Matematyka Dyskretna
ćwiczenia 2 (13.10.09)

Pierwszy przykład dotyczył sprawdzania czy zbiory są sobie równe, albo inaczej, jak porównywać ze sobą zbiory.

$(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$

Różnica jest raczej niezbyt symetrycznym działaniem (tak samo jak odejmowanie), dlatego możemy się domyślać, że te zbiory wcale nie będą równe. Jeśli nie są równe, to jest chociaż jeden punkcik, który należy do jednego zbioru i nie należy do drugiego. Naszym zadaniem jest zrobić przykład, w którym taki punkcik bez problemu znajdziemy.

Na ćwiczeniach znaleźliśmy takie zbiory, które pokazują, że faktycznie ten wzorek wyżej jest z dupy. Jeśli weźmiemy zbiorki A={1,0}, B={0} i C={1}, to mamy:
$(\{1,0\} \cup \{0\}) \setminus \{1\} = \{1,0\} \setminus \{1\} = \{0\}$ z prawej strony,
i:
$\{1,0\} \cup (\{0\} \setminus \{1\}) = \{1,0\} \cup \{0\} = \{1,0\}$ z lewej strony.
Lewa strona nie jest równa prawej, więc te zbiory są różne. Czyli wzorek wyżej nie jest prawdziwy dla dowolnych zbiorów A,B,C.

Drugi przykład polegał również na sprawdzeniu czy zbiory są równe.

$A\, o\, (B\, o\, C) = (A\, o\, B)\, o\, C$ - piszę o, bo nie mam tego trójkącika w formułkach :)

Tym razem jest duże prawdopodobieństwo, że ten wzorek jest prawdziwy, bo to działanie o jest symetryczne (z definicji $A\, o\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$).

No to wypadałoby to jeszcze udowodnić.

Wzorek będzie prawdziwy, jeśli dowolny $x \in (A\, o\, (B\, o\, C))$, to również $x \in ((A\, o\, B)\, o\, C)$.

//--------------------------------
Teraz czas na małą dygresję:

Co to znaczy, że $x \in A\, o\, B$?
To znaczy, że $(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)$.

Oznaczmy sobie $x \in A$ jako *p*, i $x \in B$ jako *q*.

Wtedy to nasze wyrażonko robi się bardziej podobne do typowych zdanek logicznych jakie już trzaskaliśmy, to znaczy: $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$. Możemy zrobić sobie teraz tabelkę zero jedynkową, żeby zobaczyć, czy tego wyrażenia nie da się zastąpić jakimś operatorem logicznym, który już znamy.
Okazuje się, że to wyrażenie daje takie same wartości jak operator XOR, który wszyscy świetnie znają z podstawówki (albo z wykładu) >:D Stąd: $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow p\ XOR\ q$.

Tak wygląda jego tabelka:

XOR	0	1
0	0	1
1	1	0

Można pokazać, że XOR jest operatorem łącznym (robiliśmy tabelkę, ale mi się nie chce jej przepisywać). A łączność to coś takiego:
$(p\ XOR\ q)\ XOR\ r \Leftrightarrow p\ XOR(q\ XOR\ r)$.
//---------------------------------

Wracając do zadanka:
$x \in (A\ o\ (B\ o\ C)) \Leftrightarrow (x \in A)\ XOR((x \in B)\ XOR(x \in C))$, a korzystając z łączności XORa to jest równoważne: $((x \in A)\ XOR(x \in B))\ XOR(x \in C) \Leftrightarrow x \in ((A\ o\ B)\ o\ C)$.

Czyli $A\ o(B\ o\ C) = (A\ o\ B)\ o\ C$.

Trzecią rzeczą jaką robiliśmy były relacje.

Relacja jest podzbiorem iloczynu kartezjańskiego jakichś zbiorów.
Na przykład:
Niech A = {0, 1, 2 , 3, 4}. Wtedy AxA to będzie zbiór wszystkich par:
{ (0,0), (0,1), ..., (0,4), ... (4,4)}.
Możemy sobie zdefiniować relację na tym iloczynie. Na przykład relacja P = { (1,1), (1,2), (1,3)}.
P jest dobrze określoną relacją, ale szczerze mówiąc mało ciekawą, dlatego takich relacji się raczej nie używa :P

Najpierw mówiliśmy o relacji zwrotnej, czyli takiej, która zawiera przekątną (taka delta z indeksem x).
W naszym iloczynie AxA ta przekątna jest równa: {(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)}.
Zatem relacją zwrotną na AxA będzie każda relacja posiadająca przynajmniej te 5 par.

Wracając do dowolnego iloczynu XxX.
Każdą własność (spójność, zwrotność, przechodniość itp.) można zdefiniować inaczej niż to było pokazane na wykładzie. I jest to chyba bardziej intuicyjne. Na przykład:

Relacja R jest zwrotna na XxX jeśli:

dla każdego x należącego do X zachodzi xRx.

Dlaczego taka wersja jest bardziej intuicyjna? Bo często relacje oznaczane są znaczkami =, >, <, |.

Zatem dla przykładu:

dla każdego x należącego do liczb rzeczywistych x=x – to brzmi znajomo :)

A oznacza tyle, co relacja '=' jest zwrotna.

Można by równie dobrze napisać, że (x,x) należy do =, ale dziwnie to wygląda.