Jakub Stawiec

ANALIZA MATEMATYCZNA I ALGEBRA LINIOWA - WYKŁAD

12-10-11

Analiza Matematyczna i Algebra Liniowa

dr. Wacław Pielichowski
WMFiI pok. 306/11 (WIEiK)

Konsultacje:
- pn. $12^{30}-13^{30}$
- wt. $11-12^{30}$
- czw. $13:30-14^{15}$

Literatura:

- Bochnicki, Wiliarska "Matematyka cz. 1"
- Kołodziej, "Analiza matematyczna"
- Żakowski, Kołodziej, "Matematyka I-IV"
- Rudnicki "Wykłady z Analizy matematycznej"
- Kluczkowski, Nab... "Algebra dla studentów"
- Banaszak, Gajda "Elementy algebry liniowej" I-II

Podstawowe oznaczenie

$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$

$\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\dots\}$

$\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych

$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych, $\mathbb{R}^+$ - rzeczywiste dodatnie $=(0,+\infty)$

$\mathbb{C}$ - zbiór liczb zespolonych

Kwantyfikatory:

$\forall$ - "dla dowolnych"/"dla każdego" (kwantyfikator ogólny)

$\exists$ - "istnieje" (kwantyfikator szczegółowy)

Przedziały:

$(a,b) \overset{def}{=} \{x\in\mathbb{R} : a<x<b\}$

$[a,b] \overset{def}{=} \{x\in\mathbb{R} : a\leq x\leq b\}$

Działania na zbiorach:

$\emptyset \neq X$, $A,B\subset X$

suma: $A\cup B=\{x\in X : x\in A \vee x\in B\}$

iloczyn: $A\cap B=\{x\in X : x\in A \wedge x\in B\}$

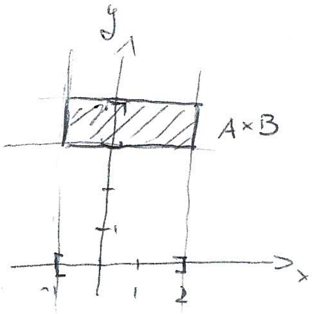
różnica: $A\setminus B=\{x\in X : x\in A \wedge x\notin B\}$

iloczyn kartezjański: $A\times B=\{(x,y) : x\in A, y\in B\}$

Przykład:

$A=[-1,2]$, $B=[3,4]$

$A\times B=[-1,2]\times[3,4]=\{(x,y): x\in[-1,2],\ y\in[3,4]\}$



~~Przykład~~

Ciągi liczbowe

DEF Każde odwzorowanie $a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywany <u>ciągiem liczbowym</u>

$a(n)=a_n$, $a(1)=a_1$, $a(2)=a_2$

$a=\{a_n\}_{n\in N}=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\{a_n\}=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

DEF $\{a_n\}$ - ciąg liczbowy , $g\in\mathbb{R}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=g \overset{def}{\iff} \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : |a_n-g|<\varepsilon$

CIĄG LICZBOWY

DEF $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty \quad \forall M>0\ \exists\delta>0\ \forall n>\delta : a_n>M$

DEF $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty \quad \forall M>0\ \exists\delta>0\ \forall n\geq\delta : a_n<-M$

Przykład:

I $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\overset{?}{=}1$

$|a_n-g|<\varepsilon$

$\left|\frac{n}{n-1}-1\right|<\varepsilon$

$\left|\frac{-1}{n+1}\right|<\varepsilon$

$\left|\frac{-1}{n+1}\right|<\varepsilon$ ust. $\varepsilon>0$

$\frac{|-1|}{|n+1|}<\varepsilon$

$\frac{1}{n+1}<\varepsilon$

$1<\varepsilon(n+1)$

$\frac{1}{\varepsilon}-1<n$

$\delta=\frac{1}{\varepsilon}$

$n\geq\delta \Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}-1$

II

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$

DZIAŁANIA NA GRANICACH

TWIERDZENIE Tw. o działaniach na granicach

Z: $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$

T: 1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a+b$

2) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a\cdot b$

3) $b_n \neq 0 \ \forall n\in\mathbb{N}, b\neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$

4) $a_n > 0 \ \forall n\in\mathbb{N}, a>0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim_{n\to\infty} b_n} = a^b$

Uogólnienie:

- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty - \infty = ?$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$
- $a \in \mathbb{R}$
- $a \cdot \infty = \begin{cases} \infty, & a>0 \\ ?, & a=0 \\ -\infty, & a<0 \end{cases}$
- $a \cdot (-\infty) = \begin{cases} +\infty, & a<0 \\ ?, & a=0 \\ -\infty, & a>0 \end{cases}$
- $\frac{a}{\infty} = 0 = \frac{a}{-\infty}$
- $a^{\infty} = \begin{cases} \infty, & a>1 \\ ?, & a=1 \\ 0, & 0<a<1 \end{cases}$
- $\infty^{a} = \begin{cases} \infty, & a>0 \\ ?, & a=0 \\ 0, & a<0 \end{cases}$

$0^a = \begin{cases} 0, & b>0 \\ ?, & b=0 \\ \infty, & b<0 \end{cases}$

Przypadki wątpliwe:

- $\infty - \infty$
- $-\infty + \infty$
- $0 \cdot \infty$
- $0 \cdot (-\infty)$
- 1^{∞}
- ∞^0
- 0^0

Przykład:

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+5^n}{2^{n+1}+5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{2}{5})^n + 1}{2(\frac{2}{5})^n + 5} = \frac{1}{5}$

TWIERDZENIE Tw. o ciągu rosnącym.

1) Jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący (tzn. $a_{n+1} > a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$) i ograniczony $(\exists M>0 \ \forall n\in\mathbb{N} \ |a_n|<M)$, to ciąg $\{a_n\}$ ma granicę właściwą (= jest zbieżny)

2) Jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący i nieograniczony to $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (rozbieżny)

Przykład:

$a_n = (1+\frac{1}{n})^n$, wykazać rosnący i ograniczony

$e := \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n$ liczba Eulera (Nepera), $e \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $e = 2{,}71828182$

TWIERDZENIE

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$ to $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{x_n})^{x_n} = e$

TWIERDZENIE Tw. o trzech ciągach

Z: $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ – ciągi

$\lim_{n\to\infty} a_n = g = \lim_{n\to\infty} c_n$

$\exists n_0 \ \forall n \geq n_0: \ a_n \leq b_n \leq c_n$

T: $\lim_{n\to\infty} b_n = g$

Dowód:

$\varepsilon > 0$

$\exists \delta_1 \ \forall n \geq \delta_1 \ |a_n - g| < \varepsilon$

$-\varepsilon < a_n - g < \varepsilon$

$g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$

$\exists \delta_2 \ \forall n \geq \delta_2 \ |c_n - g| < \varepsilon$

$g - \varepsilon < c_n < g + \varepsilon$

dla $n > \max\{n_0, \delta_1, \delta_2\}$

$g - \varepsilon < \underbrace{b_n}_{\geq a_n} < \underbrace{g}_{\leq c_n} + \varepsilon$

$|b_n - g| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = g$

Przykład:

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ $-1 \leq \sin n \leq 1$, $n \to \infty$

$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$0 \quad 0 \quad 0$

2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ $\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$, $\delta > 0$ $n \geq 3$

$n = (1+\delta_n)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\delta_n + \binom{n}{2}\delta_n^2 + \ldots + \binom{n}{n}\delta_n^n \geq$

$\geq \binom{n}{2}\delta_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2$

$n \geq \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2 \Rightarrow \frac{2}{n-1} \geq \delta_n^2 \Rightarrow \delta_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$

$\delta_n \to 0 \Rightarrow \sqrt[n]{n} \to 1$

TWIERDZENIE O TRZECH CIĄGACH

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+3} = 1$

$\sqrt[n]{n} \le \sqrt[n]{n+3} \le \sqrt[n]{n+n}, \quad \forall n \ge 3$

1

$\sqrt[n]{n+n} = \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n} \to 1$

TWIERDZENIE O MONOTONII

TWIERDZENIE Tw. o monotonii / o zachowaniu nierówności

Z: $\{a_n\}, \{b_n\}$ – ciągi liczbowe, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\exists n_0 \ \forall n > n_0 : a_n \le b_n$

T: $a \le b$

LEMAT

Jeśli $\exists n_0 \ \forall n \ge n_0 : c_n > 0$ to $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c > 0$

PODCIĄG

DEF Jeśli $\{k_n\}$ jest rosnącym ciągiem liczbowym to $\{a_{k_n}\}$ nazywamy <u>podciągiem</u> ciągu $\{a_n\}$

TWIERDZENIE

Ciąg $\{a_n\}$ ma granicę g $\Leftrightarrow$ kiedy każdy jego podciąg ma tę samą granicę

TWIERDZENIE BOLZANO-WEIERSTRASSE'A

TWIERDZENIE BOLZANO-WEIERSTRASSE'A

Każdy ograniczony ciąg liczbowy ma podciąg zbieżny

<u>Przykład:</u>

- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2+n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{3n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{n}{2}}\right)^{-\frac{n}{2}}\right]^{\cdot -2}\right]^{3} = e^{-6}$
-

SZEREGI LICZBOWE

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

a_n - ciąg liczbowy

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

...

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

...

SZEREG LICZBOWY

DEF

Szeregiem liczbowym $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy parę ciągów $(\{a_n\}, \{S_n\})$
gdzie $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Przykłady:

1) Szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1}$ $\quad a_1 - a \quad q$ - iloraz

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \ldots + a \cdot q^{n-1} = a(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1})$$

$$= a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, \quad q \neq 1 \qquad \boxed{S = \frac{a}{1-q}}$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$S_1 = a_1 = \frac{1}{2}$

$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{2}{3}$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{\cancel{2}}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{21}{18}\ \frac{8}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

...

$S_n = \frac{n}{n+1}$

3) Szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$S_1 = a_1 = 1$

$S_2 = a_1 + a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{9}{6} + \frac{2}{6} = \frac{11}{6}$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{22}{12} + \frac{3}{12} = \frac{25}{12}$

$\lim_{n \to \infty} S_n = \infty \quad \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - szereg rozbieżny

SZEREG ZBIEŻNY

DEF Jeśli ciąg $\{S_n\}$ sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (\{a_n\}, \{S_n\})$ ma granicę ~~jest~~ liczbową $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$ to mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest ZBIEŻNY. Liczbę S nazywamy sumą tego szeregu. W przeciwnym wypadku mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

= Jeśli $\lim_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

KRYTERIUM LIMESOWE ZBIEŻNOŚCI SZEREGÓW

Warunek konieczny, kryterium limesowe

TWIERDZENIE Warunek zbieżności szeregu

1 kryt

Z: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (\{a_n\}, \{S_n\})$ - zbieżny

T: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

DOW $\exists S \in \mathbb{R}: \lim_{n\to\infty} S_n = S$

$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$

$S_n - S_{n-1} = (a_1 + a_n + \ldots + a_n) - (a_1 + \ldots + a_{n-1}) =$

$= a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ QED

Szeregi liczbowe:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1} = \begin{cases} \text{rozbieżny}, & a \neq 0, |q| \geq 1 \\ \text{zbieżny}, & \end{cases}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} =$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n -$

Przesuwanie wskaźników:

$p \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{n=p}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+p-1}$

Przykład:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(k+2-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = \sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{\ln(n-5)}$$

Działanie na szeregach:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - szeregi

DEF

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$
- $k \in \mathbb{R}, \; k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (k \cdot a_n)$

TWIERDZENIE

Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = t \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = s+t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=2}^{\infty} b_n$

TWIERDZENIE

Jeśli $k \in \mathbb{R}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$ to $\sum_{n=1}^{\infty}(k \cdot a_n) = k \cdot s = k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$S = \frac{a}{1-q}$$

Zadanie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5 \cdot 3^n + 7 \cdot 5^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + 5 \cdot \frac{1}{2^n} + 7 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n = \cancel{\sum_{n=1}^{\infty}} \frac{1}{2} + 5 + 35 = \frac{81}{2}$$

Szeregi o wyrazach nieujemnych

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

DEF Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest minorantą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ($\sum b_n$ jes majorantą $\sum a_n$) $\Leftrightarrow \exists n_0 : \forall n > n_0 : a_n \leq b_n$

MINORANTA/ /MAJORANTA

TWIERDZENIE kryterium porównawcze zbieżności szeregów

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest minorantą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ to:

1) $\sum b_n$ zbieżny $\Rightarrow \sum a_n$ zbieżny
2) $\sum a_n$ rozbieżny $\Rightarrow \sum b_n$ rozbieżny

$\boxed{b_n \geq a_n}$

KRYTERIUM PORÓWNAWCZE

Wniosek: Jeśli $a_n, b_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ to $\sum a_n$ zbieżny $\Leftrightarrow \sum b_n$ zbieżny

Przykład:

★ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - ? $\qquad a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ - zbieżny $\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1 \wedge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ zbieżny $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - zbieżny $\boxed{QED}$

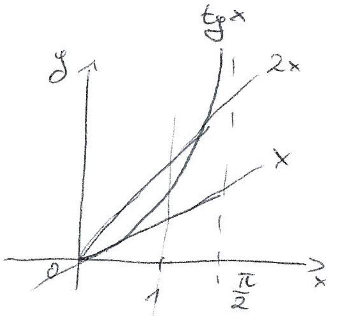
★ Szereg Dirichleta:

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} - \begin{cases} \text{zbieżny}, & \alpha > 1 \\ \text{rozbieżny}, & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

KRYTERIUM PIERWIASTKOWE

Przykład:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$



$x \leq \operatorname{tg} x \leq 2x, \forall x \in [0, 1]$

$0 \leq \operatorname{tg}\frac{1}{n} \leq \frac{2}{n} \quad \forall n \in N$

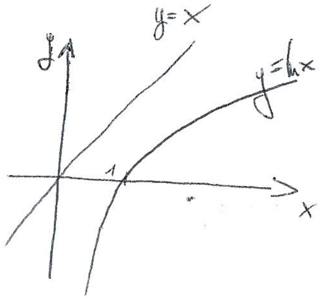
$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{\sqrt{n}} \leq \frac{\frac{2}{n}}{\sqrt{n}}, \forall n \in N$

$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{\sqrt{n}} \leq 2 \cdot \frac{1}{n^{3/2}}, \forall n \in N$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$ - zbieżny

$\Uparrow$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2 \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) = 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ zbieżny



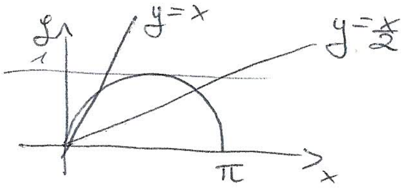
2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

$\ln x < x \quad \forall x > 0$

$\ln n < n \quad \forall n \in N$

$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \quad \forall n \in N \setminus \{1\}$

$\sum \frac{1}{n}$ - rozbieżny $\Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ - rozbieżny



3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n}$

$\boxed{\frac{x}{2} \leq \sin x \leq x, \forall x \in [0, 1]}$

$\sin\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$

$0 \leq \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}, \forall x \in N$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - zbieżny $\Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n}$ - zbieżny

TWIERDZENIE kryterium Cauchy'ego (pierwiastkowe)

Z: $a_n \geq 0, \forall n \in N, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g \in R$

T: 1) $g < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - zbieżny

2) $g > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - rozbieżny

DOW: Ad 1° $\varepsilon = \frac{1-g}{2} > 0$

$\exists n_1 \forall n \geq n_1 : |\sqrt[n]{a_n} - g| < \frac{1-g}{2}$

$-\frac{1-g}{2} < \sqrt[n]{a_n} - g < \frac{1-g}{2}$

$\sqrt[n]{a_n} < \frac{1-g+2g}{2} = \underbrace{\frac{1+g}{2}}_{= Q} < 1$

$0 \leq a_n < Q^n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} Q^n$ - zbieżny

$\overset{K.P.}{\Rightarrow} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - zbieżny

Ad 2° $\varepsilon = \frac{g-1}{2} > 0$

$\exists n_2 : \forall n \geq n_2 : |\sqrt[n]{a_n} - g| < \frac{g-1}{2}$

$-\frac{(g-1)}{2} < \sqrt[n]{a_n} - g < \frac{g-1}{2}$

$\sqrt[n]{a_n} > g - \frac{g-1}{2} = \frac{g+1}{2} > 1$

$a_n > 1 \quad \forall n \geq n_2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$

$\Rightarrow$ W.K. zbieżności nie jest spełniony

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - rozbieżny

Przykłady:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

$a_n = \frac{1}{n^n}$

$g = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$g < 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ - zbieżny

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $a_n = \frac{1}{n^2}$

$g = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{2}{n}} = 1$

TWIERDZENIE Kryterium d'Alamberta (ilorazowe)

Z: $a_n > 0, \forall n \in N$ $\quad g \overset{\in R}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

T: 1) $g < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - zbieżny

2) $g > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - rozbieżny

KRYTERIUM

ILORAZOWE

Przykład:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,2^n}$ $\quad a = \frac{n^n}{n!\,2^n}$

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\,2^{n+1}}}{\frac{n^n}{n!\,2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n \cancel{(n+1)} \cdot 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{2n^n} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2} e = \frac{e}{2} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,2^n} \text{ rozbieżny}$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

$a_n = \frac{1}{n^3}$ $\quad \lim_{n\to\infty}$

Szeregi o wyrazach dowolnych

KRYTERIUM
LEIBNIZA

TWIERDZENIE Kryterium Leibniza

Z: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\alpha_n$

1) $\alpha_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$
2) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$
3) $\{\alpha_n\}$ - nierosnący

T: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\alpha_n$ - zbieżny

Dow: $\sum_1^{\infty}(-1)^{n+1}\alpha_n = (\{a_n\}, \{S_n\})$

Krok 1:

$\{S_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ - niemalejący, ograniczony od góry $\Rightarrow \exists S \in \mathbb{R}: \lim S_n = S$

$(S_{2k+2} - S_{2k}) \overset{?}{\geq} 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k} + a_{2k+1} + a_{2k+2}) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k}) =$

$= a_{2k+1} + a_{2k+2} = (-1)^{2k+2}\alpha_{2k+1} + (-1)^{2k+3}\alpha_{2k+2} =$

$= \alpha_{2k+1} - \alpha_{2k+2} \geq 0$

$\alpha_{2k+1} \geq \alpha_{2k+2} \ldots \quad \Rightarrow \lim S_n = S$

Uwaga: Przy tych założeniach

Przykład:

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

$\alpha_n = \frac{1}{n}$

1) $\frac{1}{n} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ ✓
2) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ ✓
3) $\{\alpha_n\} = \{\frac{1}{n}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots\}$ - nierosnący ✓

$$\boxed{\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \ln 2}$$

ZBIEŻNOŚĆ
BEZWZGLĘDNA
SZEREGÓW

DEF Szereg $\sum a_n$ jest bezwzględnie zbieżny $\Leftrightarrow \sum |a_n|$ jest zbieżny

TWIERDZENIE
Jeśli szereg $\sum a_n$ jest bezwzględnie zbieżny $\Rightarrow \sum a_n$ jest szeregiem zbieżnym

DEF Szereg $\sum a_n$ jest warunkowo zbieżny $\Leftrightarrow$ $\sum a_n$ jest zbieżny
$\sum |a_n|$ jest rozbieżny

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+1)\sin\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}} = \sum a_n$

$\sum |a_n| = \sum \left| \frac{(n+1)\sin\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}} \right| = \sum \frac{|n+1|\ |\sin\sqrt{n}|}{n^2 |\sqrt{n}|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^{5/2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^{5/2}}$ - zb.

TWIERDZENIE Uogólnione 1° KRYTERIUM CAUCHY'EGO

Z: $\sum a_n,\ a_n \in \mathbb{R}\ (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

T:

1) $q < 1 \Rightarrow \sum a_n$ - bezwzględnie zbieżny

2) $q > 1 \Rightarrow \sum a_n$ - rozbieżny, $\sum |a_n|$ - rozbieżny

UOGÓLNIONE KRYTERIUM CAUCHY'EGO

TWIERDZENIE Uogólnione kryterium d'Alemberta

Z: $\sum a_n,\ a_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

T:

1) $q < 1 \Rightarrow \sum a_n,\ \sum |a_n|$ - zbieżne

$q > 1 \Rightarrow \sum a_n,\ \sum |a_n|$ - rozbieżne

UOGÓLNIONE KRYTERIUM d'ALAMBERTA

Przykład:

Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$ jest zbieżny? $x \in [-1, 1]$

26-10-11

FUNKCJE RZECZYWISTE

Składanie i odwracanie odwzorowań

X, Y - zbiory niepuste

$f: X \longrightarrow Y$

$X = D_f$, $f(X) = Q_f$

INJEKCJA

INJEKCJA, funkcja różnowartościowa

DEF Odwzorowanie $f: X \rightarrow Y$ jest injekcją $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

SURJEKCJA

SURJEKCJA, funkcja "na"

DEF Odwzorowanie $f: X \rightarrow Y$ nazywam surjekcją $\Leftrightarrow$ gdy $f(X) = Y \Leftrightarrow \forall y \in Y\ \exists x_i : f(x_i) = y$

BIJEKCJA

BIJEKCJA, funkcja wzajemnie jednoznaczna

DEF Funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest bijekcją $\Leftrightarrow$ f jest injekcją i surjekcją

$f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A : y = f(x)\}$, A

$A \subset X$, $B \subset Y$ $f^{-1}(B) = \{x \in X : \exists y \in B \mid y = f(x)\}$

ZACIEŚNIENIE

DEF Zacieśnieniem funkcji $f: X \rightarrow Y$ do zbioru $A \subset X$ nazywamy odwzorowanie $f|_A : A \longrightarrow Y$ określone wzorem $f|_A(x) = f(x)$ $\forall x \in A$

ZŁOŻENIE FUNKCJI

DEF Niech $f: X \longrightarrow Y_1$, $Y_1 \subset Y_2$, $g: Y_2 \longrightarrow Z$
Wówczas funkcję $g \circ f: X \longrightarrow Z$ określoną wzorem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in X$ nazywamy złożeniem funkcji g i f

Przykład:

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f(x) = (x, \sin(x)) \in \mathbb{R}^2$

$g(x, y) = x^2 \cdot y$, $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$g \circ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(x, \sin x) = x^2 \sin x$

FUNKCJA ODWROTNA

DEF Jeśli funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest bijekcją, to odwzorowanie $\varphi: Y \longrightarrow X$ jest funkcją odwrotną do f, jeśli:

$\varphi(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$, $\forall y \in Y$

Znaczy: $\varphi = f^{-1}$

Uwaga: $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$

$id_X = id: X \longrightarrow X$ - identycznościowe, tożsamościowe
$id(x) = x, \forall x \in X$

TWIERDZENIE
Jeśli $f: X \longrightarrow Y$ jest bijekcją to $f \circ f^{-1} = id_Y$, $f^{-1} \circ f = id_X$

Funkcje RZECZYWISTE

→ Granica i ciągłość funkcji

DEF zbiór $U \subset \mathbb{R}$ nazywany otoczeniem punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ gdy istnieje liczba $\exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subset U$ — OTOCZENIE PUNKTU

DEF zbiór $U \subset \mathbb{R}$ nazywany sąsiedztwem punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ gdy istnieje taka liczba $r > 0$, że $U \supset (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\} = (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$ — SĄSIEDZTWO PUNKTU

$f: \mathbb{R} \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$, f określone w sąsiedztwie punktu x_0

DEF — GRANICA FUNKCJI

$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = g \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in D : x > \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = g \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in D : x < -\delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in D \; x > \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D : x > \delta \Rightarrow f(x) > -\varepsilon$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D : x < -\delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D : x < -\delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$

CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI

CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI

DEF Funkcja $f: \mathbb{R} \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą w $x_0 \in D$ $\iff$ gdy $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

- $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

  ? x_0 ? 0 ?

  $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \qquad \frac{\sin a}{a}$

- $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

  $-1 \leq \sin x \leq 1$

  $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

Granice jednostronne

$f: \mathbb{R} \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$

- $(x_0, x_0+r) \subset D$ $(r>0)$ granica prawostronna

  $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = g \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D: x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$

- $D \supset (x_0 - r, x_0)$ $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$ granica lewostronna

  $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D: x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$

TWIERDZENIE

$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = g$

Przykład:

$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

9-11-11

DEF Funkcja $f: \mathbb{R} \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w D $\iff$ jest ciągła $\forall x \in D$.

DEF Funkcja $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła $\iff$ $f|_{(a,b)}$ jest ciągła oraz $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \wedge \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

TWIERDZENIE o granicy funkcji złożonej

Z: $f: D \to \mathbb{R}$, f określona w okolicy x_0, $g: D_1 \to \mathbb{R}$ - ciągła $f(D) \subset D_1$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$

T: $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)) = g(y_0)$

TWIERDZENIE O GRANICY FUNKCJI ZŁOŻONEJ

Przykład:

$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Wykazać: $\lim_{x \to 0} g(f(x))$ nie istnieje

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^+} g(f(x)) = \lim_{x \to 0^+} g(x^2) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1 \\ \lim_{x \to 0^-} g(f(x)) = \lim_{x \to 0^-} g(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0} g(f(x))$$

TWIERDZENIE o osiąganiu kresów

Z: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ciągła $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$
T: $\exists x_1, x_2 \in [a,b]\ \forall x \in [a,b],\ f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$
$(\sup f([a,b]) = f(x_2),\ \inf f([a,b]) = f(x_1))$

TWIERDZENIE O OSIĄGANIU KRESÓW

TWIERDZENIE o lokalnym zachowaniu znaku

Z: $f: \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ ciągła w x_0, $f(x_0) > 0$
T: $\exists r > 0: \forall x \in D: |x - x_0| < r \Rightarrow f(x) > 0$

TWIERDZENIE O LOKALNYM ZACHOWANIU ZNAKU

TWIERDZENIE o przyjmowaniu wartości pośrednich

Z: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ - ciągła, $x_1, x_2 \in [a,b]$
$w_1 = f(x_1)$, $w_2 = f(x_2)$, $w_1 \leq w \leq w_2$
T: $\exists x_0 \in (x_1, x_2): f(x_0) = w$

TWIERDZENIE O PRZYJMOWANIU WARTOŚCI POŚREDNICH

TWIERDZENIE

Jeśli funkcja $f: \mathbb{R} \supset E \to \mathbb{R}$, jest ciągła i rosnąca to funkcja odwrotna $f^{-1}: f(E) \to E$ jest ciągła i rosnąca.

TWIERDZENIE O FUNKCJI ODWROTNEJ

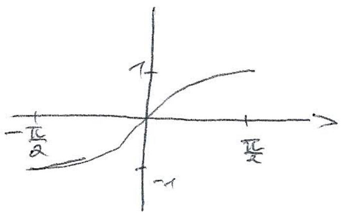
Przykład

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+5x}{-3x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+5}{-3x+1}=5$$

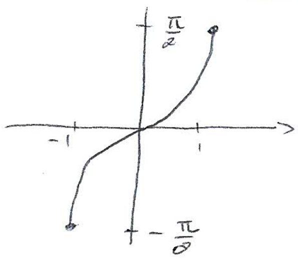
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}$$

ODWROTNE FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE

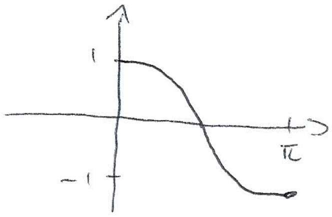
1) $\sin(x)$, $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$



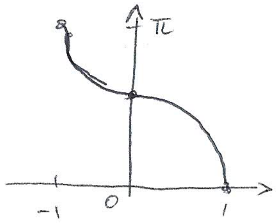
$\arcsin(x)$ $x\in[-1,1]$



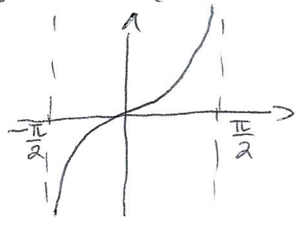
2) $\cos(x)$, $x\in[0,\pi]$



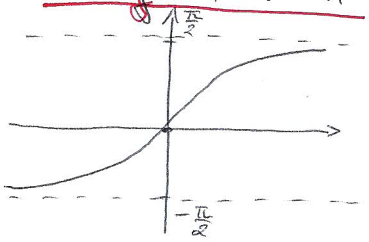
$\arccos(x)$, $x\in[-1,1]$



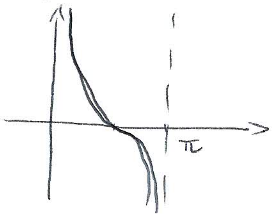
$tg(x)$, $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$



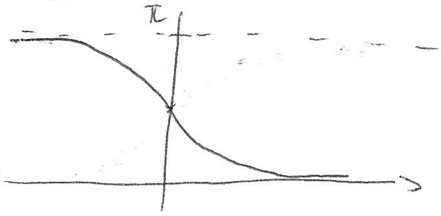
$arctg(x)$, $x\in\mathbb{R}$



$ctg(x)$, $x\in(0,\pi)$



$arcctg(x)$, $x\in\mathbb{R}$



DEF Funkcjami elementarnymi nazywamy wszystkie funkcje otrzymane z funkcji wielomianowych, trygonometrycznych, wykładniczych i logarytmicznych za pomocą skończonej ilości działań elementarnych oraz odwracania i składania ~~funkcji~~ i obcinania funkcji

FUNKCJA ELEMENTARNA

TWIERDZENIE Każda funkcja elementarna jest ciągła w swojej dziedzinie

GRANICE SPECJALNE:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$

5) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

6) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

7) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}\overset{a>0}{\underset{a\neq 1}{=}}\frac{1}{\ln a}$

8) bis $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\ 1$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}\overset{a>0}{=}\ln a$

Przykład

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{arctg}3x}{\sin(x^3)}=\lim\limits_{x\to 0}\underbrace{\frac{x^3}{\sin x^3}}_{1}\cdot\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}\underbrace{\frac{\operatorname{arctg}3x}{3x}}_{1}=3$

2) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to -2}x\cdot\frac{\arcsin(x+2)}{x+2}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{1+x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}4(\sqrt{1+x}+1)=2\cdot 4$

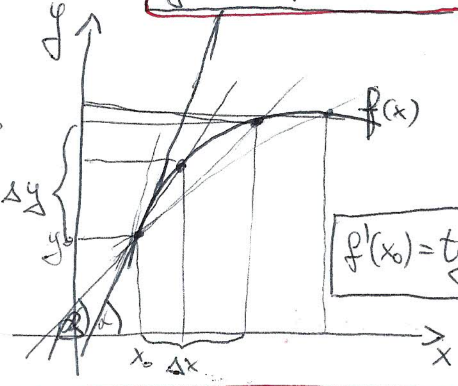
4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{x+1}-3}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{3^x-1}{x}=\frac{3}{2}\ln(3)$

9-11-11

Rachunek Różniczkowy

STYCZNA

$\boxed{y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)}$



$\boxed{f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha}$

$f: \mathbb{R} \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$, f - określona w otoczeniu x_0

$(\exists \delta > 0 : (x_0-\delta, x_0+\delta) \in D)$

POCHODNA

DEF pochodna

1° $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Mówimy, że f jest różniczkowalna w punkcie x_0, gdy $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$

Równanie stycznej (prostej) do f w x_0:

- $y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$

RÓŻNICZKOWALNOŚĆ

DEF

2° Mówimy, że f jest różniczkowalna w pkt. x_0 $\iff \exists\, l \in \mathbb{R}$ i funkcja $r: D \longrightarrow \mathbb{R}$ taka, że:

1) $f(x) = f(x_0) + l(x-x_0) + r(x)$, $\forall x \in D$
2) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{r(x)}{|x-x_0|} = 0$

TWIERDZENIE

Def. 1° i Def. 2° są równoważne, przy czym $l = f'(x_0)$

RÓŻNICZKA

DEF

3° Odwzorowanie $x \longrightarrow l\cdot(x-x_0)$, gdzie $l=f'(x_0)$ nazywamy różniczką i oznaczamy przez $d_{x_0}f$

- $d_{x_0}f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
- $x - x_0 = dx$
- $d_{x_0}f(dx) = f'(x_0)\cdot dx$

Wniosek: Jeśli f jest różniczkowalna w x_0 to
$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, $x \sim x_0$

16-11-11

~~Pocho~~ Pochodna jednostronna

DEF

POCHODNA JEDNOSTRONNA

$f: \mathbb{R} \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, f - określona w otoczeniu x_0

$f'(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ - pochodna prawostronna

$f'(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ - pochodna lewostronna

TWIERDZENIE

RÓŻNICZKOWALNOŚĆ W PUNKCIE

funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \iff$ gdy $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) \in \mathbb{R}$

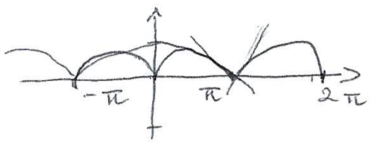
Przykład:

- $f(x) = \sqrt{x}$ $D = [0, \infty)$ $x_0 \in (0, \infty)$

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$

$f'(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \infty$ (- pochodna prawostronna niewłaściwa)

- $f(x) = |\sin x| \in \mathbb{R}$



$f'(\pi^+) = \left.\dfrac{d(-\sin x)}{dx}\right|_{x=\pi} = -\cos\pi = 1$

$\neq \implies$ funkcja nieróżniczkowalna w πk

$f'(\pi^-) = \left.\dfrac{d(\sin x)}{dx}\right|_{x=\pi} = \cos\pi = -1$

OBLICZANIE POCHODNYCH

TWIERDZENIE

ARYTMETYKA POCHODNYCH

Z: f, g — różniczkowalne w x, $k \in \mathbb{R}$

T:
1° $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ $\qquad g(x) \neq 0$

2° $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$

3° $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

4° $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

POCHODNA FUNKCJI ZŁOŻONEJ

TWIERDZENIE o pochodnej funkcji złożonej / reguła łańcucha

Z: f – różniczkowalna w x
g – różniczkowalna w $f(x)$

T: $[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

RÓŻNICZKOWALNOŚĆ $\Downarrow$ CIĄGŁOŚĆ

TWIERDZENIE o ciągłości różniczkowalności

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w x_0 to f jest ciągła w x_0.

DOW:

$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\underbrace{(x-x_0)}_{\to 0}}_{\to 0} + \underbrace{r(x)}_{\to 0}$

$f(x) = f(x_0)$

Wzory na pochodną:

FUNKCJA	POCHODNA
c $(c \in \mathbb{R})$	0
x^n $(n \in \mathbb{R})$	$n \cdot x^{n-1}$
$\sin x$ $(x \in \mathbb{R})$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$
a^x $(a>0)$	$a^x \cdot \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{x^2+1}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{-1}{x^2+1}$
$f(x)^{g(x)}$	$\cancel{g(f(x)^{g(x)} \cdot (f(x) \cdot \ln g(x) +}$ $f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right)$

Przykład:

$f(x) = \arccos x^{\ln(8x^2+\cos x)}$

$f'(x) = \arccos x^{\ln(8x^2+\cos x)} \cdot \left(\ln(8x^2+\cos x) \cdot \ln(\arccos x)\right)' =$

$= \arccos x^{\ln(8x^2+\cos x)} \cdot \left[\frac{16x - \sin x}{8x^2+\cos x} \cdot \ln \arccos x + \ln(8x^2+\cos x) \cdot \frac{1}{\arccos x} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

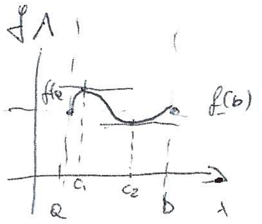
TWIERDZENIE Rolle'a

Z: $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ciągła

$f:(a,b)$ różniczkowalna

$f(a)=f(b)$

T: $\exists c \in (a,b): f'(c)=0$



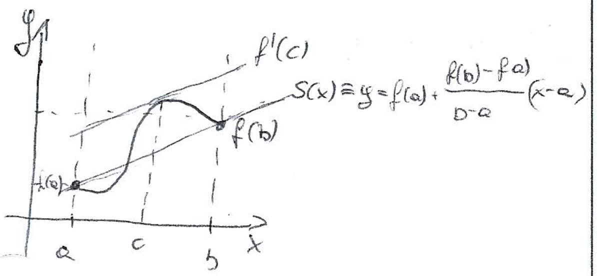
TWIERDZENIE
ROLLE'A

TWIERDZENIE Lagrange'a

Z: $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ciągła

f różniczkowalna w (a,b)

T: $\exists c \in (a,b): f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



TWIERDZENIE
LAGRANGE'A

Wnioski:

1) Jeśli $f'(x)=0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ jest stała na (a,b)

2) Jeśli $f'(x)>0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ jest rosnąca na (a,b)

3) Jeśli $f'(x)<0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ jest malejąca na (a,b)

TWIERDZENIE Reguła de l'Hôpitala

Z: 1° $f(a,b] \to \mathbb{R}$, $g:(a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

2° f różniczkowalna na (a,b)

3° g różniczkowalna na (a,b), $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$

4° $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a^+} g(x)=0$ lub $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$

5° $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = G \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

T: $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = G$

REGUŁA DE
L'HÔPITALA

Przykład

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln 3x}{\operatorname{ctg} x} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{\text{d'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{3x}\cdot 3}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{-1} = 0$

- $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x\ln x + x - 1}{x}} =$

$= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x\ln x + x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}$

- $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \left[1^{\pm\infty}\right]_{x\to 1} = \lim_{x\to 1} e^{\ln x^{\frac{1}{x-1}}} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{1}{x-1}\ln x} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{\ln x}{x-1}} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}} =$

$\left\{ = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1\right.$

$= e^1$

Pochodna wyższych rzędów

$\mathbb{R} \supset E$ - przedział o końcach a, b $(a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b)$

RÓŻNICZKOWALNOŚĆ NA PRZEDZIALE DOMKNIĘTYM

DEF Różniczkowalność na przedziale domkniętym

Mówimy, że funkcja $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna na E
$\Leftrightarrow$ f jest różniczkowalna na (a, b),
$f'(a^+) \in \mathbb{R}$, $a \in E$ oraz
$f'(b^-) \in \mathbb{R}$, $b \in E$

DEF

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna na E to:
funkcję $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem:

$$f'(x) = \begin{cases} f'(x), & x \in (a, b) \\ f'(a^+), & x = a, \ a \in E \\ f'(b^-), & x = b, \ b \in E \end{cases}$$

nazywamy (funkcję) **pochodną** funkcji f.

POCHODNA DRUGIEGO RZĘDU

DEF

Jeśli $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$, f' jest różniczkowalna na E
to funkcję $f'': E \longrightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem $f'' = (f')'$
nazywamy **pochodną drugiego rzędu** funkcji f.

...

DEF

Jeśli pochodna $f^{(k)}$ jest różniczkowalna na E
to funkcję $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$ nazywamy pochodną rzędu $(k+1)$ funkcji f.

Przykład:

- $f(x) = \sin(x)$, $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$

$f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$f''(x) = \sin(x + 2\cdot\frac{\pi}{2})$

HI: $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\cdot\frac{\pi}{2})$

TI: $f^{(n+1)}(x) = \sin(x + (n+1)\frac{\pi}{2})$

$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left(\sin(x + n\frac{\pi}{2})\right)' = \sin(x + (n+1)\frac{\pi}{2})$

• $f(x)=e^{kx}$, $f'(x)=e^{kx}\cdot k$, $f''(x)=e^{kx}\cdot k\cdot k=e^{kx}k^2$

$\overline{HI}$: $f^{(n)}=e^{kx}\cdot k^n$

T: $f^{(n+1)}=e^{kx}\cdot k^{(n+1)}$

Dow: $f^{(n+1)}(x)=(f^{(n)}(x))'=(e^{kx}\cdot k^n)'=e^{kx}\cdot k\cdot k^n=e^{kx}\cdot k^{(n+1)}$ ■

23-11-11

DEF Funkcja $f: E \to \mathbb{R}$ jest klasy C^0, jeśli jest ciągła

DEF Funkcja $f: E \to \mathbb{R}$ jest klasy C^n $(n\in\mathbb{N})$ jeżeli $f', f'', \dots, f^{(n)}$ są ciągłe

WZÓR TAYLORA

TWIERDZENIE Taylora (uogólnienie tw. Lagrange'a)

Z: • x_0, $h>0$, $n\in\mathbb{N}$

• $f: [x_0, x_0+h] \to \mathbb{R}$ - f klasy C^n

• f ma pochodną $f^{(n+1)}$ na przedziale otwartym (x_0, x_0+h)

T: $\exists\, c\in(x_0, x_0+h)$ taki, że

$$\boxed{1}\quad f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}}_{R_n(x_0,h)}$$

Wniosek:

$x=x_0+h$, $h=x-x_0$, $\exists\, \theta\in(0,1)$

$$\boxed{2}\quad f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\overbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}^{R_n(x_0,x)}$$

Wzór Maclaurena: $x_0=0$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Przykład:

• $f(x)=e^x \to f^{(n)}(0)=1$

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\dots+\frac{1}{n!}\cdot x^n+R_n(x)$$

$$e^x\simeq\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!},$$

$$\boxed{e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}}\quad \forall x\in\mathbb{R} \iff R_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}0$$

Dow:

$$R_n(x)=\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n,\quad |R_n(x)|=\left|\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n\right|=\frac{e^{\theta x}}{n!}|x|^n<\frac{M}{n!}|x|^n=M\cdot\frac{|x|^n}{n!},\ \forall n\in\mathbb{N}$$

$$M=\max\{1,e^x\},\ (?)\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0 \iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!}\text{ - zbieżny}$$

EKSTREMA FUNKCJI

MAXIMUM GLOBALNE

DEF Mówimy, że funkcja $f: \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ osiąga maximum (globalne) [minimum] w punkcie $x_0 \in D \iff f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in D$
$[f(x) \geq f(x_0)]$

MAXIMUM LOKALNE

DEF Mówimy, że funkcja $f: \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ osiąga maximum lokalne [minimum] w punkcie $x_0 \in D \iff$ gdy istnieje takie otoczenie $\mathcal{U} \subset D$ punktu x_0 że $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in \mathcal{U}$
$[f(x) \geq f(x_0), \forall x \in \mathcal{U}]$

MAXIMUM LOKALNE WŁAŚCIWE

DEF Funkcja $f: D \to \mathbb{R}$ osiąga w punkcie $x_0 \in D$ maximum [minimum] lokalne właściwe $\iff$ istnieje takie otoczenie $\mathcal{U} \subset D$ punktu x_0, że: $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in \mathcal{U} \setminus \{x_0\}$
$[f(x) > f(x_0)]$

TWIERDZENIE FERMATA

TWIERDZENIE Fermata, WK ekstremum

Jeśli funkcja $f: D \to \mathbb{R}$ osiąga ekstremum lokalne w punkcie $x_0 \in D$ i jest różniczkowalna w pkt. x_0, to $f'(x_0) = 0$

Przykład:

- $f(x) = x^5$

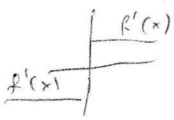
$f'(0) = 0$, lecz $x = 0$ nie jest ekstremum!

TWIERDZENIE WW na ekstremum

Jeśli funkcja $f: D \to \mathbb{R}$ jest ciągła w pkt. $x_0 \in D$, różniczkowalna w sąsiedztwie pkt. x_0, pochodna funkcji f jest dodatnia z jednej strony i ujemna z drugiej strony pkt. x_0, to funkcja osiąga ekstremum lokalne w pkt. x_0.

Przykład:

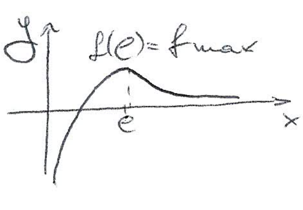
- $f(x) = |x|$



$\Rightarrow f(0) \Rightarrow$ minimum

- $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $\quad D = (0, \infty)$ $\quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$f'(x) = 0 \quad \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \rightsquigarrow$ $f'(x) > 0$, $0 < x < e$
$f'(x) < 0$, $x > e$



TWIERDZENIE WW na ekstremum

Jeśli funkcja f jest kl. C^2 w otoczeniu pkt. x_0 oraz $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$ [<], to funkcja f osiąga min [max] lokalne właściwe w pkt. x_0

<u>Asymptoty</u>

(1°) poziome: $y=b$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=b \vee \lim_{x\to-\infty} f(x)=b$

(2°) pionowe: $x=a$, $\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty \vee \lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$

(3°) <u>ukośne</u>

DEF Prosta $y=ax+b$ $(a\neq 0)$ jest asymptotą ukośną funkcji $f: D\to\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0 \vee \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$ — ASYMPTOTA UKOŚNA

<u>Przykład:</u>

∘ $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ czy $y=x-1$ jest asymptotą

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\cancel{x+1}}-\frac{(\cancel{x+1})(x-1)}{(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}\cancel{+2x}+1}{x-1}=0$$

TWIERDZENIE

Prosta $y=ax+b$ $(a\neq 0)$ jest asymptotą ukośną funkcji f $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a \wedge \lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b$$

lub $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a \wedge \lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=b$$

DEF Funkcja $f(x)$ posiada ekstremum lokalne w punkcie ciągłości jeżeli $f'(x)$ w tym punkcie zmienia znak — WARUNEK EXTREMUM LOKALNEGO

DEF Funkcja $f(x)$ posiada punkt przegięcia w punkcie istnienia $f(x)$ gdy $f''(x)$ zmienia znak — WARUNEK PUNKTU PRZEGIĘCIA

DEF WYPUKŁOŚĆ

$f''(x)>0 \Rightarrow \cup$

$f''(x)<0 \Rightarrow \cap$

— WYPUKŁOŚĆ/WKLĘSŁOŚĆ

BADANIE PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI

SCHEMAT BADANIA PRZEBIEGU ZMIENNOŚĆ FUNKCJI

Przykład: $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

1° DZIEDZINA
2° PARZYSTOŚĆ
3° PRZECIĘCIA Z OSIAMI $\overrightarrow{OX}$ i $\overrightarrow{OY}$
4° Granice jednostronne w krańcach przedziałów określoności
5° MONOTONIA i EKSTREMA LOKALNE
6° ASYMPTOTY
7° TABELA I WYKRES

- $D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- $f(-x) = -x \cdot e^{-\frac{1}{x}} = -x \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$ – brak parzystości lub nieparzystości
  $\neq -f(x) \quad \neq f(x)$
- $f(0) = ? \notin D$
  $f(x) = 0 \quad x \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0$
  $x = 0 \lor e^{\frac{1}{x}} = 0$
  spr. spr.
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x \cdot e^{\frac{1}{x}}) = 0$
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x \cdot e^{\frac{1}{x}}) = [0 \cdot \infty] = \infty$
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (x \cdot e^{\frac{1}{x}}) = \infty$
- $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} = e^{\frac{1}{x}} + - e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$

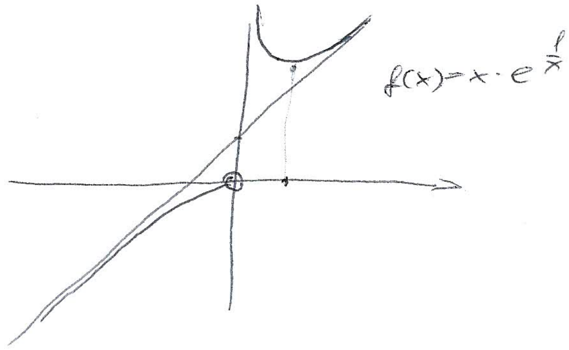
$x < 0 \lor x > 1 \Rightarrow f'(x) > 0$ $\quad f \nearrow (-\infty, 0)$
$x > 0 \land x < 1 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ $\quad f \searrow (0, 1)$
$x = 1 \Rightarrow f'(x) = 0$ $\quad f \nearrow (1, +\infty)$

- Asympt. poziome X
  pionowe: $x = 0$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

  ukośne:

-

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$	~~$+\infty$~~
$f'(x)$	$+$	X	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\nearrow 0$	X	$\searrow$	e	$\nearrow \infty$	



RACHUNEK CAŁKOWY

30-11-11

Całki nieoznaczone

$\mathbb{R} \supset E$ - przedział

DEF Mówimy, że funkcja $F: E \to \mathbb{R}$ jest <u>funkcją pierwotną</u> funkcji $f: E \to \mathbb{R}$, jeżeli $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in E$

FUNKCJA PIERWOTNA

Przykład

- $f(x) = \ln x$, $E = (0, +\infty)$

$F(x) \stackrel{?}{=} x \ln x - x + 8$

$F'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

DEF <u>Całką nieoznaczoną</u> funkcji $f: E \to \mathbb{R}$ nazywamy zbiór wszystkich funkcji pierwotnych względem f.

oznaczenie: $\int f(x)\,dx = \{F(x) + C\}_{C \in \mathbb{R}}$, $C \in \mathbb{R}$

CAŁKA NIEOZNACZONA

TWIERDZENIE Jeżeli $f: E \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieje funkcja pierwotna $F: E \to \mathbb{R}$ wzgl. f.

Podstawowe całki:

$f(x)$	$\int f(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tg(x)$
$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$-ctg(x)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{x^2+1}$	$arctg\, x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln(x + \sqrt{x^2+1})$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\lvert x + \sqrt{x^2-1}\rvert$
$k(f(x)+g(x))$	$k\int f(x)\,dx + k\int g(x)\,d(x)$
$f'(x)$	$f(x)$
$\ln x$	$x\ln x - x = x(\ln x - 1)$
e^x	e^x
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert + C$
$f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)$	$\frac{1}{\alpha+1} \cdot f^{\alpha+1}(x) + C$

Przykład

- $\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left[1 + \frac{+1}{2\sqrt{x^2+1}} 2x\right] = \frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}+x}}{(\cancel{\sqrt{x^2+1}+x})(\sqrt{x^2+1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

- $\int \left(\sqrt{x^3} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - 6^x + 3\sin x\right) dx =$

$= \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int 5 \cdot x^{-\frac{1}{3}} dx - \int 6^x dx + 3\int \sin x \, dx =$

$= \frac{1}{\frac{3}{2}+1} \cdot x^{\frac{5}{2}} + 5 \cdot \frac{1}{-\frac{1}{3}+1} \cdot x^{\frac{2}{3}} - \frac{\ln x}{\ln 6} + 3(-\cos x) + C =$

$= \frac{2}{5} \cdot \sqrt{x^5} + \frac{15}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{6^x}{\ln 6} - 3\cos x + C$

METODY CAŁKOWANIA:

I Całkowanie przez części

CAŁKOWANIE PRZEZ CZĘŚCI

TWIERDZENIE

Jeśli funkcje $f: E \to \mathbb{R}$ i $g: E \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne, to:

$$\int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx$$

DOW.: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$f'(x)g(x) = (f(x)g(x))' - f(x)g'(x)$

$\int f'(x)g(x)dx = \int (f(x)g(x))' dx - \int f(x) g'(x) dx =$

$= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\, dx$

Przykład:

- $\int e^x \cdot x \, dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

$f'(x) = e^x \qquad g'(x) = 1$

$f(x) = e^x \qquad g(x) = x$

- $\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = \left\{\begin{matrix} f'(x) = 1 & g(x) = \ln x \\ f(x) = x & g'(x) = \frac{1}{x} \end{matrix}\right\} = x\ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x\ln x - x + C$

- $\int e^x \cdot \sin x dx = \left\{\begin{matrix} f'(x) = e^x & g(x) = \sin x \\ f(x) = e^x & g'(x) = \cos x \end{matrix}\right\} = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cos x \, dx =$

$= e^x \cdot \sin x - \left\{\begin{matrix} f'(x) = e^x & g(x) = \cos(x) \\ f(x) = e^x & g'(x) = -\sin(x) \end{matrix}\right\} = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx =$

$\int e^x \sin dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$

II CAŁKOWANIE PRZEZ PODSTAWIENIE

TWIERDZENIE

Z: $f: E \to \mathbb{R}$ - ciągła, F - pierwotna f

$g: E \to \mathbb{R}$ - różniczkowalna

T: $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$

Dow: $\left(F(g(x)) + C\right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$

Inne zapisy:

$\rightarrow \int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \Big|_{u=g(x)}$

$\rightarrow \int f(x)\,dx = \int f(g(u)) \cdot g'(u)\,du \Big|_{x=g^{-1}(u)}$ (g odwracalna)

Przykład:

- $\int (2x+3)^6\,dx = \frac{1}{2}\int (2x+3)^6 \cdot 2\,dx = \left\{ \begin{array}{l} g(x) = 2x+3 \\ g'(x) = 2 \\ f(u) = u^6 \end{array} \right\} =$

$= \frac{1}{2}\int u^6\,du \Big|_{u=2x+3} = \frac{1}{2}\frac{u^7}{7} + C = \frac{1}{14}(2x+3)^7 + C$

$\int (2x+3)^6\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 2x+3 \\ \frac{du}{dx} = 2 \\ du = 2dx \rightsquigarrow dx = \frac{1}{2}du \end{array} \right\} = \int u^6 \cdot \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^7}{7} + C = \frac{(2x+3)^7}{14} + C$

- $\int \cos\sqrt{x}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right\} = \int \cos t \cdot 2t\,dt = \left\{ \begin{array}{ll} f(t) = \cos t & g(t) = 2t \\ f(t) = \sin t & g'(t) = 2 \end{array} \right\} =$

$= 2t\sin t - 2\int \sin t\,dt = 2t\sin t + 2\cos t \overset{t=\sqrt{x}}{=} 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$

- $\int \frac{dx}{x^2+5} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\frac{x^2}{5}+1} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{\sqrt{5}} = u \\ x = \sqrt{5}\,u \\ dx = \sqrt{5}\,du \end{array} \right\} = \frac{1}{5}\int \frac{\sqrt{5}\,du}{u^2+1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\int \frac{du}{u^2+1} =$

$= \frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg} u + C = \frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C$

- $\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \left\{ \begin{array}{l} x^2+1 = t \\ 2x\,dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

- $\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \ln|\ln x| + C$

- $\int \sin^7 x \cos x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = u \\ \cos x\,dx = du \end{array} \right\} = \frac{u^8}{8} + C = \frac{\sin^8 x}{8} + C$

CAŁKOWANIE PRZEZ PODSTAWIENIE

- $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$

$$\boxed{I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}}$$

$n \geq 2$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} I_1 = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$$

Dow:

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{(1+x^2)-x^2}{(x^2+1)^n} dx = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} + \int \frac{x(-x)}{(x^2+1)^n} dx = I_{n-1} + \int \underbrace{\frac{-x}{(x^2+1)^n}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)} dx =$$

$f'(x) = \frac{-x}{(x^2+1)^n}$

$2x\,dx = dt$, $x^2+1 = t$

$$f(x) = \int \frac{-x}{(x^2+1)^n} dx = \frac{-1}{2} \int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^n} = \frac{-1}{2} \int \frac{dt}{t^n} = -\frac{1}{2} \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{1}{2} \frac{t^{-n+1}}{n-1} + C =$$

$$= \frac{1}{2n+2} \cdot t^{-n+1} + C = \frac{1}{2n+2} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} + C$$

$g(x) = x$, $g'(x) = 1$

$$= I_{n-1} + \frac{1}{2n+2} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} \cdot x - \frac{1}{2n+2} \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} dx =$$

$$= I_{n-1} + \frac{1}{2n+2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2n+2} I_{n-1} = \frac{1}{2n-2} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}$$

- przykład całki nieelementarnej: $\int \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}\, dx$

CAŁKOWANIE FUNKCJI WYMIERNYCH

Całkowanie Funkcji Wymiernych

Funkcja wymierna $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m \quad (a_m \neq 0)$

$Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n \quad (b_n \neq 0)$

Jeśli: $m < n$ to $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ nazywana jest ułamkiem właściwym.

TWIERDZENIE

Każda funkcja wymierna jest sumą wielomianu i ułamka właściwego.

Przykład:

- $f(x) = \underbrace{\frac{x^3 x^2 + 1}{x^2+3}}_{\text{ułamek niewłaściwy}} = \underbrace{(x-1)}_{\text{wielomian}} + \underbrace{\left(\frac{-3x+4}{x^2+3}\right)}_{\text{ułamek właściwy}}$

TWIERDZENIE

~~Każdy ułamek właściwy $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$~~, $n < m$, gdzie $Q(x)$

TWIERDZENIE

Każdy ułamek właściwy $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $n < m$, gdzie:

$Q(x) = a_m(x-x_1)^{v_1}(x-x_2)^{v_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_k)^{v_k}(x^2+p_1x+q_1)^{w_1}(x^2+p_2x+q_1)^{w_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_ix+q_i)^{w_i}$

można zapisać w postaci wielomianów:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{x-x_1} + \frac{A_1^2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_1^{v_1}}{(x-x_1)^{v_1}} +$$

$$+ \frac{A_2^1}{x-x_2} + \frac{A_2^2}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{A_2^{v_2}}{(x-x_2)^{v_2}} +$$

$$+ \ldots$$

$$+ \frac{A_k}{x-x_k} + \frac{A_k}{(x-x_k)^2} + \ldots + \frac{A_k^{v_k}}{(x-x_2)^{v_k}} +$$

$$+ \frac{B_1^1x+C_1^1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_1^2x+C_1^2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots + \frac{B_1^{w_1}x+C_1^{w_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{w_1}} +$$

$$+ \ldots +$$

$$+ \frac{B_i^1+C_i^1}{x^2+p_ix+q_i} + \frac{B_i^2x+C_i^2}{(x^2+p_ix+q_i)^2} + \ldots + \frac{B_i^{w_i}x+C_i^{w_i}}{(x^2+p_ix+q_i)^{w_i}}$$

Całkowanie ułamków prostych

CAŁKOWANIE UŁAMKÓW PROSTYCH

I. $\frac{A}{(x-r)^n}$, $A, r \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad \int \frac{A}{(x-r)^n}dx = A \cdot \frac{(x-r)^{-n+1}}{-n+1} + C$

II. $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$, $B, C, p, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx =$

Ad I $\int \frac{A}{x-r}dx = A\int\frac{dx}{x-r} = A \cdot \ln|x-r| + C$

$n \geq 2$

$$\int \frac{A}{(x-r)^n}dx = \left\{ \begin{array}{l} x-r=t \\ dx=dt \end{array} \right\} = \int \frac{A}{t^n}dt = A\frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{A}{-n+1}\cdot\frac{1}{(x-r)^{n-1}} + C$$

Ad II $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx$

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{4}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4} =$$

$$= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + D, \quad \boxed{D = \frac{-\Delta}{4} > 0}$$

podstawienie: $\boxed{x + \frac{p}{2} = \sqrt{D}\cdot t}$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} I_n = \int\frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2n+2}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1} \\ I_1 = \operatorname{arctg} x + C \end{array}\right.$

$$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx = \int\frac{\left[B\left(\sqrt{D}t - \frac{p}{2}\right)+C\right]\sqrt{D}}{(Dt^2+D)^n}dt = \int\frac{\tilde{B}t+\tilde{C}}{(t^2+1)^n}dt =$$

$$= \int\frac{\tilde{B}t+\tilde{C}}{(t^2+1)^n}dt = \frac{\tilde{B}}{2}\int\frac{2t\,dt}{(t^2+1)^n} + \int\frac{\tilde{C}dt}{(t^2+1)^n} = \left\{\begin{array}{l} t^2+1=u \\ 2t\,dt = du\end{array}\right\} = \frac{\tilde{B}}{2}\int\frac{du}{u^n} + \tilde{C}\int\frac{dt}{(t^2+1)^n} =$$

$$= \frac{\tilde{B}}{2}\cdot\frac{1}{-n+1}\cdot\frac{1}{u^{n-1}} + \tilde{C}\cdot I_n = \left\{\begin{array}{l} t = \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{D}} \quad x+\frac{p}{2} = \sqrt{D}t \\ dx = \sqrt{D}dt \end{array}\right\} =$$

7-12-11

- $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x^2+3} = (x-1) + \left(\dfrac{-3x+4}{x^2+3}\right)$

$$\int \frac{x^3-x^2+1}{x^2+3}\,dx = \int (x-1)\,dx + \int \frac{-3x+4}{x^2+3}\,dx = \frac{x^2}{2} - x + C +$$

$$\int \frac{-3x+4}{x^2+3}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{D}} = t = \dfrac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \sqrt{3}\cdot t \\ dt = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,dx \Rightarrow dx = \sqrt{3}\,dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{-3\sqrt{3}t + 4}{(\sqrt{3}t)^2+3}\sqrt{3}\,dt = \int \frac{-3t + \frac{4\sqrt{3}}{3}}{t^2+1}\,dt = \int \frac{-3t}{t^2+1}\,dt + \int \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} t - \frac{3}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} t - \frac{3}{2}\ln(t^2+1) + C$$

$$\int f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \frac{3}{2}\ln\left(\frac{x^2}{3}+1\right) + C$$

- $\displaystyle\int \frac{x}{x^3+1}\,dx$

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$A(x^2-x+1) + (x+1)(Bx+C) = x$

$\underline{Ax^2} - \underline{Ax} + A + \underline{Bx^2} + Cx + Bx + C = x$

$$\underbrace{(A+B)}_{=0}x^2 + \underbrace{(-A+C+B)}_{=1}x + \underbrace{(A+C)}_{=0} = x$$

$A + B = 0 \Rightarrow B = -A$

$-A + B + C = 1 \Rightarrow -A - A - A = 1$

$A + C = 0 \Rightarrow C = -A$

$-3A = 1$

$A = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{3}$

$$\int \frac{x}{x^3+1}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{3}}{x+1}\,dx + \int \frac{\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{x^2-x+1}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx =$$

$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

$$= -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \left\{ \begin{array}{l} t = \dfrac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}t + \dfrac{1}{2} \\ dx = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{2}}{t^2+1}\,dt + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{\cancel{8}}{9\sqrt{3}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{\cancel{8}} \cdot \operatorname{arctg}(t) + \frac{4^2}{9}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\left(\frac{1}{2}\int\frac{2t}{t^2+1}dt - \int\frac{4t}{t^2+1}dt\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} t + \frac{\sqrt{3}}{9}\ln(t^2+1) - \frac{2\sqrt{3}}{9}\cdot\operatorname{arctg}(t) =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{9}\ln\left|\frac{(2x-1)^2}{3}+1\right| - \frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Całkowanie funkcji trygonometrycznych

CAŁKOWANIE FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

1) $\int R(\sin x)\cdot\cos x\, dx = \int R(u)\, du \Big|_{u=\sin x}$

podstawienie: $\sin x = u$

$du = \cos x\, dx$

R - funkcja wymierna

2) $\int R(\cos x)\sin x\, dx = \left\{\begin{array}{l}\cos x = u\\ -\sin x\, dx = du\end{array}\right\} = \int R(u)(-1)\, du$

Przykład:

$$\int \sin^5 x\cos^4 x\, dx = \int \sin^4 x\cos^4 x\sin x\, dx = \int(1-\cos^2 x)^2\cos^4 x\sin x\, dx = \left\{\begin{array}{l}\cos x = u\\ -\sin x\, dx = du\end{array}\right\} =$$

$$= \int(1-u^2)^2 u^4(-1)\, du = -\int(1-2u^2+u^4)u^4\, du = -\int(u^4-2u^6+u^8)\, du =$$

$$= \left[-\frac{u^5}{5} + 2\frac{u^7}{7} - \frac{u^9}{9}\right]_{u=\cos x} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9} + C$$

3) $\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \left\{\begin{array}{l}\operatorname{tg}\frac{x}{2} = u, \quad x\in(-\pi,\pi)\\ \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} u \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} u\\ dx = \frac{2}{u^2+1}du\\ \sin x = \sin\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{u^2+1}\\ \cos x = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-u^2}{u^2+1}\end{array}\right\} =$

R(u,v) - funkcja wymierna

$(u^{-1})' = -1\cdot u^{-2}$

$$= \int R\left(\frac{2u}{u^2+1}, \frac{1-u^2}{u^2+1}\right)\cdot\frac{2}{u^2+1}du\Big|_{u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ldots$$

$$t = \frac{u^2+1}{u} = u + \frac{1}{u}$$

$$dt = 1 - \frac{1}{u^2}$$

Przykład:

$$\int\frac{dx}{\sin x+\cos x} = \left\{\begin{array}{l}u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\\ \sin x = \frac{2u}{u^2+1}\\ \cos x = \frac{1-u^2}{u^2+1}\\ dx = \frac{2u}{u^2+1}du\end{array}\right\} = \int\frac{1}{\frac{2u+1-u^2}{u^2+1}}\cdot\frac{2}{u^2+1}du =$$

$$= \int\frac{\cancel{u^2+1}}{-u^2+2u+1}\cdot\frac{2}{\cancel{u^2+1}}du = \int\frac{\cancel{u^4+2u^2+1}}{\cancel{-2u^3+4u^2+2u}}du = \int\frac{2}{-u^2+2u+1}du = 2\int\frac{du}{u^2-2u-1} =$$

$$\frac{-2}{u^2-u-1} = \frac{A}{u-(1-\sqrt{2})} + \frac{B}{u-(1+\sqrt{2})}$$

$$\frac{-2}{u^2-u-1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{u-1+\sqrt{2}} - \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{u-1}$$

$$A(u-1-\sqrt{2}) + B(u-1+\sqrt{2}) = -2$$

$$\underline{Au} - A - \sqrt{2}A + \underline{Bu} - B + \sqrt{2}B = -2$$

$$\underbrace{(A+B)}_{0}u + \underbrace{(-A-\sqrt{2}A - B + \sqrt{2}B)}_{-2} = -2$$

$$B = -A \Rightarrow \cancel{-A} - \sqrt{2}A \cancel{+A} - \sqrt{2}A = -2$$

$$-2\sqrt{2}A = -2 \quad /$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow B = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int\frac{dx}{\sin x+\cos x} = \left\{ tg\frac{x}{2} = u \right\} = \int\frac{-2}{u^2 - 2u - 1}du = \int\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{u-1+\sqrt{2}} + \frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}}{u-1-\sqrt{2}}\right)du =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{du}{u-1+\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{du}{u-1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln|u-1+\sqrt{2}| - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln|u-1-\sqrt{2}| + C =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}\right| - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}\right| + C \quad \blacksquare$$

4) $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x\cos x)\,dx = \int R\left(\frac{u^2}{u^2+1}, \frac{1}{u^2+1}, \frac{u}{u^2+1}\right)\frac{1}{u^2+1}du \Big/_{u=tg\,x}$

podstawienie: $\left\{\begin{array}{l} tg\,x = u, \\ x = arctg\,u \\ dx = \frac{1}{u^2+1}du \end{array}\right\} x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{u^2}{u^2+1}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{u^2+1}$$

$$\sin x\cos x = \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^2 x = u\cdot\frac{1}{u^2+1} = \frac{u}{u^2+1}$$

<u>Przykład:</u>

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x} = \int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot(\cos^2 x)^2\cdot\sin x\cos x} = \int\frac{1}{\frac{u^2}{u^2+1}\cdot\left(\frac{1}{u^2+1}\right)^2\cdot\frac{u}{u^2+1}}\cdot\frac{1}{u^2+1}du =$$

$$= \int\frac{(u^2+1)^3}{u^3}du = \int\left(\frac{u^2+1}{u}\right)^3 du = \int u^3 du + 3\int u\,du + 3\int u^{-1}du + \int u^{-3}du =$$

$$= \frac{u^4}{4} + \frac{3u^2}{2} + 3\ln|u| - \frac{1}{2u^2} + C =$$

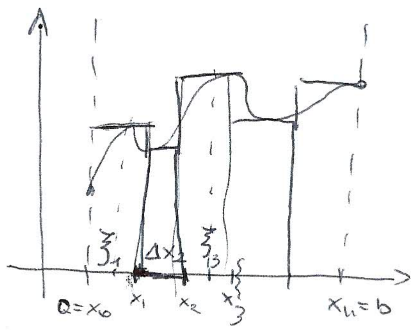
$$= \frac{tg^4 x}{4} + \frac{3\,tg^2 x}{2} + 3\ln|tg\,x| - \frac{1}{2\,tg^2 x} + C$$

CAŁKA OZNACZONA W/S RIEMANNA

14-12-11

$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ - ograniczona ($\mathbb{R} \ni a < b \in \mathbb{R}$)

OZNACZENIA:



PODZIAŁ PRZEDZIAŁU

DEF podział przedziału $[a,b]$ na n części

$$\mathcal{P}_n: a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} = b$$

DŁUGOŚĆ PRZEDZIAŁU

DEF

$$\Delta x_k^{(n)} := x_k - x_{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ŚREDNICA PRZEDZIAŁU

DEF średnica podziału $\mathcal{P}_n$ przedziału $[a,b]$

$$\delta(\mathcal{P}_n) := \max\left\{ \Delta x_k^{(n)} : k = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

DEF ciąg normalny podziałów $\mathcal{P}_n$

Mówimy, że ciąg $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$ podziałów przedziału $[a,b]$ jest normalny $\Leftrightarrow$ gdy $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(\mathcal{P}_n) = 0$

DEF

$$\xi_k^{(n)} \in \left[x_{k-1}^{(n)} ; x_k^{(n)} \right], k = 1, 2, \ldots, n$$

$$\Xi_n := \left\{ \xi_k^{(n)} : k = 1, \ldots, n \right\}$$

$$\sigma_n : \sigma(f; \mathcal{P}_n) := f(\xi_1^{(n)}) \cdot \Delta x_1^{(n)} + f(\xi_2^{(n)}) \Delta x_2^{(n)} + \ldots + f(\xi_n^{(n)}) \cdot \Delta x_n^{(n)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^{(n)}) \cdot \Delta x_k^{(n)}$$

CAŁKA RIEMANNA

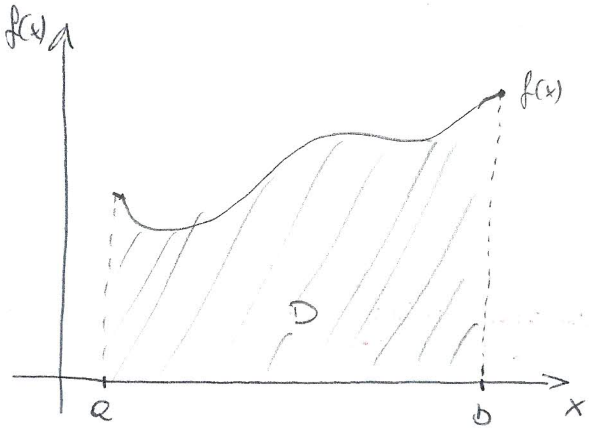
DEF CAŁKA RIEMANNA

Mówimy, że funkcja $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, ograniczona, jest całkowalna w/s Riemanna (R-całkowalna) na przedziale $[a,b] \Leftrightarrow$ gdy dla każdego normalnego ciągu podziałów $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$ przedziału $[a,b]$, niezależnie od wyboru $\{\Xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, ciąg sum $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do tej samej liczby I. Wówczas liczbę I nazywamy całką oznaczoną (w/s Riemanna) funkcji f na przedziale $[a,b]$. $I = \int_a^b f(x)\,dx$

Interpretacja geometryczna:

$f(x) \geq 0$ dla $x \in [a,b]$

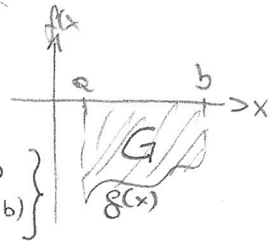
$|D| = \int_a^b f(x)\,dx$



gdy $f(x) < x$

$G = \left\{(x,y) : \begin{matrix} a \leq x \leq b \\ f(a) \leq y \leq f(b) \end{matrix}\right\}$

$|G| = -\int_a^b g(x)\,dx$



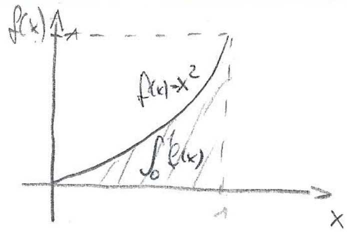
CAŁKOWALNOŚĆ

$\boxed{\text{TWIERDZENIE}}$ CAŁKOWALNOŚĆ

Jeśli funkcja ograniczona $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest monotoniczna lub ma co najwyżej przeliczalną ilość pktów nieciągłości to f jest całkowalna w przedziale $[a,b]$

Przykład:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$



$x_0^{(n)} = 0, \quad x_1^{(n)} = \frac{1}{n}, \quad x_2^{(n)} = \frac{2}{n}, \ldots, \quad x_n^{(n)} = \frac{n}{n} = 1$

$\Delta x_k^{(n)} = \frac{1}{n}, \quad \xi_k^{(n)} = \frac{k}{n} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$

$$\sigma_n = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)}{n^3}$$

$$I = \lim_{n \to \infty} \sigma_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + (n+1)^2}{n^3} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n} + \ldots}{1} = \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 dx$$

Podstawowe Własności Całki Riemanna

Z: $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ – R-całkowalna

$g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ – R-całkowalna

T: 1° 2° $\int_a^b k[f(x) + g(x)]\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + k\int_a^b g(x)\,dx$

3° $f(x) \leq g(x)$, dla $x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

4° $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ $\quad \left(-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a,b]\right.$

$\left.\Rightarrow -\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\right)$

DODATKOWE DEFINICJE: $\mathbb{R} \ni a < b \in \mathbb{R}$, f - R-całkowalna na $[a,b]$

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$

TWIERDZENIE Newtona-Leibniza (podstawowe tw. rachunku całkowego)

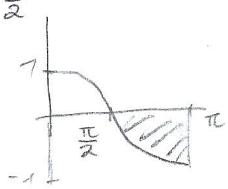
TWIERDZENIE NEWTONA-LEIBNIZA

Z: $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ciągła
F - funkcja pierwotna funkcji f

T: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

OZNACZENIE: $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$

Przykład:
- $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$
- $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx = \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 0 - 1 = -1$



- $\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \int_1^2 x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^2 = \frac{-1}{x}\Big|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$
- $\int_1^{-1} \frac{dx}{x^2+1} = -\operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^{1} = -\operatorname{arctg}(1) + \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$

TWIERDZENIE o całkowaniu przez części

Z: $f, g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ - klasy C^1
T: $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$

Przykład:

- $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx = \begin{Bmatrix} f'=1 & g=\operatorname{arctg} x \\ f=x & g'=\frac{1}{x^2+1} \end{Bmatrix} =$

$$= x \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

- $\int_0^{\pi} x \sin x\, dx = \begin{Bmatrix} f'=\sin x & g=x \\ f=-\cos x & g'=1 \end{Bmatrix} =$

$$= -x\cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\, dx = -\pi(-1) + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi + 0 - 0 = \pi$$

TWIERDZENIE o całkowaniu przez podstawienie

Z: $g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ - klasy C^1
$g([a,b]) = E$ - przedział
$f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ - ciągła

T: $\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$

Przykład:

- $\int_0^{\pi} \sin^5 x\, dx = \int_0^{\pi} \sin^4 x \sin x\, dx = -\int_0^{\pi} (1-\cos^2 x)^2 (-\sin x)\, dx = \begin{Bmatrix} \overset{g(x)}{\cos x} = t \\ -\sin x\, dx = dt \end{Bmatrix} =$

$$= -\int_1^{-1} (1-t^2)^2\, dt = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^2\, dt = \int_{-1}^{1} 1\, dt - \int_{-1}^{1} 2t^2\, dt + \int_{-1}^{1} t^4\, dt =$$

$$= t \Big|_{-1}^{1} - 2\cdot\left(\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right) + \frac{t^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = (1+1) - 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right) = 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} =$$

$$= \frac{16}{15}$$

- $a \in \mathbb{R}^+$

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \begin{Bmatrix} x = a\sin t \\ dx = a\cos t\, dt \end{Bmatrix} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}\, a\cos t\, dt =$$

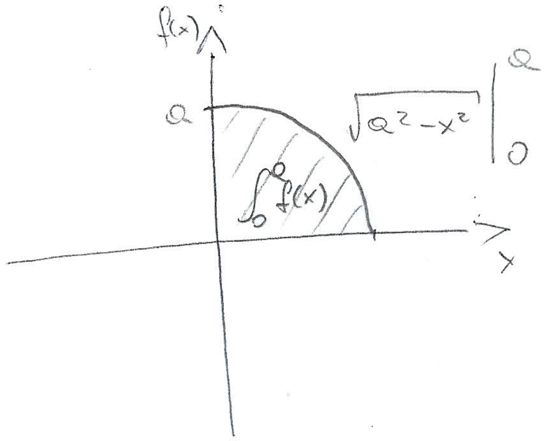
podstawienie: $x = a \cdot \sin t$

$$= a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\; a\cos t\, dt =$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\, dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overset{0}{\cos 2t\, dt}\right) = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi a^2}{4}$$

$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$



ZASTOSOWANIA GEOMETRYCZNE CAŁKI OZNACZONEJ

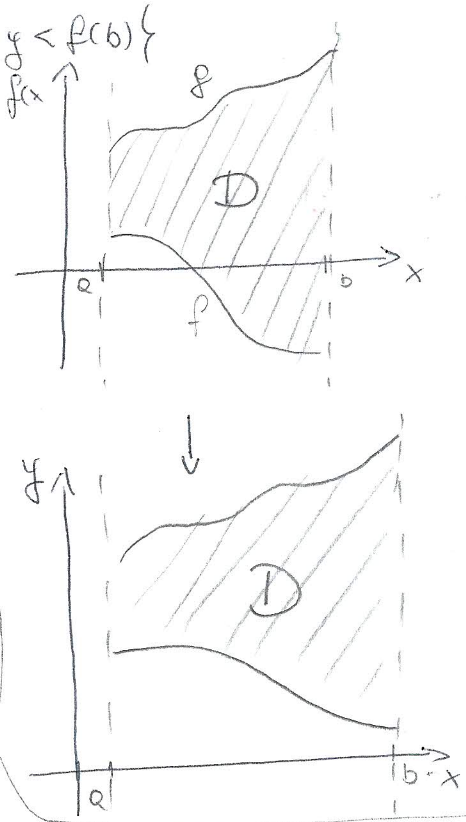
1) pole obszarów
2) długość krzywej
3) objętość i pole powierzchni bryły obrotowej

$\boxed{\text{Ad. 1)}}$ $D = \{(x,y) : a < x < b,\ f(a) < y < f(b)\}$

$f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) \leq g(x),\ \forall x \in [a,b]$

$$\boxed{|D| = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx}$$



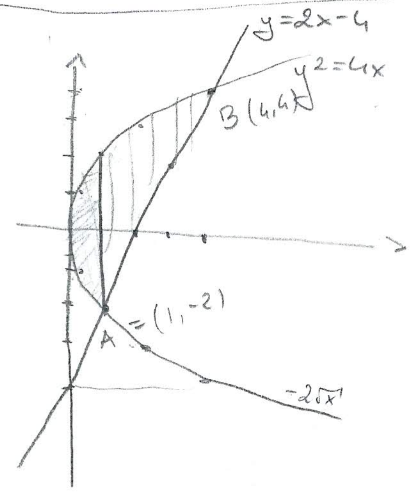
POWIERZCHNIA POLA MIĘDZY FUNKCJAMI

Przykład:

- obliczyć pole obszaru ograniczonego parabolą: $y^2 = 4x$ i prostą: $y = 2x - 4$

  $y = 2\sqrt{x}$, $x = \frac{1}{4}y^2$

$$P = \int_0^1 \left(2\sqrt{x} - (-2\sqrt{x})\right)dx + \int_1^4 \left(2\sqrt{x} - 2x + 4\right)dx =$$



DŁUGOŚĆ KRZYWEJ

Ad. 2 Obliczanie długości krzywej

DEF KRZYWA

Zbiór $K \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy krzywą $\Leftrightarrow$ istnieje takie odwzorowanie ciągłe $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, że $K = \varphi([a,b])$

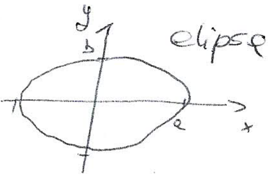
- $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, $\varphi_i : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

Odwzorowanie $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest ciągłe $\Leftrightarrow$ gdy funkcje φ_i są ciągłe dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Przykład:

- $n=2$ $E = \{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$

$(a, b > 0)$



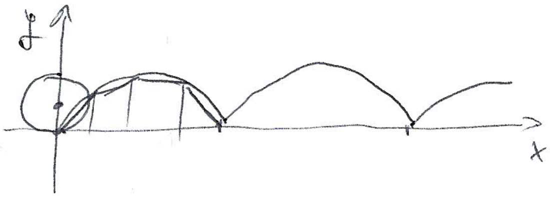
elipsa

$$E = \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

$\varphi(t) = (a\cos t, b\sin t)$

$\varphi : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

- cykloida



$$\varphi_i = \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

ciągła $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $K = \varphi([a,b])$

$$d := \sup_{P_n} \sum_{k=1}^{n} \rho\left(\varphi(t_{k-1}^{(n)}), \varphi(t_k^{(n)})\right)$$

$$P_n = \{a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} = b\}$$

$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ gdy $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

KRZYWA PROSTOWALNA

DEF

Jeśli $d < \infty$, to mówimy, że krzywa K jest prostowalna, a liczbę d nazywamy długością krzywej $K \equiv |K|$

TWIERDZENIE 1°-sze

$\boxed{\text{Długość krzywej } K\subset\mathbb{R}^n \text{ nie zależy od wyboru parametryzacji tej krzywej}}$

TWIERDZENIE 2°-gie

Z: $K=\varphi([a,b])\in\mathbb{R}^n$

$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n)$, $\varphi_i:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ - klasy C^1; $i=1,2,\dots,n$

T: Krzywa K jest prostowalna oraz $|K|=\int_a^b\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[\varphi_i'(t)]^2}\,dt$

- $K=\{(x,y): a\le x\le b,\ y=f(x)\}$, f - klasy C^1 na $[a,b]$

$$K:\begin{cases}x=t\\ y=f(t)\end{cases}\quad t\in[a,b]$$

$$|K|=\int_a^b\sqrt{1^2+f'^2(t)}\,dt=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

- obliczyć długość pierwszego łuku cykloidy:

$$\boxed{L=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt}$$

$$K:\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}\quad t\in[0,2\pi]$$

$$\boxed{\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}}$$

$$\begin{cases}\varphi_1(t)=t-\sin t, & [\varphi_1(t)]'=1-\cos t\\ \varphi_2(t)=1-\cos t, & [\varphi_2(t)]'=\sin t\end{cases}$$

$$\sqrt{\varphi_1'^2(t)+\varphi_2'^2(t)}=\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}=\sqrt{1-2\cos+\cos^2 t+\sin^2 t}=$$

$$=\sqrt{2(1-\cos t)}=\sqrt{2(1-\cos(2\tfrac{t}{2}))}=\sqrt{4\sin^2\tfrac{t}{2}}=2\sqrt{\sin^2\tfrac{t}{2}}=2|\sin\tfrac{t}{2}|$$

$$|K|=\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi_1'^2(t)+\varphi_2'^2(t)}\,dt=\int_0^{2\pi}2|\sin\tfrac{t}{2}|\,dt=\int_0^{2\pi}2\sin\tfrac{t}{2}\,dt=$$

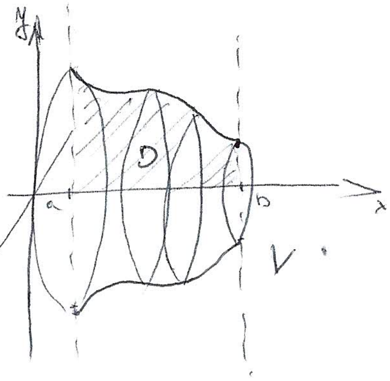
$$=-4\cos\tfrac{t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-4\left[\cos(\pi)-\cos(0)\right]=8$$

POLE POWIERZCHNI POD FUNKCJĄ

OBJĘTOŚĆ BRYŁY OBROTOWEJ

POLE POWIERZCHNI BRYŁY OBROTOWEJ

Ad. 3 Objętość i pole bryły obrotowej.



$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ciągła, $f>0$

$D: \{(x,y): a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(y)\}$

$$\boxed{|D| = \int_a^b f(x)\,dx}$$

objętość: $V = \{(x,y,z),\ a \le x \le b,\ y^2+z^2 \le f^2(x)\}$

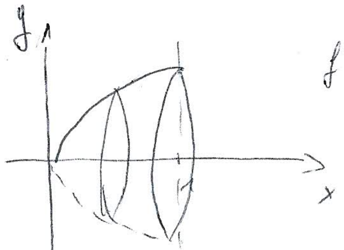
$$\boxed{|V| = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx}$$

powierzchnia obrotowa: $S = \{(x,y,z),\ a \le x \le b,\ y^2+z^2 = f^2(x)\}$

$$\boxed{|S| = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}$$

$x^{\frac{1}{2}}$

Przykład:



$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

- Obliczyć objętość bryły
  $V = \{(x,y,z): 0 \le x \le 1,\ y^2+z^2 \le x\}$
  $f(x) = \sqrt{x}$ $[a,b] = [0,1]$

$$|V| = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2\,dx = \int_0^1 x\,dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \pi \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$|S| = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{x+\frac{1}{4}}\,dx = 2\pi \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{2}{3}\left(\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{4\pi}{3}\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{5\sqrt{5}-1}{8}\right) =$$

$$= \frac{(5\sqrt{5}-1)}{6}\pi$$

CAŁKA NIEWŁAŚCIWA

Z: $f:[a;b) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad -\infty < a < b \leq +\infty$

$f:[a,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ - całkowalne $\forall \beta \in (a,b)$

DEF 1°a PUNKT OSOBLIWY

Mówimy, że punkt b jest punktem osobliwym funkcji f $\Leftrightarrow$ $b = \infty$ $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$

PUNKT OSOBLIWY

DEF 2°a CAŁKA NIEWŁAŚCIWA

Jeśli b jest punktem osobliwym funkcji f, to przyjmujemy

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)\,dx$$

Liczbę $\int_a^b f(x)\,dx$ nazywamy całką niewłaściwą funkcji f na przedziale $[a,b)$.

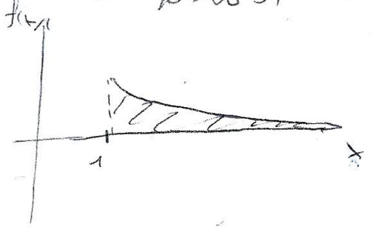
CAŁKA NIEWŁAŚCIWA

Uwaga: Jeśli $\lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)\,dx$ nie istnieje lub jest granicą niewłaściwą, to mówimy, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x)\,dx$ jest rozbieżna.

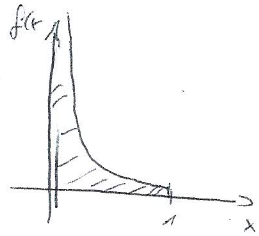
Uwaga: Analogicznie określamy całki niewłaściwe dla przypadku, gdy punkt początkowy przedziału określoności funkcji f jest osobliwy.

Przykład.

○ $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{\beta \to \infty} \int_1^\beta \frac{dx}{x} = \lim_{\beta \to \infty} \ln(x)\Big|_1^\beta = \lim_{\beta \to \infty} (\ln\beta - \ln 1) = \infty$



○ $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha \to 0^+} \int_\alpha^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha \to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_\alpha^1 = \lim (2 - 2\sqrt{\alpha}) = 2$



○ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{\alpha \to -\infty} \operatorname{arctg}(x)\Big|_\alpha^0 + \lim_{\beta \to +\infty} \operatorname{arctg}\Big|_0^\beta =$

$= \lim_{\alpha \to -\infty} (\operatorname{arctg}(0) - \operatorname{arctg}(\alpha)) + \lim_{\beta \to +\infty} (\operatorname{arctg}(\beta) - \operatorname{arctg}(0)) =$

$= \lim_{\alpha \to -\infty} (-\operatorname{arctg}(\alpha)) + \lim_{\beta \to \infty} (\operatorname{arctg}\beta) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

KRYTERIUM PORÓWNAWCZE ZBIEŻNOŚCI CAŁEK NIEWŁAŚCIWYCH

TWIERDZENIE Kryterium porównawcze dla całek niewłaściwych

Z: $f, g : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall \beta \in (a,b)$ f, g jest całkowalna na $[a, \beta]$

b - punkt osobliwy dla f, g

$0 \le f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a, b)$

T: 1° Jeśli $\int_a^b f(x)\,dx$ - rozbieżna $\Rightarrow \int_a g(x)\,dx$ - rozbieżna

2° Jeśli $\int_a^b g(x)\,dx$ - zbieżna $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ - zbieżna

Dow: $\int_a^\beta f(x)\,dx \le \int_a^\beta g(x)\,dx \quad \forall \beta \in (a,b)$

Przykład:

- Wykazać, że $\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{1+x^3}\,dx$ jest zbieżna.

$x \ge 1 \Rightarrow 0 \le \frac{e^{-x}}{1+x^3} \le \frac{1}{1+x^3} < \frac{1}{x^3}$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = \lim_{\beta \to \infty} \int_1^\beta \frac{dx}{x^3} = \lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{-2} x^{-2} \Big|_1^\beta = -\frac{1}{2} \lim_{\beta\to\infty} \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{1^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \Rightarrow \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{1+x^3}\,dx \text{ - zbieżna}$$

KRYTERIUM CAŁKOWE ZBIEŻNOŚCI SZEREGÓW

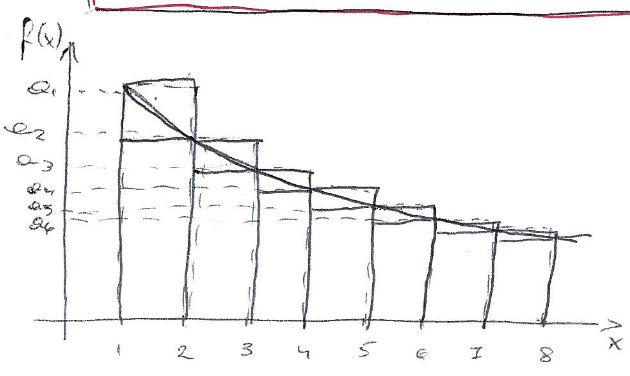
TWIERDZENIE Kryterium całkowe zbieżności szeregów liczbowych

Z: $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

f - nierosnąca, ciągła; $f(x) > 0 \quad \forall x \in [1, \infty)$

$a_n := f(n) \quad (n = 1, 2, \dots)$

T: $\sum_{n=1}^\infty a_n$ - zbieżny $\Leftrightarrow \int_1^\infty f(x)\,dx$ - zbieżna



Przykład:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

  * $\alpha > 1 \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ - zbieżna $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ - zbieżny

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\beta \to \infty} \int_1^{\beta} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\beta \to \infty} \left(\frac{1}{-\alpha+1} x^{-\alpha+1} \Big|_1^{\beta} \right) = \frac{1}{-\alpha+1} \lim_{\beta \to \infty} \left(\cancel{\beta^{-\alpha+1}} - 1^{-\alpha+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha - 1}$$ - zbieżne $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ - zbieżny

FUNKCJE WIELU ZMIENNYCH

Przestrzeń arytmetyczna $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^n \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}$

DEFINICJE

SUMA — suma: $X + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

ILOCZYN przez SKALAR — iloczyn przez skalar: $\alpha \cdot X := (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

NORMA — norma: $|x| = \|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

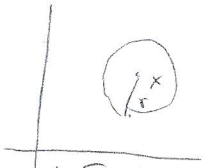
ODLEGŁOŚĆ — odległość: $\rho(x,y) := |x - y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

ILOCZYN SKALARNY — iloczyn skalarny: $x \circ y = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

KULA — kula: $K(x, r)$ – kula o promieniu r i środku w x, $r > 0$

$K(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \rho(x,y) < r\}$

$n=2$



koło dla $n=2$

ZBIÓR OTWARTY — zbiór otwarty: Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty $\iff$ gdy $\forall a \in A \ \exists r > 0 : K(a, r) \subset A$

iloczyn kartezjański zbiorów:

4-01-12

FUNKCJA WIELU ZMIENNYCH

$f : A \longrightarrow B$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$

$A \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $B \ni y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$

$y = f(x) \iff y_i = f_i(x) = f_i(x_1, \dots, x_n)$

$f_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, m)$

$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$

Przykład:

$n = 2$, $m = 3$

$A = \mathbb{R}^2$, $B = \mathbb{R}^3$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

DEF WYKRES FUNKCJI

Wykresem funkcji $f: A \longrightarrow B$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ nazywamy zbiór

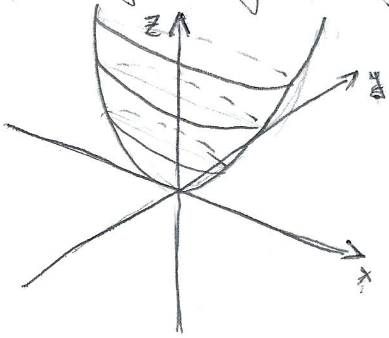
$$G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : x \in A,\ y = f(x)\}$$

WYKRES FUNKCJI

Uwaga: Zbiór $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ utożsamiamy ze zbiorem $\mathbb{R}^{n+m} = \{(z_1, \dots, z_n, \dots, z_{n+m})\}$

Przykład: $(n=2,\ m=1)$

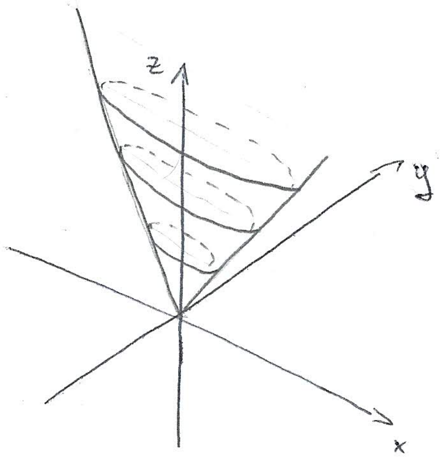
1) $f(x,y) = x^2+y^2$, $x,y \in \mathbb{R}$, $G_f = \{(x,y,z) : x,y \in \mathbb{R},\ z = x^2+y^2\}$

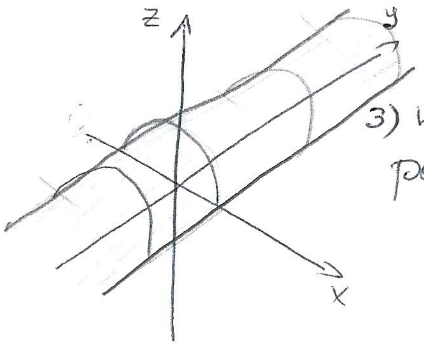


paraboloida obrotowa

2) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad y: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

stożek obrotowy





3) $h(x,y) = \sqrt{4-x^2}$

półwalec

ODWZOROWANIE LINIOWE

DEF

Odwzorowanie $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $(n,m \in \mathbb{N})$ nazywamy liniowym $\Leftrightarrow$

1° $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $x,y \in \mathbb{R}^n$

2° $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

ODWZOROWANIE LINIOWE

Przykład:

- $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 5x_2,\ 7x_1 - x_3)$

$f(x+y) = (\dots = f(x) + f(y)$ ✓

GRANICE I CIĄGŁOŚĆ FUNKCJE WIELU ZMIENNYCH

$f: A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \supset A$ - zbiór otwarty, $a \in \mathbb{R}^n$, $g \in \mathbb{R}^m$

GRANICA FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

GRANICA

DEF

$$\lim_{x \to a} f(x) = g \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in A: \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$

TWIERDZENIE

Z: $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ $g = (g_1, g_2, \dots, g_m) \in \mathbb{R}^m$

$f_i: A \longrightarrow \mathbb{R}$

T: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g \iff \lim\limits_{x \to a} f_i(x) = g_i \quad (i = 1, \dots, m)$

CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

CIĄGŁOŚĆ

DEF

Funkcja $f: A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ($\mathbb{R}^m \supset A$ zbiór otwarty) jest ciągła $\iff$ gdy jest ona ciągła $\forall a \in A$. $\Rightarrow f \in C(A)$

Przykład:

.) $f: A \to \mathbb{R}$ ~~A=?~~ $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{\substack{x,y \to 0 \\ x=y}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x,y \to 0 \\ y=-x}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2}{x^2+x^2} = -\frac{1}{2}$$

POCHODNE CZĄSTKOWE I KIERUNKOWE

$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ $(m=1)$ $\qquad a = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$

$\mathbb{R}^n \supset A$ ~~otwarty~~ $(n \in \mathbb{N})$ $\qquad e = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{i-te miejsce}}, 0, \dots, 0)$

POCHODNA CZĄSTKOWA

POCHODNA CZĄSTKOWA

DEF

Pochodną cząstkową funkcji f względem zmiennej x_i $(i=1,\dots,n)$ w punkcie $a \in A$ nazywamy granicę

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_i f(a) = f'_{x_i}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h \cdot e_i) - f(a)}{h}$$ (o ile ta granica istnieje

$h : \mathbb{R} \ni t \longmapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$

$\frac{\partial f}{\partial x_i} a = h'(a_i)$

Przykład:

- $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$

  $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(x^2+y^2) \cdot 2x$

  $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \cos(1+4) \cdot 2 = 2\cos(5)$

DEF GRADIENT

Gradientem funkcji $f : A \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n \supset A$ - otwarty) w punkcie $a \in A$: nazywamy wektor:

$$\nabla f(a) = \operatorname{grad} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

GRADIENT

Przykład:

- $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$

  $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2\cos 5$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 4\cos 5$

  $\nabla f(1,2) = (2\cos 5, 4\cos 5)$

DEF

Pochodną kierunkową funkcji $f : A \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n \supset A$ - otwarty) w kierunku wektora $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ($|v| \neq 0$) w pkt. $a \in A$ nazywamy granicę

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h}$$ (o ile ta granica istnieje)

POCHODNA KIERUNKOWA

Wniosek: Pochodna cząstkowa względem zmiennej x_i jest pochodną kierunkową w kierunku wektora e_i

TWIERDZENIE

Jeśli funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n \supset A$ - otwarty) oraz jej pochodne cząstkowe są ciągłe, to wtedy pochodna kierunkowa wzg. v w pkt. a

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \nabla f(a) \circ v = \frac{\partial f}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} v_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot v_n \quad \forall v = (v_1 - v_n)\ |v| \neq 0 \quad \forall a \in A$$

Przykład:

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 + 3x_1^2 \cdot x_2 + x_2^2$$

$a = (0,1) \quad v = (1,2) \qquad \frac{\partial f}{\partial v}(a) = ?$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1^3 + 6x_1 x_2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_1^2 + 2x_2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,1) = 2$$

$$\nabla f(0,1) = (0,2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = (0,2) \circ (1,2) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 4$$

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE (I RZĘDU)

Przykład:

- $y' = 6x$
  $y = 3x^2$, $\boxed{y = 3x^2 + C}$

  $$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y' = 6x \end{cases} \Rightarrow y = 3x^2 + 1$$

- Ciało o temp. początkowej T_0 stygnie w pomieszczeniu o temp. $T_p < T_0$.
  Zgodnie z prawem Newtona prędkość stygnięcia jest proporcjonalna do $\Delta T = T_p - T_0$.
  Znaleźć zależność: $T_{ciała}(t)$

$k > 0$, $T(t)$, $T(0) = T_0$, $T'(t) = -k\,(T(t) - T_p)$

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_p)$$

$$dT = -k(T - T_p)dt$$

$$\frac{dT}{T - T_p} = -k\,dt$$

$$\int \frac{dT}{T - T_p} = \int -k\,dt$$

$$\ln|T - T_p| = -kt + C$$

$$|T - T_p| = e^{-kt+C} = e^{-kt} \cdot e^{C}$$

$$T - T_p = e^{C} \cdot e^{-kt}$$

$$T = T_p + \tilde{C} e^{-kt}$$

$y' = f(x,y)$ $\quad f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$, A - otwarty

DEF

Funkcja $\varphi: E \to \mathbb{R}$ (E - przedział) jest rozwiązaniem szczególnym (całką szczególną) równania $y' = f(x,y) \Leftrightarrow$
$\forall x \in E: \varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, $y = \varphi(x)$

ROZWIĄZANIE SZCZEGÓLNE RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO

DEF

Warunkiem początkowym (typu Cauchy'ego) nazywamy warunek w postaci
$$y(x_0) = y_0$$
gdzie $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in A$

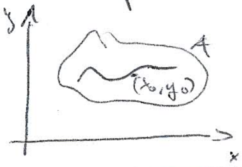
WARUNEK POCZĄTKOWY TYPU CAUCHY'EGO

ZAGADNIENIE POCZĄTKOWE CAUCHY'EGO

DEF

Zagadnieniem początkowym Cauchy'ego nazywamy zagadnienie

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



TWIERDZENIE PEANO-PICARD'A

TWIERDZENIE PEANO-PICARD'A (o lokalnej jednoznaczności rozwiązań)

Z: $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ – ciągła $f = f(x,y)$ $\mathbb{R}^2 \supset A$ – otwarty

$(x_0, y_0) \in A$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ = ciągła

T: $\exists \delta > 0$ taki, że w przedziale $E = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia początkowego

$y' = f(x,y)$

$y(x_0) = y_0$

CAŁKA SZCZEGÓLNA RÓWNANIA

DEF

Jeśli $f: A \xrightarrow[C \in (C_1, C_2)]{} \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ciągłe w zbiorze $A \subset \mathbb{R}^2$,

to $y = \varphi(x, C)$ jest całką ogólną równania

$y' = f(x,y) \iff$

1) $\forall C \in (C_1, C_2)$: $\varphi(x, C)$ – jest całką szczególną równania $y' = f(x,y)$

ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

2) $\forall (x_0, y_0) \in A \ \exists C_0 \in (C_1, C_2)$:

$\varphi(x, C_0)$ jest rozwiązaniem zagadnienia $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

TWIERDZENIE

Z: $y' = \frac{g(x)}{h(y)}$ $g: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$

$h: (c,d) \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x,y) = \frac{g(x)}{h(y)}$ – spełnia założenia twierdzenia Peano-Picarda

G – funkcja pierwotna funkcji g, H – pierwotna h

T: Równanie $H(x) = G(x) + C$ opisuje całkę ogólną równania (2) (w postaci

ALGEBRA LINIOWA

1 DZIAŁANIA ALGEBRAICZNE

DEF Każdą funkcję $\varphi: X\times X \longrightarrow X$, X - zbiór niepusty: nazywamy działaniem wewnętrznym w X.

DZIAŁANIE WEWNĘTRZNE

OZNACZENIA:

$+: X\times X \longrightarrow X$

$\cdot: X * X \longrightarrow X$

$\circ: X\times X \longrightarrow X$

$x, y \in X$, $\varphi(x,y)$:

$\varphi(x,y) = x+y$

$\frac{1}{2}(x+y)$

$x\cdot y^2$

PRZEMIENNOŚĆ

DEF Działanie $\circ: X\times X \longrightarrow X$ jest przemienne:

$x\circ y = y\circ x$, $\forall x,y \in X$

PRZEMIENNOŚĆ

ŁĄCZNOŚĆ

DEF Działanie $\circ: X * X \longrightarrow X$ jest łączne $\Leftrightarrow$

$x\circ(y\circ z) = (x\circ y)\circ z$ $\forall x,y,z \in X$

ŁĄCZNOŚĆ

DEF ELEMENT NEUTRALNY

Mówimy, że element $e \in X$ jest <u>elementem neutralnym</u> działania $\circ: X\times X \longrightarrow X \Leftrightarrow x\circ e = e\circ x = x$ $\forall x \in X$

ELEMENT NEUTRALNY

<u>OBS</u>:
- Jeżeli działanie "$\circ$" interpretujemy jako dodawanie to element neutralny oznaczamy jako "0".
- Jeśli działanie "$\circ$" interpretujemy jako mnożenie / to elemen neutralny oznaczamy przez "1"

<u>Przykład</u>:

$X = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f$ bijekcja $\}$, $\circ: X * X \to X$, $f, g \in X$

$f\circ g \in X$

$(f\circ g)(x) = f(g(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$id: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad id(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

id. jest elementem neutralnym "$\circ$"

DEF

Niech $\circ: X\times X \longrightarrow X$, $x, y \in X$,

ELEMENT ODWROTNY

DEF ELEMENT ODWROTNY

Niech $\circ : X \times X \to X$, e jest elem. neutralnym "$\circ$"
Jeśli $x \circ y = y \circ x = e$ to mówimy, że y jest elementem odwrotnym (względem "$\circ$") do x.

OBS:
Jeśli "$\circ$" jest:
→ mnożeniem, to piszemy $y = x^{-1}$
→ dodawaniem, to piszemy $y = -x$

ROZDZIELNOŚĆ WZGLĘDEM DZIELENIA

DEF
Mówimy, że działanie $\circ : X \times X \to X$ jest rozdzielne względem dzielenia $+ : X \times X \to X \Leftrightarrow x \circ (y+z) = x \circ y + x \circ z$, $\forall x, y, z \in X$.

Przykład:
$x = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ – zbiór wszystkich podzbiorów $\mathbb{R}$
$\cup : X \times X \to X$
$\cap : X \times X \to X$
1) $\cup$ jest rozdzielne względem $\cap$
2) $\cap$ jest ——— " ——— $\cup$

2 STRUKTURY ALGEBRAICZNE

1 GRUPY

GRUPA

DEF
Zespół $(G, \circ)$, G – zbiór niepusty, $\circ : G \times G \to G$ nazywamy grupą:
1) $\circ$ jest łączne
2) $\exists\, e \in G$
3) $\exists\, x' \in G, \forall x \in G$

GRUPA ABELOWA/ /PRZEMIENNA

GRUPA ABELOWA

DEF Grupa $(G, \circ)$ jest przemienna (ABELOWA) $\Leftrightarrow$ "$\circ$" jest przemienne

② PIERŚCIENIE

DEF

Zespół $(P,+,\circ)$, P – zbiór $\neq \emptyset$, $+: P \times P \to P$, $\circ: P \times P \to P$, nazywany pierścieniem $\iff$:

1) $(P,+)$ jest grupą przemienną
2) $\circ$ jest łączne
3) $\circ$ jest rozdzielne względem $+$

PIERŚCIEŃ

DEF – PIERŚCIEŃ PRZEMIENNY

PIERŚCIEŃ $(P,+,\circ)$ jest przemienny $\iff$ $\circ$ jest przemienne.

PIERŚCIEŃ PRZEMIENNY

DEF

Jeżeli $(P,+,\circ)$ jest pierścieniem oraz $1 \in P$ jest elem. neutralnym wzg. $\circ$, to $(P,+,\circ)$ nazywany pierścieniem z jedynką

PIERŚCIEŃ Z JEDYNKĄ

DEF

Pierścień $(P,+,\cdot)$ jest pierścieniem bez dzielników zera, jeżeli:

$x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$, $\forall x,y \in P$ (0 – elem. neutr. wzg $+$)

PIERŚCIEŃ BEZ DZIELNIKÓW ZERA

Przykłady:

1) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ jest pierścieniem przemiennym, z jedynką 1.
2) $C(\mathbb{R}) = C(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła$\}$

$f,g \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow f+g \in C(\mathbb{R})$ $[(f+g)(x) = f(x) + g(x)]$
$f \cdot g \in C(\mathbb{R})$ $[(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)]$

$(C(\mathbb{R}),+,\cdot)$ jest pierścieniem przemiennym, z jedynką $\mathbb{1}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \mathbb{1}(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

③ CIAŁA

DEF

Zespół $(K,+,\cdot)$, K – zbiór, $\#K \geq 2$, $+: K \times K \to K$, $\cdot: K \times K \to K$ jest ciałem $\iff$

1) $(K,+,\cdot)$ jest pierścieniem przemiennym, z jedynką 1
2) $\forall x \in K \setminus \{0\}$, x jest odwracalny względem $\circ$ (0, elem. neutr. działania $+$

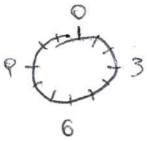
CIAŁO

Przykład:

- $(\mathbb{R},+,\cdot)$ jest ciałem
- $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ jest ciałem

3 ARYTMETYKA MODULARNA

PRZYKŁAD:



Zegar 12-godzinny

$\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, \dots, 11\}$

$4 \oplus 5 = 9$

$9 \oplus 5 = 2$

$6 \oplus 6 = 0$ Obowiązuje arytmetyka "modulo 12".

Niech $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

PRZYSTAWANIE/ RÓWNOWAŻNOŚĆ MODULARNA

DEF Liczby całkowite $n, n' \in \mathbb{Z}$ przystają/są równoważne modulo $p \iff$ różnica $n - n'$ jest podzielna przez p.

$n \equiv n' \pmod{p} \iff \exists k \in \mathbb{Z} : n - n' = k \cdot p$

$n \equiv_p n'$

OZNACZENIE:

klasa przystawania/równoważności

$[r] = \{r + k \cdot p ; k \in \mathbb{Z}\}$ - klasa reszt

$\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup \dots \cup [p-1]$

$\mathbb{Z}_p = \{[0], [1], \dots, [p-1]\}$

DODAWANIE I MNOŻENIE KLAS RESZT

DEF Dodawanie klas reszt: $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

$k, l \in \mathbb{Z}$

$[k] \oplus [l] := [k + l]$

mnożenie: $[k] \odot [l] := [k \cdot l]$

$k, k', l, l' \in \mathbb{Z}$, $k \equiv_p k'$, $l \equiv_p l'$

$[k] = [k']$, $[l] = [l']$

$[k'] \oplus [l'] = [k] + [l]$

DOW: $[k'] \oplus [l'] \stackrel{?}{=} [k] \oplus [l]$

$[k'] + [l'] = [k' \oplus l'] =$

$= [k + mp + l + np] =$

$= [k + l + p(m+n)] =$

$= [k + l] + [p(m+n)] =$

$= [k + l] = [k] + [l]$

PIERŚCIEŃ RESZT

TWIERDZENIE Zespół $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \odot)$ jest pierścieniem przemiennym z jedynką $1 = [1]$.

Pierścień ten nazywamy pierścieniem reszt mod p

Przykład: $p = 4$

$\mathbb{Z}_p = \{[0], [1], [2], [3]\}$

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\odot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Uwagi:
1) $2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow$ są dzielniki zera
2) 2 nie jest odwracalny

TWIERDZENIE

Pierścień $\mathbb{Z}_p$ $(p \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$ jest ciałem $\Leftrightarrow$ p jest liczbą pierwszą

4 PIERŚCIEŃ WIELOMIANÓW

$(P, +, \circ)$ – pierścień przemienny z jedynką 1

DEF WIELOMIAN

Każdą funkcję $f: P \to P$ określoną wzorem $f(x) = a_0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n$, $\forall x \in P$ gdzie $a_1, \ldots, a_n \in P$ nazywamy wielomianem, ze współcz. w P

WIELOMIAN

Oznaczenie $P[x]$ – zbiór wszystkich wielomianów (o współczynnikach w P) z pierścienia P

$f, g \in P[x]$, $f, g: P \to P$

$$\left.\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x)\end{aligned}\right\} \in P[x]$$

TWIERDZENIE

Zespół $(P[x], +, \circ)$ jest pierścieniem przemiennym z jedynką

5 CIAŁO LICZB ZESPOLONYCH

$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ – zbiór liczb zespolonych

Działania:

$(a,b), (c,d) \in \mathbb{C}$

$(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d)$, $+: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$(a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd, ad + bc)$, $\cdot: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

TWIERDZENIE

Zespół $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ jest ciałem.

$e_0 = \mathbb{1} = (1, 0)$

$(a,b) \cdot \mathbb{1} = (a,b)(1,0) = (a \cdot 1 - 0b, a0 + b1) = (a,b)$

$\mathbb{1} \circ (a,b) = \ldots = (a,b)$

DEF

$(a,b) \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ – liczba $\in \mathbb{C}$ odwrotna do (a,b)

LICZBA ODWROTNA DO LICZBY ZESPOLONEJ

$\cancel{(a,b) \circ (} \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) \circ (a,b) =$

$= \left(\frac{a}{a^2+b^2} \cdot a - \frac{-b}{a^2+b^2} \cdot b, \frac{a}{a^2+b^2} \cdot b + \frac{-b}{a^2+b^2} \cdot a\right) = (1,0) = \mathbb{1} \in \mathbb{C}$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$!

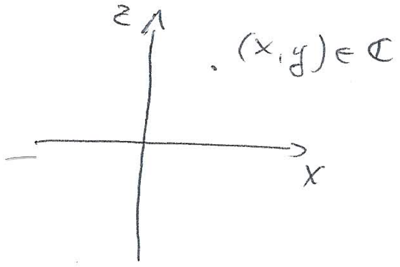
$(a,0)+(b,0)=(a+b,0)$

$(a,0)\circ(b,0)=(ac,0)$

Odwzorowanie: $\mathbb{R} \ni a \longrightarrow (a,0) \in \mathbb{C}$ jest bijekcją i jest zgodne z działaniami $+$ oraz $\circ$.

Konwencja: identyfikujemy liczby rzeczywiste $a \in \mathbb{R}$ i $(a,0) \in \mathbb{C}$

PŁASZCZYZNA ZESPOLONA



$w,z=(x,y) \in \mathbb{C}$

$w,z \in OX \Rightarrow w+z \in OX$

$w \cdot z \in OX$

$i:=(0,1)$ – nazywany JEDNOSTKĄ UROJONĄ

$i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1, 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)=-1$

POSTAĆ KANONICZNA LICZBY ZESPOLONEJ

TWIERDZENIE

Każdą liczbę zespoloną $z=(a,b) \in \mathbb{C}$ możemy przedstawić w postaci: $z=a+bi$, $a,b \in \mathbb{R}$ (kanonicznej, algebraicznej)

Dow: $a,b \in \mathbb{R}$; $a+bi=(a,0)+(b,0)(0,1)=(a,0)+(0,b)=(a,b)$

Działania: $z=a+bi$, $w=c+di$, $z,w \in \mathbb{C}$

1° $z+w=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

2° $z\cdot w=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

Przykład:

1) $(3-2i)+(7+5i)=10+3i$

2) $(3-2i)(7+5i)=31+i$

3) $(3-2i)-(7+5i)=-4-7i$

4) $(3-2i):(7+5i)=\frac{3-2i}{7+5i}\cdot\frac{7-5i}{7-5i}=\frac{11-29i}{74}=\frac{11}{74}-\frac{29}{74}i$

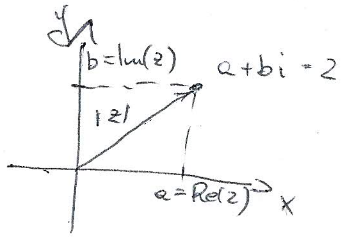
DEF $z=a+bi \in \mathbb{C}$

$Re(z)=a$ – część rzeczywista liczby z

$Im(z)=b$ – część urojona liczby z

$|z|:=\sqrt{a^2+b^2}$ – wartość bezwzględna (moduł) z

$\bar{z}:=a-bi$ – liczba sprzężona do liczby z



Własności:

$z = a+bi$, $w = c+di$ $z, w \in \mathbb{C}$

1) $\overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z}$

2) $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$

3) $z + \overline{z} = 2\,Re(z)$

4) $z - \overline{z} = 2\,Im(z) \cdot i$

5) $|z+w| \leq |z| + |w|$

6) $\big||z| - |w|\big| \leq |z \pm w|$

7) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

8) $|z| = |\overline{z}|$

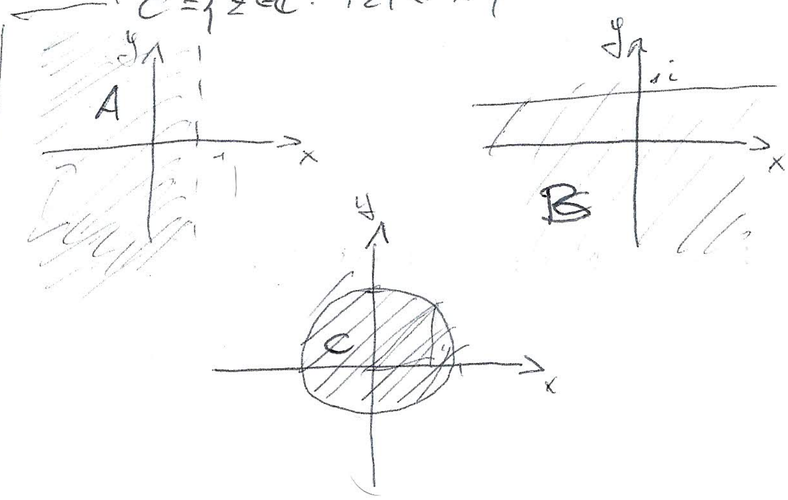
9) $|Re(z)| \leq |z|$

10) $|Im(z)| \leq |z|$

$A = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \leq 1\}$

$B = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) \leq 1\}$

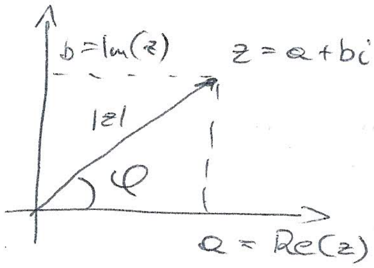
$C = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$



POSTAĆ TRYGONOMETRYCZNA LICZB ZESPOLONYCH

$z \in \mathbb{C}$ $z = a+bi$

(1) $\cos\varphi = \frac{a}{|z|}$, $\sin\varphi = \frac{b}{|z|}$



DEF

Każdą liczbę spełniającą równania (1) nazywamy argumentem liczby z. Zbiór argumentów liczby z nazywamy arg(z) $\varphi \in arg(z)$, $arg(z) = \varphi$

ARGUMENT LICZBY ZESPOLONEJ

DEF

Jeśli $\varphi_0 \in arg(z)$ i $\varphi_0 \in (-\pi, \pi]$, to φ_0 nazywamy argumentem głównym liczby z i oznaczamy Arg(z)

$z = a+bi = |z| \cdot \left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|} i\right) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

postać trygonometryczna

POSTAĆ TRYGONOMETRYCZNA LICZBY ZESPOLONEJ

DEF POTĘGA LICZBY ZESPOLONEJ

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$z^n = |z|^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n =$

$= |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

DEF

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$

RACHUNEK MACIERZOWY

$\mathbb{N}_k = \{1, 2, \dots, k\}, \ k \in \mathbb{N}$

$\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n = \{(i,j) : i \in \mathbb{N}_m, j \in \mathbb{N}_n\} = \{(i,j) : i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}\}$

DEF MACIERZ

Każde odwzorowanie $A : \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy <u>macierzą</u> prostokątną o wymiarach $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) & \dots & A(1,n) \\ A(2,1) & A(2,2) & \dots & A(2,n) \\ \dots & & & \dots \\ A(m,1) & & \dots & A(m,n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & - & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

→ wiersz 2-gi macierzy A

↳ kolumna 2ga macierzy A

Ciąg $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ – główna przekątna (gdy $m = n$)

<u>Przykład:</u>

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{2\times2}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = [b_{ij}]_{2\times4}$

  ↓ macierz kwadratowa 2giego stopnia

- $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ $\quad I_n = [\delta_{ij}]_{n\times n} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{n\times n}$ – macierz JEDNOSTKOWA (n-tego stopnia)

DZIAŁANIA NA MACIERZACH

1) DODAWANIE

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ $\quad (m, n \in \mathbb{N})$

$$A + B := [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

<u>Przykład:</u>

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 7 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

2) Mnożenie macierzy przez skalar

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \cdot A = [\lambda \cdot a_{ij}]_{m\times n}$

Przykład:

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\lambda = 7$ $\quad \lambda \cdot A = 7\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 14 & 21 & 28 \\ 0 & -7 & 0 & 35 \end{bmatrix}$

3) Mnożenie macierzy

$A = [a_{ij}]_{m\times k}$ $\quad B = [b_{ij}]_{k\times n}$

$A \cdot B = C = [c_{ij}]_{m\times n}$, $c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} \cdot b_{lj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj}$

$(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$

Przykład:

$A = \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$, $B = \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 \end{bmatrix}}$

$\underset{2\times 2}{A \cdot B = C} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot(-3) & 1\cdot 0 + 2\cdot\sqrt{2} + 3\cdot 1 \\ -4\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot(-3) & -4\cdot 0 + 0\cdot\sqrt{2} + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2\sqrt{2}+3 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \end{array}$$

SCHEMAT FALKA

Własności:

(1°) $A + B = B + A$

(2°) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(3°) $A(B + C) = A\cdot B + A\cdot C$

(4°) $(A + B)C = A\cdot C + B\cdot C$

(5°) $(AB)C = A(BC)$

Uwaga: zazwyczaj $AB \neq BA$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad AB \neq BA$

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

18-01-12

$\mathbb{C} \to z = a + bi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi = \sphericalangle(z, \overrightarrow{Ox})$ $\overrightarrow{ORe}$

Mnożenie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej

$\mathbb{C} \ni z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $\rho_1 = |z_1|$

$\mathbb{C} \ni z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, $\rho_2 = |z_2|$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1 \cdot \rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Wnioski:

(1°) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(2°) $\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 (+2k\pi)$, $\exists k \in \mathbb{Z}$

(3°) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(4°) $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2) (+2k\pi)$, $\exists k \in \mathbb{Z}$

WZóR de Moivre'a

(5°) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Przykład:

$$(1+i)^{2012} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2^{1006}(\cos 503\pi + i\sin 503\pi) = 2^{1006}(\cos\pi + i\sin\pi) =$$
$$= -2^{1006}$$

Pierwiastkowanie liczb zespolonych

DEF Pierwiastkiem stopnia n ($n \in \mathbb{N}$) z liczby zespolonej $z = a + bi$ nazywamy każdą liczbę $w \in \mathbb{C}: w^n = z$

Oznaczenie: $\sqrt[n]{z} = w$ $\quad \sqrt{-1} = i$, $-i = \sqrt[2]{-1}$

Z: $z \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = \sigma(\cos\psi + i\sin\psi)$

$w^n = z = \sigma^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$, $\rho = \sigma^n$, $\sigma = \sqrt[n]{\rho}$, $\psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$

$$w = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

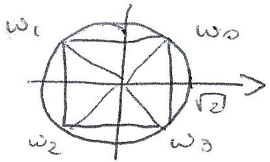
TWIERDZENIE

Jeśli $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, to istnieje dokładnie n pierwiastków n-tego stopnia z liczby z, oraz są one określone wzorem $w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$

Przykład:

- $\sqrt[4]{-4}$



kwadrat

$z = -4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$w_0 = 1+i, \quad w_1 = -1+i, \quad w_2 = -1-i, \quad w_3 = 1-i$

4) Transpozycja macierzy

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$

$A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$ - A transponowana

Przykład:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

Własności transpozycji:

(1°) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(2°) $(AB)^T = B^T A^T$

(3°) $(A^T)^T = A$

Przykład:

$2X = A + B^T \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$

$X = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

PERMUTACJE

DEF

Każde odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne $\sigma : \mathbb{N}_n \longrightarrow \mathbb{N}_n$ nazywamy permutacją.

Oznaczenie: $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$

DEF

Jeśli $\sigma_i > \sigma_j$ oraz $i < j$, to mówimy, że elementy σ_i i σ_j tworzą inwersję w permutacji $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$

DEF

$I(\sigma) = I(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ - ilość inwersji w permutacji σ

Przykład:

$\sigma = (1, 4, 3, 2) \quad I(\sigma) = 0 + 2 + 1 = 3$

$\sigma = (4, 2, 1, 3) \quad I(\sigma) = 3 + 1 + 0 = 4$

DEF $(-1)^{I(\sigma)}$ - znak permutacji

WYZNACZNIKI

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ macierz kwadratowa n-tego stopnia

DEF

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ nazywamy liczbę

$$\det(A)=|A|:=\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n}(-1)^{I(\sigma_1,\dots,\sigma_n)}\cdot a_{1\sigma_1}\cdot a_{2\sigma_2}\cdot a_{3\sigma_3}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma_n}$$

Przykład:

- $n=1$, $A=[a_{ij}]_{1\times 1}$, $\det(A)=a_{11}$
- $n=2$, $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$, $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}+(-1)^1 a_{12}\cdot a_{21}=$$
$$=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$$

- $n=3$, $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$, $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{31}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}$$
$$-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{11}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$$

- $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=4+15+3+18+5-2=43$

- $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=0+3+1+2-6+0=0$

Własności wyznaczników:

Jeśli $A=[a_{ij}]_{n\times n}$, $B=[b_{ij}]_{n\times n}$, to:

(1°) $\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)$

(2°) Jeśli $a_{ij}=0$ dla $(i>j)$ $i<j\}$ to $\det(A)=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a\cdot\ldots\cdot a_{nn}$

(3°) $\det(I_n)=1$

(4°) Jeśli w pewnym wierszu macierzy A same 0, to $\det A=0$

(5°) Jeśli przestawimy (zamienimy) dwa wiersze A, otrzymamy macierz A', to $\det(A')=-\det(A)$

(6°) Jeśli elementy wymnożymy przez stałą $k\in\mathbb{R}$ otrzymam macierz A', to $\det(A')=k\cdot\det(A)$

(7°) Jeśli do elementów wybranego wiersza macierzy A dodamy odpowiednie elementy innego wiersza (ewentualnie pomnożone przez stałą k) to wartość wyznacznika nie ulegnie zmianie.

(8°) Jeśli dwa różne wiersze macierzy A są równe (proporcjonalne), to $\det(A)=0$.

(9°) $\det(A^T)=\det(A)$

(10°) [TWIERDZENIE: ROZWINIĘCIE LAPLACE'A]

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ij}=a_{i1}\cdot A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}\cdot A_{in}$$

- gdzie $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$
- gdzie M_{ij} oznacza wyznacznik macierzy powstałej z macierzy A poprzez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= 3 + 3(-1)1 = 0 \quad \checkmark$$