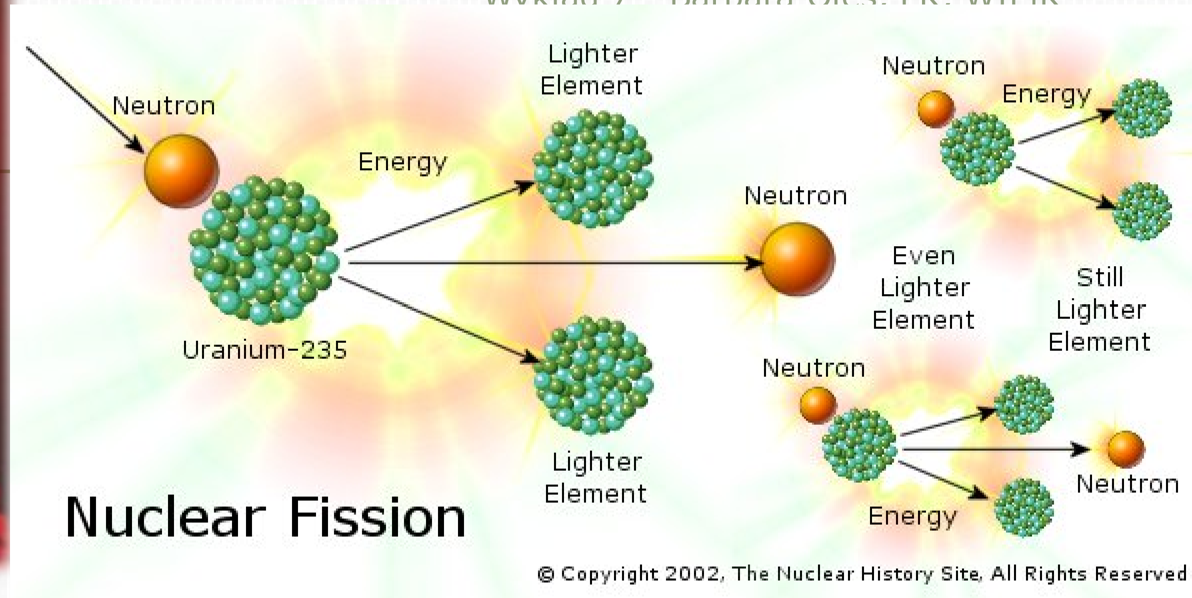
$$(m_p c^2 + m_n c^2) - m_{Deuter} c^2 = E_b$$

1 u = $1{,}66054 \cdot 10^{-27}$ kg = 931,5 MeV $/c^2$

1 eV = $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J

Niewielkie ilości materii mogą zamieniać się w wielkie ilości energii !

Bomba atomowa



Elektrownie atomowe

Termiczny neutron ($3k_BT/2$) przechwycony przez jądro uranu 235 powoduje jego rozszczepienie, a typowa reakcja (jedna z możliwych):

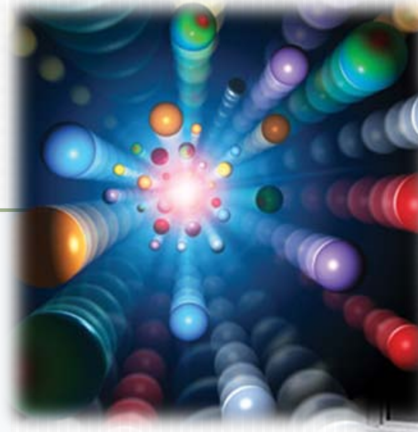
$$^{235}_{92}\mathrm{U} + ^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow ^{236}_{92}\mathrm{U} \rightarrow ^{142}_{56}\mathrm{Ba} + ^{92}_{36}\mathrm{K}r + 2\,^{1}_{0}\mathrm{n}$$

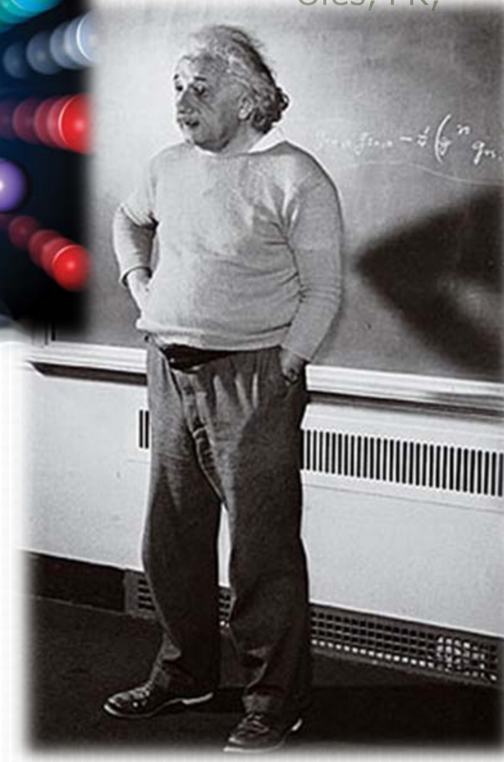
$$\boxed{E = mc^2}$$

$$M_U - \left(M_{Kr} + M_{Ba}\right) = 193{,}3\,\mathrm{MeV}/c^2$$

Reakcja rozszczepienia ciężkich jąder wyzwala olbrzymie ilości energii.

Podsumowanie





Przekonaliśmy się, że wszystkie wzory szczególnej teorii względności w granicy małych prędkości przechodzą we wzory klasyczne, a transformacja Lorentza w transformację Galileusza.

Nasuwa się zatem wniosek, że

Teoria Einsteina nie jest sprzeczna z klasyczną mechaniką, tylko obejmuje szerszy zakres zjawisk. Klasyczna mechanika pozostaje słuszna w zakresie szybkości dużo mniejszych od *c*.