

MATEMATYKA DYSKRETNA- Zadania.

22 maja 2008

1 Zliczanie

1.1 Zasada włączeń i wyłączeń

Zadanie 1 W zbiorze $S = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ wyznacz ilość liczb podzielnych przez 4 lub 5 lub 6.

Zadanie 2 W zbiorze $S = \{1, 2, 3, \dots, 2008\}$ wyznacz ilość liczb podzielnych przez 6 lub 7 lub 9.

Zadanie 3 Ile jest liczb całkowitych w zbiorze $S = \{1, 2, 3, \dots, 2000\}$, które są podzielne przez 9 lub 11 lub 13 lub 15? Odp. 581.

Zadanie 4 W zbiorze $S = \{100, 101, \dots, 999\}$ wyznacz ilość liczb, które zostały zapisane przy użyciu co najmniej jednej 3 i co najmniej jednej 7.

1.2 Zasada rozmieszczenia obiektów w kontenerach.

Zadanie 5 Rozważamy identyfikatory dwucyfrowe, $S = \{00, 01, \dots, 99\}$. Ilu użytkowników może posługiwać się identyfikatorami, których suma cyfr wynosi 7?

Zadanie 6 Rozważamy liczby, $S = \{1, 2, \dots, 100000\}$. Ile spośród nich posiada tą własność, że suma cyfr wynosi 7?

Zadanie 7 Na ile sposobów można przetransmitować drogą elektroniczną 7 identycznych wiadomości do skrzynek 3 różnych PC? Ile jest możliwości, jeżeli każdy z PC ma otrzymać co najmniej jedną wiadomość?

Zadanie 8 Na ile sposobów można rozmieścić 14 obiektów w 3 kontenerach tak, aby:

8.1 w jednym z kontenerów znalazło się co najmniej 8 przedmiotów?

8.2 w żadnym z kontenerów nie znalazło się więcej niż 7 przedmiotów?

Zadanie 9 Rozważamy hasła numeryczne trzycyfrowe złożone z cyfr $0, 1, \dots, 9$. Ilu z użytkowników może posługiwać się hasłem o sumie cyfr 20?

Wskazówka: rozważ zakres cyfr, jakie mogą zostać użyte w hasle.

Zadanie 10 Ile jest liczb binarnych 8-bitowych, w których:

10.1 bit 1 jest na dokładnie jednej pozycji

10.2 bit 1 jest na co najmniej trzech pozycjach

10.3 bit 1 jest na co najwyżej trzech pozycjach

1.3 Zasada szufladkowa Dirichleta

Zadanie 11 Użytkownik podaje 4 dowolne liczby całkowite. Wyjaśnij dlaczego dwie muszą przetrwać modulo 3.

Zadanie 12 Kontener zawiera 50 instancji obiektów 4 różnych klas. Wyjaśnij dlaczego jest co najmniej 13 instancji tej samej klasy.

Zadanie 13 Niech A będzie 10-elementowym podzbiorem zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 50\}$. Wykaż, że A ma dwa 4-elementowe podzbiory, mające równe sumy elementów.

1.4 Inne

Zadanie 14 Hasło może się składać ze znaków: $a, b, c, d, e, f, 1, 2, 3, 4, 5$, gdzie każdy znak występuje dokładnie raz. Ile należy sprawdzić kombinacji (brutalna kryptoanaliza) aby odzyskać hasło, o którym wiemy, że:

14.1 litery a, b sąsiadują ze sobą

14.2 litery a, b nie sąsiadują ze sobą

14.3 litery a, b rozdziela litera f

14.4 litery są rozdzielone cyframi

14.5 litery występują obok siebie (podobnie cyfry)

2 Elementy teorii liczb

Zadanie 15 W języku C++ zapisz kod funkcji obliczającej (zwracającej) największy wspólny dzielnik liczb całkowitych a oraz b przy zastosowaniu algorytmu Euklidesa.

Zadanie 16 Korzystając z algorytmu Euklidesa, wyznacz $NWD(1071, 1029)$.

Zadanie 17 Korzystając z rozkładu na czynniki pierwsze, wyznacz najmniejszą wspólną wielokrotność liczb 1071 i 1029 .

Zadanie 18 Korzystając z algorytmu Euklidesa sprawdź, czy liczby 46406 i 36957 są względnie pierwsze.

Zadanie 19 Niech $d = NWD(1071, 1029)$. Wyznacz liczby całkowite x, y spełniające równanie: $d = 1071 \cdot x + 1029 \cdot y$.

Zadanie 20 Wyznacz rozwiązania podanej kongruencji:

20.1 $20x \equiv 13 \pmod{22}$; (brak rozwiązań)

20.2 $21x + 5 \equiv 0 \pmod{29}$;

20.3 $29^{-1} \pmod{17}$; ($x \equiv 10$)

3 Złożoność obliczeniowa

Zadanie 21 Próby pokazały, że algorytm o klasie złożoności obliczeniowej $O(n^2)$, $n_1 = 1000$ danych przetwarzał w czasie $t_1 = 5$ sek. Ile przypuszczalnie czasu t_2 zajmie przetworzenie $n_2 = 400$ elementów w tym algorytmie?

Zadanie 22 Ile czasu zajmie przetworzenie $n_2 = 400$ danych dla algorytmu o złożoności obliczeniowej $O(\log_2 n)$, jeżeli wiadomo, że $n_1 = 100$ elementów przetworzył w czasie 2 sek?

Zadanie 23 Algorytm uogólnionego schematu Hornera (obliczającego wartości kolejnych pochodnych wielomianu w punkcie) ma postać:

```
for (int i=0; i<=n-1; i++)
```

```
for (int k=1; k<=n-i; k++)
```

```
tab[k]=tab[k-1]*x+tab[k];
```

Oszacuj złożoność obliczeniową tego algorytmu.

Zadanie 24 Oszacuj złożoność obliczeniową dla podanego algorytmu wyznaczania tablicy ilorazów różnicowych:

```
for (int i=0; i<=n; i++)
{
  rob[i]=tab[i];
  for (int k=i-1; k<=0; k--)
    rob[k]=(rob[k+1]-rob[k])\ (pkt[i]-pkt[k]);
  a[i]=rob[0];
}
```

Zadanie 25 Oszacuj złożoność algorytmu wyszukiwania liniowego w tablicy w oparciu o liczbę porównań elementów tej tablicy. Dokonaj szacowania: optymistycznego, pesymistycznego i średniego:

```
int i=0;
bool mam=false;
while((i<n)&&(mam==false))
{
  if(tab[i]==szukany) mam=true;
  i++;
}
```

Zadanie 26 Oszacuj złożoność algorytmu wyszukiwania binarnego w tablicy w oparciu o liczbę porównań elementów tej tablicy. Dokonaj szacowania: optymistycznego, pesymistycznego i średniego:

```
int i,beg,end;
bool mam=false;
i=0;beg=0;end=n-1;
do
{
  i=(end-beg)/2;
  if (tab[i+beg]==x) mam=true;
  else if (tab[i+beg]>x) end=i+beg;
  else beg=beg+i;
}
while ((end-beg>1)&&(mam==false))
```