Punkt materialny
Każdy obiekt obdarzony masą, którego rozmiary geometryczne $\to 0$ lub są znacznie mniejsze niż współrzędne, które opisują jego odległość od układu odniesienia.

Wektor położenia
Jest to wektor, którego początek leży w początku układu odniesienia, koniec zaś stowarzyszony jest z cząstką, której ruch śledzi ten wektor. Koniec wektora położenia kreśli w przestrzeni krzywą geometryczną, tak zwany tor cząstki, po którym cząstka się porusza. Wektorowe równanie toru ruchu cząstki $\vec{r}=\vec{r}(t)$ określa kształt tej krzywej.

Wektor prędkości
Odpowiedzialny jest za szybkość zmian wektora położenia (określa jak szybko cząstka się porusza).

$$\vec{v}_{śr}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Gdyby we wzorze tym mierzyć wektor położenia w bardzo małych odstępach czasu gdy $\Delta t\to 0$ otrzymalibyśmy wektor prędkości chwilowej, który można zdefiniować następująco

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}(t)$$

Wynika z tego, że wektor prędkości jest pierwszą pochodną wektora położenia względem czasu.
Gdyby badać nieskończenie mały fragment toru, którego długość $|d\vec{r}|=ds$, z powyższego wzoru możemy otrzymać wartość wektora prędkości.

$$v(t)=\frac{|d\vec{r}|}{dt}=\frac{ds(t)}{dt}$$

Wektor prędkości $\vec{v}(t)$ będzie zawsze styczny do toru, po którym porusza się cząstka

Droga
Jest to długość krzywej geometrycznej, przebyta w pewnym czasie.

$$v(t)=\frac{ds(t)}{dt}\quad\Rightarrow\quad ds(t)=v(t)dt\quad\Rightarrow\quad\int ds(t)=\int_{t_0}^{t_1}v(t)dt\quad\Rightarrow\quad s=\int_{t_0}^{t_1}v(t)dt$$

Jeśli zapiszemy $\vec{v}(t)$ w postaci trzyskładowej jako $\vec{v}(t)=v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k}$, otrzymamy równanie na drogę

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\,dt$$

Wektor przyspieszenia
Jest wielkością, która informuje nas o szybkości zmian wektora prędkości.

$$\vec{a}_{śr}(t)=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Gdyby we wzorze tym mierzyć wektor prędkości w bardzo małych odstępach czasu gdy $\Delta t\to 0$ otrzymalibyśmy wektor przyspieszenia chwilowego, który można zdefiniować następująco

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\vec{a}(t)$$

Wektor położenia w ruchu obrotowym (droga kątowa)
Jest to wektor, którego początek leży w początku układu odniesienia, koniec zaś stowarzyszony jest z cząstką, której ruch śledzi ten wektor. Koniec wektora położenia kreśli w przestrzeni okrąg, tak zwany tor cząstki, po którym cząstka się porusza.

Wektor prędkości kątowej

$$\vec{\omega}_{śr}=\frac{\Delta\vec{\phi}}{\Delta t}$$

Gdyby we wzorze tym mierzyć wektor położenia w bardzo małych odstępach czasu gdy $\Delta t\to 0$ otrzymalibyśmy wektor prędkości kątowej chwilowej, który można zdefiniować następująco

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\phi}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{\phi}(t+\Delta t)-\vec{\phi}(t)}{\Delta t}=\frac{d\vec{\phi}}{dt}=\vec{\omega}(t)$$

Wynika z tego, że wektor prędkości kątowej jest pierwszą pochodną wektora położenia względem czasu.

$$\vec{\omega}=\vec{\omega}(t)=\frac{d\vec{\phi}(t)}{dt}$$

$d\vec{\phi}$ oznacza tu nieskończenie mały fragment drogi kątowej. Początek wektora $d\vec{\phi}$ leży w środku okręgu, kierunek na osi obrotu, a zwrot jest związany z kierunkiem na zasadzie śruby prawoskrętnej.
Początek wektora $\vec{\omega}(t)$ również leży w środku okręgu, kierunek na osi obrotu, a zwrot określony jest regułą śruby prawoskrętnej.

Wektor przyspieszenia kątowego

$$\vec{\varepsilon}_{śr}(t)=\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$$

Gdyby we wzorze tym mierzyć wektor prędkości kątowej w bardzo małych odstępach czasu gdy $\Delta t\to 0$ otrzymalibyśmy wektor przyspieszenia kątowego chwilowego, który można zdefiniować następująco

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{\omega}(t+\Delta t)-\vec{\omega}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \vec{\varepsilon}(t)$$

Wartość wektora przyspieszenia kątowego wynosi

$$\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}$$

Wektor $\vec{\varepsilon}$ zaczepiony jest w środku okręgu, leży na osi obrotu, a zwrot zależy od tego, czy ruch jest opóźniony, czy przyspieszony.
Jeśli ruch jest przyspieszony, czyli $\vec{\varepsilon}>0$, to $\vec{\varepsilon}\uparrow\uparrow\vec{\omega}$, z kolei jeśli ruch jest opóźniony, czyli $\vec{\varepsilon}<0$, to $\vec{\varepsilon}\downarrow\uparrow\vec{\omega}$.

Związek między $\vec{v}$ i $\vec{\omega}$

Jeśli wartość prędkości określiliśmy jako

$$v=\frac{ds}{dt},$$

gdzie ds to długość nieskończenie małego łuku w krzywej geometrycznej od A do B, kreślonej przez tor ruchu cząstki oraz jeśli r określimy jako długość promienia okręgu w ruchu obrotowym, a $d\phi$ jako kąt między punktami A i B to długość ds w ruchu obrotowym możemy otrzymać ze wzoru na długość łuku okręgu

$$ds=\frac{d\phi}{360^o}2\Pi r \quad\Rightarrow\quad ds=\frac{d\phi}{2\Pi}2\Pi r \quad\Rightarrow\quad ds=d\phi\cdot r$$

Podstawiając to do pierwszego równania otrzymamy

$$v=\frac{d}{dt}(r\cdot d\phi) \quad\Rightarrow\quad v=r\frac{d\phi}{dt} \quad\Rightarrow\quad v=r\omega$$

Pamiętając, że $\vec{v}\perp\vec{r}$, $\vec{v}\perp\vec{\omega}$, a $\vec{r}\perp\vec{\omega}$ możemy stwierdzić, że $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ i stąd właśnie otrzymaliśmy powyższą zależność: $v=\omega r\sin(90^o)=\omega r$.

Związek między $\vec{a}$ i $\vec{\varepsilon}$

Określiliśmy wektor $\vec{a}$ jako

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt},$$

a wektor $\vec{v}$ jako

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}.$$

Z tego wynika, że

$$\vec{a}=\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) \quad\Rightarrow\quad \vec{a}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} \quad\Rightarrow\quad \vec{a}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v} \quad\Rightarrow\quad \vec{a}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}$$

Z własności iloczynu skalarnego wiemy, że $a\times b\times c = b(a\cdot c)-c(a\cdot b)$ i stąd otrzymujemy, że

$$\vec{a}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}+\vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\vec{r})-\vec{r}(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})$$

Wiedząc, że $\vec{\omega}\perp\vec{r}$, możemy pominąć drugi człon równania, gdyż $\vec{\omega}\cdot\vec{r}=\omega r\cos(90^o)=\omega r\cdot 0=0$.
Z tego otrzymujemy ostatecznie

$$\vec{a}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}-\omega^2\vec{r},$$

gdzie pierwszy człon oznacza styczną do toru składową wektora przyspieszenia, a drugi człon prostopadłą do toru składową przyspieszenia.

Klasyfikacja ruchów

Do klasyfikacji ruchów będziemy potrzebowali rozpisać składowe wzoru $\vec{a}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}-\omega^2\vec{r}$ do innej postaci, tak, żeby wiedzieć jak zależą one od wartości prędkości v .
Pamiętając, że

$\varepsilon=\frac{d\,\omega}{dt}$ oraz $v=\omega r$, a więc $\omega=\frac{v}{r}$

możemy rozpisać ε jako

$$\varepsilon=\frac{d\,\omega}{dt} \quad\Rightarrow\quad \varepsilon=\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{r}\right) \quad\Rightarrow\quad \varepsilon=\frac{1}{r}\frac{dv}{dt}$$

Teraz, pamiętając, że $\vec{\varepsilon}\perp\vec{r}$ obliczamy długość wektora $\vec{\varepsilon}\times\vec{r}$

$$|\vec{\varepsilon}\times\vec{r}|=\varepsilon r\sin(90^o)=\varepsilon r$$

Z poprzednich obliczeń wynika, że

$$\varepsilon r=\frac{1}{r}\frac{dv}{dt}r\ ,$$

a z tego z kolei wynika, że nasza pierwsza składowa wektora $\vec{a}$

$$\vec{\varepsilon}\times\vec{r}=\frac{dv}{dt} \quad\Rightarrow\quad \frac{dv}{dt}=a_\tau$$

a_τ to nasza szukana składowa styczna do wektora przyspieszenia $\vec{a}$, odpowiadająca za zmianę wartości wektora prędkości, która mówi nam, jak zależy pierwsza składowa wektora $\vec{a}$ od wartości v
Teraz, pamiętając, że

$$\omega=\frac{v}{r}$$

możemy zapisać naszą drugą składową $\omega^2\vec{r}$ jako

$$\omega^2\vec{r}=\frac{v^2}{r^2}\vec{r} \quad\Rightarrow\quad \omega^2\vec{r}=\frac{v^2}{r^2}r\hat{r} \quad\Rightarrow\quad \omega^2\vec{r}=\frac{v^2}{r}\hat{r} \quad\Rightarrow\quad \frac{v^2}{r}=a_n$$

gdzie a_n to nasza szukana składowa, skierowana do środka krzywizny toru (czyli prostopadła do toru), odpowiadająca za zmianę kierunku wektora prędkości, która mówi nam, jak zależy druga składowa wektora $\vec{a}$ od wartości v .
Nazywana jest też składową normalną.
Udało nam się przekształcić $\vec{a}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}-\omega^2\vec{r}$ na $\vec{a}=a_n\hat{n}+a_\tau\hat{\tau}$. Wersory $\hat{n}$ i $\hat{\tau}$ są do siebie prostopadłe.
Mając te wszystkie dane możemy w końcu sklasyfikować ruchy:

- $a_n=0\rightarrow$ ruch prostoliniowy
- $a_n\neq0\rightarrow$ ruch krzywoliniowy
- $a_\tau=0\rightarrow$ ruch jednostajny
- $a_\tau\neq0\wedge a_\tau=const\rightarrow$ ruch jednostajnie zmienny
- $a_\tau=a_\tau(t)\rightarrow$ ruch niejednostajnie zmienny
- $\rho=r=const\rightarrow$ (promień krzywizny toru = const) ruch po okręgu

Zasada niezależności ruchu
Jeżeli punkt materialny bierze udział w n ruchach jednocześnie, których wektory są określane $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$, to wypadkowe przsunięcie tego punktu równa się sumie wektorowej przesunięć w każdym z tych ruchów z osobna i wynosi $\vec{r}=\vec{r}_1+\vec{r}_2+\ldots+\vec{r}_n$. Każdy ze składowych ruchów odbywa się bez zakłóceń, tak jakby pozostałych ruchów nie było, a ruch wypadkowy możemy uzyskać składając poszczególne ruchy, w których bierze udział punkt materialny.

Zasada niezależności prędkości
Jeżeli punkt materialny bierze udział w n ruchach jednocześnie, których wektory prędkości są określane jako $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, to prędkość wypadkowa tego punktu równa się sumie wektorowej prędkości składowych, jakie ma ten punkt w każdym z tych ruchów z osobna i wynosi $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2+\ldots+\vec{v}_n$. Zasada niezależności prędkości wynika wprost z zasady niezależności ruchu.

$$\frac{d\,\vec{r}}{dt}=\frac{d\,\vec{r}_1}{dt}+\frac{d\,\vec{r}_2}{dt}+\ldots+\frac{d\,\vec{r}_n}{dt} \quad\Rightarrow\quad \vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2+\ldots+\vec{v}_n$$

Zasada niezależności przyspieszeń
Jeżeli punkt materialny bierze udział w n ruchach jednocześnie, których wektory przyspieszeń są określane jako $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, to przyspieszenie wypadkowe tego punktu równa się sumie wektorowej przyspieszeń składowych,

jakie ma ten punkt w każdym z tych ruchów z osobna i wynosi $\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+...+\vec{a}_n$. Zasada niezależności przyspieszeń wynika wprost z zasady niezależności prędkości.

$$\frac{d\,\vec{v}}{dt}=\frac{d\,\vec{v}_1}{dt}+\frac{d\,\vec{v}_2}{dt}+...+\frac{d\,\vec{v}_n}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+...+\vec{a}_n$$

Zasada niezależności sił

Jeżeli na ciało działa n sił równocześnie, określanych jako $\vec{F}_{1,}\vec{F}_{2,}...,\vec{F}_n$, to siła wypadkowa, działająca na to ciało równa się sumie wektorowej sił działających na to ciało z osobna i wynosi $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+...+\vec{F}_n$. Zasada niezależności sił wynika z zasady niezależności przyspieszeń.

$$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+...+\vec{a}_n \quad |\cdot m \quad \Rightarrow \quad m\vec{a}=m\vec{a}_1+m\vec{a}_2+...+m\vec{a}_n \quad \Rightarrow \quad \vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+...+\vec{F}_n$$

Układ inercjalny

To układ, który może znajdować się względem obserwatora w spoczynku lub poruszać się względem niego ruchem jednostajnie prostoliniowym (bez przyspieszenia). Dobrym przykładem układu inercjalnego dla ludzi na Ziemi jest układ heliocentryczny, w którego centrum jest Słońce, a osie układu skierowane są na wybrane gwiazdy stałe. Na co dzień dobrym układem odniesienia jest też Ziemia. Inercjalny układ odniesienia można również zdefiniować jako taki układ, w którym nie pojawiają się pozorne siły bezwładności.

Prostokątny układ kartezjański

Jeden z najpopularniejszych układów współrzędnych, zbudowany jest na trzech wzajemnie prostopadle położonych wersorach, tworzących trójkę prawoskrętną. Zazwyczaj, dla ułatwienia, przyjmujemy, że początek układu odniesienia stowarzyszony jest z początkiem układu kartezjańskiego.

$$\hat{i}\cdot\hat{i}=1$$
$$\hat{j}\cdot\hat{j}=1$$
$$\hat{k}\cdot\hat{k}=1$$
$$\hat{i}\cdot\hat{j}=0$$
$$\hat{i}\cdot\hat{k}=0$$
$$\hat{j}\cdot\hat{k}=0$$
$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$$

W układzie tym położenie cząstki definiuje się jako $\vec{r}=(x,y,z)$ lub jako trójkę $\vec{r}=x\,\hat{i}+y\,\hat{j}+z\,\hat{k}$.

Parametryczne równanie ruchu cząstki

Otrzymuje się z położenia cząstki w kartezjańskim układzie współrzędnych $\vec{r}(t)=x(t)\,\hat{i}+y(t)\,\hat{j}+z(t)\,\hat{k}$.

$$\vec{r}=\begin{cases}\vec{r}_x(t)=x(t)\,\hat{i}\\ \vec{r}_y(t)=y(t)\,\hat{j}\\ \vec{r}_z(t)=z(t)\,\hat{k}\end{cases}$$

Parametryczne równanie prędkości cząstki

Po zróżniczkowaniu równania $\vec{r}(t)=x(t)\,\hat{i}+y(t)\,\hat{j}+z(t)\,\hat{k}$ możemy otrzymać równanie prędkości postaci

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(x\,\hat{i}+y\,\hat{j}+z\,\hat{k}) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\hat{i}+\frac{dy}{dt}\hat{j}+\frac{dz}{dt}\hat{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}=v_x\,\hat{i}+v_y\,\hat{j}+v_z\,\hat{k}$$

$$\vec{v}=\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dot{x}\\ \dfrac{dy}{dt}=\dot{y}\\ \dfrac{dz}{dt}=\dot{z}\end{cases}$$

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

Parametryczne równanie przyspieszenia cząstki

Otrzymamy je po zróżniczkowaniu wektora prędkości $\vec{v}(t)=v_x(t)\,\hat{i}+v_y(t)\,\hat{j}+v_z(t)\,\hat{k}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k}) \quad\Rightarrow\quad \frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv_x}{dt}\hat{i}+\frac{dv_y}{dt}\hat{j}+\frac{dv_z}{dt}\hat{k} \quad\Rightarrow\quad \vec{a}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}$$, a więc

$$\vec{a}=\begin{cases}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv_x}{dt}=\ddot{x}\\ \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv_y}{dt}=\ddot{y}\\ \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{dv_z}{dt}=\ddot{z}\end{cases}$$

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

Równanie ruchu cząstki w postaci jawnej
Otrzymamy je po wyeliminowaniu czasu z parametrycznego równania ruchu cząstki.

Dynamika
Dynamika punktu materialnego wiąże przyczynę, która wywołuje zmianę parametrów ruchu z tą zmianą bezpośrednio (relacja przyczyna – skutek). W dynamice rozważamy prędkości $v\ll c=299792\,458\,m/s$ (c – prędkość światła, prędkość rozchodzenia się fali elektromagnetycznej w próżni). Parametry ruchu zmieniają się przez oddziaływania, których fizyczną miarą jest siła.

I zasada dynamiki Newtona
Istnieje układ odniesienia, w którym ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnie prostoliniowym, jeżeli na to ciało nie działają żadne siły lub działające siły równoważą się wzajemnie.

$$\vec{F}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{v}=\overrightarrow{const}$$

II zasada dynamiki Newtona
Jeśli siły działające na ciało nie równoważą się (czyli siła wypadkowa jest różna od zera), to ciało porusza się z przyspieszeniem wprost proporcjonalnym do siły wypadkowej, a odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała. II zasada dynamiki wprowadza do opisu ruchu pęd ciała, czyli wartość $\vec{p}=m\vec{v}$. Siła niezrównoważona wywołuje taką zmianę pędu $d\vec{p}$ ciała w czasie dt, że

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$$

wektor przyrostu pędu $d\vec{p}$ jest równy co do kierunku, zwrotu i punktu przyłożenia sile $\vec{F}$.
Po przekształceniach można otrzymać

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F} \quad\Rightarrow\quad \vec{F}=\frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad\Rightarrow\quad \vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad\Rightarrow\quad \vec{F}=m\vec{a}$$

Wynika z tego, że $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{F}$ (mają ten sam kierunek i zwrot), gdyż $\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}$

Z II zasady dynamiki Newtona wynika, że przyrost pędu musi być równy polu powierzchni pod wykresem $\vec{F}(t)$

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F} \quad\Rightarrow\quad d\vec{p}=\vec{F}\,dt \quad\Rightarrow\quad \int_{p_1}^{p_2}d\vec{p}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,dt \quad\Rightarrow\quad \vec{p}_2-\vec{p}_1=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,dt \quad\Rightarrow\quad \Delta\vec{p}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,dt$$

Po wybraniu układu odniesienia równania wektorowe można zapisać w postaci trzech równań skalarnych $\vec{F}(F_x,F_y,F_z)$, $\vec{a}(a_x,a_y,a_z)$ wtedy

$$\begin{cases}F_x=ma_x\\ F_y=ma_y\\ F_z=ma_z\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}a_x=\frac{F_x}{m}\\ a_y=\frac{F_y}{m}\\ a_z=\frac{F_z}{m}\end{cases}$$

Wnioski z II zasady dynamiki Newtona

Podstawowe znaczenie II zasady dynamiki Newtona polega na tym, że przy znajomości warunków początkowych (czyli tego, co działo się z naszym punktem w chwili początkowej t_0: $\vec{r}_{0,}\vec{v}_{0,}\vec{a}_0$) można rozwiązać w sposób jednoznaczny podstawowe zagadnienie dynamiki, czyli określić wektor $\vec{r}$ w każdej chwili czasu, a więc znaleźć wektorowe równanie ruchu tej cząstki: $\vec{r}(t)$. II zasada dynamiki jest zasadą deterministyczną, oznacza to, że dzięki znajomości stanu początkowego pozwala nam „zaglądać w przyszłość i przeszłość" ruchu cząstki. II zasada dynamiki Newtona daje nam różniczkowe równania ruchu cząstki, z których przez pierwsze całkowanie uzyskujemy informację o wektorze $\vec{v}$, a przez drugie informację o wektorze $\vec{r}$.

Pierwsze całkowanie, które daje nam informację o prędkości cząstki

$$\vec{F}=m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}=m\frac{\vec{dv}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{\vec{F}}{m}=\frac{\vec{dv}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{dv}=\frac{\vec{F}}{m}dt$$

Jeżeli rozpatrujemy ruch w jakimś przedziale czasu $t=t_o\rightarrow t$, to po obustronnym scałkowaniu otrzymamy

$$\int_{t_0}^{t}\vec{dv}=\int_{t_0}^{t}\frac{\vec{F}}{m}dt \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t)-\vec{v}(t_0)=\int_{t_0}^{t}\frac{\vec{F}}{m}dt$$

Z kolei jeśli przyjmiemy, że wartość wektora prędkości w chwili początkowej t_0 równa się $\vec{v}(t_0)=v_0$, otrzymamy

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_o+\int_{t_0}^{t}\frac{\vec{F}}{m}dt$$

Drugie całkowanie, które daje nam informację o położeniu cząstki

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_o+\int_{t_0}^{t}\frac{\vec{F}}{m}dt \quad \Rightarrow \quad \frac{\vec{dr}}{dt}=\vec{v}_0+\int_{t_0}^{t}\frac{\vec{F}}{m}dt \quad \Rightarrow \quad \vec{dr}=(\vec{v}_0+\int_{t_0}^{t}\frac{\vec{F}}{m}dt)dt \quad \Rightarrow \quad \int_{t_0}^{t}\vec{dr}=\int_{t_0}^{t}(\vec{v}_0+\int_{t_0}^{t}\frac{\vec{F}}{m}dt)dt$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)=\int_{t_0}^{t}(\vec{v}_0+\int_{t_0}^{t}\frac{\vec{F}}{m}dt)dt$$

Jeśli przyjmiemy, że wektor położenia w chwili początkowej t_0 wynosił $\vec{r}(t_0)=\vec{r}_0$, otrzymamy

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\int_{t_0}^{t}(\vec{v}_0+\int_{t_0}^{t}\frac{\vec{F}}{m}dt)dt$$

III zasada dynamiki Newtona

Zasada akcji i reakcji. Jeśli ciało A działa na ciało B jakąś siłą, to ciało B działa na ciało A z siłą o tym samym kierunku i wartości, ale innym zwrocie i punkcie przyłożenia.

Na przykład, jeśli na naszą cząstkę działają jakieś więzy (cząstka może się poruszać tylko po określonej płaszczyźnie lub po określonej przestrzeni) to pojawią się siły reakcji więzów $\vec{F}_R$. Z III zasady dynamiki Newtona wynika, że siły reakcji więzów są zawsze prostopadłe albo do powierzchni więzów, albo do linii, która tworzy te więzy.

$$\frac{\vec{dp}}{dt}=\vec{F}+\vec{F}_R$$

19 III 2010 **Wykład 4**

Przykłady rozwiązywania równań ruchu Newtona

1m,$\vec{F} = const$

a) $\vec{F}$=m$\vec{g}$

-rzut ukośny

-rzut pionowy

-rzut poziomy

-spadek swobodny

b)m,g,$\vec{E} = const$

m$\vec{a} = \vec{F}$

1.a

$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{g}$

1.b

$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{g*\vec{E}}{m}$

Obliczamy $\vec{v}$ =?

m$\frac{d\vec{v}}{dt}$=$\vec{F}$ /:m

$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m}$

d$\vec{v}$=$\frac{\vec{F}}{m}dt$

$\int \quad d\vec{r} = \int \frac{\vec{F}}{m} dt$

$\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m} \int dt$

$\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m} * t + const$

Stałe całkowania liczymy z warunków początkowych

$$\vec{v}_0 = \frac{\vec{F}}{m} * 0 + const$$

const=$\vec{v}_0$

$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{m}$*t

1.a: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{m\vec{g}}{m}t$

$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$

1.b: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{q\vec{E}}{m}t$

Obliczamy $\vec{r}$ =?

$\frac{d\vec{r}}{dt} = v_0 + \frac{\vec{F}}{m}t$

$d\vec{r} = \left(v_0 + \frac{\vec{F}}{m}t\right) dt$

$\int d\vec{r} = \int \left(v_0 + \frac{\vec{F}}{m}t\right) dt$

$\int d\vec{r} = \int v_0 dt + \int \frac{\vec{F}}{m} t\ dt$

$\vec{r} = v_0 t + \frac{\vec{F}}{2m} t^2 + const$

$\vec{r} = v_0 t + \frac{\vec{F}}{2m} t^2 + r_0$

Rozwiązaniem ogólnym równania ruchu cząstki w polu stałej siły jest wektorowe równanie paraboli:

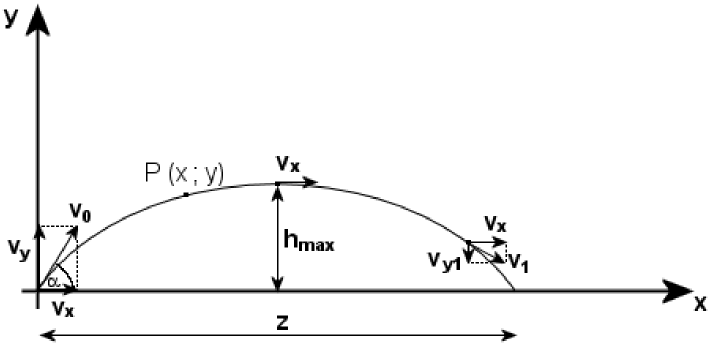
1.a

$\vec{r} = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

1.b

$\vec{r} = r_0 + v_0 t + \frac{q\vec{E}}{2m} t^2$

Rzut ukośny:



$\vec{r}(x, y) \quad v_0(v_{0x,} v_{0y})$

$\vec{r}_0(0,0) \quad v_{0x} = v_0 cos\alpha$

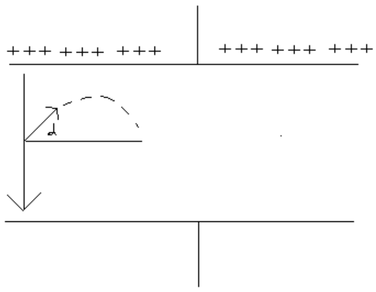
$v_{0y} = v_0 sin\alpha$

$\vec{v} = (v_x, v_y)$

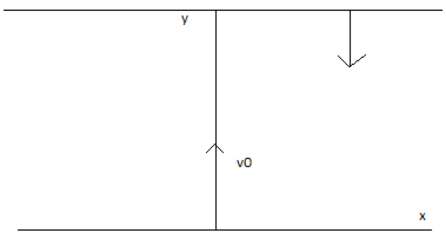
(x,y)=(0,0)+($v_{0x}, v_{0y})t + \frac{0,-mg}{2m} t^2$

y=$\frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{0x}}$

1.b



Rzut pionowy do góry:



$\vec{r}(0, y) \quad \vec{F}(0, -mg) \quad \vec{r}_0(0, v_0)$

2. Siła działająca na cząstkę jest proporcjonalna do wychylenia cząstki z położenia równowagi, ale przeciwnie skierowane siły tego typu pojawiają się w przypadku niewielkiego odkształcenia ciał stałych (siły Hooka). Jest on dokładnym lub przyblizonym modelem zjawisk zachodzących w f. klasycznej oraz relatywistycznej.

1. Ruch charmoniczny prosty:

F=-k$\vec{r}$ k=const

F=-kx

x(t)=?

m$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$

m$\frac{d\overrightarrow{v_x}}{dt} = Fx$

m$\frac{d\overrightarrow{v_x}}{dt} = -kx$

$a_x = -\frac{k}{m}x$

$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$

$\omega^2 = \frac{k}{m}$

$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

$x\omega^2 + \ddot{x} = 0$ - Równanie różniczkowe oscylatora w przypadku jednowymiarowym

Jest to jednorodne równanie różniczkowe II rzędu o stałych współcz.

Ogólnym sposobem rozwiązywania tego typu równań jest podstawienie x=e^{rt}

Rozwiązanie ogólne- superpozycja rozwiązań szczególnych

x=$c_1e^{i\omega t} + c_2e^{-i\omega t}$

t=0,x=0

$x_0 = v_0$

$c_1 + c_2 = 0$

$c_1 = c_2$

x=$c_1e^{i\omega t} - c_1e^{-i\omega t}$

v=$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}c_1e^{i\omega t} - \frac{d}{dt}c_1e^{-i\omega t}$

x=$c_1 i\omega e^{i\omega t}$+$c_1 i\omega e^{-i\omega t}$

v_0=$c_1 i\omega$*2

$c_1 = v_0\frac{1}{2}\omega i$

x=$\frac{v_0}{2i\omega}e^{i\omega t} - \frac{v_0}{2i\omega}e^{-i\omega t}$

x=$\frac{v_0}{\omega}$sinωt /Równanie Eulera, ascylator harmoniczny prosty

$\omega - częstośc\ kołowa\ drgań$

T=$\frac{2\pi}{\omega}$ $-$ okres drgań

x=$\frac{v_0}{\omega}sin\omega(t+T)$ ==$\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t + \frac{2\pi}{\omega}\omega$

$x_m = \frac{v_0}{\omega}$=A /Amplituda- maksymalne wychylenie

x=sinωt

Dla innych warunków początkowych (t=0,x=x0,v0=0)

x=Acosωt

x=$c_1 sin\omega t + c_2\cos\omega t$

Każdy okresowy proces fizyczny mozna przedstawić w postaci sumy nieskończonej liczby drgań harmonicznych prostych, nazywanej szeregiem Fouriera.

f(t)=$\sum_{n=0}^{\infty}[A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)]$

n=0, B0=0 ,A0=$\frac{2}{T}\int_{t0}^{t0+T} f(t)dt$

n$\neq$ 0 $A_n = \frac{1}{T}\int_{t0}^{t0+T} f(t) \cos(n\omega t)\, dt$

$B_n = \frac{1}{T}\int_{t0}^{t0+T} f(t) \sin(n\omega t)\, dt$

$\omega^2 = \frac{k}{m}$ /k-stała sprężystości

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

T=$2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$

26.03.2010
DRGANIA, CZĄSTKI, WAHADŁA

Siła działająca na wahadło:

$F = -k \cdot x$

k – stała proporcjonalności x – wychylenie cząsteczki z położenia równowagi

Równanie ruchu oscylatora harmonicznego nietłumionego:

$$\ddot{x} + w^2 x = 0$$

$$x = C_1 \cdot e^{iwt} + C_2 + e^{-iwt}$$

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Warunki początkowe:

$$t = 0, \quad x = 0, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_0 = \dot{x}_0$$

$$0 = C_1 \cdot e^{iw \cdot 0} + C_2 \cdot e^{iw \cdot 0}$$

$$0 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = -C_2$$

$$x = C_1 \cdot e^{iwt} - C_1 \cdot e^{-iwt}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = C_1 \cdot iw \cdot e^{iwt} - C_1 \cdot (-iwt) \cdot e^{-iwt}$$

$$\dot{x} = C_1 \cdot iwe^{iwt} + iwe^{-iwt}$$

$$\dot{x} = C_1 \cdot iwe^{iw \cdot 0} + C_1 \cdot iwe^{iw \cdot 0}$$

$$\dot{x} = C_1 \cdot iw + C_1 \cdot iw \Rightarrow C_1 = \frac{\dot{x}}{2iw}$$

$$x = \frac{\dot{x}_0}{2iw} - e^{iwt} - \frac{\dot{x}_0}{2iw} \cdot e^{iwt}$$

$$x = \frac{\dot{x}_0}{w} \cdot \left(\frac{e^{iwt} - e^{iwt}}{2i} \right)$$

ze wzoru Eulera dla superpozycji funkcji wykładniczej $\Rightarrow x = \frac{\dot{x}_0}{w} \cdot \sin(wt)$

Cząstka pod wpływem siły typu Hoock'a będzie drgała sinusoidalnie wokół położenia równowagi

częstość: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \left[\frac{rad}{s} \right]$ **okres drgań:** $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$$\sin[w(t+T)] = \sin(wt + wT) = \sin(wt + 2\pi) = \sin(wt)$$

$$x = A \cdot \sin(wt)$$

amplituda: $A = \frac{\dot{x}_0}{\omega}$ (maksymalne wychylenie cząstki z położenia równowagi)

$$x = C_1 \cdot \sin(wt) + C_2 \cdot \cos(wt)$$

$$x = A \cdot \sin(wt + \varphi)$$

φ - faza początkowa

Szereg Fourier'a

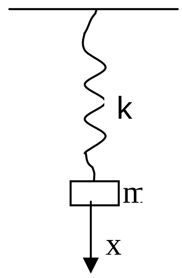
Każdy okresowy proces fizyczny o okresie T można przedstawić w postaci superpozycji o nieskończonej ilości drgań harmonicznych prostych.

$$f(t)=\sum_{n=0}^{t0}\left[A_n\cdot\cos(nwt)+B\cdot\sin(nwt)\right]$$

$$n=0,\ \ B_n=0,\ \ A_n=\frac{1}{T}\cdot\int_{t_n}^{t_n+T}f(t)\ dt$$

$$A_n=\frac{2}{T}\cdot\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cdot\cos(nwt)\ dt$$

$$B_n=\frac{2}{T}\cdot\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cdot\sin(nwt)\ dt$$



$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\left[\frac{rad}{s}\right]$$

x – wychylenie

RUCH HARMONICZNY PROSTY

1. **Wahadło Matematyczne**

   Jest to punkt materialny zawieszony na nieważkiej nici, wychylony o kąt mniejszy niż 5°, b ędzie się on poruszać ruchem harmonicznym.

siła ciężkości F_n= N (siła naciągu)

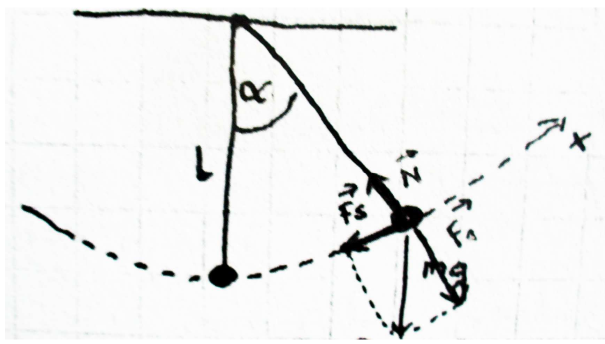
$$m\cdot\ddot{x}=F_S$$

$$\sin\alpha\approx\alpha$$

$$F_S=m\cdot g\cdot\sin\alpha$$

$\vec{N}\rightarrow$ siła naprężenia nicii

$$F_S=m\cdot g\cdot\frac{x}{l}$$



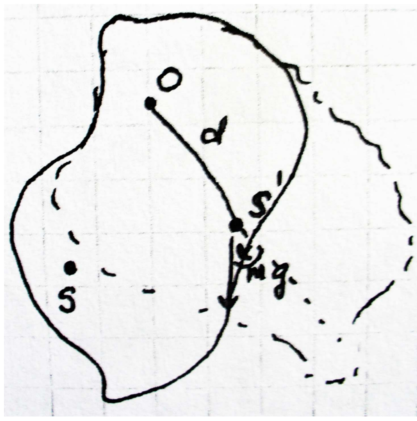
$$\ddot{x}+g\frac{x}{l}=0$$

$$\ddot{x}+w^2x=0$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\Rightarrow g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

2. Wahadło Fizyczne

Bryła sztywna, która może się swobodnie obracać i została wychylona o pewien kąt z położenia równowagi.



S → położenie środka ciężkości bryły

S'→ położenie środka ciężkości bryły po wychyleniu

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, $\vec{M}$ – moment siły

$\alpha \to \angle(\vec{r}, \vec{F})$

$M = d \cdot m \cdot g \cdot \sin\alpha$

$\vec{M} = I \cdot \ddot{E}$, $\vec{I}$ – moment bezwładności

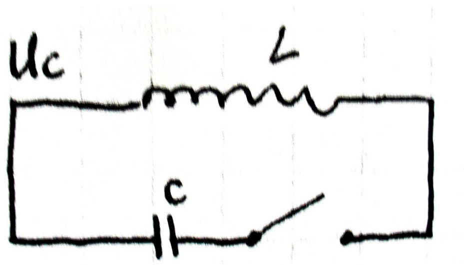
$$M = I \cdot E = I \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$$I \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -d \cdot mg \cdot \sin\alpha \Rightarrow \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{dmg}{I} \cdot \alpha = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{dmg}{I}}, \; T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{dmg}}, \; \alpha = \alpha_0 \cdot \sin(\omega t)$$

oscylacja harmoniczna kąta

3. Drgania w obwodach elektrycznych



I → natężenie prądu

$U_c + U_L = 0$

$$U_L = \alpha \cdot \frac{dI}{dt}$$

$$C = \frac{Q}{U} \Rightarrow U_C = \frac{1}{C} \cdot Q$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$\alpha \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \cdot Q = 0$$

$$\alpha \cdot \frac{d^2 I}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \frac{dQ}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 I}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot I = 0$$

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ $\qquad$ φ – faza początkowa

$$\ddot{J} + \omega^2 J = 0$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

$$I = I_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Oscylator harmoniczny tłumiony siłą oporu proporcjonalną do jego prędkości

$m,\quad F=-kx,\ F_0=-bv\bar{r}-b\dot{x},\ b-$ współczynnik proporcjonalności

ω charakteryzuje <u>oscylator nietłumiony</u> i oznacza częstość drgań własnych

ε charakteryzuje oscylator tłumiony

$$m\cdot\ddot{x}=-k\cdot x-bv$$

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}\cdot x=\frac{b}{m}\cdot\dot{x}=0$$

$$x+\frac{b}{m}\cdot x+\frac{k}{m}\cdot x=0$$

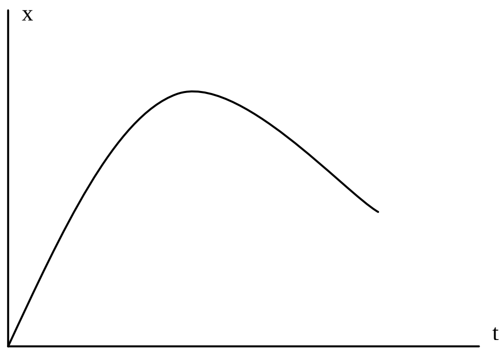
$$\frac{k}{m}=\omega^2,\ \frac{b}{m}=2\varepsilon$$

$$x+2\varepsilon\cdot x+\omega^2\cdot x=0,\qquad x=e^{rt}$$

1. $\varepsilon^2>\omega^2$ - silne tłumienie w ośrodku, **przypadek harmoniczny**

$$x=\frac{x_0}{\sqrt{\varepsilon^2-\omega^2}}\cdot e^{-\varepsilon t}\cdot\sinh\left(\sqrt{\varepsilon^2-\omega^2}\cdot t\right)$$

Następuje jedno szybkie wychylenie cząstki z położenia równowagi i powolny powrót do tego położenia



2. $\varepsilon^2<\omega^2$ - słabe tłumienie w ośrodku **przypadek periodyczny**

$$\sqrt{\varepsilon^2-\omega^2}=i\cdot\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2}$$

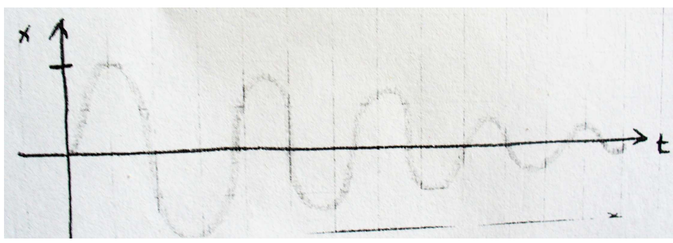
ze wzoru Eulera: $x=\frac{x_0}{\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2}}\cdot e^{-\varepsilon t}\cdot\sin\left(\sqrt{\varpi^2-\varepsilon^2}\cdot t\right)$

drgania harmoniczne o malejącej amplitudzie z częstotliwością kołową

$$\omega_1=\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2},\ T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}$$

Po czasie T_1 funkcja sinus przyjmie tą samą wartość.
Stąd T_1 nazywamy okresem.

Jednak nie jest to ruch okresowy, bo amplituda nie wraca do wartości maksymalnej.



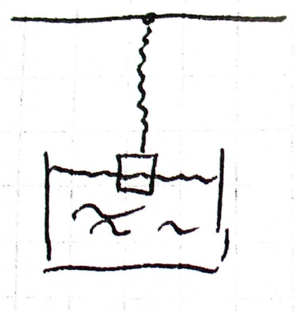
spr

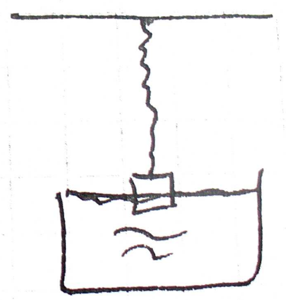
woda

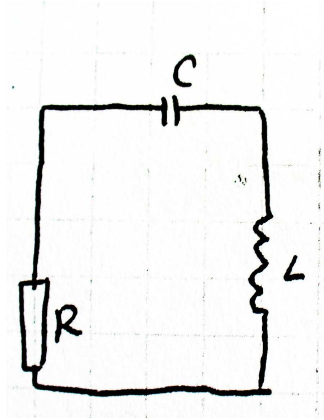
$\varepsilon^2 < \omega^2$

olej

$\varepsilon^2 > \omega^2$







$$\alpha \cdot \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \cdot Q = 0$$

$$\alpha \cdot \frac{d^2 I}{dt^2} + R \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \frac{dQ}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot I = 0$$

$$2\varepsilon = \frac{R}{L}, \;\; \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\ddot{I} + 2\varepsilon \cdot \dot{I} + \omega^2 \cdot I = 0$$

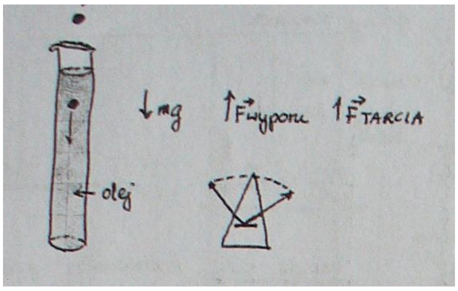
$$\omega_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{LC}\right)^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

ten przypadek anharmoniczny wykorzystywany jest w galwanometrach

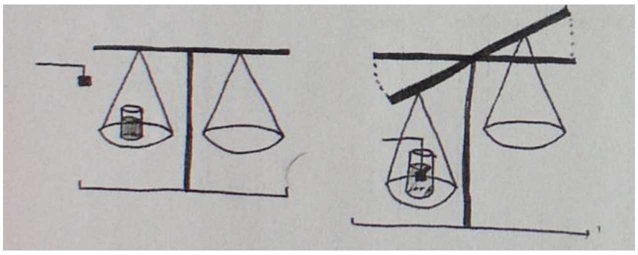
Wykład 09.04.10

Demonstracje kulka w…

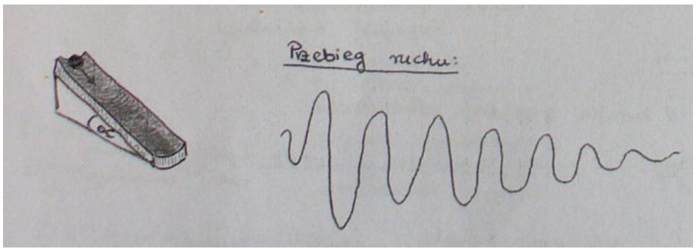
- Kulka w wodzie (I zasada dynamiki)



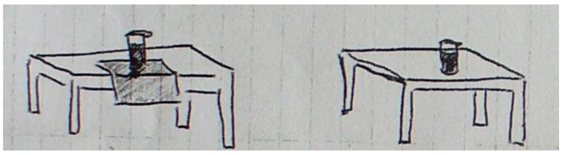
- Spadające kulki w powietrzu w różnych (Ruch przyspieszony, II Zasada Dynamiki)
  - Odgłos spadania jest rosnący,
  - Odstępy czasu pomiędzy kulkami są jednakowe (spadek swobodny)
- Ciężarek zanurzony w szklance na wodzie – III zasada dynamiki
  - siły przyłożone do różnych ciał
  - siłą wyporu działa na wodę



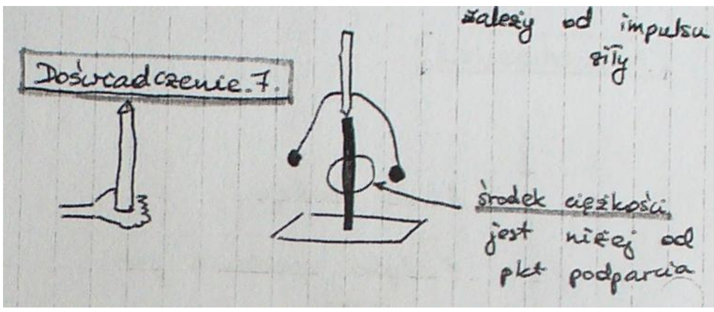
- Kulka w rynnie (ruch harmoniczny tłumiony i jednocześnie przyspieszony)



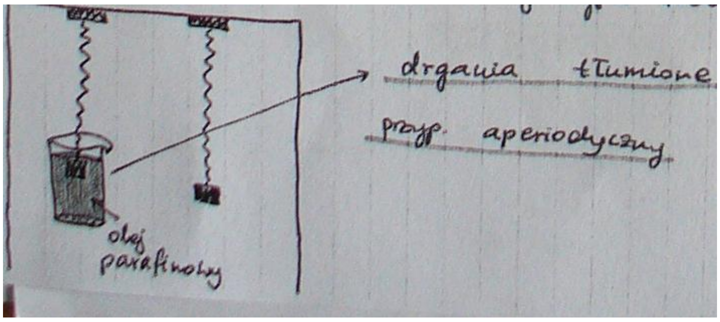
- ‘Wyciąganie obrusu’ – impuls siły



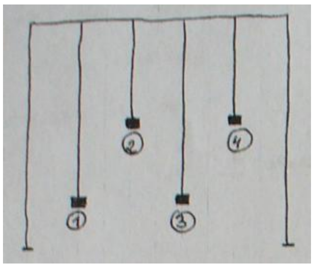
- Środek ciężkości



- Odważniki na sprężynie, jeden zanurzony w parafinie – tłumiona częstotliwość drgań (mniejsza)



- Wahadło matematyczne – rezonans.



Puszczamy wahadło **1**, wahadło **3** zaczyna drgać, wahadła **2** i **4** pozostają w spoczynku.

Rezonans zależy od T=2π$\sqrt{\frac{l}{g}}$.

- Składanie drgań wzajemnie prostopadłych = krzywe Lissajoux - w matematyce krzywa parametryczna opisująca drgania harmoniczne, dana wzorem

$$x(t) = A\sin(at + \delta), \quad y(t) = B\sin(bt).$$

- Efekt dudnień równoległych,
- Prosta: różnica faz = 0.

Drgania wymuszone siłą periodycznie zmienną w czasie to **rezonans**.

$F_0 = bv$

$F_w = F_0 * \sin(\Omega t)$

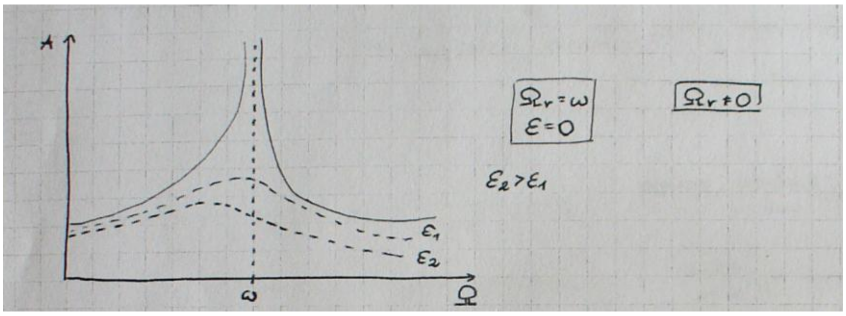
$F_w \rightarrow Funkcja\ wymuszająca$

$\Omega \rightarrow Częstość\ stała\ w\ jakiej\ czynnik\ wymuszający\ zmienia\ się\ w\ czasie\ (częstotliwość\ drgań)$

W rezonansie układ pochłania max. energię

$\Omega_r = \sqrt{\omega^2 - 2\varepsilon^2}$ gdy,

$\Omega_r \rightarrow \omega\ (\omega - czestotliwosc\ drgań\ włąsnych), \qquad \varepsilon \rightarrow 0\ (\omega - tłumienie\ b.małe)$



Zjawiska falowe – fale harmoniczne płaskie.

Podstawową różnica między rozchodzeniem się fali, a dowolnym innym uporządkowanym ruchem cząsteczek ośrodka, polega na tym, że rozchodzenie się fal <u>nie jest</u> związane z transportem masy, tylko z transportem energii przez ośrodek.

Podział: Fale

Poprzeczne: kiedy kierunek drgań cząstek ośrodka jest **prostopadły** do kierunku rozchodzenia się fal.

Przykład: Fala rozchodzi się w napiętej strunie.

Uwaga! Mogą się rozchodzić tylko w ośrodku charakteryzującym się sprężystą postacią (ciała stałe).

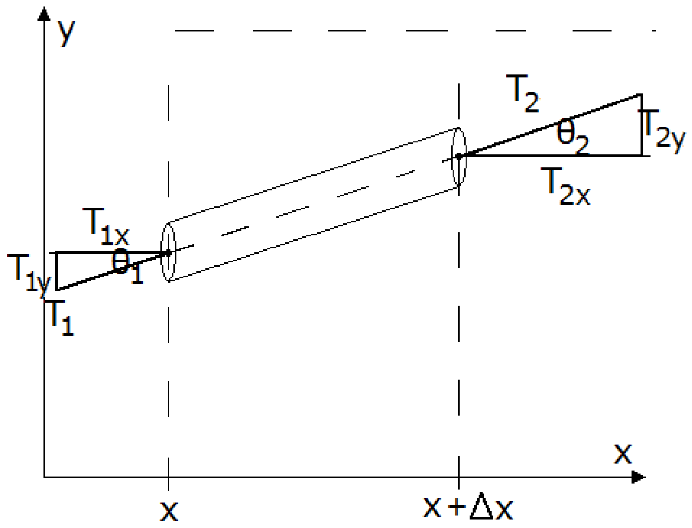
Podłużne: kierunek drgań cząsteczek ośrodka jest **równoległy** do kierunka rozchodzenia się fali

Przykład: fala dźwiękowa

Mogą rozchodzić się we wszystkich typach ośrodków, niezależnie od ich stanu skupienia!

Wyjątek ! Fale **elektromagnetyczne** nie należą do fal mechanicznych **!** Fale poprzeczne mogą się rozchodzić we wszystkich typach ośrodków
Drganiom podlegają nie elementy masy, tylko <u>pole !</u>
E – elektryczne
B – magnetyczne.

Fale mechaniczne (przypadek jednowymiarowy – zaburzenie rozchodzi się w nieskończenie cienkiej strunie w jakiś sposób zdeformowanej).
Przypadek jednowymiarowy, kiedy w zdeformowanej strunie rozchodzi się fala naprężeń w kierunku osi X.
Struna jest nieskończenie cienka, gęstość $\rho=\frac{dm}{dx}$.
Struna rozciąga się od x=0 do ∞.



y = ψ(x, t)
funkcja falowa

$$\Delta m\cdot\vec{a}=\vec{T}_1+\vec{T}_2$$
$$\Delta m\cdot a_x=T_{2x}-T_{1x}=0\Rightarrow T_{2x}=T_{1x}=T_0$$
$$\Delta m\cdot a_y=T_{2y}-T_{1y}$$

Szukamy kształtu zaburzenia rozchodzącego się w strunie.

$$a_y=\frac{d^{2y}}{dt^2}=\frac{d^2\Psi(x,t)}{dt^2}$$
$$T_{1y}=T_{1x}\cdot tg\,\theta_1=T_0\,tg\,\theta_1$$
$$T_{2y}=T_{2x}\cdot tg\,\theta_2=T_0\,tg\,\theta_2$$
$$\Delta m\frac{d^2\Psi(x,t)}{dt^2}=T_0(tg\,\theta_2-tg\,\theta_1)$$
$$tg\,teta_2=\left.\frac{d\Psi(x,t)}{dx}\right|_{x+\Delta x}\qquad tg\,teta_1=\left.\frac{d\Psi(x,t)}{dx}\right|_{x}$$
$$\Delta m=\frac{d^2\Psi(x,t)}{dt^2}=T_0\left(\left.\frac{d\Psi(x,t)}{dx}\right|_{x+\Delta x}-\left.\frac{d\Psi(x,t)}{dx}\right|_{x}\right)$$

$$\Delta m\frac{d^2\Psi}{dt^2}=T_0\Delta\frac{d\Psi}{dx}$$
$$\Delta m=\rho\Delta x$$
$$\Delta x\to 0$$
$$\rho\Delta x\frac{d^2\Psi}{dt^2}=T_0\Delta\frac{d\Psi}{dx}\quad /:\Delta x$$
$$\rho\frac{d^2\Psi}{dt^2}=T_0\frac{\Delta\frac{d\Psi}{dx}}{\Delta x}$$
$$\rho\frac{d^2\Psi}{dt^2}=T_0\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\frac{d\Psi}{dx}}{\Delta x}$$
$$\rho\frac{d^2\Psi}{dt^2}=T_0\frac{d^2\Psi}{dx^2}$$

Metoda separacji zmiennych

$$\Psi(x,t)=f(t)A(x) \qquad \textit{kształt struny}$$

$$\rho\frac{d^2 f(t)A(x)}{dt^2}=T_0\frac{d^2 f(t)A(x)}{dx^2}$$

$$\rho A\frac{d^2 f}{dt^2}=T_0 f\frac{d^2 A}{dx^2} \Big/ :Af$$

$$\rho\frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dt^2}=T_0\frac{1}{A}\frac{d^2 A}{dx^2} \Big/ :\rho$$

$$\frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dt^2}=\frac{T_0}{\rho}\frac{1}{A}\frac{d^2 A}{dx^2}$$

$$L=P=const=-\omega^2$$

$$\frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dt^2}=-\omega^2 \Big/ f$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2}=-\omega^2 f$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2}+\omega^2 f=0$$

równanie oscylatora (rolę x pełni f) odpowiada za oscylację funkcji falowej w czasie,

przy czym $\omega=\frac{2\pi}{T}$, *funkcja* $f(t)=A_1\sin\omega t+B_1\cos\omega t$

$$\frac{T_0}{\rho}\frac{1}{A}\frac{d^2 A}{dx^2}=-\omega^2 \Big/ \frac{\rho A}{T_0}$$

$$\frac{d^2 A}{dx^2}=-\omega^2\frac{\rho A}{T_0}$$

$$\frac{\omega^2\rho}{T_0}=k^2$$

$$\frac{d^2 A}{dx^2}=-k^2 A$$

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2}+k^2 A(x)=0$$

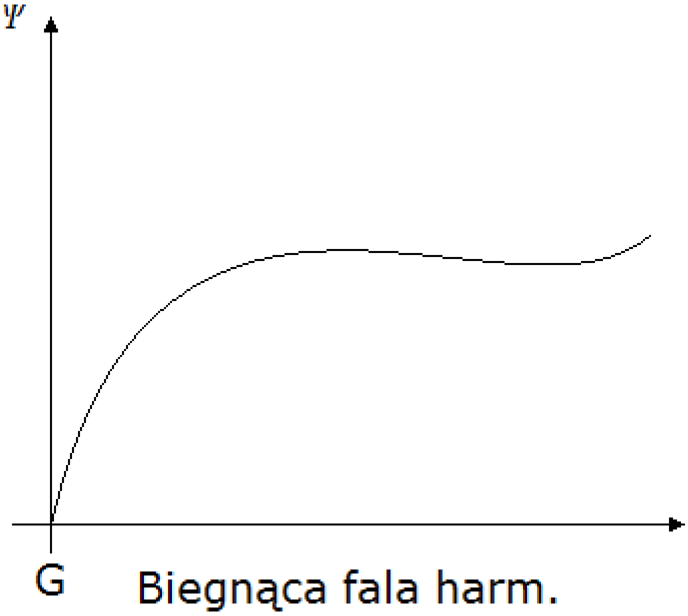
oscylacje harmoniczne funkcji falowej w przestrzeni

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

$$A(x)=A_2\sin kx+B-2\cos kx$$

$$\Psi(x,t)=(A_1\sin\omega t+B_1\cos\omega t)\cdot(A_2\sin kx+B_2\cos kx)$$

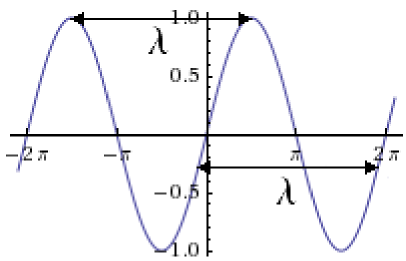
$$\Psi=A_1A_2\sin\omega t\sin kx+A_1B_1\sin\omega t\cos kx+B_1A_2\cos\omega t\sin kx+B_1B_2\cos\omega t\cos kx$$



$$A_1 A_2 = B_1 B_2 = 0$$
$$A_1 B_2 = -B_1 A_2 = C$$

$$\Psi = C(\sin\omega t \cos kx - \cos\omega t \sin kx)$$
$$\Psi(x,t) = C\sin(\omega t - kx)$$
$$\Psi(x,t) = \Psi_0 \sin(\omega t - kx)$$
$$\Psi = \Psi_0 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$
$$\omega t - kx = \phi \quad \textit{faza fali}$$
$$\phi = const \Rightarrow V_f$$
$$\omega t - kx = const \Big/ \frac{d}{dt}$$
$$\omega - k\frac{dx}{dt} = 0$$
$$\omega = k V_f \; V_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$$

Długość fali to odległość między dwoma najbliższymi punktami ośrodka znajdującymi się w tej samej fazie.



Wprowadzamy prędkość fazową do różniczkowego równania fali

$$\Delta m \frac{d^2\Psi}{dt^2} = \frac{d\Psi}{dx} T_0$$
$$\rho \frac{d^2\Psi}{dt^2} = T_0 \frac{D^2\Psi}{dx^2} \Big/ : T_0$$
$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} - \frac{\rho}{T_0}\frac{d^2\Psi}{dt^2} = 0$$
$$\frac{\rho}{T_0} = \frac{1}{V_f^2} \qquad \left(k^2 = \omega^2 \frac{\rho}{T_0}\right)$$

W naszej strunie zaburzenie i energia przekazywana jest z prędkością $V_f = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$

$V_f = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ - przypadek trójwymiarowy, fale poprzeczne.

Równanie różniczkowe fali

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} - \frac{1}{V_f^2}\frac{d^2\Psi}{dt^2} = 0 \rightarrow przypadek\ jednowymiarowy$$

$$V_f = \sqrt{\frac{K p}{\rho}} \quad K = \frac{C_p}{C_v}$$

Fale podłużne biegną szybciej niż fale poprzeczne.

$$\Psi(x, y, z, y) \rightarrow przypadek\ trójwymiarowy$$

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2} - \frac{1}{V_f^2}\frac{d^2\Psi}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2} = \Delta\Psi \rightarrow Laplasjan$$

Funkcja ψ może być skalarna bądź wektorowa.

$$\Psi \rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\omega t - kx)$$

$$\rightarrow \vec{B} = \vec{B}_0 \sin(\omega t - kx)$$

$$\nu \sim 16\,Hz - \sim 20\,kHz$$

$$\nu = \frac{1}{T}$$

$$infra\,dźwięki < 16\,Hz$$

23.04.2010

dW- praca elementarna

dW= $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ = $F|d\vec{r}| \cdot \cos(\alpha(\vec{F}, d\vec{r}))$

$$W_{A\to B} = \int \vec{F} d\vec{r}$$

Praca wykonana na skończonej długości toru zależy od kształtu i długości toru. Będzie to całka krzywoliniowa (wymaga znajomości toru).

$$\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$$
$$d\vec{r}(dx, dy, dz)$$
$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 - siła\, wypadkowa$$
$$W\ A\to B = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$
$$energia\ kinetyczna - en.\ związana\ z\ ruchem\ ciała$$

$$dW = \frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{r} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} d\vec{r} = m d\vec{v} \frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v}\, d\vec{v} = dEk$$
$$dEk - przyrost\ energii\ kinetycznej$$

$$\vec{v}\, d\vec{v} = v\, dv$$
$$dW = d(\frac{mv^2}{2}) = dEk$$
$$Ek = \frac{mv^2}{2}$$

$$dW = dEk$$
$$W_{ab} = \int dEk = Ek(B) - Ek(A)$$
$$\frac{W}{Ek}[J]$$
$$[J] = \left[\frac{kg\, m^2}{s^2}\right]$$

$$Wielkośc,\ która\ informuje\ nas\ o\ szybkośći\ wykonywania\ pracy\ jest\ moc(P)$$
$$P = \frac{dW}{dt} \to P = \frac{dEk}{dt}$$
$$\left[\frac{J}{s}\right] = [W]$$
$$P = \frac{\vec{F}\, d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$$
$$Energia\ potencjalna - związana\ ze\ wzajemnym\ położeniem$$

Istnieje w fizyce pewna grupa sił − zachowawczych.
Dla tych siła praca nie zależy od kształtu i długości toru, po którym porusza się cząstka,
a zależy tylko od położenia początkowego i końcowego tej cząstki.
Siła jest zachowawcza, jeśli jest ona tylko funkcją położenia i jeśli istnieje taka funkcja
skalarna jednoznaczna i ciągła wraz z II pochodna, że spełnione jest równanie:
$\vec{F} = -grad(x, y, z)$
$Ep(x, y, z) -$ *w/w funkcja skalarna*
tę funkcję skalarną Ep nazywamy energią potencjalną cząstki lub układ cząstek,
bo kosztem tej enegrii, bo układ
może zmienić względne położenie swoich cząstek
$grad = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$
grad jest skalarem, przekształca pola wektorowe
efektem działania tego operatora jest trzyskładowy wektor
$F_x = \frac{-\partial E_p}{\partial x}$
$F_y = \frac{-\partial E_p}{\partial y}$
$F_z = \frac{-\partial E_p}{\partial z}$
$dw = \vec{F}\, d\vec{r} = -(grad\ E_p d\vec{r}) = -(\hat{i}\frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \hat{j}\frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \hat{k}\frac{\partial E_p}{\partial z}dz)$
Jeśli wykonywane są prace przez siły zachowawcze ¿:
$dw = -dE_p$ *− różniczka zupełna funkcji* E_p

Z matematyki wynika, że różniczka zupełna obliczana dla 2 *punktów*
zależy wyłącznie od ich położenia, a nie od sposobu przejścia pomiędzy tymi punktami.
$W_{A\to B} = \int_{A\to B} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{A\to B} d\,E_p = E_p(A) - E_p(B)$
$W_{A\to A} = 0$

demonstrancje *− zjawiska falowe*
ciało fali − miejsce, do którego fala dochodzi w tym samym czasie

Zasada Huydhensa: *kazdy punkt osrodka, do ktorego dociera fala,*
staje sie zrodlem nowej fali swietlnej

Interferecja *− roznica dróg optycznych wychodzacych z roznych zrodel*
musi byc równa calkowitej drodze wielokrotnosci dlugosci fal

$$\psi_1 = \psi_{0\sin}(kx + \omega t)$$
$$\psi_2 = \psi_{0\sin}(kx - \omega t)$$

Fale biegną w przeciwną stronę

Momenty siły, pędu, bezwładności
i wybrane elementy dynamiki bryły sztywnej

$\vec{M}$ - **moment siły** definiujemy jako iloczyn wektorowy **wektora położenia** i **wektora siły przyłożonej do punktu materialnego.**

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F} \quad [Nm]$$

$\vec{n}\perp\vec{r}$ zwrot $\vec{n}$ określony regułą śruby prawoskrętnej

$\vec{n}\perp\vec{F}$

$$n=r*F*\sin(\sphericalangle(ver\,r, ver\,F))$$

$$\vec{r}(x,y,z) \qquad \vec{F}(F_x,F_y,F_z) \qquad ver\,n=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

$\vec{L}$ - **moment pędu**

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}[J*s]=[kg\frac{m^2}{s}]$$

$\vec{p}=m*\vec{v}$

m - masa $\vec{v}$ - wektor prędkości ciała

$$\vec{L}\perp\vec{r}$$
$$\vec{L}\perp\vec{p}$$
$$L=r*p*\sin(\sphericalangle(\vec{r},\vec{p}))$$

$$\vec{L}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ x & y & z\\ P_x & P_y & P_z\end{vmatrix}$$

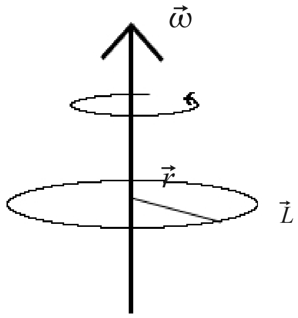
Szukamy związku między momentem siły działającej na cząsteczkę,
a zmianą momentu pędu w czasie

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}*(\vec{r}\times\vec{p})=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}+\vec{r}\,x\frac{d\vec{p}}{dt}=\underbrace{\vec{v}\times m\vec{v}}_{0}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt} \quad / \quad \times\vec{r}$$

$$\vec{n}=\vec{r}\times\vec{p}=\frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \underbrace{r\times\vec{F}}_{n}=\underbrace{\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}}_{\frac{d\vec{l}}{dt}}$$

$$\boldsymbol{\vec{n}=\frac{d\vec{L}}{dt}}$$



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = m*[\vec{\omega}*(\vec{r}*\vec{r}) - \underbrace{\vec{r}*(\vec{r}*\vec{\omega})}_{0}] = mr^2\vec{\omega}$$

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega}$$

$$\boldsymbol{mr^2 = I} \leftarrow \textbf{moment bezwładności}$$

I – **moment bezwładności**

$m_{1,} m_{2,} ......, m_n -$ masy punktów

$-$¿$r_{1,} r_{2,} ......, r_n -$ odległości punktów od środka obrotu

$\vec{\omega}$

$\sum_{i=1}^{n} (m_i * r_i^{\,2}) * \vec{w}$ Jeżeli odległość między dowolnymi dwoma elementami masy nie ulega zmianie to ciało nazywamy **bryłą sztywną.**

Wielkość decydująca o reakcji bryły sztywnej na działanie **momentu siły** to **I (moment bezwładności)**

$$I = \int_m \vec{r}^{\,2}\, dm$$

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

ρ - gęstość bryły m - masa V - objęstość

$$dV = dx \;\; dy \;\; dz$$

$$I = \int_v \rho r^2 \;\; dv$$

Ruch obrotowy bryły sztywnej

$$\vec{M}=\frac{d\vec{l}}{dt}=\frac{d}{dt}*(I\vec{\omega})=I\frac{d\vec{\omega}}{dt}=I\vec{\varepsilon}$$

$\vec{\varepsilon}$ - przyśpieszenie kątowe

$$\vec{M}=I\vec{\varepsilon} \quad \vec{M}=\frac{d\vec{l}}{dt}$$

Oba równania są słuszne dla **przyśpieszenia obrotowego** bryły względem jednej osi **symetrii** lub względem jednej z osi **głównych** (osi, której kierunek i zwrot nie ulegają zmianie podczas jej obrotu). W przeciwnym wypadku trzeba 9 liczb do określenia wektora . Jeśli bryła sztywna bierze udział w ruchu złożonym, czyli oprócz ruchu obrotowego występuje ruch postępowy to pełny opis ruchu wymaga dodania do II zasady dynamiki ruchu obrotowego II zasady dynamiki ruchu postępowego środka masy tej bryły.

$M=m_1+m_2....+m_n$ M - cała masa bryły

$M=\int dm$

$\vec{F}=M*\vec{\alpha}_{sm}$

$\vec{F}$ - wszystkie siły dziające na środek masy

M - cała masa bryły

$\vec{\alpha}_{sm}$ - przyśpieszenie środka masy

$$\begin{cases}\vec{M}=I\vec{\varepsilon}\\ \vec{F}=M\vec{\alpha}_{sm}\end{cases}$$

FIZYKA – wykład 14.05.2010r.
(cd pól zachowawczych, Ep, zasada zachowania energii, zasada zachowania pędu)

Praca:

$d\vec{W} = \vec{F}\,d\vec{r} = -dEp(x, y, z)$

$\vec{F} = -grad\,Ep$

$\oint \vec{F}\,d\vec{r} = 0 \Rightarrow rot\,\vec{F} = 0$

(cyrkulacja $\vec{F}$ po krzywej geometrycznej) (rotacja wektora)

Własności:

1. $\vec{F}(x, y, z)$
2. $\oint \vec{F}\,d\vec{r} = 0$

rot $\vec{F}$ = $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

Warunki Schwartza:

$$\frac{\partial Fx}{\partial y} = \frac{\partial Fy}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial z} = \frac{\partial Fz}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Fy}{\partial z} = \frac{\partial Fz}{\partial y}$$

Sposoby obliczania energii potencjalnej:

a)

$dW = \vec{F}\,d\vec{r}$ = -dEp

$$\int_A^B \vec{F}\,d\vec{r} = -\int_A^B Ep$$

- [Ep(B) – Ep(A)] = $\int_A^B \vec{F}\,d\vec{r}$

Ep(A) – Ep(B) = $\int_A^B \vec{F}\,d\vec{r}$

$$Ep(A)=\int_A^B \vec{F}\,d\,\vec{r}+Ep(B)$$
$$B\rightarrow inf$$
$$Ep(A)=\int_A^{inf} \vec{F}\,d\,\vec{r}$$

b)

$$dW=-dEp$$

$$\int \vec{F}\,d\,\vec{r}=-\int Ep$$

$$Ep=\int \vec{F}\,d\,\vec{r}+const$$

Energia potencjalna jest określona z dokładnością do stałej.

Do sił zachowawczych należą siły centralne:

$$\vec{F}=f(r)\frac{\vec{r}}{r}=f(r)\hat{r}$$

<u>Prawo Coulomba:</u>

$$\vec{F} \quad = \quad -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

$$G=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\vec{F}=\frac{c}{r^2}\hat{r}$$

$$C=-Gm_1 m_2$$

$$C=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}q_1 q_2$$

$$Ep=-\int\frac{c}{r^2}dr+const$$

$$Ep=\frac{c}{r}+const$$
$$r\rightarrow inf\Rightarrow Ep\rightarrow 0$$

$$Ep=\frac{c}{r}$$
$Ep=mgh$ - dla szczególnego przypadku

Postulaty Bohra

Elektron w atomie może poruszać się tylko po takiej orbicie kołowej, na której moment pędu tego elektronu jest wielkością skwantowaną.

$$E_n = -hcR\frac{1}{n}, \ gdzie\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$F = -kx$$

$$Ep = -\int \vec{F}\, d\vec{r} + const$$

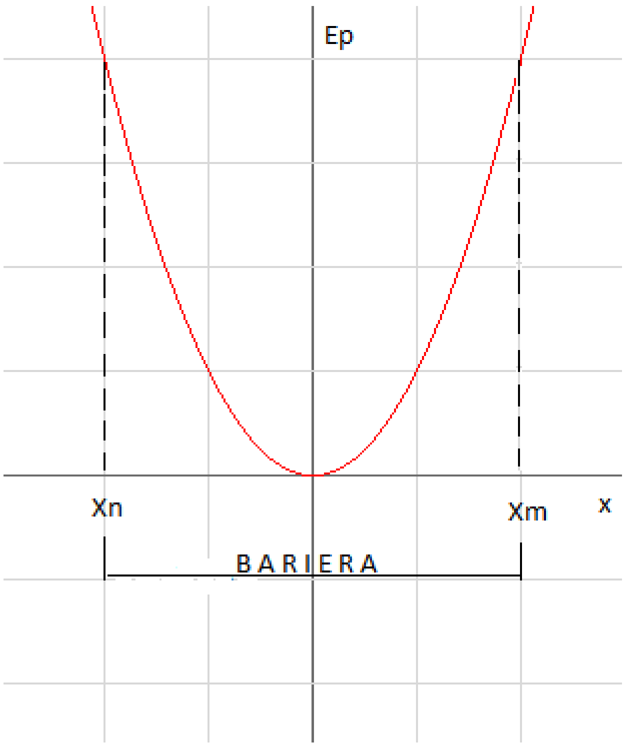
$$Ep = -\int -kxdx + const$$

$$Ep = \int kxdx + const$$

$$Ep = \frac{1}{2}kx^2 + const$$
$$x \to 0, E \to 0$$

$$Ep = \frac{1}{2}kx^2$$

k – stała charakteryzująca siły sprężystości



Zasada zachowania energii

W układzie odosobnionym suma wszystkich rodzajów energii jest wielkością stałą w czasie.

$$E_k + E_p + E_j + E_q + E_{ch} + \ldots = const$$

Układ odosobniony nie oddziałuje z otoczeniem w żaden sposób.

$dW = dEk - dEp$

$\vec{F}\, d\vec{r} = -dEp$

$dEk = -dEp$

$dEk + dEp = 0$

$d(Ek + Ep) = 0$

$Ek + Ep = E$

$dE = 0 \Rightarrow E = const$

Jeżeli na ciało nie działają żadne siły lub działają siły zachowawcze to energia mechaniczna jest stała w czasie.

Zasada zachowania energii jest związana z jednorodnością czasu.

Wnioski z ZZE:

1. ZZE pozwala określić bez rozwiązywania równań ruchu rozmiar przestrzeni dostępnej dla cząstki

   $\frac{mV^2}{2} + Ep(x, y, z) = E$

   $\frac{mV^2}{2} = E - Ep \Rightarrow E - Ep \geq 0$ - wyznacza obszar dla cząstki

2. Bez rozwiązywania równań ruchu możemy znaleźć prędkość

   $\frac{mV^2}{2} + Ep = 0$ <=> $\frac{mV^2}{2} = E - Ep \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2}{m}(E - Ep)}$

3. $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$

4. $\vec{F} = -grad\ Ep$

Zmiana energii, gdy dopuścimy siły niezachowawcze, np. tarcie, opór

$W_{A\to B} = \int_{A\to B} \vec{F}_z\, d\vec{r} + \int_{A\to B} \vec{F}_n\, d\vec{r}$

$Ek(B) - Ek(A) = Ep(A) - Ep(B) + \int_{A\to B} \vec{F}_n\, d\vec{r}$

$[Ek(B) + Ep(B)] - [Ek(A) + Ep(A)] = \int_{A\to B} \vec{F}_n\, d\vec{r}$

$$E(B)-E(A)=\int_{A\to B}\vec{F}\,d\vec{r}$$

$$E(B)-E(A)>0$$

Energia rośnie

$$E(B)-E(A)<0$$

dyssypacja

Zasada zachowania pędu

$$\vec{F}=\frac{d\,\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{F}=0\Rightarrow\frac{d\,\vec{p}}{dt}=0\Rightarrow\vec{p}=\overrightarrow{const}$$

ZZP: Jeżeli działające na punkt materialne siły równoważą się wzajemnie to wektor pędu jest wektorem stałym.

Siły: Fz – zewnętrzne
Fw – wewnętrzne

$$\frac{d\,\vec{p}}{dt}=\vec{F}_{1,z}+\vec{F}_{1,w} \qquad \frac{d\,\vec{p}_1}{dt}+\ldots+\frac{d\,\vec{p}_n}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i,z}$$

.
.
.

$$\frac{d\,\vec{p}_n}{dt}=\vec{F}_{n,z}+\vec{F}_{n,w} \qquad \frac{d\,\vec{p}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i,z}=\vec{F}_z \quad , \quad \vec{F}_z=0\Rightarrow\vec{p}=\overrightarrow{const}$$

Sposoby obliczania energii potencjalnej:

1.
$$dW = \vec{F} \cdot d\,\vec{r} = -dE_p$$
$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\,\vec{r} = -\int_A^B dE_p = -[E_p(B) - E_p(A)] = E_p(A) - E_p(B)$$
$$E_p(A) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\,\vec{r} + E_p(B)$$
$$B \to \infty$$
$$E_p(A) = \int_A^\infty \vec{F} \cdot d\,\vec{r} + E_p(\infty)$$

2.
$$dW = -dE_p$$
$$\int \vec{F}\, d\,\vec{r} = -\int dE_p$$
$$E_p = -\int \vec{F}\, d\,\vec{r} + C$$

Energia potencjalna jest zawsze wielkością określoną do pewnej stałej.

Do sił zachowawczych należą wszystkie siły, które noszą nazwę sił centralnych (można je zapisać $\vec{F} = f(r)\hat{r}$).

$$\oint f(r)\hat{r}\, d\,\vec{r} = \oint f(r)\, dr = 0$$

bo $\hat{r} \cdot d\,\vec{r} = dr$

Do sił centralnych należą siły grawitacji, Culomba, siły typu Hooke'a.

$$\vec{F} = \frac{-G \cdot M}{r^2}\hat{r}$$
$$\vec{F} = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\hat{r}$$
$$\vec{F} = -kx$$

Zajmiemy się poszukiwaniem energii potencjalnej dla 2-óch pierwszych.

$$\vec{F} = \frac{c}{r^2}\hat{r} \qquad c = -GMm$$

$$c = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}$$

$$E_p = -\int \frac{c}{r^2}\, dr + C$$

$$E_p = \frac{1}{r}c + C \ jak\ znaleźć\ C\ ?\ gdy\ r \to \infty,\ wtedy\ E_p \to 0\ co\ pozwala\ przyjąć\ stałą = 0$$

$$E_p = \frac{c}{r}$$

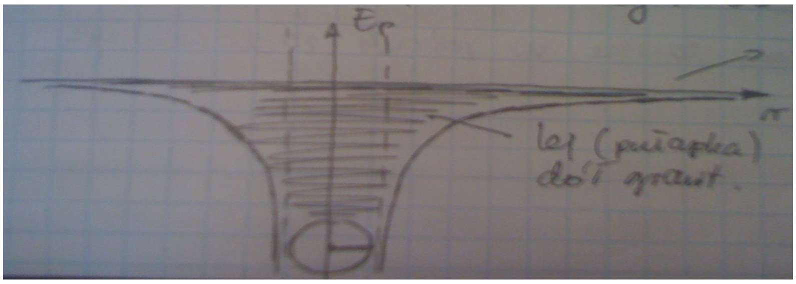
zatem

$$E_p = \frac{-G \cdot M}{r}$$

$$E_p = \frac{1}{4 \Pi \varepsilon_0} \frac{Qq}{r}$$

Przyjmujemy, że $M = M_{ziemi} \Rightarrow E_p = \frac{-G \cdot M_z \cdot m}{r}$

wykres energii potencjalnej w funkcji odległości masy m od centrum ziemi:



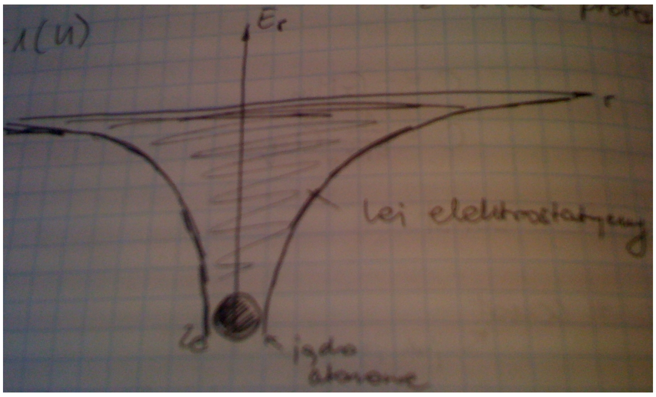
2gi przykład:
atom wodoru i jony wodoropodobne (mające 1 elektron na powłokach elektronowych)

$Q = z \cdot e$, $\quad e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, C$ *– najmniejsza porcja ładunku istniejącego w przyrodzie*

$$E_p = \frac{1}{4 \Pi \varepsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r}$$

Z *– liczba protonów w jądrze*

$Z = 1(H)$



ale elektron w atomie H i jonach wodoro-podobnych nie może przyjmować dowolnej wartości energii, ale ścisłej energii określonej wzorem:

$$E_n = -h \cdot c \cdot R \cdot \frac{1}{n^2}$$

h *– stała plancka*

c *– prędkość światła*

R *– stała Rytberga*

ten wzór można wyprowadzić jeśli do zasady zachowania energii spełnionej zawsze w polach zachowawczych dodamy postulaty Bohra:

$$\frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v^2 - \frac{1}{4\Pi \varepsilon_0} \cdot \frac{\hat{e}^2}{r} = E = const$$

Postulat Bohre'a mówi, że elektron w atomie może się poruszać tylko po takiej orbicie, na której niewypromieniowuje energii i na której moment pędu przyjmuje wartości:

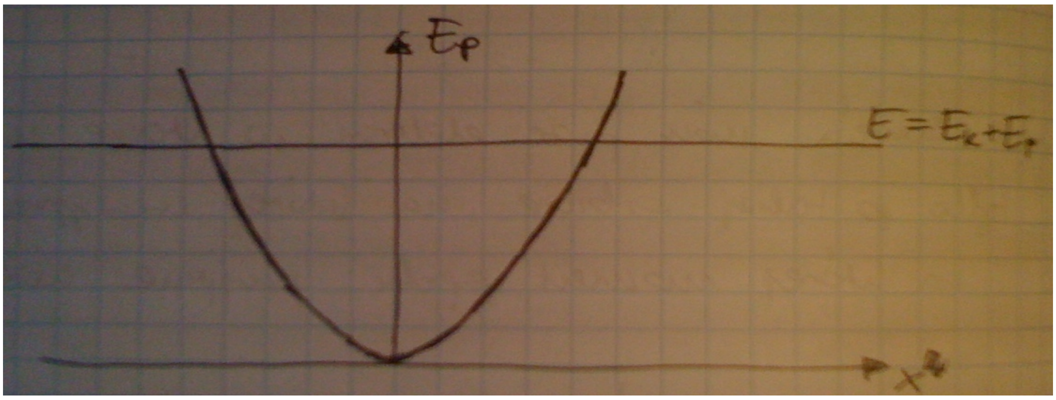
$$m_e vr = n\hbar = n \cdot \frac{h}{2\Pi} \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Pole w siłach typu Hooke'a:

$$F = -kx \qquad , \vec{F} \cdot d\,\vec{r} = -kxdx$$
$$dW = -dE_p \qquad , \vec{F}(-kx, 0, 0)$$
$$\int dW = -\int dE_p \qquad , d\,\vec{r}(dx, dy, dz)$$
$$E_p = -\int -kxdx + const$$

$$E_p = -\int -kxdx + const$$
$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 + const \qquad x - odl.\ pkt\ od\ położ.\ równowagi$$
$$gdy\ x \rightarrow 0\ (położ.\ równowagi)\ energia\ pot.\ maleje$$
$$x \rightarrow 0, E_p \rightarrow 0, const = 0$$

$$E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$



Uzasadnienia nazwy siła zachowawcza :

1. zasada zachowania energii,
2. zasada zachowania pędu,
3. zasada zachowania momentu pędu.

Ad 1. Z.Z.E. - mówi, że w układzie odosobnionym suma wszystkich rodzajów energii (

sposoby obliczania energii potencjalnej

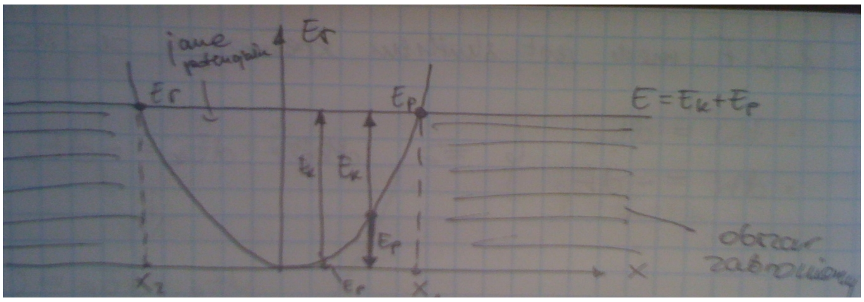
$E_k+E_p+E_{jądrowa}+E_{cieplna}+E_{elektryczna}+...=const$ w czasie.
Przy czym układ odosobniony, tj. układ który na żaden sposób nie oddziaływuje z otoczeniem (nie ma wymiany m, Q, etc.). Zawężamy Z.Z.E. do układów mechanicznych, gdzie całkowita energia określona jest jako suma $E=E_k+E_p$. Z.Z.E. mech. mówi, że jeżeli na punkt materialny nie działają żadne siły lub siły działające są siłami zachowawczymi to E_{mech} tego punktu jest stała w czasie. Z.Z.E. mech. jest skutkiem spełnionych związków:

$$\left.\begin{cases} dW=dE_k \\ dW=-dE_p \end{cases}\right\} \Rightarrow dE_k=-dE_p \Rightarrow dE_k+dE_p=0 \Rightarrow d(E_k+E_p)=0 \Rightarrow \boldsymbol{E_k+E_p=const}=E$$

Uogólniamy Z.Z.E. Na układ punktów $(m_1,...,m_n)$ gdzie każdy ma $E(E_1,...,E_n)$ to w odosobnionym układzie punktów materialnych oddziaływujących między sobą tylko siłami zachowawczymi $E_{całkowitamechaniczna}=const$ czyli $E_{cm}=E_1+...+E_n=const$ (w czasie).

Z.Z.E. Jest konsekwencją jednej z symetrii istniejących w przyrodzie, mianowicie, że wszystkie chwile czasu są sobie równoważne, tzn. Przebieg zjawiska nie zależy od wyboru chwili początkowej.

1. Wniosek – pozwala nam określić obszar przestrzeni dostępny dla cząstki bowiem
$E_k+E_p=const=E$ to wobec tego $E_k=E-E_p \leftarrow E_p(x,y,z)$.
$E_k=E-E_p \geqslant 0 \Rightarrow E-E_p(x,y,z) \geq 0$



np. oscylator harmoniczny porusza się tylko gdy $E \geq E_p$, między x_1, x_2 spełniony jest ten warunek tylko gdy oscylator się porusza.
$x_2 \leq x \leq x_1$
Poziom <u>równowagi trwałej</u> gdy $E_p=E_p(min)$

2. Wartość prędkości cząstki bez rozwiązywania równań ruchu.

$$\frac{mv^2}{2}+E_p=E$$
$$\frac{mv^2}{2}=E-E_p$$
$$v=\sqrt{\frac{2}{m}(E-E_p)}$$

3. $\vec{F}=-grad\, E_p$

4. $s=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$

sposoby obliczania energii potencjalnej

Wykłady z dnia: (część)14.05, 28.05, 11.06.2010

Wykład z dnia: (część) 14.05.2010

Transformacje:

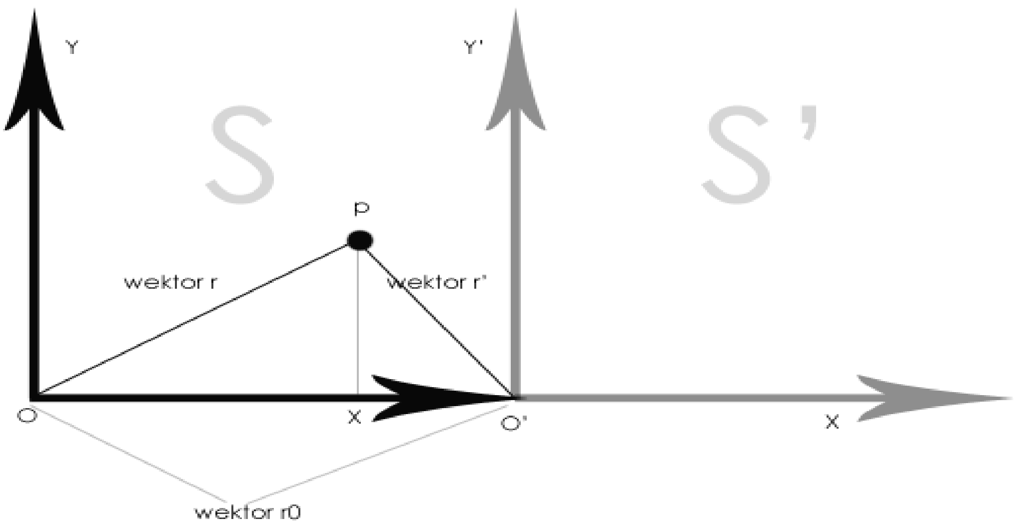
- między układami inercjalnymi – transformacja Galileusza
- między układami nieinercjalnymi – siły bezwładności.
- między układami inercjalnymi – transformacja Lorenza

W wypadku jeśli układ punktów spełnia zasadę zachowania pędu, to środek masy układów punktów pozostaje w spoczynku lub porusza się jednostajnie.

Mamy 2 inercjalne układu odniesienia:

1)

$$S, S', \vec{V}$$



$$\vec{r}_0+\vec{r}\,'=\vec{r}$$
$$\vec{r}=\vec{r}-\vec{r}_0$$
$$(x', y', z')=(x, y, z)-(x_0, 0 0)$$
$$x_0=V_0 t$$
$$(x', y', z')=(x, y, z)-(Vt, 0 0)$$

$$\text{Transformacja Galileusza}:$$
$$x'=x-Vt$$
$$y'=y$$
$$z'=z$$
$$t'=t$$

$$\frac{dx'}{dt}=\frac{dx}{dt}-V$$
$$\frac{dy'}{dt}=\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{dz'}{dt}=\frac{dz}{dt}$$

$$\text{Oznaczenia}: V''-\text{prędkość cząstki}; V-\text{prędkość międzyukładowa}$$
$$V''x=V''_x-V$$
$$V''_y=V''_y$$
$$V''_z=V''_z$$
$$\left\{\begin{matrix} V''_x=V''_x-V \\ V''_y=V''_y \\ V''_z=V''_z \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{klasyczne prawo składania prędkości} \rightarrow \frac{dV''_x}{dt}=\frac{dV_x}{dt}; \frac{dV''_y}{dt}=\frac{dV_y}{dt}; \frac{dV''_z}{dt}=\frac{dV_z}{dt};$$
$$\text{Z powyższych własności wynika}:$$
$$a_x'=a_x$$
$$a_y'=a_y$$
$$a_z'=a_z$$
$$\text{czyli } a'=a \rightarrow ma'=ma \rightarrow F'=F$$

Wynika z tego, że przyspieszenie i siła w transformacji Galileusza **we wszystkich układach** będą takie same.

Zasada względności Galileusza
Prawa mechaniki we wszystkich inercjalnych układach odniesienia maja taką sama postać.

2) Układ S' przestaje być układem inercjalnym.

$$S', \vec{a}_0, \vec{E}(epsilon, przyspieszenie\ kątowe), \vec{w}(omega)$$

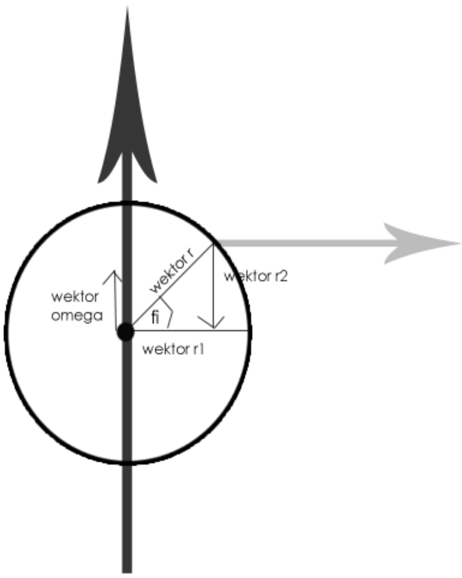
Wykład z dnia: 28.05.2010

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}' - \vec{E} x \vec{r} - 2\vec{V}' x \vec{r} - \vec{w} x \vec{w} x \vec{r}' / mnożymy\ obustronnie\ przez\ m$$
$$ma' = m\vec{a} - m\vec{a}_0 - m\vec{E} x \vec{r} - 2m\vec{V}' x \vec{r} - m\vec{w} x \vec{w} x \vec{r}'$$
$$gdzie: m\vec{E} x \vec{r} - 2m\vec{V}' x \vec{r} - m\vec{w} x \vec{w} x \vec{r}' - jest\ siłą\ bezwładności - \vec{F}'_B$$
$$\vec{F}' = \vec{F} - \vec{F}'_B$$

Siły bezwładności są skutkiem nieinercjalności układu odniesienia.

W układzie nieincjalnym nie obowiązuje 1 i 3 zasada dynamiki.

2 Zasada Dynamiki:



$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} + \vec{F}_B ; \vec{g} = \vec{g}_0 - \vec{w} x \vec{w} x \vec{r}'$$
$$\vec{w} x \vec{w} x \vec{r}' = \vec{w} x \vec{w} x [\vec{r}'_1 + \vec{r}''_2] = \vec{w} x \vec{w} x \vec{r}'_1 + \vec{w} x \vec{w} x \vec{r}''_2$$
$$\vec{w} x \vec{w} x \vec{r}''_2 = 0$$
$$\vec{w} x \vec{w} x \vec{r}'_1 = \vec{w}(\vec{w}\vec{r}'_1) - \vec{r}'_1(\vec{w}\vec{w}) = -w^2\vec{r}'_1$$
$$(ponieważ\ \vec{w}(\vec{w}\vec{r}'_1) = 0)$$
$$\vec{g} = \vec{g}_0 + w^2\vec{r}'_1$$
$$r'_1 = R\cos(fi)$$

3) Transformacja między układami inercjalnymi.

$$V \sim c (V\ jest\ bliskie\ c)$$

Układy S, S'.
S -> układ labolatoryjny; (x,y,z); t
S' ->(x',y',z'), t

Zakładamy, że oba te układy przemieszczają się względem osi X

// rysunek

Transformacja Lorenza stanowi podstawę związków transformacji w szczególnej teorii względności.

Postulaty szczególnej teorii względności:
I. Prędkość światła (w ogólności fali elektromagnetycznej) jest w próżni we wszystkich układach inercjalnych taka sama, tzn. Niezależnie od wzajemnego ruchu źródła i obserwatora. Jest to zarazem maksymalna prędkość z jaką mogą się rozchodzić.
II. Stanowi uogólnienie ZWG, że wszystkie prawa przyrody są niezmienne względem przekształceń współrzędnych(?) i czasu przy przejściu z jednego układu odniesienia do drugiego. Wszystkie prawa przyrody we wszystkich inercjalnych układach odniesienia mają taką samą postać.

2 równanie Maxwella

$$rot\,\frac{\vec{B}}{mi\,mi_0\vec{H}}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\text{, gdzie mi ¿ jest grecka literka , }\vec{j}\text{ jest gęstością prądu przewodzenia}$$

$$rot\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$dir\,\vec{D}=q$$

$$dir\,\vec{B}=0$$

$$\vec{D}=EE_0\vec{E}\text{ , }E-\text{oczywiście epsilon}$$

$$\vec{F}=qE+q\vec{V}\,x\,\vec{B}$$

// wykresy

$$x^2+y^2+z^2=r^2=c^2t^2$$

$$x'^2+y'^2+z'^2=r'^2=c^2t'^2$$

$$trans.\,Galileusza\rightarrow x'=x-Vt$$

$$(x-Vt)^2+y^2+z^2-c^2t^2$$

Wprowadzamy do trans. Galileusza poprawkę:

!Oznaczenia!: gamma (mała grecka literka) = y, takie oznaczenie będzie obowiązywało do końca tego dokumentu

$$(1)\,x'=y(x-Vt);\,y(V)=y$$

Transformacja musi być liniowa.

$$(2)\,x=gamma(x'+vt')$$

Równanie (1) i (2) mnożymy stronami

$$xx'=y^2(x-Vt)(x'+Vt)$$

$$x=ct\text{ , bo prędkość światła jest stała}$$

$$ct\,ct'=y^2(ct-Vt)(ct'+Vt)$$

$$c^2tt'=y^2t(c-V)t'(c+v)/:tt'$$

$$c^2=y^2(c^2-V^2)$$

$$y^2=\frac{c^2}{c^2-V^2}=\frac{1}{1-\frac{V^2}{C^2}}$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$$

Szukamy sposobu transformacji czasu

$$x=gamma(x'+Vt')$$

$$x=y[y(x-Vt)+Vt']$$

$$x=y^2(x-Vt)+y\,Vt'$$

$$x=y^2x-y^2Vt+y\,Vt'/:y\,V$$

$$\frac{x}{y\,V}=\frac{y\,x}{V}-y\,t+t'$$

$$t'=y\,t-\frac{y\,x}{V}+\frac{x}{y^2V}$$

$$t'=y(t-\frac{x}{V}+\frac{x}{y^2V})$$

$$\frac{1}{y^2}=1-\frac{V^2}{c^2}$$

$$i\,otrzymaliśmy:t'=y(t-\frac{V}{c^2}x)$$

Transformacja Lorenza:

$$x' = y(x - Vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = y\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$
$$y \geqslant 1$$
$$V \to 0$$
$$y \to 1$$
$$\text{transformacja Lorenza} \to \text{transformacja Galileusza}$$

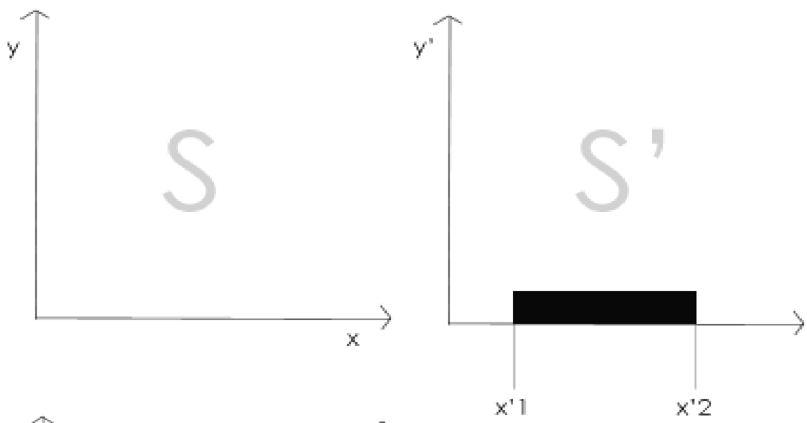
$$x = y\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right)$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = y\left(t' - \frac{v}{c^2}x'\right)$$

Kinematyczne skutki transformacji Lorenza

1) Skrócenie długości
2) Dylatacja czasu
3) Nowe relatywistyczne prawo prędkości (transformacja prędkości)
4) Jednoczesność i następstwo zdarzeń

Ad. 1 Skrócenie prędkości (kontreakcja Lorenza)

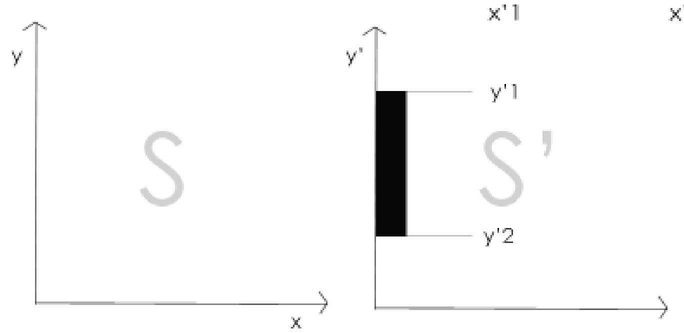
$$t'_2 - t'_1 = l_o$$
$$x'_2 = y(x_2 - Vt_2)$$
$$x'_1 = y(x_1 - Vt_1)$$
$$t_1 = t_2$$
$$x'_2 - x'_1 = y(x_2 - x_1)$$
$$x_2 - x_1 = l_o$$
$$l - \text{skrócenie długości w transformacji Lorenza}$$
$$l_o \to yl \to l = \frac{l_o}{y} \to l = l_o\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$



Gdyby nasz pręt był na osi Y:

Tutaj wyjątkowo y oznacza zwykłe y (-;

$$t_0 = y'_2 - y'_1$$
$$y'_2 = y_2$$
$$y'_1 - y_1$$
$$\to l_o = y_2 - y_1 = l$$



Wniosek: Jeżeli cząstka (obiekt) porusza się względem obserwatora z prędkością Vc, to wymiary mierzone przez tego obserwatora, ulegają gamma razy skróceniu, zaś rzeczywiste wymiary nie zmieniają się.

Ad. 2 Pomiary czasu (Dylatacja czasu)

$$t_1, t_2; t'_1, t'_2$$
$$t_2 = y(t'_2 + \frac{V}{c^2} x'_2)$$
$$t_1 = y(t'_1 + \frac{V}{c^2} x'_1)$$
$$x'_2 = x'_1$$
$$t_2 - t_1 = y(t'_2 - t'_1)$$
$$t'_2 - t' = delta\, t$$
$$t_2 - t_1 = delta\, t_0$$
$$delta\, t = y\, delta\, t_0$$

Odstępy czasu mierzone przez zegar są mniejsze niż odstępy czasu mierzonego przez ...

Wykład z dnia: 11.06.2010

Ad. 3 Nowe relatywistyczne prawo prędkości (transformacja prędkości)

$$S(V_x, V_y, V_z)$$
$$S'(V'_x, V'_y, V'_z)$$

$$\textit{Współrzędne z definicji:}$$
$$V'_x = \frac{dx'}{dt'}$$
$$V'_y = \frac{dy'}{dt'}$$
$$V'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

$$x' = x'(x, t)$$
$$dx' = \frac{\partial x'}{\partial x} dx + \frac{\partial x'}{\partial t} dt = y\, dx - yV dt = y(dx - V dt)$$
$$dt' = t'(t, x) = \frac{dt'}{dt} dt + \frac{\partial t'}{\partial x} dx = y\, dt - y \frac{V}{c^2} dx = y(dt - \frac{V}{c^2} dx)$$

$$Vx' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{y(dx - V dt)}{y(dt - \frac{V}{c^2} dx)} = \frac{y\, dt(\frac{dx}{dt} - V)}{y\, dt(1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt})} = \frac{V_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} V_x}$$
$$V'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{y(dt - \frac{V}{c^2} dx)} = \frac{dt \frac{dy}{dt}}{y\, dt(1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt})} = \frac{V_y}{y(1 - \frac{V}{c^2} V_y)}$$
$$V'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{V_z}{y(1 - \frac{V}{c^2} V_z)}$$

Transformacja Galileusza i klasyczne prawo składania prędkości są szczególnymi przypadkami prawa Loranza

$$V'_x=\frac{V_x-V}{1-\frac{V}{c^2}V_x};V'_y=\frac{V_y}{1-\frac{V}{c^2}V_y};V'_z=\frac{V_z}{1-\frac{V}{c^2}V_z}$$

$$V_x=\frac{V'_x-V}{1-\frac{V}{c^2}V_x};V_y=\frac{V'_y}{1-\frac{V}{c^2}V_y};V_z=\frac{V'_z}{1-\frac{V}{c^2}V_z}$$

Ad. 4 Jednoczesność i następstwo czasowe zdarzeń.
2 zdarzenia jednoczesne w jednym układzie odniesienia, nie muszą być jednoczesne w innych układach.

$$t'=y(t-\frac{V}{c^2}x);t'_2>t'_1;t'_2-t'_1=y[(t_2-t_1)-\frac{V}{c^2}(x_2-x_1)]$$

$$t_2-t_1=0\ dla\ zdarzeń, które\ są\ jednoczesne\ w\ labolatorium$$

$$t'_2-t'_1=-y[\frac{V}{c^2}(x_2-x_1)]$$

$$l_o, delta\ t_0-we\ wszystkich\ inercjalnych\ układach\ odniesienia\ są\ takie\ same$$

Dynamika relatywistyczna

1) 1 prawo dynamiki – bez zmian
2) $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$ - posotaje słuszna pod warunkiem, że uwzględni się skutki relatywistyczne dla cząstki

$$\vec{p}_{rel}=m_{rel}\vec{V}_{cząstki};m_{rel}=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=my$$

Wyprowadzenie na pęd relatywistyczny bierze się z zasady zach. Pędu.

$$\vec{F}=\frac{d}{dt}(m_{rel}V_{cząstki})\frac{dm_{rel}}{dt}V_{cząstki}+m_{rel}\frac{d\vec{V}_{cząstki}}{dt}=\frac{dm_{rel}}{dt}\vec{V}_{cząstki}+m_{rel}\vec{a}$$

W mechanice relatywistycznej wektor siły i przyspieszenia nie są na ogół do siebie wektorami równoległymi.

$$\vec{F}\neq\vec{F}';\vec{a}\neq\vec{a}'$$

3) $\vec{F}_{akcja}=-\vec{F}_{reakcja}-nie\ jest\ słuszna\ w\ dynamice\ relatywistycznej$

Energia relatywistyczna

$$E=mc^2$$
$$w\ relatywistyce: E=m_{rel}c^2$$

$$Przez\ całkowitą\ energię\ uznaje\ się: E=E_k+E_0=m_{rel}c^2$$
$$natomiast\ w\ energi\ mechanicznej: E=E_k+E_p$$

Każdej zmianie relatywistycznej będzie towarzyszyć:

$$delta\ m_{rel}=\frac{delta\ E}{c^2}$$