Estymacja przedziałowa. Wprowadzenie do testowania hipotez.

Mgr inż. Szymon Łukasik
szymonl@pk.edu.pl

Wprowadzenie

Celem niniejszego ćwiczenia jest zapoznanie Państwa z zagadnieniem estymacji przedziałowej. Zostanie ono rozpatrzone w kontekście szacowania wartości średniej zmiennej o rozkładzie normalnym. Na jego bazie poznacie Państwo również podstawowe kwestie związane z testowaniem hipotez statystycznych.

Zadaniem estymacji przedziałowej jest skonstruowanie, na podstawie próby losowej, przedziału w którym, z pewnym zadanym prawdopodobieństwem, znajduje się prawdziwa wartość szacowanego parametru. Prawdopodobieństwo to nazywa się **poziomem ufności**, a otrzymane na podstawie próby dwa końce przedziału określa się mianem **przedziału ufności**.

Szacowanie średniej przy znanym odchyleniu standardowym

Niech $x_1, x_2, \ldots, x_m$ oznacza próbę z rozkładu normalnego N(μ, σ) o znanym odchyleniem standardowym. Zadanie polega na wyznaczeniu przedziału ufności dla nieznanego parametru – wartości średniej μ.

Średnia w próbie $\bar{x}$ obliczona wg wzoru:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{m} \tag{1}$$

ma rozkład normalny $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{m}})$, tak więc zmienną losowa o próbie:

$$y = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{m}} \tag{2}$$

charakteryzuje rozkład normalny N(0,1). Przedział w którym z prawdopodobieństwem 1-α należy wartość zmiennej losowej o próbie y wyznacza się stosunkowo łatwo:

$$P\left(q_{\frac{\alpha}{2}} \leq y \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha \tag{3}$$

gdzie $q_{\frac{\alpha}{2}}$ jest kwantylem rzędu $\frac{\alpha}{2}$ a $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ kwantylem rzędu $1-\frac{\alpha}{2}$ standardowego rozkładu normalnego. Przy czym skoro rozkład ten jest symetryczny to $q_{\frac{\alpha}{2}} = -q_{1-\frac{\alpha}{2}}$, wstawiając tą zależność do powyższego równania oraz wykorzystując wzór (2) otrzymuje się przedział:

$$P\left(-q_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{m}} \le q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \quad (4)$$

co po przekształceniach daje:

$$P\left(\bar{x} - q_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{m} \le \mu \le \bar{x} + q_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{m}\right) = 1-\alpha \quad (5)$$

Zatem mając realizację $x_1, x_2, \ldots, x_m$ próby X możemy obliczyć średnią z próby $\bar{x}$ i podać przedział ufności dla µ na poziomie ufności $1-\alpha$ postaci:

$$\left[\bar{x} - q_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{m}, \bar{x} + q_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{m}\right] \quad (6)$$

Szacowanie średniej przy nieznanym odchyleniu standardowym

W przypadku gdy odchylenie standardowe nie jest znane zamiast zmiennej losowej o próbie *y* definiuje się pomocniczą zmienną *t:*

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{m}} \quad (7)$$

gdzie *S* oznacza odchylenie standardowe obliczone z próby $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Można dowieść iż rozkład takiej zmiennej posiada postać rozkładu *t* (inaczej rozkładu Studenta) z m-1 stopniami swobody. Rozkład t z m stopniami swobody jest dany gęstością:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\sqrt{m\pi}}\left(1+\frac{x^2}{m}\right)^{-(m+1)/2} \quad (8)$$

gdzie m jest liczbą naturalną, zaś Γ oznacza funkcję gamma. Gęstość tego rozkładu jest funkcją symetryczną o grubszych ogonach niż te w rozkładzie normalnym (dla m>30 można go rozpatrywać jako standaryzowany rozkład normalny). Przedział ufności dla średniej ma w tym przypadku postać:

$$\left[\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2},m-1}S/\sqrt{m}, \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2},m-1}S/\sqrt{m}\right] \quad (9)$$

gdzie $t_{1-\frac{\alpha}{2},m-1}$ oznacza kwantyl rzędu $1-\frac{\alpha}{2}$ rozkładu t_{m-1}. Wartości tychże kwantyli uzyskuje się zwykle z tablic bądź przy pomocy komputera.

Sprawdzanie hipotez dotyczących wartości średniej rozkładu normalnego jako przykład stosowania metodyki testowania hipotez statystycznych

Przypuśćmy że X jest zmienną losową o rozkładzie normalnym N(μ, σ), o nieznanej wartości oczekiwanej i odchyleniu standardowym.

Stawiamy hipotezę oznaczoną H_0 (tzw. hipotezę zerową) że $\mu=\mu_0$ co zapisuje się:

$H_0 : \mu=\mu_0$

Hipoteza alternatywna ma postać:

$H_1 : \mu\neq\mu_0$

Na podstawie próby uzyskanej dla zmiennej X staramy się hipotezę H_0 **zweryfikować**. Realizuje się to przy użyciu poznanego już przez Państwa aparatu tj. należy utworzyć przedział ufności dla średniej (9) przy ustalonym poziomie ufności $1-\alpha$ (zwykle α przyjmuje się na poziomie 0,05 lub 0,1). Jeżeli μ_0 leży w tym przedziale to hipotezę H_0 należy **przyjąć**, jeśli nie – **odrzucić** i przyjąć hipotezę alternatywną.

Statystycy w/w rozumowanie sprowadzają do obliczenia tzw. statystyki testowej t danej wzorem (7) – z μ_0 przyjętym jako μ – i zbadania czy :

$$|t| \leq t_{1-\frac{\alpha}{2},m-1} \tag{10}$$

Test taki nazywamy **testem t-Studenta**.

Tego rodzaju wnioskowanie może prowadzić do błędów które klasyfikuje się następująco:

- **błąd I rodzaju** – gdy hipoteza H_0 jest prawdziwa a zostaje odrzucona (prawdopodobieństwo popełnienia tego błędu to α)
- **błąd II rodzaju** – gdy hipoteza H_0 jest fałszywa a zostaje ona przyjęta

Im mniejsze prawdopodobieństwo błędu I rodzaju tym większe staje się prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju.

Ogólny schemat metodyki testowania hipotez statystycznych dla nieznanego parametru b przedstawia się następująco:

1. Postawienie hipotezy H: $b=b_0$ i hipotez alternatywnych (różne, większe,mniejsze)
2. Ustalenie poziomu istotności α.
3. Określenie statystyki testowej (np. y lub t) oraz obszarów: **przyjęcia** i **krytycznego** (tj. odrzucenia hipotezy zerowej).

4. Pobranie próby i obliczenie statystyki testowej.
5. Przyjęcie hipotezy H gdy zaobserwowana wartość statystyki testowej znajdzie się w obszarze przyjęć.
6. Odrzucenie hipotezy H gdy zaobserwowana wartość statystyki znajdzie się w obszarze krytycznym