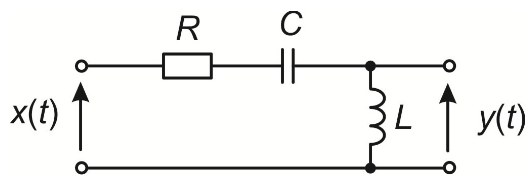
1. Dla funkcji $y(t) = 2t$ wyznaczyć pierwszy wyraz szeregu Fouriera dla przedziału przedziale $(-\pi, \pi)$.

Twierdzenie o całkowaniu przez części

$\int f^{'}(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g^{'}(x)dx$

2. Dla poniższego układu wyznaczyć:
- wzór przedstawiający transmitancję operatorową,
- równanie różniczkowe opisujące ten układ



Rozwiązanie - zadanie 1

Szereg Fouriera

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right]$$

gdzie:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

a_0 - składowa stała

a_n - n-ta składowa szeregu Fouriera

Jeżeli $f(t)$ jest **nieparzysta**, tzn. taka, dla której $f(-t) = -f(t)$ to współczynnik a_0

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)dt = \frac{1}{T}\left[\int_{-p}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{p} f(t)dt\right] = 0$$

Współczynnik a_n

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos(n\frac{2\pi}{T}t)dt = \int_{-p}^{0} f(t)\cos(n\frac{2\pi}{T}t)dt + \int_{0}^{p} f(t)\cos(n\frac{2\pi}{T}t)dt = 0$$

gdzie $T = 2 \cdot p$

Współczynnik b_n

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\sin(n\frac{2\pi}{T}t)dt = \int_{-p}^{0} f(t)\sin(n\frac{2\pi}{T}t)dt + \int_{0}^{p} f(t)\sin(n\frac{2\pi}{T}t)dt = \frac{2}{p}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin(n\frac{2\pi}{T}t)dt$$

Zatem:

$$a_1 = 0$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cdot t\cdot \sin\left(1\cdot\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} t\cdot\sin(t)dt$$

Wyznaczamy całkę nieoznaczoną

$$\int t\cdot\sin(t)dt$$

Stosując metodę całkowania przez części:

$$\left| \begin{array}{ll} f'(t) = \sin(t) & g(t) = t \\ f(t) = -\cos(t) & g'(t) = 1 \end{array} \right.$$

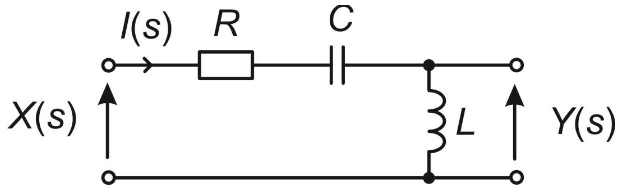
mamy

$$-\cos(t)\cdot t + \int\cos(t)dt = -\cos(t)\cdot t + \sin(t)$$

Uwzględniając powyższe rozwiązanie, wyznaczamy pierwszy współczynnik szeregu Fouriera

$$b_1 = \frac{4}{\pi}[\sin(t) - \cos(t)\cdot t]\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}[\sin(\pi) - \pi\cdot\cos(\pi) - (\sin(0) - 0\cdot\cos(0))] =$$
$$= \frac{4}{\pi}[0 - \pi\cdot(-1) - 0 + 0] = \frac{4}{\pi}\cdot\pi = 4$$

Rozwiązanie - zadanie 2



$$X(s) = I(s)\left[R + \frac{1}{sC} + sL\right]$$

$$Y(s) = I(s)sL$$

Transmitancja operatorowa

$$K(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{I(s)sL}{I(s)\left[R+\frac{1}{sC}+sL\right]}=\frac{sL}{R+\frac{1}{sC}+sL}\cdot\frac{sC}{sC}=\frac{s^2LC}{sRC+1+s^2LC}=\frac{s^2}{s^2+s\frac{R}{L}+\frac{1}{LC}}$$

Równanie różniczkowe

$$Y(s)\left[s^2+s\frac{R}{L}+\frac{1}{LC}\right]=X(s)\cdot s^2$$

$$Y(s)\cdot s^2\equiv\ddot{y}(t)$$

$$Y(s)\cdot s\equiv\dot{y}(t)$$

$$Y(s)\equiv y(t)$$

$$X(s)\cdot s^2\equiv\ddot{x}(t)$$

$$\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)\frac{R}{L}+y(t)\frac{1}{LC}=\ddot{x}(t)$$

DODATKOWO

Charakterystyki częstotliwościowe

$$K(s)=\frac{s^2}{s^2+s\frac{R}{L}+\frac{1}{LC}}$$

$$s\leftarrow j\omega$$

$$K(j\omega)=\frac{-\omega^2}{-\omega^2+j\omega\frac{R}{L}+\frac{1}{LC}}=\frac{-\omega^2}{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)+j\left(\omega\frac{R}{L}\right)}\cdot\frac{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)-j\left(\omega\frac{R}{L}\right)}{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)-j\left(\omega\frac{R}{L}\right)}$$

$$K(j\omega)=\frac{-\omega^2\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)+j\omega^2\left(\omega\frac{R}{L}\right)}{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\left(\omega\frac{R}{L}\right)^2}=\frac{-\omega^2\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)}{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\left(\omega\frac{R}{L}\right)^2}+j\frac{\omega^2\left(\omega\frac{R}{L}\right)}{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\left(\omega\frac{R}{L}\right)^2}=$$

$$=P(\omega)+jQ(\omega)$$

Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa

$$A(\omega) = \left|K(j\omega)\right| = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2}$$

Charakterystyka fazowo-częstotliwościowa

$$\varphi(\omega = \arg\bigl(K(j\omega)\bigr) = arctg\,\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$