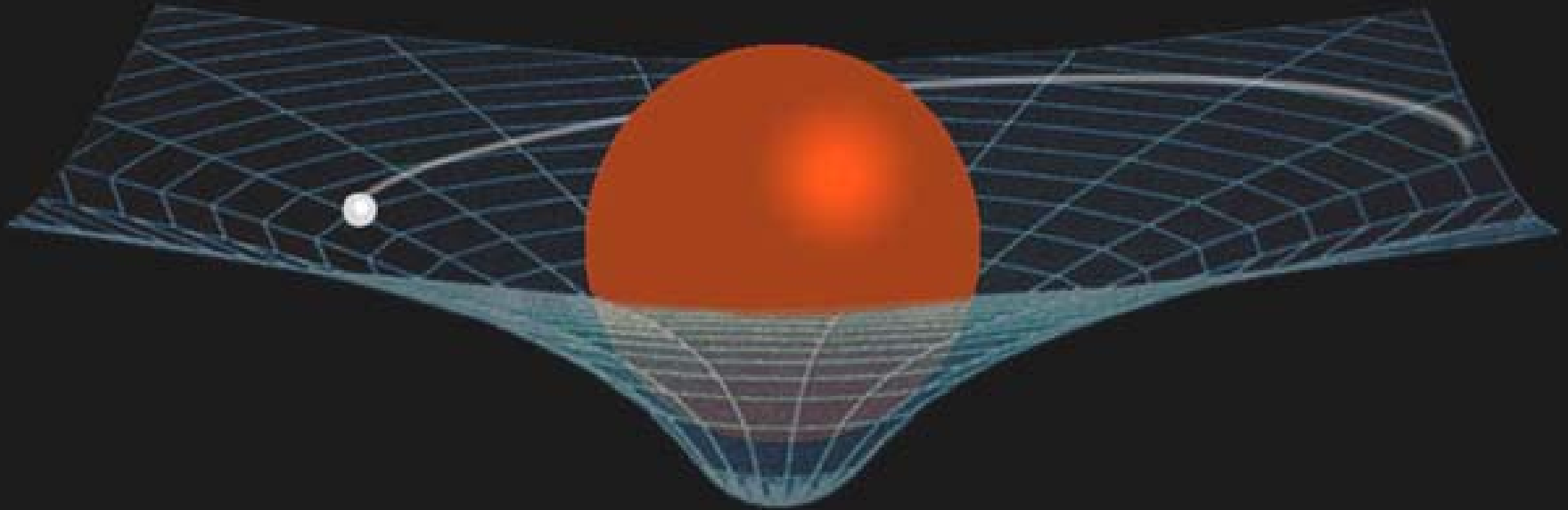


4. Ogólna teoria względności



W ogólnej teorii względności A.Einstein rozszerzył wcześniejsze prace na układy nieinercjalne. Doprowadziło go to do ujednoczenia opisu grawitacji oraz sił bezwładności działających w zakrzywionej, czterowymiarowej czasoprzestrzeni.

Świat w tej teorii jest czterowymiarową ciągłą czasoprzestrzenią, w której obecność masy zakrzywia przestrzeń w taki sposób, że powstaje pole grawitacyjne.

W wykładzie 3 była mowa o tym, że masa występuje w dwóch różnych prawach:

● w prawie powszechnej grawitacji masa grawitacyjna m_g charakteryzuje zdolność ciał do oddziaływań grawitacyjnych,

● w drugim prawie dynamiki Newtona masa bezwładna m_b jest miarą bezwładności ciała – oporu stawianego przy próbie zmiany ruchu ciała.

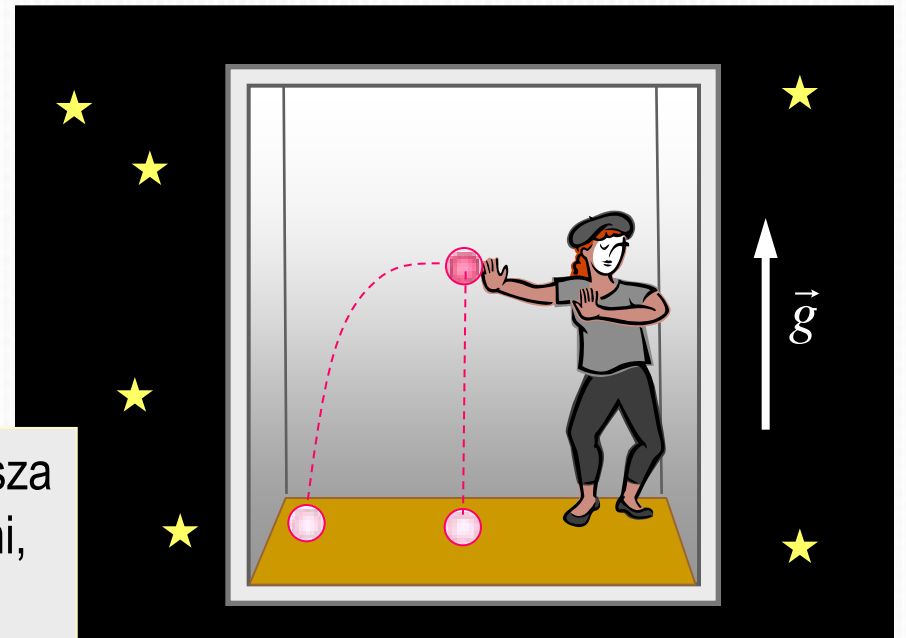
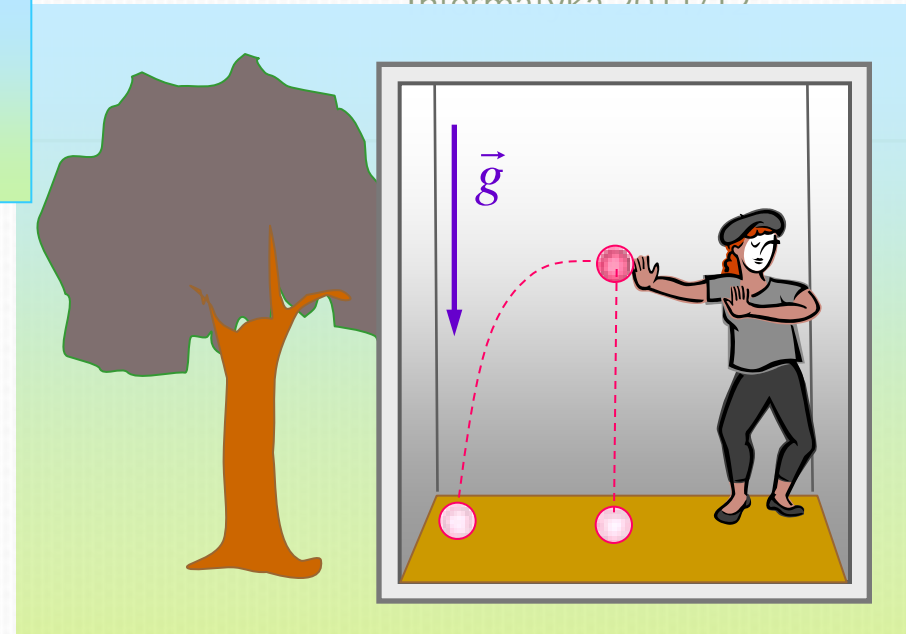
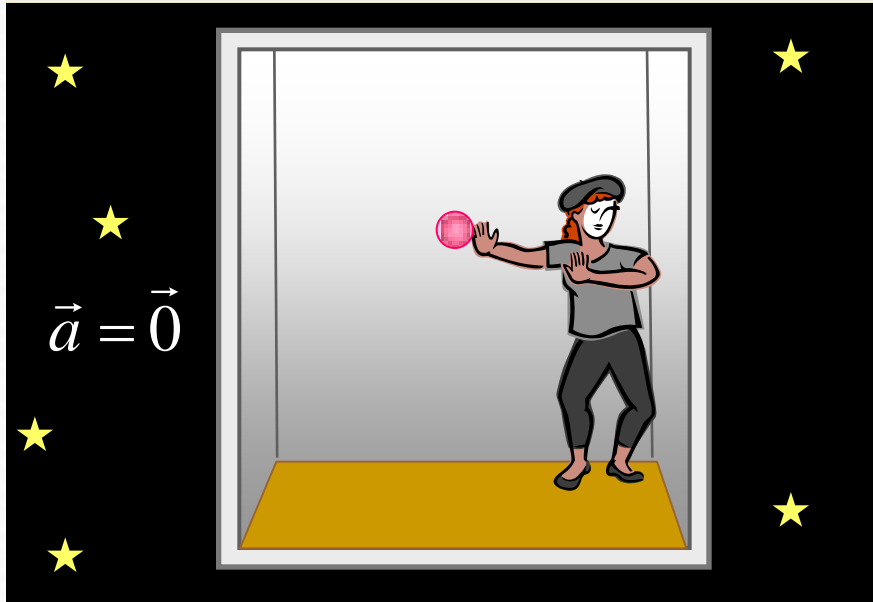
Fakty doświadczalne przemawiają za tym, że m_g i m_b są z dużą dokładnością proporcjonalne do siebie, a przy odpowiednim doborze stałej grawitacji G mamy $m_g = m_b$.

Wytłumaczenie dlaczego tak jest podał Einstein.

Przeanalizujemy przykłady trzech układów odniesienia i zachowanie się w nich ciał.

Układ odniesienia w polu grawitacyjnym:
Piłka rzucona lub upuszczona przez Małgosię spada z przyspieszeniem g

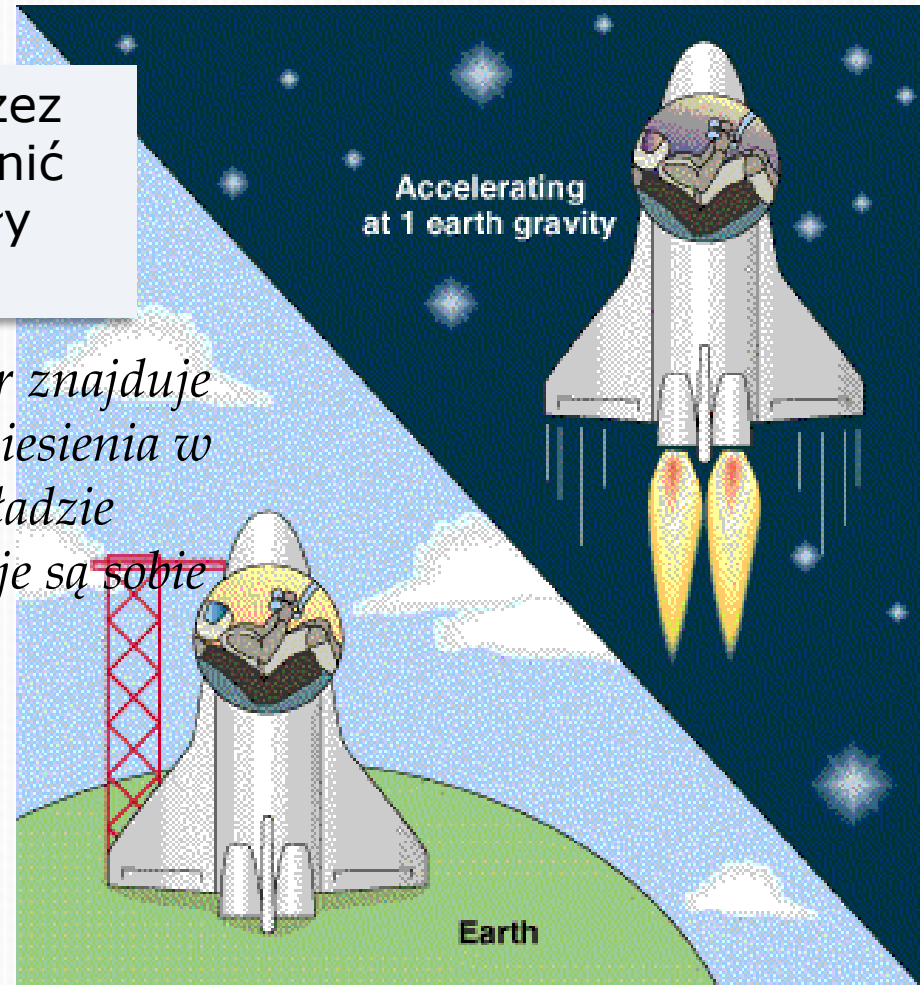
Inercjalny układ odniesienia – brak pola grawitacyjnego: Małgosia w stanie nieważkości, upuszczona piłka nie spada



Przyspieszający układ odniesienia: Jeśli porusza się z $\vec{a} = -\vec{g}$ to piłka zachowuje się jak na Ziemi, Małgosia **nie odczuwa stanu nieważkości**.

Widzimy, że zjawisk wywołanych przez grawitację lokalnie nie można odróżnić od zjawisk spowodowanych przez siły bezwładności.

Nie ma różnicy, czy obserwator znajduje się w inercyjnym układzie odniesienia w polu grawitacyjnym, czy w układzie przyspieszającym. Obie sytuacje są sobie równoważne.



Ogólna teoria Einsteina opiera się na dwóch postulatach:

- Wszystkie prawa przyrody mają taką samą postać w każdym układzie odniesienia (ogólna zasada względności).
- W skali lokalnej pole grawitacyjne jest równoważne przyspieszającemu układowi odniesienia (zasada równoważności).

W szczególnej teorii względności, w transformacji Lorentza współrzędne przestrzenne x, y, z i czas t są ze sobą wzajemnie powiązane – czasu nie można zatem rozpatrywać niezależnie.

Zespół czterech współrzędnych: przestrzennych x, y, z oraz czasu t opisuje zdarzenie w czterowymiarowej przestrzeni zwanej **czasoprzestrzenią**.

W ogólnej teorii względności grawitację traktujemy jako geometrię czasoprzestrzeni, a nie wynik działania siły.

E quindi uscimmo a riveder le stelle.

Da

Obecność masy powoduje zakrzywienie czasoprzestrzeni i to ono dyktuje swobodny ruch ciała.

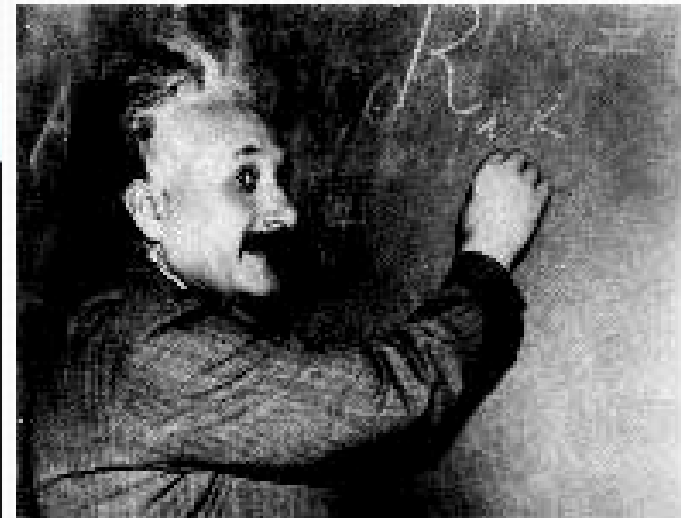
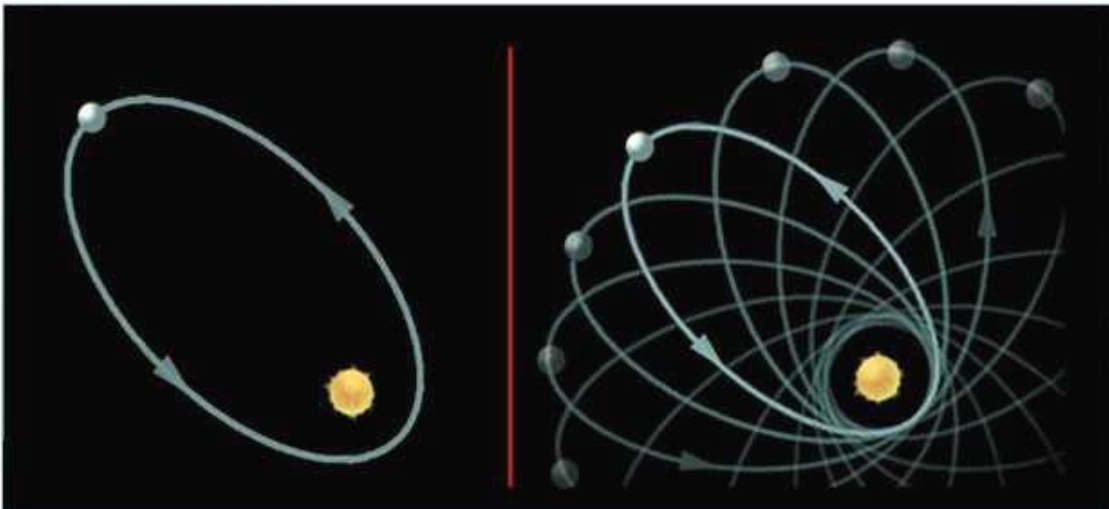
Dwóch obserwatorów porusza się po kuli ziemskiej wzdłuż południków. Na równiku dzieli ich pewna odległość, postanawiają kontynuować podróż równoległe względem siebie. Ale okolicy bieguna spotykają się. Czyżby między nimi wystąpiło oddziaływanie przyciągające? Nie, ich spotkanie jest wynikiem zakrzywienia powierzchni Ziemi. Na płaszczyźnie by do niego nie doszło.

Do opisu zakrzywionej czasoprzestrzeni, której przejawem jest grawitacja, stosuje się geometrię Riemanna. Formalizm matematyczny ogólnej teorii względności to skomplikowany rachunek tensorowy w przestrzeni Riemanna.

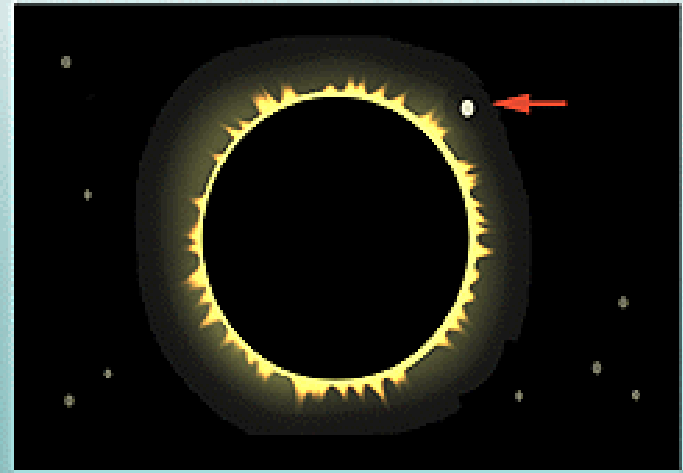
Einstein podał równania, które wiążą zakrzywienie czasoprzestrzeni z rozkładem wywołujących je ciał.

Zaproponował również obserwacje, które potwierdzają jej słuszność.

Precesja peryhelium orbity Merkurego → wyjaśnienie w oparciu o ogólną teorię względności.

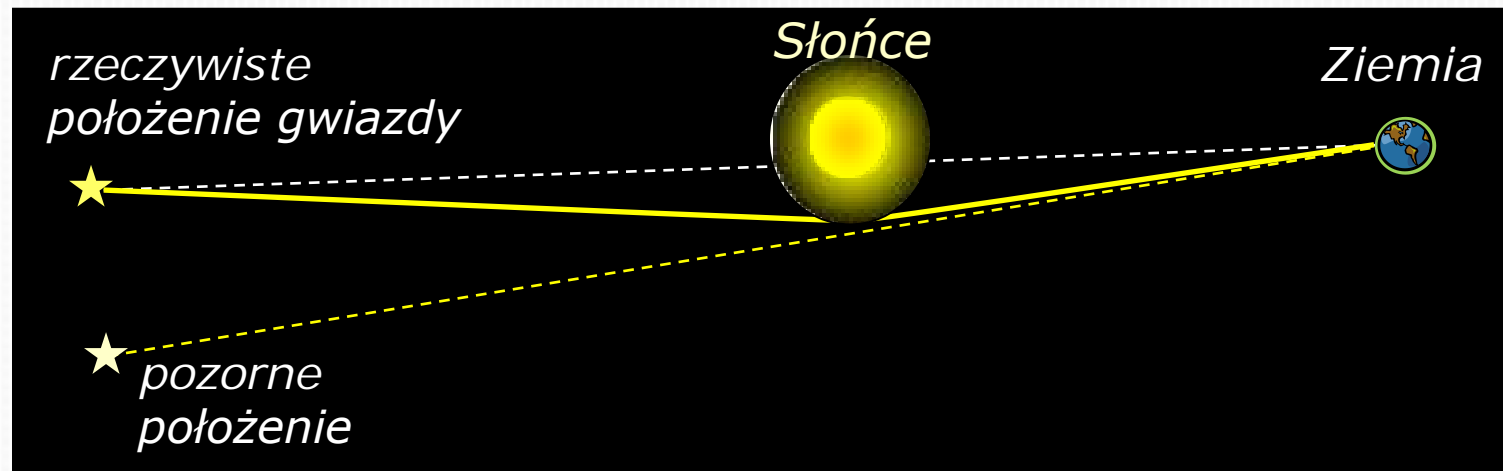


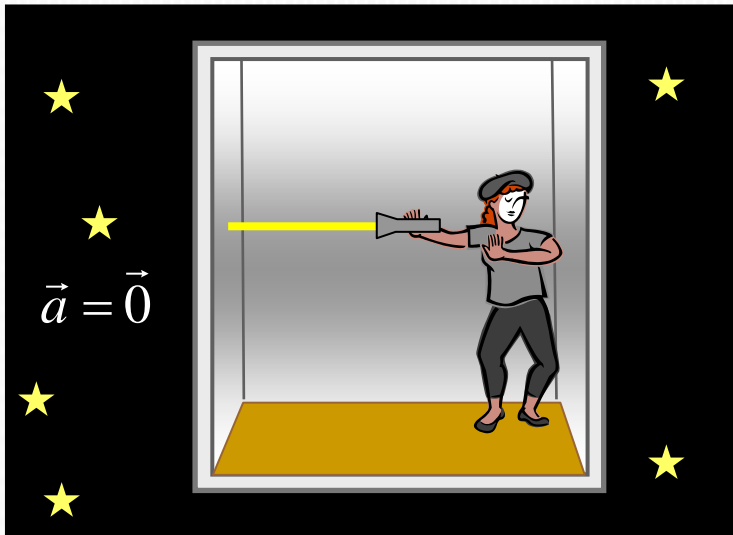
Einstein zaproponował następnny test swojej teorii polegający na sprawdzeniu, czy pole grawitacyjne odchyła światło.



Obserwacje zjawiska odchylenia promieni świetlnych docierających do Ziemi od gwiazd przez pole grawitacyjne Słońca pozwoliły zarejestrować

pozorne przesunięcie położenia gwiazdy widzianej z Ziemi (zdjęcia gwiazd wykonane podczas zaćmienia Słońca porównywane z wykonanymi 6 miesięcy później wykazują przesunięcia ich położenia). Jest to wynik odchylenia światła przez silne pole grawitacyjne słońca.

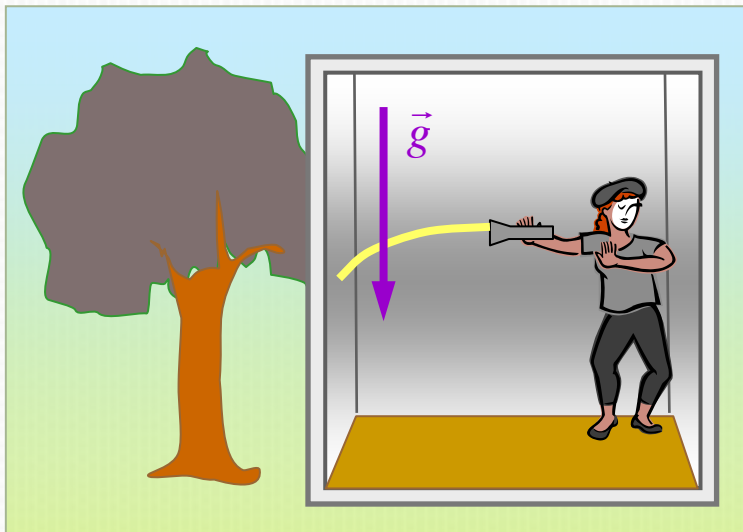




Inercjalny układ odniesienia – brak pola grawitacyjnego: wiązka światła porusza się w windzie po linii prostej



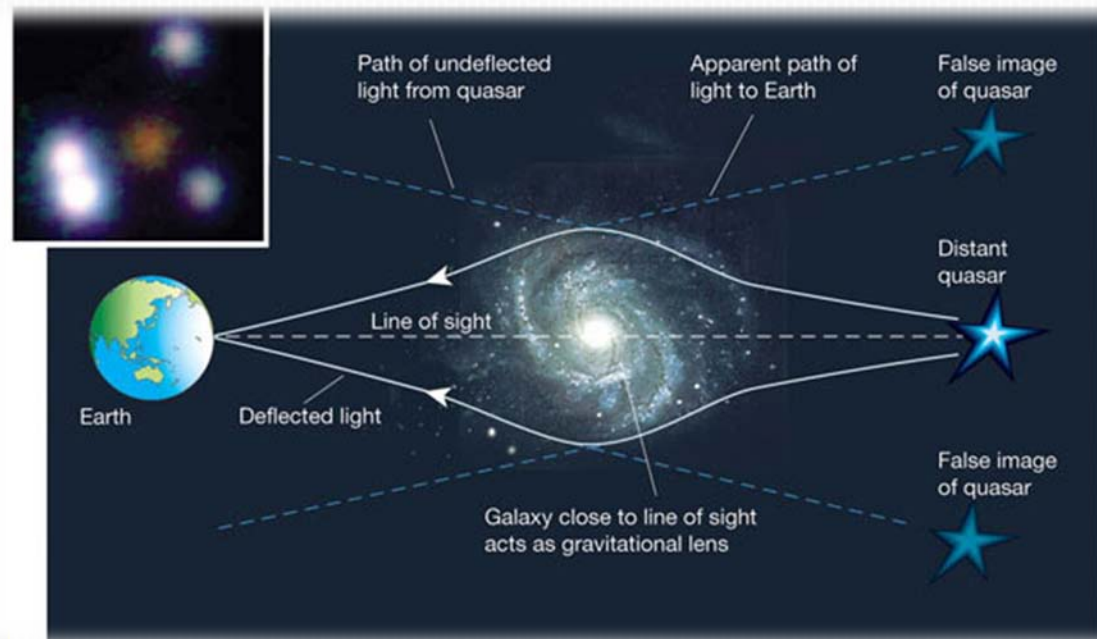
Przyspieszający układ odniesienia: winda porusza się do góry podczas rozchodzenia się światła, stąd obserwator widzi zakrzywienie wiązki świetlnej



Einstein zastosowawszy zasadę względności w odniesieniu do światła wysunął hipotezę, że **pole grawitacyjne również zakrzywia wiązkę świetlną.**

Najkrótsza linia łącząca dwa punkty w zakrzywionej przestrzeni wokół dużej masy jest krzywą – stąd odchylenie promieni świetlnych w pobliżu dużych mas.

Gwiazdy, galaktyki o dużej masie działają jak **grawitacyjne soczewki**.



<http://www.nature.com/nature/journal/v417/n6892/images/417905a-f1.2.jpg>

Krzyż Einsteina. Ogniskująca galaktyka oddalona o 400 mln lat św., kwazar 20 razy dalej.

Grawitacyjne opóźnienie zegarów

Jednym z przewidywanych przez ogólną teorię względności efektów jest zmiana czasu w polu grawitacyjnym.

W silniejszym polu grawitacyjnym zegary idą wolniej .

Satelity Globalnego Systemu Lokalizacji (GPS) muszą uwzględniać poprawki relatywistyczne.



Efekt związany z **prędkością satelity** 14000 km/h daje **opóźnienie** 7 μ s na dobę względem zegarów naziemnych (**szczególna teoria względności**),

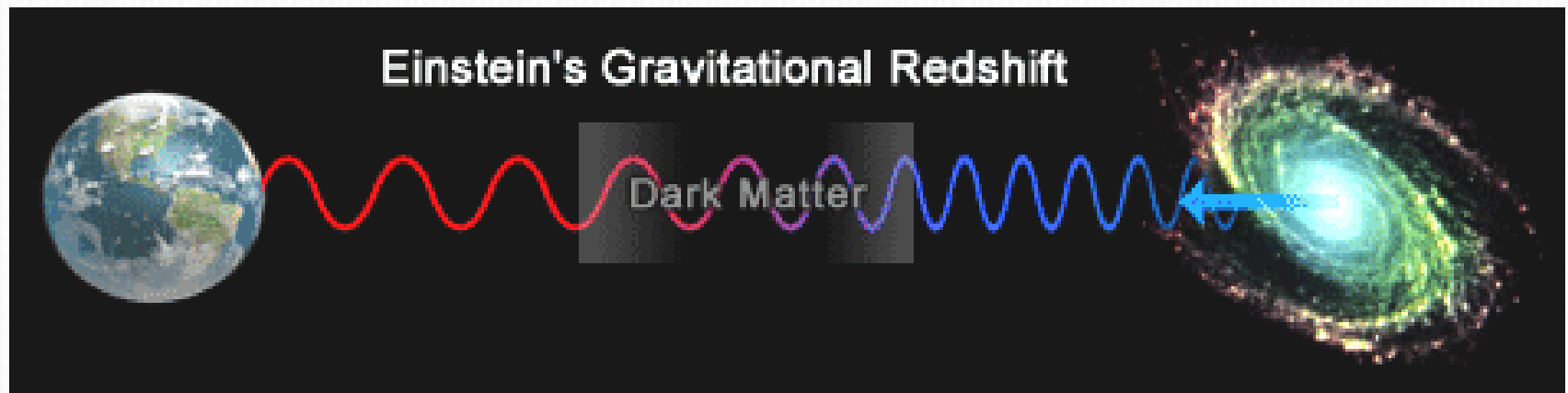
efekt związany z około 4 krotnie słabszym **polem grawitacyjnym** (**ogólna teoria względności**) jest odpowiedzialny za to, że zegary pokładowe **śpieszą** 45 μ s na dobę.

Całkowita dzienna poprawka zegara pokładowego wynosi 38 μ s

Konsekwencją zależności czasu od pola grawitacyjnego jest przesunięcie ku czerwieni światła emitowanego przez masywne gwiazdy.

W polu grawitacyjnym gwiazdy częstotliwość promieniowania wysyłanego przez atom $f_A = 1/T_A$, jest większa niż poza nim ($f_B = 1/T_B$) ponieważ okres jest krótszy (zegar idzie wolniej):

Światło docierające na Ziemię będzie miało mniejszą częstotliwość czyli będzie przesunięte w stronę fal dłuższych – obserwujemy tzw. **gravitacyjne przesunięcie ku czerwieni**



Czarne dziury

Czarne dziury – obiekty w przestrzeni kosmicznej, które się zapadły pod wpływem własnej siły grawitacyjnej do tego stopnia, że prędkość ucieczki z nich równa się prędkości światła.

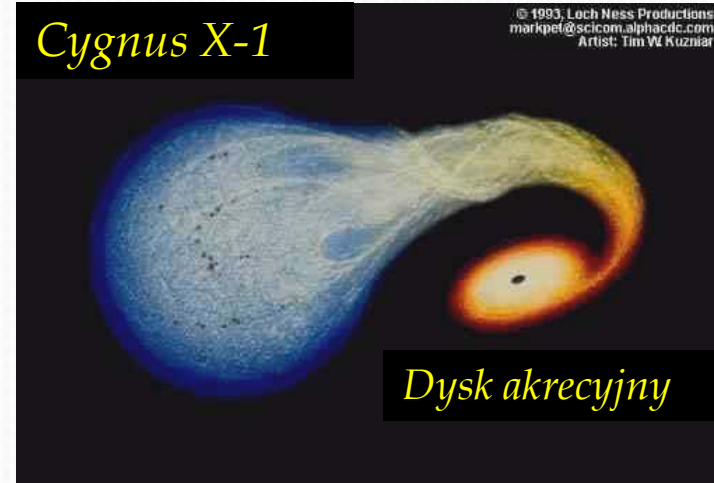
Czarne dziury powstają najprawdopodobniej z masywnych gwiazd pod koniec ich życia, gdy po wyczerpaniu paliwa termonuklearnego następuje kolaps gwiazdy pod wpływem sił grawitacji.

Promień zapadającej się gwiazdy obserwowany z zewnątrz dąży asymptotycznie do promienia grawitacyjnego (promień Schwarzschilda):

$$R_g = \frac{2GM}{c^2}$$

Pole grawitacyjne czarnej dziury tak silne, że nic z niej nie ucieknie – nawet światło.

Dowody na istnienie czarnych dziur pochodzą z obserwacji ich wpływu na otaczającą je materię – czarna dziura ściąga materię z sąsiedniej gwiazdy, czemu towarzyszy emisja promieniowania rentgenowskiego.





4. ZJAWISKA FALOWE Z ELEMENTAMI AKUSTYKI

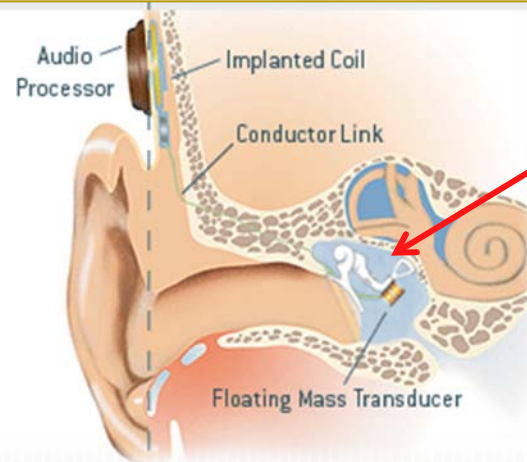
DRGANIA

Drganiami nazywamy zjawiska, które powtarzają się. Możemy wyróżnić drgania mechaniczne (np. ruch wahadła, drgania struny), drgania elektromagnetyczne w obwodach zawierających indukcyjność i pojemność i in.



Ruch drgający to również ruch wahadła (tu: wahadło Foucaulta)

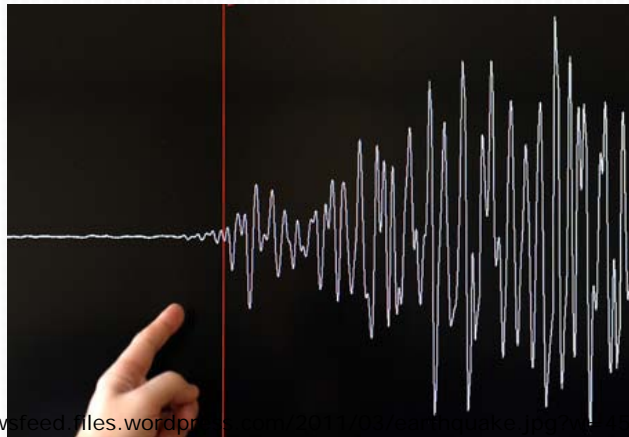
Z drganiami mamy do czynienia w elektrycznej szczoteczce do zębów, w zegarkach kwarcowych, w implantach usznych.



Często drgania występujące w technice odgrywają **NEGATYWNĄ**
ROLĘ, np. wibracje skrzydeł samolotu, drgania mostów, budynków.

Inżynier projektujący konstrukcje musi brać pod uwagę możliwość wystąpienia
drgań i zastosować odpowiednie rozwiązania w celu ich wy tłumienia.

Nowy, siedmiokilometrowy most na Wołdze.
Za falowanie mostu najprawdopodobniej były
odpowiedzialne poddmuchy wiatru.



<http://timenewsfeed.files.wordpress.com/2011/03/5>

Drgania sejsmiczne zanotowane podczas
trzęsienia ziemi w Japonii, 2011

Trzęsienie ziemi w Japonii, 2011

<http://onlinenews4u.com/wp-content/uploads/2011/03/earthquakes-in-japan.jpg>



4.1. Drgania harmoniczne proste

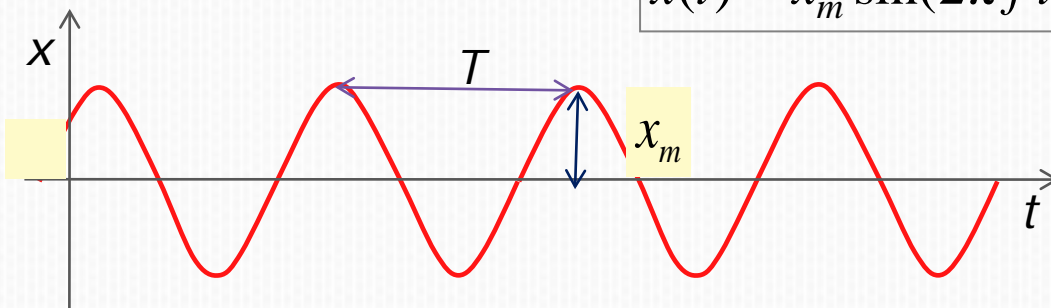
Jeśli drgania zachodzą w układzie izolowanym, po uprzednim wyprowadzeniu układu z położenia równowagi, nazywamy je **swobodnymi (własnymi)**.

Drgania zachodzące pod wpływem zewnętrznej, periodycznej siły wymuszającej nazywamy **wymuszonymi**.

Zajmiemy się drganiami :

- mechanicznymi,
- okresowymi, w których czas powtarzalności jest stały, a najmniejszy odstęp czasu, po którym ruch się powtarza nosi nazwę okresu drgań T ($1/T=f$ – częstotliwość).
- harmonicznymi (prostymi), w których wielkość charakteryzująca ruch zmienia się sinusoidalnie lub cosinusoidalnie w czasie.

$$x(t) = x_m \sin(2\pi f t + \alpha), \quad f = 1/T$$



$\omega = 2\pi f$ - częstość kołowa

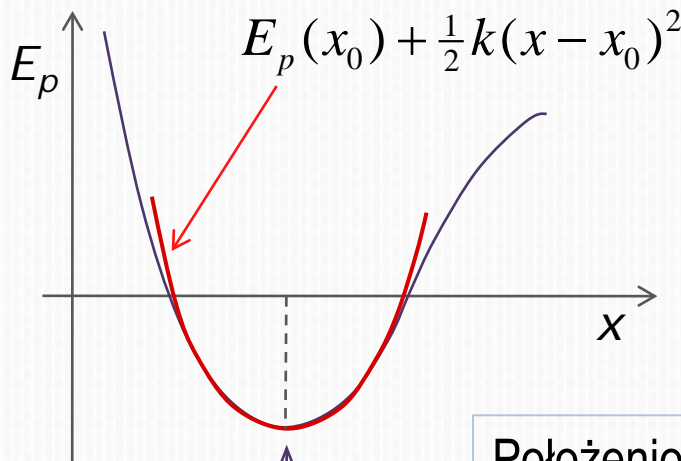
$\varphi = 2\pi f t + \alpha$ - faza

Ciała (lub układy) wykonujące drgania nazywamy **oscylatorami** (**oscylatorami harmonicznymi**, jeśli wykonują drgania harmoniczne).

Jeśli dla małych wychyleń możemy aproksymować krzywą zależności E_p od wartości wychylenia parabolą, to siła ma postać:

$$\vec{F} = -k\vec{r}.$$

(**siła kwasisprężysta**)



Położeniom **równowagi** oscylatora odpowiadają minima energii potencjalnej E_p .

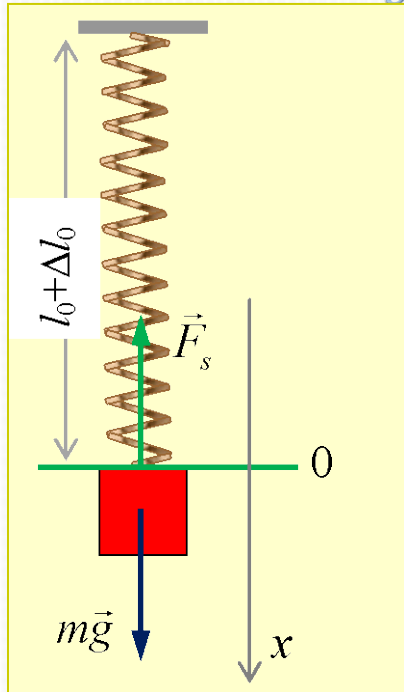
Wychyleniu x z położenia równowagi towarzyszy pojawienie się siły przywracającej równowagę:

$$\vec{F}(x) = -\frac{dE_p}{dx} \vec{i}.$$

(Z ogólnego wzoru: $\vec{F} = -\text{grad } E_p(x, y, z)$.)

Po przejściu przez stan równowagi oscylator kontynuuje dalej ruch z powodu swej bezwładności (ruch opóźniony) i następuje wychylenie w przeciwną stronę.

Rozważmy jako przykład oscylatora mechanicznego ciężarek o masie m zawieszony na sprężynie o znikomej masie.



W położeniu równowagi (sprężyna wydłużona o Δl_0) siły: sprężystości i ciężkości równoważą się:

$$m\vec{g} - k \Delta l_0 \vec{i} = \vec{0}$$

Po wychyleniu o x z położenia równowagi:

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{g} - k(\Delta l_0 + x)\vec{i} = -kx\vec{i}$$

Równanie ruchu:

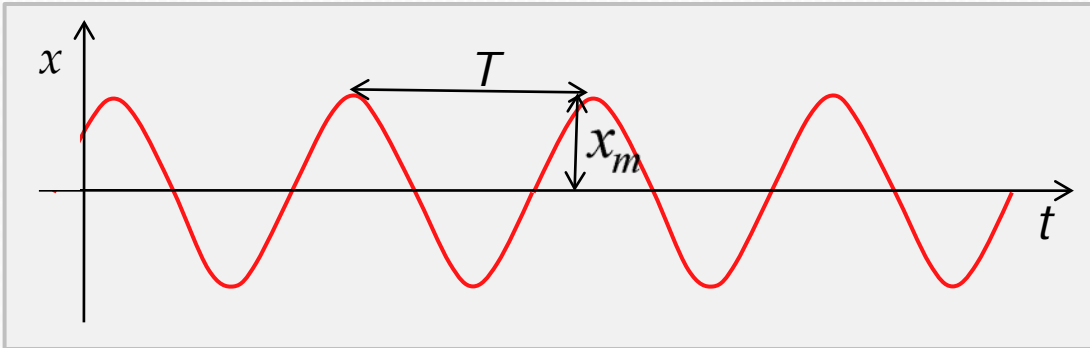
$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -k \vec{r}, \quad \rightarrow \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k x,$$

Równanie jednowymiarowego oscylatora harmonicznego nietłumionego:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{ma rozwiązanie postaci: } x(t) = x_m \sin(\omega_0 t + \alpha);$$

gdzie $\omega_0^2 = k/m$, a faza początkowa α i amplituda drgań x_m są wyznaczone z warunków początkowych $t=0$, $x(0) = x_0$ i $v(0) = v_0$.





$$x(t) = x_m \sin(\omega_0 t + \alpha),$$

Okres drgań:

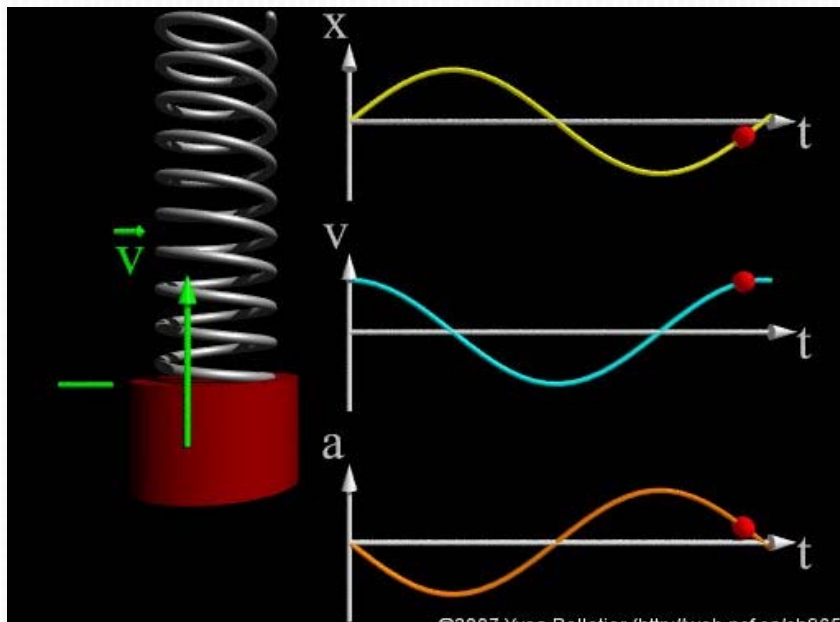
$$T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$$

Prędkość: $v = \frac{dx}{dt} = \omega_0 x_m \cos(\omega_0 t + \alpha) = \omega_0 x_m \sin(\omega_0 t + \alpha + \pi/2),$



(wyprzedza w fazie x o $\pi/2$)

Przyspieszenie: $a = \frac{dv}{dt} = -\omega_0^2 x_m \sin(\omega_0 t + \alpha) = \omega_0^2 x_m \sin(\omega_0 t + \alpha + \pi),$



Z warunków początkowych ($t=0$, $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$) możemy obliczyć:

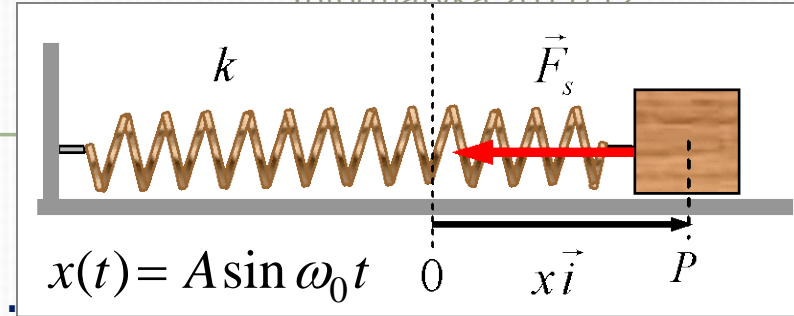
$$x_m = \sqrt{x_0^2 + (v_0^2 / \omega_0^2)}, \quad \text{tg } \alpha = (x_0 \omega_0) / v_0.$$

Jak wcześniej sprawdziliśmy, energia mechaniczna oscylatora harmonicznego jest zachowywana.

Prześledźmy przemiany energii w ruchu harmonicznym wywołanym siłą:

$$\vec{F} = -k\vec{r}.$$

Jest to siła centralna, zatem zachowawcza.

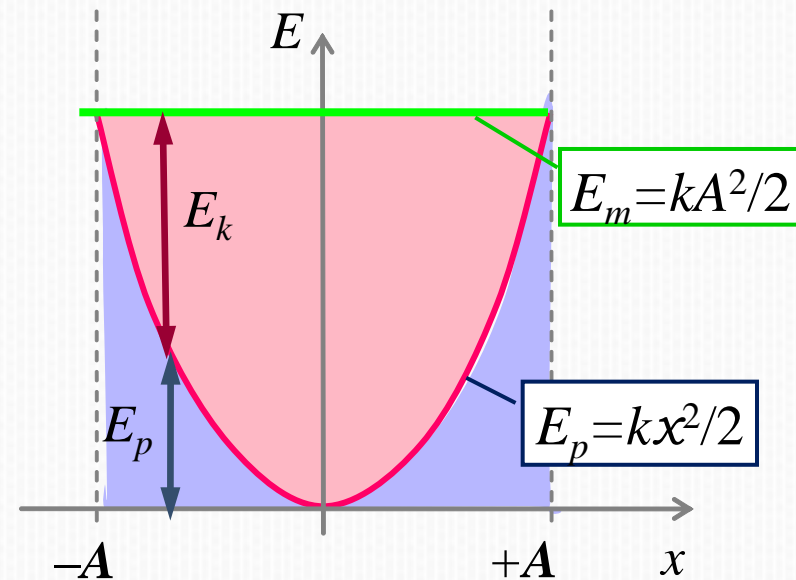
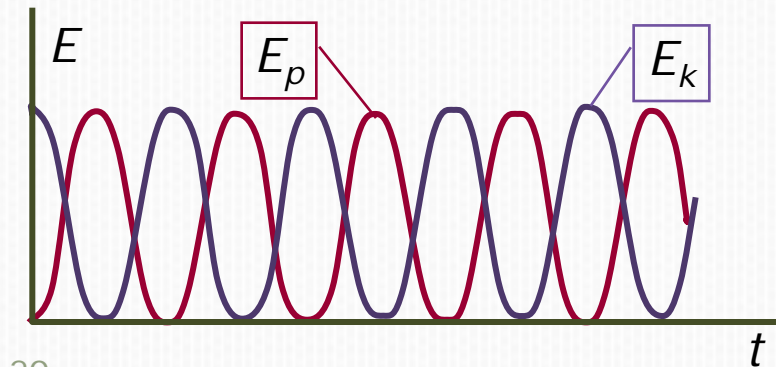


Oznacza to, że energia mechaniczna w ruchu harmonicznym jest zachowana:

$$E_m = E_p + E_k = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{const.}$$

Możemy to sprawdzić:

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}kA^2 \sin^2 \omega_0 t + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega_0 t = \\ &= \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2. \end{aligned}$$



1.2. Drgania tłumione

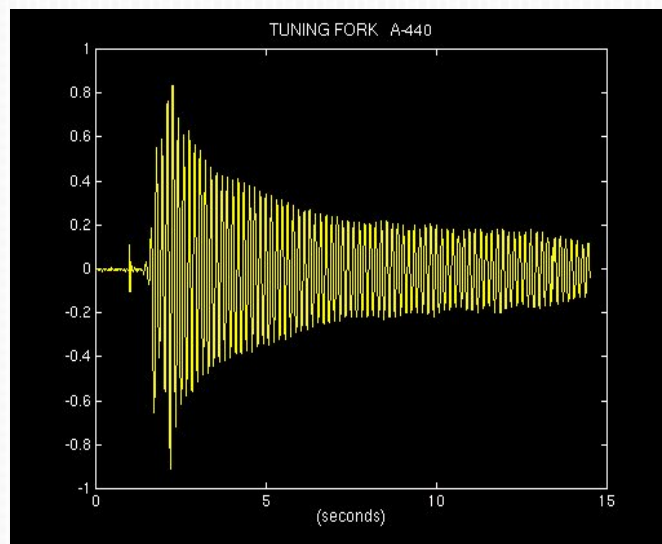
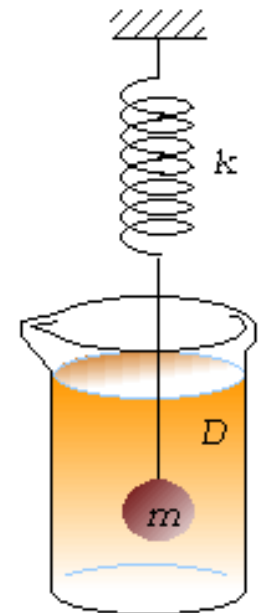
Na ruch realnego oscylatora harmonicznego mają zawsze wpływ siły oporu ruchu. Energia oscylatora tłumionego ulega nieodwracalnemu rozproszeniu w postaci ciepła. Są to zatem **siły dyssypatywne**.

Ogólnie możemy te siły zapisać: $\vec{F}_{\text{op}} = -f(v) \frac{\vec{v}}{v}$

Zbadajmy ruch tłumiony **tarciem wiskotycznym (lepkość)**, występującym przy niezbyt dużych szybkościach i ruchu ciał w cieczach, gazach.

$$\vec{F}_{\text{op}} = -b\vec{v}.$$

b – stały współczynnik, proporcjonalny do współczynnika lepkości



Równanie ruchu jednowymiarowego **oscylatora tłumionego**:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b v.$$

★
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

$\beta = \frac{b}{2m}$ – współczynnik tłumienia,

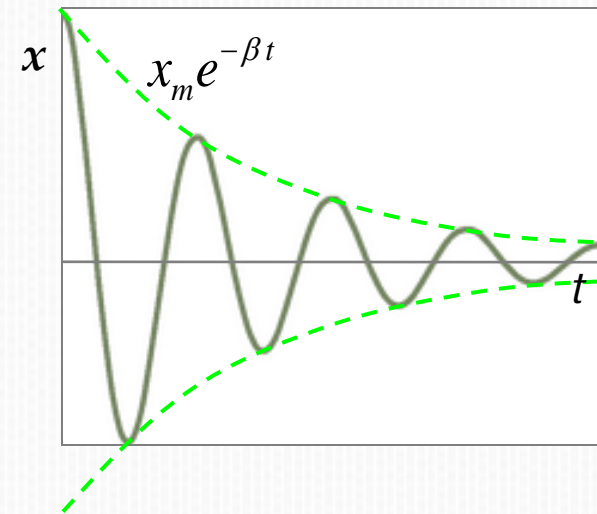
$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – częstość drgań własnych.

Przy niezbyt silnym tłumieniu ($\omega_0 > \beta$)
 rozwiązanie ma postać:

$$x = x_m e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha),$$

Obliczając: $\frac{d}{dt}[x_m e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha)] = \dots$

$$\frac{d^2}{dt^2}[x_m e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha)] = \dots,$$



I wstawiając do równania z ★ dostaniemy:
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Tłumienie powoduje wzrost okresu drgań: $T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

Kolejne maksymalne wychylenia, „amplitudy”, przyjmują wartości określone ciągiem geometrycznym:

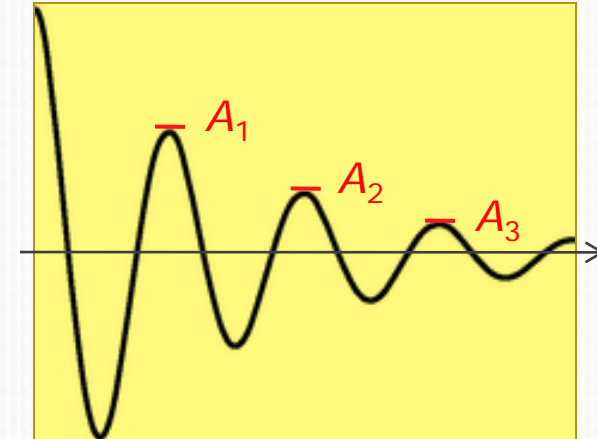
$$A_1 = x_m e^{-\beta t}, \quad A_2 = x_m e^{-\beta(t+T)} = A_1 e^{-\beta T}, \dots$$

Dekrement tłumienia: $\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}.$

Logarytmiczny dekrement tłumienia:

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T,$$

charakteryzuje drgający układ. Jego znajomość pozwala wyznaczyć współczynnik tłumienia β .



Energia mechaniczna oscylatora nie jest zachowana. Szybkość zmiany energii oscylatora w czasie:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m v^2 \right) = \left(kx + m \frac{dv}{dt} \right) v,$$

stąd: $\rightarrow \frac{dE}{dt} = -b v^2.$

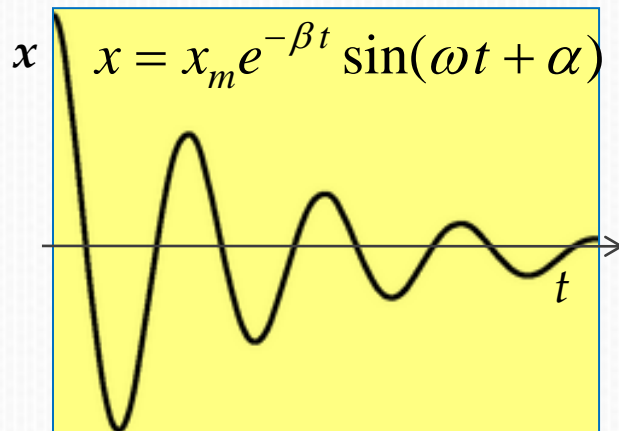
ale $kx + m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt},$

Obliczmy moc związaną z siłami oporu: $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = -b \vec{v} \cdot \vec{v} = -b v^2.$

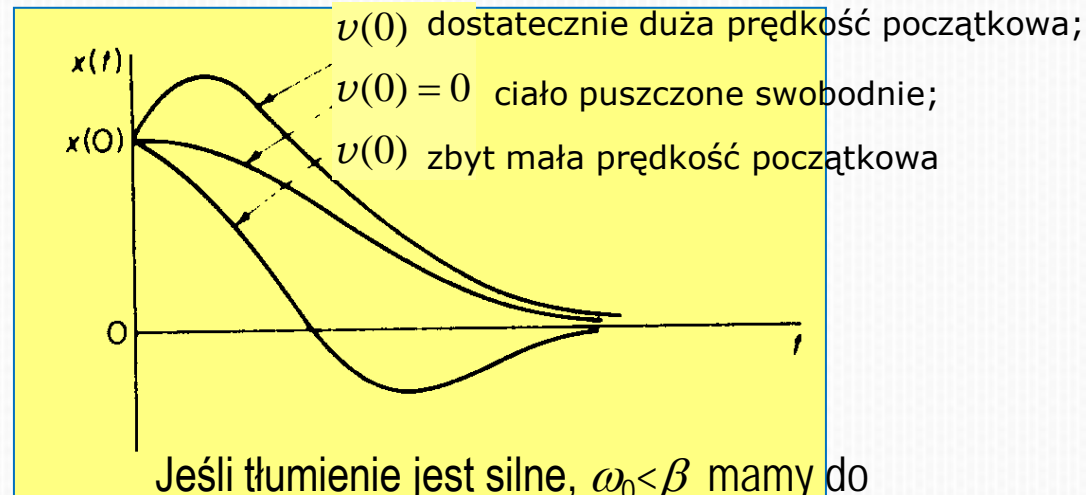
Dochodzimy do wniosku, że

Pochodna energii jest równa mocy traconej na opory ruchu.

Energia oscylatora tłumionego ulega rozproszeniu w postaci ciepła.



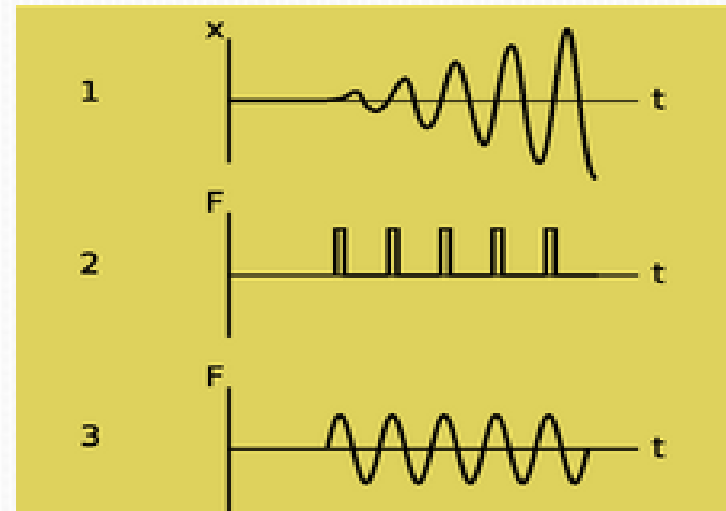
Słabe tłumienie: **ruch periodyczny**



Jeśli tłumienie jest silne, $\omega_0 < \beta$ mamy do czynienia z **ruchem aperiodycznym**.

1.4. Drgania wymuszone. Rezonans

Siłę wymuszającą wychYLENIA kładki (1) realistycznie przedstawimy w postaci okresowo występujących impulsów (2), a dla uproszczenia opisu możemy przyjąć model siły zmiennej sinusoidalnie (3).



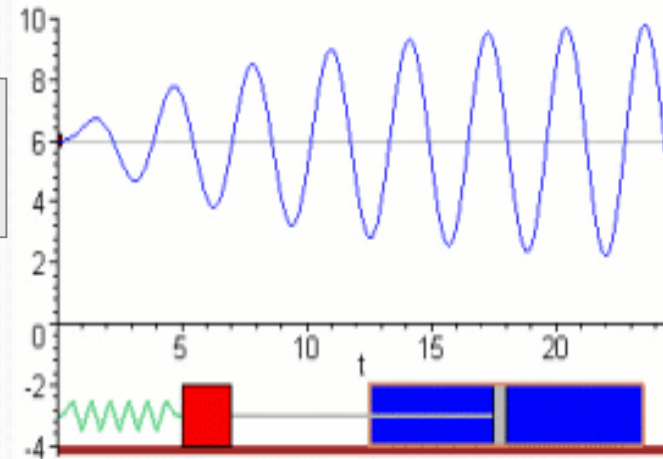
Jeśli zewnętrzna siła wymuszająca drgania ma postać: $F = F_0 \sin \Omega t$

to początkowo amplituda drgań rośnie w czasie (stan przejściowy, nieustalony), aż osiągnie ostateczną wartość (stan ustalony, stacjonarny).

Równanie ruchu: $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b v + F_0 \sin \Omega t.$



$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \Omega t.$$



β – współczynnik tłumienia, ω_0 – częstość drgań własnych.

Zajmiemy się omawianiem **stanu ustalonego**, dla którego należy się spodziewać drgań o częstości Ω siły wymuszającej, ale opóźnionych w fazie o φ .

Rozwiązanie ma wtedy postać: $x = x_0 \sin(\Omega t + \varphi),$

φ - przesunięcie fazowe między siłą wymuszającą i wychyleniem oscylatora

Amplituda drgań wymuszonych x_0 zależy od częstości Ω siły wymuszającej i współczynnika tłumienia β , $x_0 = x_0(\Omega, \beta)$.

Osiąga wartość maksymalną dla **częstości rezonansowej**:

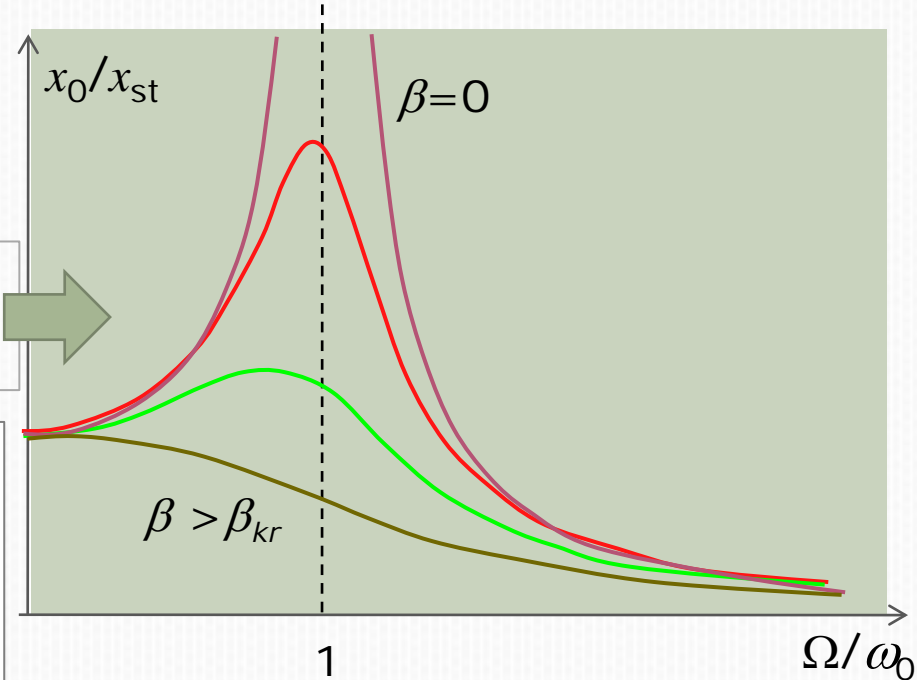
$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad \beta = \frac{b}{2m}$$

Wartość amplitudy w rezonansie:

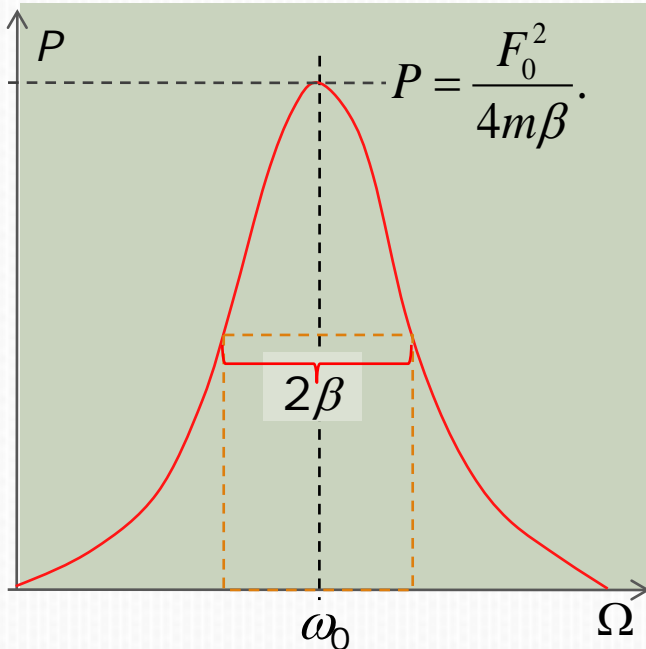
$$x_{\text{rez}} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{F_0}{2m\beta\omega}$$

Uniwersalne krzywe rezonansowe w zależności od współczynnika tłumienia β

- Przy małym tłumieniu, częstość rezonansowa Ω_R jest w przybliżeniu równa częstości drgań własnych ω_0 .
- Wraz ze wzrostem tłumienia zmniejsza się częstość rezonansowa i ulega spłaszczeniu przebieg krzywej rezonansowej.



$x_{st} = F_0/k$ to wychylenie statyczne dla $\Omega=0$; powyżej wartości krytycznej β_{kr} rezonans nie wystąpi.

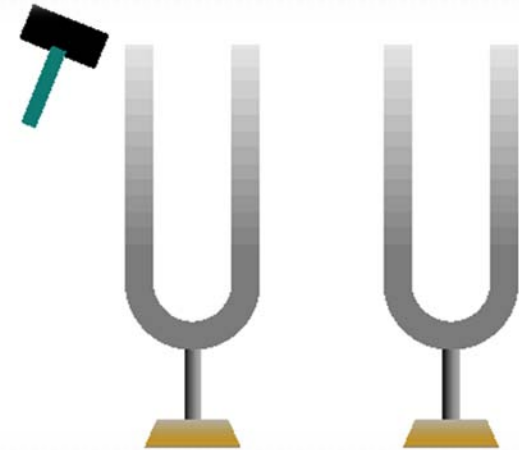


Dostarczana przez siłę wymuszającą moc P jest zużywana na pokonanie oporów ruchu i w rezonansie średnia moc P_{sr} osiąga maksymalną wartość, co odpowiada najszybszemu dopływowi energii.

Średnia moc dostarczana przez siłę wymuszającą w zależności od Ω .

Rezonans występuje również w obwodach elektrycznych zawierających indukcyjność L i pojemność C .

Przykłady Rezonans dwu kamertonów



Konstrukcje mechaniczne mają jedną lub więcej częstości własnych. Siła zewnętrzna zmieniająca się z częstością zbliżoną do częstości własnej może doprowadzić do tak silnych drgań, że konstrukcja ulegnie zniszczeniu. Projektanci muszą to brać pod uwagę!



Szkodliwe dla konstrukcji drgania należy wytłumić, tak jak w przypadku drgań konstrukcji budowli wywołanych przez fale sejsmiczne. Służą temu amortyzatory sejsmiczne.

Rozmiar szkód zależy od skali wstrząsów sejsmicznych, odległości od epicentrum i budowy geologicznej.

Częstotliwość drgań podłoża jest istotnym czynnikiem – nie tylko amplituda – decydującym o tym, w jakim stopniu i jakie konstrukcje są najbardziej podatne na zniszczenie.



Najbardziej ucierpią budynki, dla których **częstość drgań sejsmicznych będzie bliska rezonansowej**; trzęsienie ziemi w stolicy Meksyku w 1985 r. – głównie ucierpiały budynki średniej wysokości.