def. Relacja

Relacją (2-argumentową) w zbiorze X nazywamy podzbiór kwadratu kartezjanskiego $X^2 = X \times X$.

Własności relacji:

def. Zwrotność 1:
Relacja R jest zwrotna, jeśli:
$\Delta_X \subset R$, przy czym $\Delta_x = \{(x, x) : x \in X\}$.

def. Zwrotność 2:
Relacja R jest zwrotna, jeśli:
$\forall_{x \in X} (x, x) \in R$ lub inaczej zapisując $\forall_{x \in X}$ zachodzi xRx .

def. Symetryczność 1:
Relacja R jest symetryczna jeśli:
$R \subset R^{-1}$, gdzie $R^{-1} = \{(y, x) \in X^2 : (x, y) \in R\}$.

Z symetryczności wynika, że tak na prawdę $R = R^{-1}$.

def. Symetryczność 2:
Relacja R jest symetryczna, jeśli:
$\forall_{(x, y) \in X^2} (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$.

Podobnie z symetryczności wynika, że $\forall_{(x, y) \in X^2} (x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R$.

def. Przechodniość 1:
Relacja R jest przechodnia, jeśli:
$R \circ R \subset R$, gdzie $R \circ R$ jest złożeniem relacji, to znaczy:
$R \circ R = \{(x, z) \in X^2 : \exists_{y \in X} (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R\}$.

def. Przechodniość 2:
Relacja R jest przechodnia, jeśli:
$\forall_{x, y, z \in X^2} (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$.

def. Słaba antysymetryczność 1:
Relacja R jest słabo antysymetryczna, jeśli:
$R \cap R^{-1} \subset \Delta_X$.

def. Słaba antysymetryczność 2:
Relacja R jest słabo antysymetryczna, jeśli:
$\forall_{x, y \in X} (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$.

def. Mocna antysymetryczność: 1:
Relacja R jest mocno antysymetryczna, jeśli:
$R \cap R^{-1} = \emptyset$.

def. Mocna antysymetryczność 2:
Relacja R jest mocno antysymetryczna, jeśli:
$\forall_{x, y \in X} (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$.

def. Słaba spójność 1:
Relacja R jest słabo spójna, jeśli:

$$R \cup R^{-1} \cup \Delta_X = X^2 .$$

def. Słaba spójność 2:
Relacja R jest słabo spójna, jeśli:

$$\forall_{x,y \in X} (x, y) \in R \vee (y, x) \in R \vee x = y .$$

def. Mocna spójność 1:
Relacja R jest mocno spójna, jeśli:

$$R \cup R^{-1} = X^2 .$$

def. Mocna spójność 2:
Relacja R jest mocno spójna, jeśli:

$$\forall x, y \in X (x, y) \in R \vee (x, y) \in R^{-1} .$$

We wszystkich definicjach nr. 2 można zastąpić $(x, y) \in R$ napisem $x R y$, który znaczy to samo. Trzeba tylko pamiętać, że $(x, y) \in R^{-1}$ zastępujemy $x R^{-1} y = y R x$. Kolejność jest ważna, gdy relacja nie jest symtryczna (czyli często :P).

Zadanko 1:
Mamy dwie zwrotne relacje R_1, R_2 . Czy $R_1 \cap R_2 i R_1 \cup R_2$ są zwrotne?

Z definicji zwrotności (numerek 1) wiemy, że: $\Delta_X \subset R_1 \wedge \Delta_X \subset R_2$, no a stąd $\Delta_X \subset R_1 \cap R_2$.

W drugim przypadku wystarczy nam to, że $\Delta_X \subset R_1$, bo jeśli do zbioru R_1 dodamy jakikolwiek inny zbiór, to dalej będzie spełniony warunek: $\Delta_X \subset R_1$, bo przecież dodając inny zbiór nic nie zabieramy z tego co już jest. Dlatego dla dowolnego zbioru *S* mamy: $\Delta_X \subset (R_1 \cup S)$.
W szczególności dla $S = R_2$ mamy: $\Delta_X \subset R_1 \cup R_2$.

Czyli $R_1 \cap R_2 i R_1 \cup R_2$ są również zwrotne.

Zadanko 2:
Niech R_1, R_2 będą relacjami symetrycznymi.Czy $R_1 \cap R_2 i R_1 \cup R_2$ są symetryczne?

Z definicji (numerek 2) symetryczności mamy, że:
Prosiaczek1: $\forall_{x,y \in X} (x, y) \in R_1 \Rightarrow (y, x) \in R_1$, oraz:
Prosiaczek2: $\forall_{x,y \in X} (x, y) \in R_2 \Rightarrow (y, x) \in R_2$.

Weźmy sobie zatem dowolną parę $(x, y) \in R_1 \cap R_2$, wtedy:
$(x, y) \in R_1 \cap R_2 \Leftrightarrow (x, y) \in R_1 \wedge (x, y) \in R_2$. Z Prosiaczka1 i Prosiaczka2 mamy:
$(x, y) \in R_1 \wedge (x, y) \in R_2 \Rightarrow (y, x) \in R_1 \wedge (y, x) \in R_2$, co jest równoważne temu, że:
$(y, x) \in R_1 \cap R_2$. Podsumowując:
$(x, y) \in R_1 \cap R_2 \Leftrightarrow (y, x) \in R_1 \cap R_2$, co jest niczym innym jak definicją symetryczności.

Niech teraz $(x, y) \in R_1 \cup R_2$, czyli:
$(x, y) \in R_1 \vee (x, y) \in R_2$.
Jeśli $(x, y) \in R_1$, to: $(y, x) \in R_1 \Rightarrow (y, x) \in R_1 \cup R_2$.
Jeśli $(x, y) \in R_2$, to: $(y, x) \in R_2 \Rightarrow (y, x) \in R_1 \cup R_2$.

Zatem:

$$(x, y)\in R_1\cup R_2\Rightarrow (y, x)\in R_1\cup R_2 \quad .$$

Czyli $R_1\cap R_2 i R_1\cup R_2$ są również symetryczne.

Zadanko 3:
Niech R_1, R_2 będą przechodnie.Czy $R_1\cap R_2 i R_1\cup R_2$ też są przechodnie?

Weźmy sobie dowolne trzy punkty takie, że $(x, y)\in R_1\cap R_2\wedge (y, z)\in R_1\cap R_2$, wtedy:

$$\begin{gathered}
(x, y)\in R_1\cap R_2\wedge (y, z)\in R_1\cap R_2\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow ((x, y)\in R_1\wedge (x, y)\in R_2)\wedge ((y, z)\in R_1\wedge (y, z)\in R_2)\Leftrightarrow \\
/* z\ logiki\ mogę\ sobie\ poprzestawiać\ nawiasy */ \\
\Leftrightarrow ((x, y)\in R_1\wedge (y, z)\in R_1)\wedge ((x, y)\in R_2\wedge (y, z)\in R_2)\Leftrightarrow \\
/* z\ definicji\ przechodniości */ \\
\Leftrightarrow (x, z)\in R_1\wedge (x, z)\in R_2\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (x, z)\in R_1\cap R_2 \quad .
\end{gathered}$$

Suma dwóch relacji przechodnich nie musi być przechodnia.

Kontrprzykład:

$X=\{a, b, c\}$,
$R_1=\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$
$R_2=\{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$.

Nie chce mi się rysować, ale jeśli weźmiemy pary: (a,b) i (b,c), to z przechodniości wynikałoby, że para (a,c) należałaby do $R_1\cup R_2$, a tak nie jest.

Czyli przecięcie dwóch relacji przechodnich jest relacją przechodnią, zaś suma dwóch relacji przechodnich nie jest reacją przechodnią.

Zadanko 4:
Czy jeśli R_1 i R_2 są mocno (słabo) spójne, to $R_1\cap R_2, R_1\cup R_2$ są mocno (słabo) spójne?

$R_1\cap R_2$ nie jest mocno spójna, bo możemy wziąć za R_1 na przykład $\leqslant$, a za R_2 wziąć sprytnie $\geqslant$. Wtedy $R_1\cap R_2$ jest równe relacji $=$, a ta nie jest mocno spójna.

Podobnie jeśli R_1, R_2 są słabo spójne, to $R_1\cap R_2$ nie musi być słabo spójna. W tym przypadku możemy wziąć za $R_1 i R_2$ odpowiednio $<$ i $>$. Wtedy $R_1\cap R_2=\emptyset$.