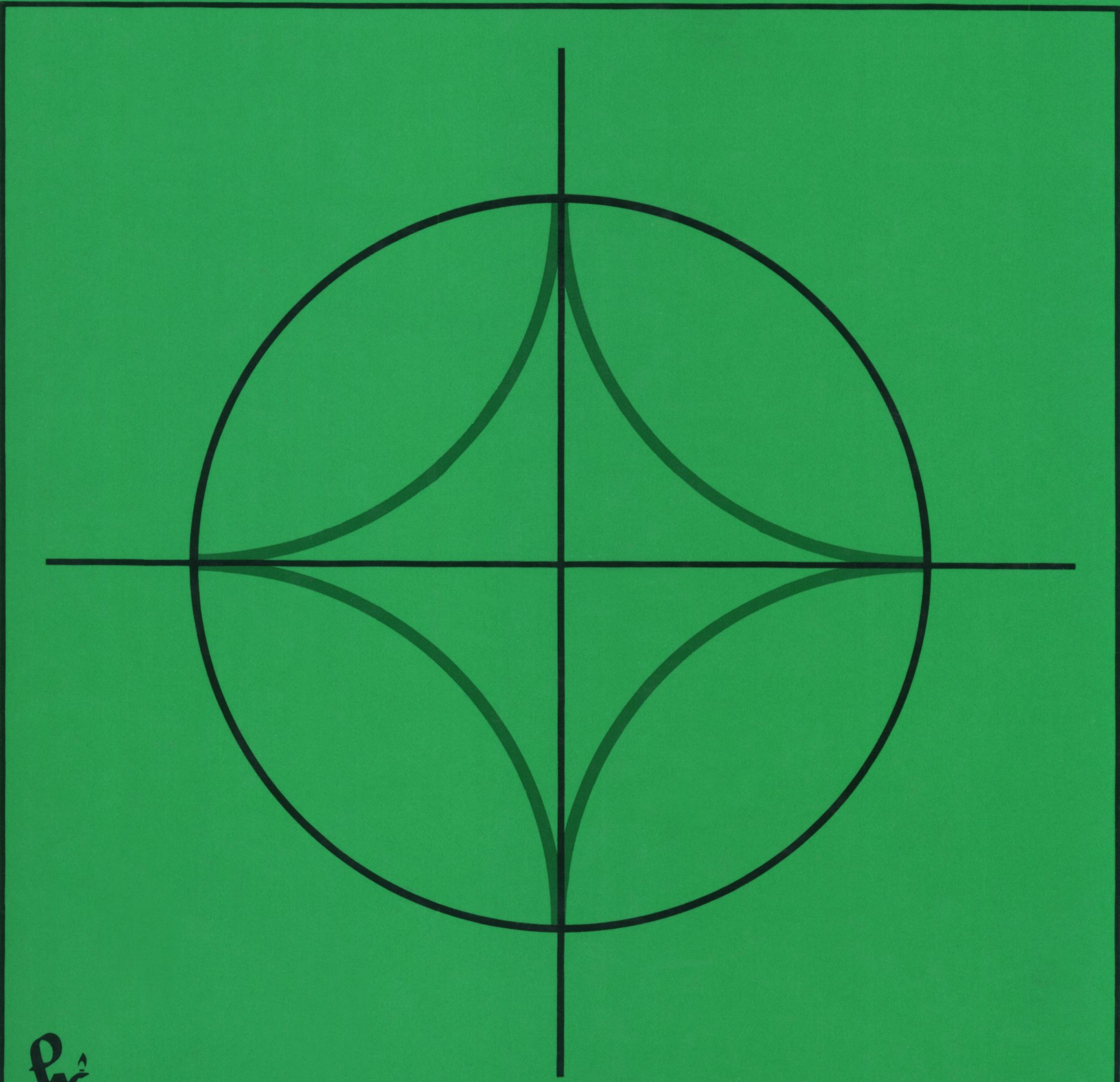
W. Stankiewicz

ZADANIA Z MATEMATYKI DLA WYŻSZYCH UCZELNI TECHNICZNYCH

część A



ISBN 83-01-00660-9
9 788301 006600

ZADANIA Z MATEMATYKI DLA WYŻSZYCH UCZELNI TECHNICZNYCH

część A

W. Stankiewicz

ZADANIA Z MATEMATYKI DLA WYŻSZYCH UCZELNI TECHNICZNYCH

część A

Wydanie jedenaste

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 2001

Okładkę projektowała *Romana Freudenreich*

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
ul. Miodowa 10, 00-251 Warszawa
Tel.: 69 54 321, e-mail: pwn@pwn.com.pl
www.pwn.com.pl

ISBN 83-01-00660-9

PRZEDMOWA DO PIĄTEGO WYDANIA

Piąte, zmienione wydanie Zadań z matematyki dla Wyższych Uczelni Technicznych, część pierwsza, różni się istotnie od wydań poprzednich. Uwzględniono w nim nowy program matematyki na studiach politechnicznych. W szczególności dodano paragrafy: uzupełnienie teorii zbiorów i logiki matematycznej — § 1, odwzorowania — § 4, grupy, ciała, pierścienie — § 5, przestrzenie metryczne, przestrzenie wektorowe — § 7, odwzorowania liniowe, formy kwadratowe — § 10, uwagi o mierze Lebesgue'a i całce Lebesgue'a — § 43 oraz zlikwidowano paragrafy: elementy logiki matematycznej — § 1, biegun i biegunowa elipsy, hiperboli i paraboli — § 16, przybliżone obliczanie całek oznaczonych — § 47. We wszystkich paragrafach dokonano zmian przede wszystkim w częściach teoretycznych, uwzględniając w nich nowy program, przy czym zmniejszono ilość rozdziałów i paragrafów oraz zmieniono ich kolejność. Układ książki pozostał niezmieniony, z wyjątkiem zmiany numeracji przykładów i zadań z ciągłej na numerację w obrębie paragrafu.

Chciałbym serdecznie podziękować moim Kolegom pani dr Z. Królikowskiej i panu mgr M. Gindiferowi za liczne i cenne uwagi, które ułatwiły mi trudne zadanie, jakim jest napisanie całkowicie zmienionego wydania obszernego zbioru zadań.

W. STANKIEWICZ

ROZDZIAŁ I

ELEMENTY TEORII ZBIORÓW I LOGIKI MATEMATYCZNEJ. LICZBY

§ 1. UZUPEŁNIENIA TEORII ZBIORÓW I LOGIKI MATEMATYCZNEJ

1.1. Rozszerzymy znane pojęcie sumy i iloczynu (przekroju) dwóch zbiorów na przypadek dowolnej skończonej lub nieskończonej ilości zbiorów. Niech T będzie dowolnym zbiorem wskaźników (indeksów). Załóżmy, że każdemu elementowi $t \in T$ przyporządkowany jest zbiór A_t.

Sumę i iloczyn wszystkich zbiorów A_t, $t \in T$ (mówimy też rodziny zbiorów i piszemy $(A_t)_{t \in T}$), które będziemy oznaczali $\bigcup_{t \in T} A_t$, $\bigcap_{t \in T} A_t$ określamy następująco:

(1) $$\bigcup_{t \in T} A_t := \{x: \bigvee_{t \in T} x \in A_t\} \quad (^1),$$

(2) $$\bigcap_{t \in T} A_t := \{x: \bigwedge_{t \in T} x \in A_t\},$$

lub w zapisie logicznym

(3) $$x \in \bigcup_{t \in T} A_t \Leftrightarrow \bigvee_{t \in T} x \in A_t,$$

(4) $$x \in \bigcap_{t \in T} A_t \Leftrightarrow \bigwedge_{t \in T} x \in A_t.$$

Jeżeli $A_t \neq \emptyset$, $t \in T$ i $A_t \cap A_k = \emptyset$ dla $t \neq k$ oraz $B = \bigcup_{t \in T} A_t$, wtedy rodzinę $(A_t)_{t \in T}$ wszystkich zbiorów A_t, nazywamy *podziałem zbioru B na klasy* (rozłączne) A_t, $t \in T$.

1.2. Iloczyn kartezjański. Niech będą dane dwa dowolne zbiory $A \neq \emptyset$ i $B \neq \emptyset$ oraz $a \in A$ i $b \in B$. *Parę uporządkowaną* elementów a i b (na pierwszym miejscu a, na drugim miejscu b) będziemy oznaczali (a, b).

Iloczyn kartezjański zbiorów A i B, który oznaczamy $A \times B$, określamy następująco:

(5) $$A \times B := \{(a, b): a \in A \wedge b \in B\}.$$

Podobnie

(6) $$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n): a_i \in A_i, \; i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

---

(1) Symbol $:=$ oznacza równość z definicji.

1.3. Relacje. Każdy podzbiór $\mathscr{R} \subset X \times X$ nazywamy *relacją* w zbiorze X. Ogólnie, jeżeli mamy dwa zbiory X i Y, to każdy podzbiór $\mathscr{R} \subset X \times Y$ nazywamy *relacją* w zbiorze $X \times Y$, przy czym zamiast $(x, y) \in \mathscr{R}$ będziemy również pisali $x\mathscr{R}y$. Przyjmujemy oznaczenie

$$P_X\mathscr{R} = \{x \in X \colon \bigvee_y (x, y) \in \mathscr{R}\}. \tag{7}$$

Wśród relacji w zbiorze X szczególnie ważne są relacje:

(8) *zwrotna*: $\bigwedge_{x \in X} (x, x) \in \mathscr{R}$,

(9) *symetryczna*: $\bigwedge_{x, y \in X} (x, y) \in \mathscr{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathscr{R}$,

(10) *przechodnia*: $\bigwedge_{x, y, z \in X} \big(((x, y) \in \mathscr{R} \wedge (y, z) \in \mathscr{R}) \Rightarrow (x, z) \in \mathscr{R}\big)$,

(11) *prawostronnie jednoznaczna*: $\bigwedge_{x, y, z \in X} \big(((x, y) \in \mathscr{R} \wedge (x, z) \in \mathscr{R}) \Rightarrow (y = z)\big)$,

(12) *lewostronnie jednoznaczna*: $\bigwedge_{x, y, z \in X} \big(((x, y) \in \mathscr{R} \wedge (z, y) \in \mathscr{R}) \Rightarrow (x = z)\big)$,

(13) *wzajemnie jednoznaczna*: *będąca obustronnie jednoznaczną*.

Relację $\mathscr{R}$ mającą własności (8), (9) i (10) nazywamy *relacją równoważności* w X i piszemy czasem $x \overset{\mathscr{R}}{\sim} y$, lub $x \sim y$, zamiast $(x, y) \in \mathscr{R}$.

$\mathbf{T}_1$. *Każda relacja równoważności* $\mathscr{R}$ *w* X *określa podział zbioru* X *na klasy* (*zbiory*) $A_x = \{y \in X \colon (x, y) \in \mathscr{R}\}$.

Klasy A_x, które oznaczamy także $[x]_{\mathscr{R}}$ nazywamy *klasami abstrakcji* relacji $\mathscr{R}$. Zbiór utworzony z klas abstrakcji A_x nazywamy *przestrzenią ilorazową* i oznaczamy $X|\mathscr{R}$ (tworzenie zbioru $X|\mathscr{R}$ nazywamy czasem *zasadą abstrakcji*).

Przestrzeń ilorazowa służy do definiowania nowych pojęć. Na przykład pojęcia: przystawanie trójkątów, wektor swobodny, liczby wymierne, liczby rzeczywiste można otrzymać, określając pewne relacje równoważności w pewnych zbiorach oraz korzystając z $\mathbf{T}_1$ (por. przykłady 2.4 i 3.5).

Przykłady

1.1. Niech dla każdego $n \in \mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ oznacza zbiór liczb naturalnych) $A_n = \left\{x \in \mathbf{R} \colon (-1)^n \leqslant \leqslant x \leqslant 1 + \frac{1}{n}\right\}$ ($\mathbf{R}$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych). Zapisać A_i, $i = 1, 2, 3, 4$ oraz znaleźć zbiory:

$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \mathbf{R} - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Rozwiązanie. Korzystamy m. in. z punktu 1.1, gdzie $T = \mathbf{N}$:

$$A_1 = \{x \in \mathbf{R} : -1 \leqslant x \leqslant 2\} = \langle -1, 2 \rangle, \quad A_2 = \{x \in \mathbf{R} : 1 \leqslant x \leqslant 1 + \tfrac{1}{2}\} = \langle 1, \tfrac{3}{2} \rangle,$$

$$A_3 = \langle -1, \tfrac{4}{3} \rangle, \quad A_4 = \langle 1, \tfrac{5}{4} \rangle, \ldots,$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\left\{x:\ x\in \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\langle(-1)^n, 1+\frac{1}{n}\right\rangle\right\}=\langle -1,2\rangle,$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\left\{x:\ x\in \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\langle(-1)^n, 1+\frac{1}{n}\right\rangle\right\}=\{1\},$$

$$\mathbf{R}-\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=(-\infty,+\infty)-\{1\}=\{x\in\mathbf{R}:\ x\neq 1\}.$$

1.2. Wykazać, że:

a) $A-\bigcap_{t\in T} A_t=\bigcup_{t\in T}(A-A_t)$, A, A_t, $t\in T$, są dowolnymi zbiorami (*prawo De Morgana*);

b) jeżeli $B_n=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$ dla $n=1, 2, \ldots$, to $B_n\subset B_{n+1}$ oraz

(b)
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n;$$

c) jeżeli $B_1=A_1$ i $B_n=A_n-(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{n-1})$ dla $n=2,3,\ldots$, to $B_n\cap B_m=\emptyset$ dla $n\neq m$ i

(c)
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\bigcup_{i=1}^{n} B_i \quad \text{dla} \quad n=1,2,\ldots$$

oraz

(c_1)
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Rozwiązanie. a) Z punktu 1.1 mamy

$$x\in(A-\bigcap_{t\in T}A_t)\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin\bigcap_{t\in T}A_t)\Leftrightarrow(x\in A\wedge\sim(x\in\bigcap_{t\in T}A_t))\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x\in A\wedge\sim(\bigwedge_{t\in T}x\in A_t))\Leftrightarrow(x\in A\wedge\bigvee_{t_0\in T}x\notin A_{t_0})\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\bigvee_{t\in T}x\in(A-A_t)\Leftrightarrow x\in\bigcup_{t\in T}(A-A_t).\quad\Box\quad (^1)$$

b) Z definicji zbioru B_n mamy $B_{n+1}=B_n\cup A_{n+1}\Rightarrow B_{n+1}\supset B_n$. Z kolei $A_n\subset B_n$ dla $n=1,2,\ldots$, zatem $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ (por. zad. 1.10f). Ponieważ $B_m\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m$ dla $m=1,2,\ldots$, więc $\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ (por. zad. 1.10g). Stąd na mocy definicji równości zbiorów $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$, tzn. (b).

c) Dla $m<n$ mamy

$$(A_m-(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{m-1}))\cap(A_n-(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{n-1}))=\emptyset,$$

ponieważ $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{n-1}\supset A_m$, a więc $B_m\cap B_n=\emptyset$ dla $m\neq n$. Niech $C_n=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$. Ponieważ $B_i\subset A_i$, więc $B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n\subset C_n$. Na odwrót, jeżeli

(1) Zamiast „co kończy dowód" lub „c.n.d.", lub „cnd" będziemy zaznaczali „$\Box$".

$a \in C_n$, to $a \in A_i$ dla pewnego $i \leqslant n$. Niech i_0 będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że $a \in A_{i_0}$. Jeżeli $i_0 = 1$, to $a \in B_1 = A_1$. Jeżeli $i_0 > 1$, to $a \in A_{i_0} - (A_1 \cup \ldots \cup A_{i_0 - 1}) = B_{i_0}$. Zatem $C_n \subset B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$, a więc $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.

W celu udowodnienia wzoru (c_1) korzystamy dwukrotnie z (b); mianowicie $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, ponieważ $C_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$.

1.3. Udowodnić wzory:

(a) $$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D),$$

(b) $$A \times \bigcup_{t \in T} A_t = \bigcup_{t \in T} (A \times A_t).$$

Rozwiązanie. Wzór (a):

$$(x, y) \in ((A \times B) \cap (C \times D)) \Leftrightarrow ((x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in C \times D) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in C \wedge y \in D)) \Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \in C) \wedge (y \in B \wedge y \in D)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \in (A \cap C) \wedge y \in (B \cap D)) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D),$$

a więc

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D). \quad \square$$

Wzór (b):

$$(x, y) \in A \times \bigcup_{t \in T} A_t \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in \bigcup_{t \in T} A_t) \Leftrightarrow (x \in A \wedge \bigvee_{t \in T} y \in A_t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bigvee_{t \in T} (x \in A \wedge y \in A_t) \Leftrightarrow (x, y) \in \bigcup_{t \in T} (A \times A_t). \quad \square$$

Uwaga. W dowodzie korzystaliśmy z prawa włączania i wyłączania dla kwantyfikatorów:

$$\varphi \wedge (\bigvee_{x \in X} \psi(x)) \Leftrightarrow \bigvee_{x \in X} (\varphi \wedge \psi(x)),$$

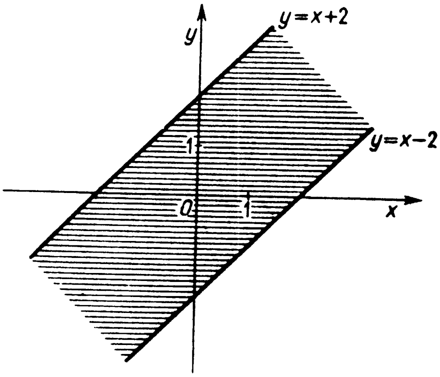
gdzie φ jest zdaniem lub formułą zdaniową, w której nie występuje zmienna wolna x.

1.4. Wykreślić w $\mathbf{R}^2$ relacje:
a) $\mathscr{R}_1 = \{(x, y): |x-y| \leqslant 2\}$; b) $\mathscr{R}_2 = \{(x, y): 1 < x^2 + y^2 \leqslant 4\}$;
c) $\mathscr{R}_3 = \{(x, y): y \geqslant x\}$; d) $\mathscr{R}_4 = \{(x, y): x + y = 4\}$ oraz zbadać, które z nich są: zwrotne, symetryczne, przechodnie.

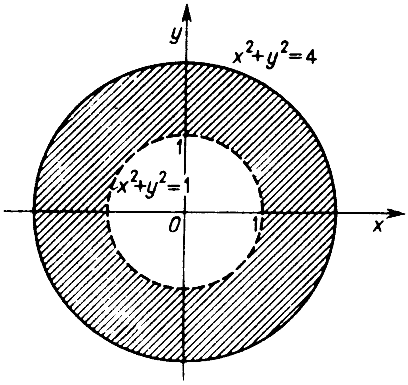
Rozwiązanie. a) W celu narysowania relacji $\mathscr{R}_1$ zauważmy, że $|x-y| \leqslant 2 \Rightarrow (x-2 \leqslant y \leqslant x+2)$ (rys. 1.1). Relacja $\mathscr{R}_1$ jest zwrotna, ponieważ $\bigwedge_{x \in \mathbf{R}} |x-x| = 0 \leqslant 2$, jest symetryczna, ponieważ $\bigwedge_{x,y \in \mathbf{R}} |x-y| = |y-x|$, natomiast nie jest przechodnia, gdyż

$$\sim ((|x-y| \leqslant 2 \wedge |y-z| \leqslant 2) \Rightarrow |x-z| \leqslant 2).$$

Istotnie np. $|3-2| \leqslant 2 \wedge |2-\frac{3}{4}| \leqslant 2$, ale $|3-\frac{3}{4}| > 2$.



Rys. 1.1



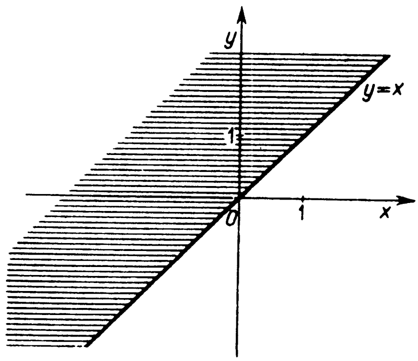
Rys. 1.2

b) Wykres (rys. 1.2); $\mathscr{R}_2$ nie jest zwrotna, gdyż np. dla $x=3$ jest $\sim(1<9+9\leqslant 4)$. $\mathscr{R}_2$ jest symetryczna, ponieważ $\bigwedge\limits_{x,y\in\mathbf{R}} (x^2+y^2=y^2+x^2)$. $\mathscr{R}_2$ nie jest przechodnia, gdyż np. dla $x_0=0{,}1$, $y_0=1{,}9$, $z_0=0{,}1$ mamy

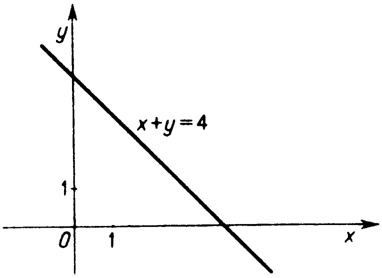
$$(x_0, y_0)\in\mathscr{R}_2 \wedge (y_0, z_0)\in\mathscr{R}_2$$

ale $(x_0, z_0)\notin\mathscr{R}_2$ $(1>(0{,}1)^2+(0{,}1)^2)$.

c) Wykres (rys. 1.3); $\mathscr{R}_3$ jest zwrotna, gdyż $\bigwedge\limits_{x\in\mathbf{R}} x\geqslant x$, jest przechodnia, ponieważ zachodzi implikacja $(x\leqslant y)\wedge(y\leqslant z)\Rightarrow(x\leqslant z)$, natomiast nie jest symetryczna, ponieważ jeżeli $x\leqslant y$, to $y\leqslant x$ tylko dla $y=x$.



Rys. 1.3



Rys. 1.4

d) Wykres (rys. 1.4); $\mathscr{R}_4$ nie jest zwrotna, ponieważ tylko dla $x=2$ mamy $x+x=4$, jest symetryczna, gdyż jeżeli $x+y=4$, to $y+x=4$, nie jest przechodnia, ponieważ np. $(1+3=4)\wedge(3+1)=4$, ale $1+1=2\neq 4$.

1.5. Sprawdzić, czy relacja $\mathcal{R}=\{(a, b)\colon a-b=5p,\ a,\ b,\ p\in\mathbf{C}\}$ w zbiorze liezb całkowitych $\mathbf{C}$ jest równoważnością.

Rozwiązanie. Ponieważ $\bigwedge_{a\in\mathbf{C}}(a-a=5\cdot 0)$, więc $\mathcal{R}$ jest zwrotna; z kolei, jeżeli $a-b=5p$, $p\in\mathbf{C}$, to $b-a=5(-p)\wedge(-p)\in\mathbf{C}$, zatem $\mathcal{R}$ jest symetryczna. Relacja $\mathcal{R}$ jest przechodnia, gdyż

$$\bigwedge_{a,b,c,p,q\in\mathbf{C}}\big((a-b=5p\wedge b-c=5q)\Rightarrow a-c=(a-b)+(b-c)=5(p+q)\big).$$

A więc $\mathcal{R}$ jest równoważnością w $\mathbf{C}$.

Uwaga. $\mathcal{R}$ jest znaną w teorii liczb relacją: równość modulo 5.

Zadania

1.6. Niech dla każdego $n\in\mathbf{N}$, $A_n=\left\{x\in\mathbf{R}:\ \frac{1}{n}\leqslant x\leqslant\frac{3}{n}\right\}$. Znaleźć zbiory: a) A_i, $i=1, 2, 3, 4, 5$; b) $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$; c) $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$; d) $(\mathbf{R}-\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)\cap(\mathbf{R}-\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)$.

1.7. Wykazać, że:

a) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\langle 1+\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right\rangle=(1, 3\rangle$; b) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\langle 3-\frac{4}{n}, 4+\frac{2}{n}\right\rangle=\langle -1, 6\rangle$;

c) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(n, +\infty)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\langle n, +\infty)=\varnothing$; d) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\langle 3-\frac{3}{n}, 5+\frac{1}{n}\right\rangle=\langle 3, 5\rangle$;

e) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}-2, 3+\frac{1}{n}\right)=\langle -2, 3\rangle$; f) $\bigcap_{t\in\mathbf{R}}A_t=\{0\}$, gdzie $A_t=\{x\in\mathbf{R}:\ |x|\leqslant t^2\}$.

1.8. Niech dla każdego $t\in\mathbf{R}$, $A_t=\{x\in\mathbf{R}\colon x=\cos t\}$. Znaleźć: a) $\bigcup_{t\in\mathbf{R}}A_t$; b) $\bigcap_{t\in\mathbf{R}}A_t$.

1.9. Niech dla każdego $t\in\mathbf{R}-\{0\}$, $A_t=\{x\in\mathbf{R}\colon xt\leqslant 2\}$. Znaleźć:

a) $\bigcup_{t\in\mathbf{R}-\{0\}}A_t$; b) $\bigcap_{t\in\mathbf{R}-\{0\}}A_t$.

1.10. Udowodnić, że:

a) $A\cap\bigcup_{t\in T}A_t=\bigcup_{t\in T}(A\cap A_t)$; b) $A\cup\bigcap_{t\in T}A_t=\bigcap_{t\in T}(A\cup A_t)$;

c) $A\cap\bigcap_{t\in T}A_t=\bigcap_{t\in T}(A\cap A_t)$; d) $A-\bigcup_{t\in T}A_t=\bigcap_{t\in T}(A-A_t)$;

e) jeżeli $A_t\subset A$ dla każdego $t\in T$, to $\bigcup_{t\in T}A_t=A-\bigcap_{t\in T}(A-A_t)$, $\bigcap_{t\in T}A_t=A-\bigcup_{t\in T}(A-A_t)$;

f) $\left(\bigwedge_{t\in T}(A_t\subset B_t)\right) \Rightarrow \left(\left(\bigcup_{t\in T} A_t\subset \bigcup_{t\in T} B_t\right)\wedge\left(\bigcap_{t\in T} A_t\subset \bigcap_{t\in T} B_t\right)\right)$;

g) $\bigwedge_{t\in T} A_t\subset B \Rightarrow \bigcup_{t\in T} A_t\subset B$;

h) jeżeli $A_n\subset A_{n+1}$ dla $n=1,2,\ldots$ oraz $B_1=A_1$, $B_n=A_n-A_{n-1}$ dla $n=2,3,\ldots$, to zbiory B_n są rozłączne oraz

$$A_n=B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n$$

dla $n=1,2,\ldots$ i

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Uwaga. Tożsamości w d) i e) noszą nazwę praw De Morgana.

1.11. Niech $\bigwedge_{n\in\mathbf{N}}\left((A_n\supset A_{n+1})\wedge(B_n\supset B_{n+1})\right)$. Wykazać, że

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n\cup B_n)=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\cup\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

1.12. Niech $\bigwedge_{n\in\mathbf{N}}\left((A_n\subset A_{n+1})\wedge(B_n\subset B_{n+1})\right)$. Wykazać, że

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\cap\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Uwaga. Ciągi zbiorów $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ i $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ występujące w zadaniu 1.11 [w zadaniu 1.12] [1] nazywamy *ciągami zstępującymi* [*wstępującymi*] zbiorów.

1.13. Niech dla każdego $t\in(0,1)$, $A_t=\{x\in\mathbf{R}:\ 0<x<t\}$. Znaleźć:
a) $\bigcup_{t\in(0,1)} A_t$; b) $\bigcap_{t\in(0,1)} A_t$.

1.14. Niech dla każdego $n\in\mathbf{N}$, $A_n=\{x\in\mathbf{R}:\ n-1<|x|\leqslant n\}$. Wykazać, że rodzina $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ jest podziałem zbioru $\mathbf{R}-\{0\}$ na klasy A_n, $n\in\mathbf{N}$.

1.15. Niech dla każdego $n\in\mathbf{N}$, $A_n=\{(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}:\ (n-1)^2<x^2+y^2\leqslant n^2\}$. Wykazać, że rodzina $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ jest podziałem zbioru $\mathbf{R}\times\mathbf{R}-\{(0,0)\}$ na klasy A_n.

1.16. Udowodnić T_1.

1.17. Wykazać, że jeżeli $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, $Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_m\}$, to iloczyny $X\times Y$, $Y\times X$ są zbiorami utworzonymi z $n\cdot m$ elementów.

1.18. Podać interpretacje geometryczne zbiorów:
a) $A\times B$, jeżeli $A=\mathbf{N}\wedge B=\mathbf{C}$;
b) $\mathbf{W}\times\mathbf{W}$, $\mathbf{W}$ oznacza zbiór liczb wymiernych;
c) $X^3=X\times X\times X$, gdzie $X=\{x:\ 0\leqslant x<1\}$;
d) $A\times B$, gdzie $A=\{x:\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$, $B=\mathbf{R}$;

---

[1] Alternatywne pojęcia w nawiasach [...] będą objaśniane również w nawiasach tego samego typu (zawsze w celu skrócenia zapisu).

e) $A\times B$, gdzie $A=\{z\in\mathbf{R}:\ 0\leqslant z\leqslant 4\}$, $B=\{(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}:\ x^2+4y^2=4\}$;
f) $A\times B$, gdzie $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}:\ x^2+y^2=a^2,\ a\in\mathbf{R}\}$, $B=\mathbf{R}$;
g) $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty}[\langle 2k,2k+1\rangle\times\langle 2n,2n+1\rangle]\cup\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty}[\langle 2k+1,2k+2\rangle\times$
$\times\langle 2n+1,2n+2\rangle]$.

1.19. Które z następujących wzorów są prawdziwe, a które fałszywe? W przypadku fałszywości wzoru podać kontrprzykład:
a) $A\times B=\emptyset\Leftrightarrow(A=\emptyset\vee B=\emptyset)$; b) $A\times(B\cup C)=A\times B\cup A\times C$;
c) $A\times B=B\times A$; d) $(A\subset C\wedge B\subset D)\Rightarrow(A\times B\subset C\times D)$;
e) $(A\times B)\cap(B\times C)=A\times C$; f) $A\times(B-C)=A\times B-A\times C$;
g) $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$.

1.20. Udowodnić wzory:
a) $(A\cap B)\times C=A\times C\cap B\times C$; b) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$;
c) $A\times\bigcap\limits_{t\in T}A_t=\bigcap\limits_{t\in T}(A\times A_t)$; d) $(\bigcup\limits_{t\in T}A_t)\times A=\bigcup\limits_{t\in T}(A_t\times A)$.

1.21. Niech $X_i=\mathbf{R}$, $i=1,2,\ldots,k$, $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{k}X_i=X_1\times X_2\times\ldots\times X_k=\mathbf{R}^k$, $x(x_1,x_2,\ldots,x_k)$, $y(y_1,y_2,\ldots,y_k)\in\mathbf{R}^k$, $\alpha\in\mathbf{R}$.

Określimy następujące działania na elementach zbioru $\mathbf{R}^k$: dodawanie elementów: $x\oplus y:=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_k+y_k)$, mnożenie elementów $\mathbf{R}^k$ przez liczby rzeczywiste: $\alpha\odot x:=x\odot\alpha=(\alpha x_1,\alpha x_2,\ldots,\alpha x_k)$, odejmowanie elementów: $x\ominus y:=x\oplus(-1)\odot y$, mnożenie skalarne (iloczyn skalarny) elementów: $x\bullet y=\sum\limits_{i=1}^{k}x_iy_i$.

Zauważmy, że zawsze $(x\oplus y)\in\mathbf{R}^k$, $(x\ominus y)\in\mathbf{R}^k$, $\alpha\odot x\in\mathbf{R}^k$, $x\bullet y\in\mathbf{R}$. Korzystając z podanych definicji, udowodnić prawa działań „$\oplus$”, „$\odot$”, „$\bullet$”:

1° $\bigwedge\limits_{x,y\in\mathbf{R}^k}(x\oplus y=y\oplus x)$ – *przemienność*,

2° $\bigwedge\limits_{x,y,z\in\mathbf{R}^k}[x\oplus(y\oplus z)=(x\oplus y)\oplus z]$ – *łączność*,

3° $\bigvee\limits_{e\in\mathbf{R}^k}\bigwedge\limits_{x\in\mathbf{R}^k}(e\oplus x=x\oplus e=x)$; $e(0,0,\ldots,0)$ nazywamy *jednością działania* $\oplus$, lub *elementem neutralnym*,

4° $\bigwedge\limits_{x\in\mathbf{R}^k}\bigvee\limits_{g\in\mathbf{R}^k}(x\oplus g=g\oplus x=e)$; ($e$ – element z 3°), $g(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)$ nazywamy *elementem odwrotnym elementu* $x(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *działania* $\oplus$,

5° $\bigwedge\limits_{x,y\in\mathbf{R}^k}\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathbf{R}}(\alpha\odot(x\oplus y)=\alpha\odot x\oplus\alpha\odot y)$ – *rozdzielność*,

6° $\bigwedge\limits_{x\in\mathbf{R}^k}\bigwedge\limits_{\alpha,\beta\in\mathbf{R}}((\alpha+\beta)\odot x=\alpha\odot x\oplus\beta\odot x)$ – *rozdzielność*,

7° $\bigwedge\limits_{\alpha,\beta\in\mathbf{R}}\bigwedge\limits_{x\in\mathbf{R}^k}(\alpha\odot(\beta\odot x))=(\alpha\beta)\odot x$ – *łączność*,

8° $\bigwedge\limits_{x\in\mathbf{R}^k}((1\odot x)=x,\ (1\in\mathbf{R}))$, 9° $\bigwedge_{x,y\in \mathbf{R}^k} (x \bullet y = y \bullet x)$ — *przemienność*,

10° $\bigwedge_{x,y,z\in \mathbf{R}^k} (x \bullet (y \oplus z) = x \bullet y \oplus x \bullet z)$,

11° $\bigwedge_{x,y\in \mathbf{R}^k} \bigwedge_{\alpha\in \mathbf{R}} ((\alpha \odot x) \bullet y = \alpha(x \bullet y))$.

1.22. Czy prawdziwy jest wzór $x \odot (y \bullet z) = (x \bullet y) \odot z$? Jeżeli nie, to podać kontrprzykład.

1.23. Pokazać, że iloczyn skalarny dwóch elementów, z których każdy jest różny od o może być zerem ($o(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^k$).

1.24. Wykazać, że $\bigwedge_{x,y\in \mathbf{R}^k} ((x \oplus y) \bullet (x \oplus y) = (x \oplus y)^2 = x^2 \oplus 2x \bullet y \oplus y^2)$ oraz dla $k > 1$ na ogół $(x \oplus y)^3 \neq x^3 \oplus 3x^2 \odot y \oplus 3y^2 \odot x \oplus y^3$.

Uwaga. $\underbrace{x \bullet x \bullet \ldots \bullet x}_{n \text{ razy}} := x^n$.

1.25. Niech X, $Y \subset \mathbf{R}$ oraz niech będzie dana relacja $\mathcal{R} \subset X \times Y$. Wykazać, że wykres relacji odwrotnej $\mathcal{R}^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X \colon (x, y) \in \mathcal{R}\}$ jest zbiorem na płaszczyźnie Oxy symetrycznym do wykresu relacji $\mathcal{R}$ względem prostej $y = x$.

1.26. Narysować wykresy relacji w $\mathbf{R}$:
a) $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \colon |x| > y\}$; b) $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \colon x^2 - y^2 = 1\}$;
c) $\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \colon 1 < (x-1)^2 + y^2 \leqslant 4\}$; d) $\mathcal{R}_4 = \{(x, y) \colon x = y^3\}$;
e) $\mathcal{R}_5 = \{(x, y) \colon |\sin x| < y \leqslant |\operatorname{tg} x| \wedge |x| < \frac{1}{2}\pi\}$.

1.27. Niech $X = Y = \mathbf{N}$ oraz niech $\mathcal{R}$ oznacza relację podzielności x przez y, tzn. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \colon x = ky,\ k \in \mathbf{N}\}$. Narysować wykres relacji $\mathcal{R}$.

1.28. Niech $X \subset \mathbf{R}$. Narysować wykres relacji:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \colon [x] < y < 1 + [x]\}$$

w zbiorze $X = \langle 0, 8\rangle$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą x, tzn.

$$[x] := \text{część całkowita liczby } x \text{ spełniająca nierówność: } x - 1 < [x] \leqslant x.$$

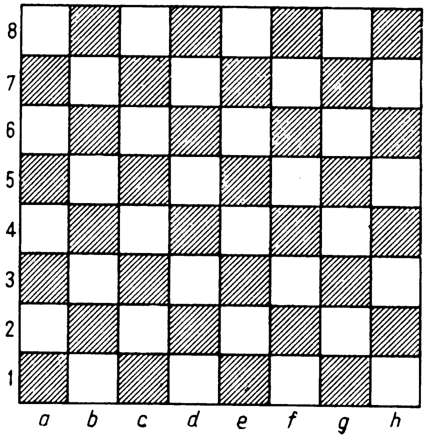
1.29. Niech $\mathcal{R} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Podać interpretację geometryczną relacji:
a) zwrotnej; b) symetrycznej; c) lewostronnie jednoznacznej; d) prawostronnie jednoznacznej; e) obustronnie jednoznacznej.

1.30. Wykreślić relacje $\mathcal{R}_i \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, 10$:
a) $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \colon 2 \leqslant |x - y| \leqslant 5\}$; b) $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \colon x^2 + (y-2)^2 > 4\}$;
c) $\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \colon y = x^2\}$; d) $\mathcal{R}_4 = \{(x, y) \colon y = \operatorname{tg} x\}$;
e) $\mathcal{R}_5 = \{(x, y) \colon (y - x)^2 \geqslant 9\}$; f) $\mathcal{R}_6 = \{(x, y) \colon x^2 < y < \sqrt{|x|}\}$;
g) $\mathcal{R}_7 = \{(x, y) \colon |x - y| = w,\ w \in \mathbf{W}\}$; h) $\mathcal{R}_8 = \{(x, y) \colon \sqrt[3]{x} < y < x^3\}$;
i) $\mathcal{R}_9 = \{(x, y) \colon \bigvee_{n\in \mathbf{N}} y = nx\}$; j) $\mathcal{R}_{10} = \{(x, y) \colon |x - y| = 2\}$

oraz zbadać, które z nich są symetryczne, zwrotne, przechodnie.

1.31. Która z relacji podanych w zadaniu 1.26 jest:
a) zwrotna; b) symetryczna; c) lewostronnie jednoznaczna; d) prawostronnie jednoznaczna; e) obustronnie jednoznaczna?

1.32. Dana jest szachownica (rys. 1.5). Podać relacje określające: a) pole G5; b) kolumnę C1-C8; c) przekątną A1-H8; d) białe pola szachownicy. W każdym z punktów a)-d) korzystać z symbolu $[x]$ (por. zad. 1.28).



Rys. 1.5

1.33. Dany jest zbiór $A=\{1,3\}$. Ile można utworzyć relacji w tym zbiorze: a) różnych, b) zwrotnych, c) symetrycznych, d) prawostronnie jednoznacznych, e) obustronnie jednoznacznych, f) przechodnich?

1.34. Dany jest zbiór $A=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. a) Ile można utworzyć różnych relacji w tym zbiorze; b) ile relacji zwrotnych?

1.35. Udowodnić, że superpozycja (złożenie) relacji przechodnich jest relacją przechodnią.

Uwaga. *Superpozycją* (*złożeniem*) *relacji* $\mathscr{R}\subset X\times Y$ i $\mathscr{S}\subset Y\times Z$, którą oznaczamy $\mathscr{S}\circ\mathscr{R}$ nazywamy taki podzbiór zbioru $X\times Z$, że

$$\mathscr{S}\circ\mathscr{R}=\{(x,z)\in X\times Z:\ \bigvee_{y\in Y}(x,y)\in\mathscr{R}\wedge(y,z)\in\mathscr{S}\}.$$

1.36. Które z następujących relacji są równoważnościami:
a) $\mathscr{R}_1=\{(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}:\ x<y\}$; b) $\mathscr{R}_2=\{(x,y)\in\mathbf{C}\times\mathbf{C}:\ x-y=2k,\ k\in\mathbf{C}\}$;
c) $\mathscr{R}_3=\{(a,b)\in\mathbf{C}\times\mathbf{C}:\ a-b=pm,\ p,m\in\mathbf{C}\wedge(m$ — stała$)\}$;
d) relacja równoległości prostych na płaszczyźnie w zbiorze prostych na płaszczyźnie;
e) relacja podobieństwa trójkątów; f) relacja przystawania trójkątów?

1.37. Czy relacja $\mathscr{R}=\{(n,m)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}:\ n$ i m mają tę samą ilość dzielników$\}$ jest relacją równoważności?

1.38. Zbadać, czy relacja $\mathscr{R}=\{(w,v)\in\mathbf{W}\times\mathbf{W}:\ v=k^c w\}$, gdzie stałe $k\in\mathbf{W}$, $c\in\mathbf{C}$, jest równoważnością. Zbadać $\mathscr{R}$ przy założeniu, że $c\in\mathbf{N}$.

1.39. Zbadać, czy relacja

$$\mathscr{R}=\{(w,u)\in\mathbf{W}\times\mathbf{W}:\ \bigvee_{w_1\in\mathbf{W}}\ \bigvee_{n_1,n_2\in\mathbf{N}}(w=w_1^{n_1}\wedge u=w_1^{n_2})\}$$

jest równoważnością?

1.40. Przeanalizować pojęcia: barwa, temperatura, masa, długość, wiek, wysokość itp. Zauważyć, że przy określaniu ich można korzystać z zasady abstrakcji.

1.41. Niech $A=\{l_1, l_2, \ldots, l_m\}$ będzie zbiorem ludzi pewnego miasta oraz niech w_{l_i} oznacza wysokość w metrach człowieka $l_i \in A$. Czy relacja

$$\mathcal{R}=\{(l,k)\in A\times A:\ \bigvee_{n\in\mathbf{N}}[(n-\tfrac{1}{2}<w_l<n+\tfrac{1}{2})\wedge(n-\tfrac{1}{2}<w_k<n+\tfrac{1}{2})]\}$$

jest równoważnością?

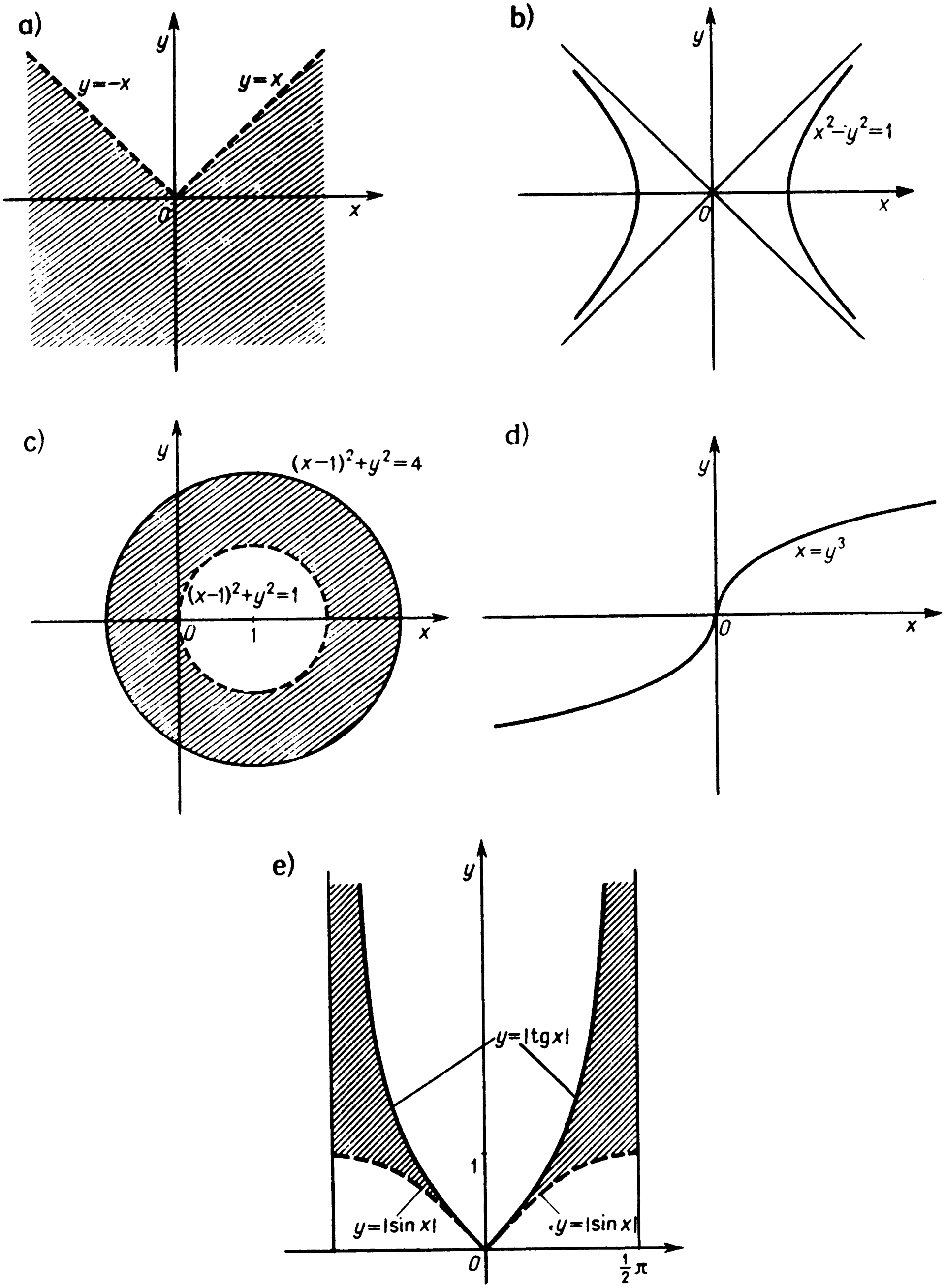
1.42. Niech $M=\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ będzie zbiorem mężczyzn. Czy relacja

$$\mathcal{R}=\{(m,l)\in M\times M:\ (m \textit{ jest bratem } l)\}$$

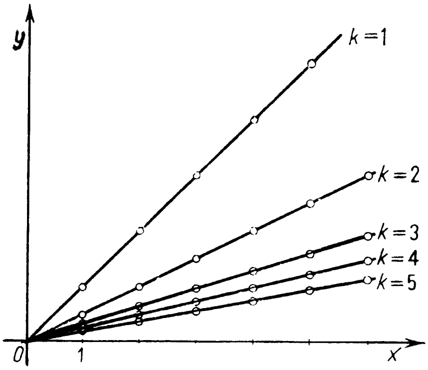
jest równoważnością? Jeżeli nie jest równoważnością, to jak zmodyfikować $\mathcal{R}$, aby stała się równoważnością.

Odpowiedzi

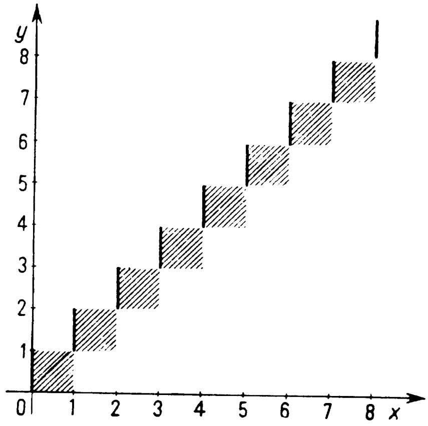
1.6. a) $\langle 1,3\rangle$, $\langle\frac{1}{2},\frac{3}{2}\rangle$, $\langle\frac{1}{3},1\rangle$, $\langle\frac{1}{4},\frac{3}{4}\rangle$, $\langle\frac{1}{5},\frac{3}{5}\rangle$; b) $(0,3\rangle$; c) $\varnothing$; d) $(-\infty,0\rangle\cup(3,+\infty)$.
1.8. a) $\langle -1,1\rangle$; b) $\varnothing$. **1.9.** a) $\mathbf{R}$; b) $\varnothing$.
1.10. Wsk. do h). Skorzystać z przykładu 1.2c. **1.13.** a) $(0,1)$; b) $\varnothing$.
1.18. a) Punkty przecięcia prostych: $x=n$, $n\in\mathbf{N}\wedge y=a$, $a\in\mathbf{C}$ na płaszczyźnie $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$;
b) wszystkie punkty płaszczyzny $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\mathbf{R}^2$ o współrzędnych wymiernych;
c) sześcian w przestrzeni $\mathbf{R}^3$ o długości krawędzi 1 po odrzuceniu ścian wychodzących z wierzchołka $A_1(1, 1, 1)$;
d) część płaszczyzny Oxy ograniczona prostymi $x=0\wedge x=1$ łącznie z tymi prostymi;
e) walec eliptyczny o długości wysokości równej 4;
f) walec kołowy nieskończony o promieniu przekroju $|a|$;
g) szachownica o nieskończenie wielu polach; w przypadku $n, k\in\{0, 1, 2, 3\}$ – szachownica zwykła.
1.19. a), b), d), f) i g) prawdziwy, c) fałszywy, np. $A=\langle 0,2\rangle$, $B=\langle 1,2\rangle$; e) fałszywy, np. $A=\{a\}$, $B=\{b\}$, $C=\{c\}$.
1.22. Nie, np. $x=(1,2)$, $y=(1,-1)$, $z=(2,1)\in\mathbf{R}^2$.
1.23. Np. $(-1,1,1)\bullet(1,-2,3)=0$.
1.26. a) Rys. 1.6a; b) rys. 1.6b; c) rys. 1.6c; d) rys. 1.6d; e) rys. 1.6e.
1.27. Rys. 1.7. **1.28.** Rys. 1.8.
1.29. a) Prosta $y=x$ należy do wykresu relacji; b) wykres jest symetryczny względem prostej $y=x$; c) do wykresu należy co najwyżej jeden punkt położony na prostych poziomych; d) do wykresu należy co najwyżej jeden punkt położony na prostych pionowych; e) każda prosta pozioma i każda prosta pionowa ma z wykresem co najwyżej jeden punkt wspólny.
1.30. a) Rys. 1.9a, symetryczna, nie zwrotna, nie przechodnia; b) rys. 1.9b, nie zwrotna, nie symetryczna, nie przechodnia; c) rys. 1.9c, nie zwrotna, nie symetryczna, nie przechodnia; d) rys. 1.9d, nie zwrotna, nie symetryczna, nie przechodnia; e) rys. 1.9e, nie zwrotna, symetryczna, nie przechodnia; f) rys. 1.9f, nie zwrotna, nie symetryczna, nie przechodnia; g) wykresem jest płaszczyzna Oxy po odrzuceniu zbioru punktów


a)
y
y=−x
y=x
0
x
b)
y
x²−y²=1
0
x
c)
y
(x−1)²+y²=4
(x−1)²+y²=1
0
1
x
d)
y
x=y³
0
x
e)
y
y=|tg x|
1
y=|sin x|
y=|sin x|
0
½π

Rys. 1.6



Rys. 1.7



Rys. 1.8

prostych o równaniach $y=x+r$, gdzie r jest liczbą niewymierną, zwrotna, symetryczna, przechodnia; h) rys. 1.9g, nie zwrotna, symetryczna, nie przechodnia; i) rys. 1.9h, zwrotna, nie symetryczna, przechodnia; j) rys. 1.9i, nie zwrotna, symetryczna, nie przechodnia.

1.31. a) Żadna; b) żadna; c) d); d) d); e) d).

1.32. a) $\mathscr{R}_1=\{(x, y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\colon ((6\leqslant x\leqslant 7)\wedge(10-[x]\leqslant y\leqslant 11-[x]))\vee((x=7)\wedge$

$\wedge(4\leqslant y\leqslant 5))\}=\{(x, y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\colon (6\leqslant x\leqslant 7)\wedge(4\leqslant y\leqslant 5)\}$;

b) $\mathscr{R}_2=\{(x, y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\colon ((2\leqslant x<3)\wedge([x]-2\leqslant y\leqslant 10-[x]))\vee((x=3)\wedge(0\leqslant y\leqslant 8))\}=$

$=\{(x, y)\in(\mathbf{R}\times\mathbf{R})\colon (2\leqslant x\leqslant 3)\wedge(0\leqslant y\leqslant 8)\}$;

c) $\mathscr{R}_3=\{(x, y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\colon ((0\leqslant x<8)\wedge([x]\leqslant y\leqslant [x]+1))\vee((x=i,\ i=1, 2, \ldots, 8)\wedge$

$\wedge(x-1\leqslant y<x))\}\cup\{(8, 8)\}$;

d) Np. $\mathscr{R}_4=\{(x, y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\colon (([x]+2(j-i)+1\leqslant y\leqslant [x]+2(j-i)+2)\wedge(2i-2<x<$
$<2i-1), i,j=1,2,3,4)\vee(([x]+2(j-i)-1\leqslant y\leqslant [x]+2(j-i))\wedge(2i-1<x<2i), i,j=1,2,3,4)\vee$
$\vee((x=0)\wedge(2i-1\leqslant y\leqslant 2i,\ i=1, 2, 3, 4))\vee((x=i,\ i=1, 2, \ldots, 7)\wedge(0\leqslant y\leqslant 8))\vee((x=8)\wedge$
$\wedge(2i-2\leqslant y\leqslant 2i-1,\ i=1, 2, 3, 4))\}$.

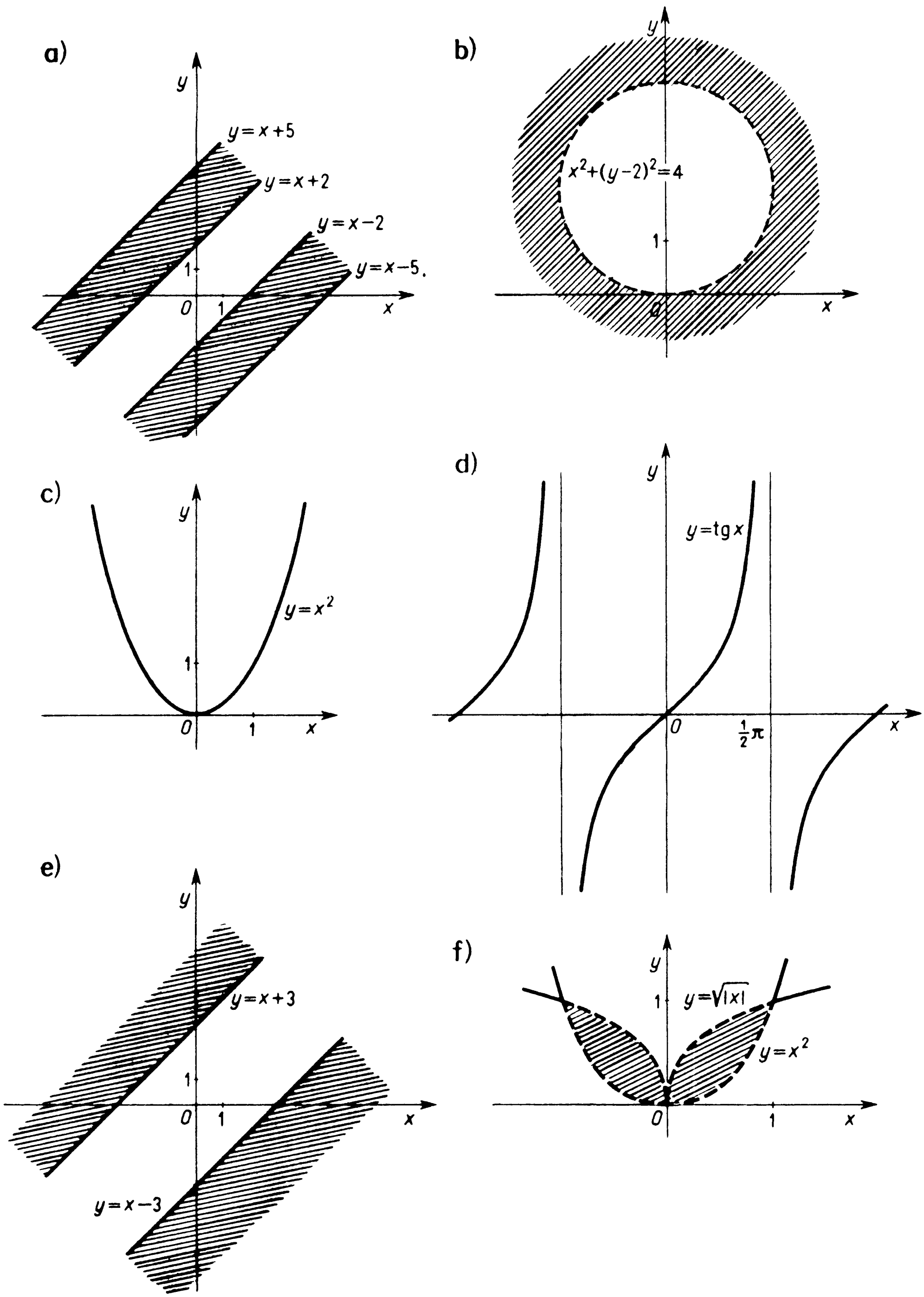
1.33. a) $2^4=16$; b) 4; c) 8; d) 10; e) 6; f) 13.

1.34. a) 2^{n^2}; b) 2^{n^2-n}.

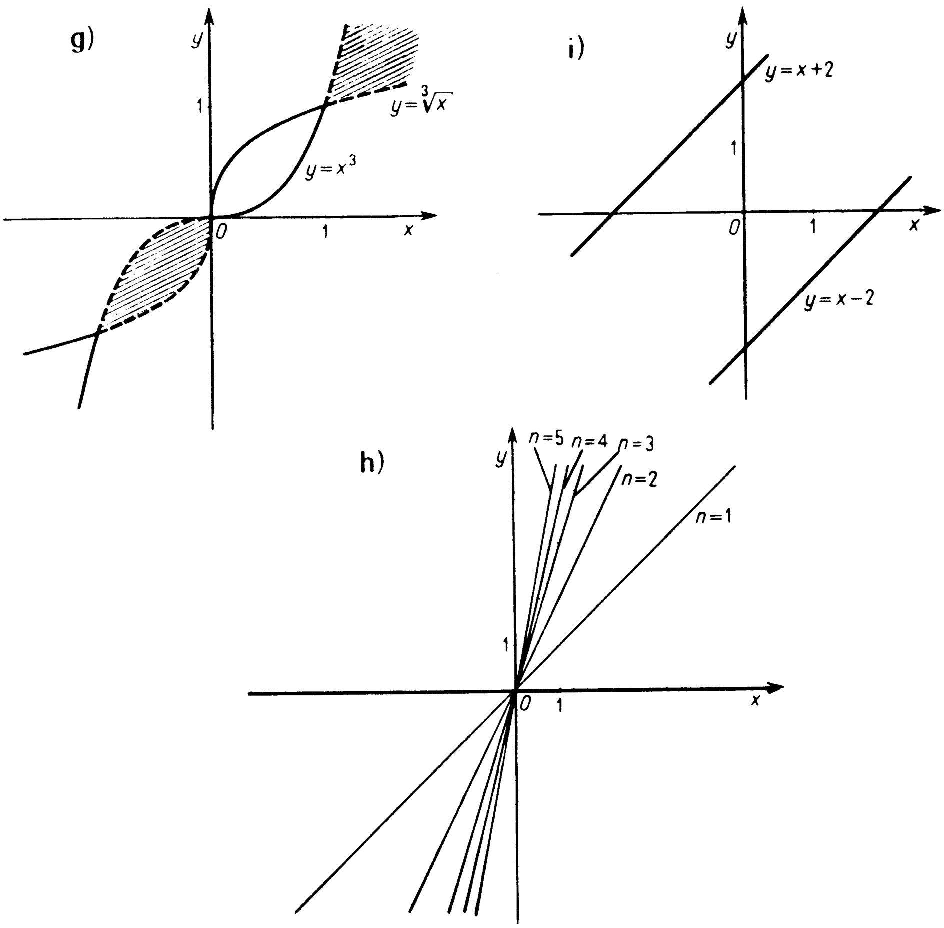
1.36. b), c), d), e), f); w punktach b) i c) przestrzenią ilorazową jest zbiór **C**, klasami abstrakcji liczby całkowite, w punkcie d) klasami abstrakcji są kierunki prostych na płaszczyźnie.

1.37. Tak; przestrzenią ilorazową jest zbiór **N**, klasami abstrakcji liczby naturalne.

1.38. Tak; jeżeli $c\in\mathbf{N}\wedge k\neq 1$, to $\mathscr{R}$ nie będzie relacją równoważności.


a)
y
y=x+5
y=x+2
y=x−2
y=x−5.
1
0
1
x
b)
y
x²+(y−2)²=4
1
0
x
c)
y
y=x²
1
0
1
x
d)
y
y=tg x
0
½π
x
e)
y
y=x+3
1
0
1
x
y=x−3
f)
y
1
y=√|x|
y=x²
0
1
x

Rys. 1.9 a) ÷ f)



Rys. 1.9 g)÷i)

1.39. Tak; klasami abstrakcji są liczby wymierne nie będące potęgami innych liczb wymiernych.

1.41. Tak; klasami abstrakcji są liczby naturalne z przedziału $\langle 0, 3\rangle$.

1.42. $\mathscr{R}$ nie jest równoważnością, bo nie jest zwrotna. Jeżeli zamiast „m jest bratem l" przyjąć „m i l mają tę samą liczbę braci", to relacja będzie równoważnością.

§ 2. LICZBY NATURALNE, CAŁKOWITE I WYMIERNE. KOMBINATORYKA

2.1. Liczby naturalne, tzn. liczby 1, 2, 3, ... definiuje się w logice matematycznej za pomocą klas abstrakcji relacji równoliczności (por. § 1). Liczby całkowite i wymierne można zdefiniować za pomocą liczb naturalnych i zasady abstrakcji (por. przykład 2.4 i zadanie 2.25).

T_1. TWIERDZENIE O INDUKCJI MATEMATYCZNEJ (zasada indukcji). *Niech* $\mathrm{T}(n)$ *oznacza pewną tezę, w której występuje liczba naturalna n. Jeżeli*:

1° *teza* $\mathrm{T}(n)$ *jest prawdziwa dla liczby naturalnej* $m \geqslant 1$,

2° *z prawdziwości* $\mathrm{T}(n)$ *dla każdej liczby* $n \geqslant m$ *wynika* $\mathrm{T}(n+1)$, *to teza* $\mathrm{T}(n)$ *jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej* $n \geqslant m$.

Niech Z oznacza zbiór złożony z n elementów.

Permutacją zbioru Z nazywamy każde uporządkowanie elementów zbioru Z. Istnieje

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \tag{1}$$

permutacji zbioru Z.

Jeżeli zbiór Z podzielony jest na s grup, z których pierwsza zawiera k_1 elementów, druga k_2 elementów, ..., ostatnia k_s elementów, przy czym $k_1+k_2+\ldots+k_s=n$ (nie wykluczamy przypadku, gdy jedna lub więcej z liczb k_j, $j=1, 2, \ldots, s$ jest równa zeru), to dwie permutacje zbioru Z nazywamy *równoważnymi*, jeżeli różnią się rozmieszczeniem elementów należących do tej samej grupy.

Liczba nierównoważnych permutacji zbioru Z wynosi

$$A = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_s!}. \tag{2}$$

Uwaga. Przyjmujemy umowę: $0! = 1$.

Wzór (2) określa również liczbę tzw. *permutacji z powtórzeniami* zbioru Z, jeżeli pewne elementy powtarzają się odpowiednio $k_1, k_2, \ldots, k_s$ razy.

Wariacją k-tej klasy lub *k-wyrazową wariacją bez powtórzeń* zbioru Z ($k \leqslant n$) nazywamy każdą permutację k-elementową należącą do zbioru Z.

Liczba k-wyrazowych wariacji zbioru Z wyraża się wzorem

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\ldots(n-k+1). \tag{3}$$

Każde uporządkowanie k elementów zbioru Z, z których nie wszystkie elementy muszą być różne nazywamy *k-wyrazową wariacją z powtórzeniami* zbioru Z.

Liczba $W_n^{(k)}$ *k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami wyraża się wzorem*

$$W_n^{(k)} = n^k. \tag{4}$$

Każdy podzbiór złożony z k różnych elementów zbioru Z, nazywamy *k-elementową kombinacją bez powtórzeń.*

Liczba k-elementowych kombinacji bez powtórzeń zbioru Z określona jest wzorem

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}. \tag{5}$$

Dwie k-wyrazowe wariacje z powtórzeniami zbioru Z nazywamy *równoważnymi*, jeżeli różnią się tylko porządkiem wyrazów.

Zbiór wszystkich równoważnych wariacji z powtórzeniami nazywamy *kombinacją z powtórzeniami.*

Liczba wszystkich k-wyrazowych kombinacji z powtórzeniami zbioru Z jest równa

$$\binom{n+k-1}{k}. \tag{6}$$

Przykłady

2.1. Wykazać, że

(a) $$12\,|\,(10^n-4) \quad \text{dla} \quad n\geqslant 2.$$

Uwaga. Zapis $a|b$, $a,\ b\in \mathbf{C}$, oznacza, że b jest podzielne przez a.

Rozwiązanie. Stosujemy twierdzenie T_1; dla $n=2$ mamy $10^2-4=96=8\cdot 12$, czyli $12|(10^2-4)$. Z kolei zakładamy prawdziwość wzoru (a) dla $n=k$, tzn.

$$12\,|\,(10^k-4)\Leftrightarrow 10^k-4=12m \quad \text{dla} \quad k\geqslant 2.$$

Zatem

$$10^{k+1}-4=10\cdot 10^k-4=10(12m+4)-4=12(10m+3)=12m_1, \qquad m,\ m_1\in \mathbf{C},$$

tzn. $12|(10^{k+1}-4)$, czyli wzór (a) jest prawdziwy dla $n=k+1$. Stąd na mocy T_1 wnosimy o prawdziwości (a) dla wszystkich liczb naturalnych $n\geqslant 2$.

2.2. Wykazać, że

(a) $$\sin x+2\sin 2x+\ldots+n\sin nx=\frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}x}[(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x],$$

gdzie $x\neq 2k\pi$, $k\in \mathbf{C}$.

Rozwiązanie. Korzystamy z twierdzenia T_1; dla $n=1$ otrzymujemy

$$\frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}x}(2\sin x-\sin 2x)=\frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}x}2\sin x(1-\cos x)=\sin x,$$

zatem wzór (a) jest prawdziwy. Załóżmy prawdziwość wzoru (a) dla $n=k$, gdzie $k\geqslant 1$, czyli

$$\sin x+2\sin 2x+\ldots+k\sin kx=\frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}x}[(k+1)\sin kx-k\sin(k+1)x]$$

i zastosujmy go do wyrażenia

$$L=(\sin x+2\sin 2x+\ldots+k\sin kx)+(k+1)\sin(k+1)x.$$

Stąd

$$L=\frac{(k+1)\sin kx-k\sin(k+1)x}{4\sin^2\frac{1}{2}x}+(k+1)\sin(k+1)x=$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}x}[(k+1)\sin kx-k\sin(k+1)x+(k+1)\sin(k+1)x\cdot 2(1-\cos x)]=$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}x}\{(k+2)\sin(k+1)x+(k+1)[\sin kx-2\sin(k+1)x\cos x]\}=$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}x}\{(k+2)\sin(k+1)x+(k+1)[\sin kx-\sin(k+2)x+\sin(-kx)]\}=$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}x}[(k+2)\sin(k+1)x-(k+1)\sin(k+2)x].$$

A więc wykazaliśmy, że wzór (a) jest prawdziwy dla $n=k+1$. □

2.3. Wykazać, że n prostych na płaszczyźnie dzieli ją na części, które mogą być pomalowane dwoma różnymi kolorami w taki sposób, że dwie sąsiednie części (czyli części mające wspólny brzeg różny od punktu leżący na tej samej prostej) będą pomalowane różnymi kolorami.

Rozwiązanie. Zastosujemy twierdzenie o indukcji. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy kolor biały i czarny. Jedna prosta ($n=1$) dzieli płaszczyznę na dwie części, które pomalowane jedna na biało, druga na czarno spełniają tezę twierdzenia.

Załóżmy więc, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n=k$, tzn. części płaszczyzny otrzymane przez poprowadzenie k prostych są pomalowane tak, że spełniają tezę twierdzenia. Weźmy $(k+1)$-szą prostą L_{k+1}. Dzieli ona płaszczyznę na dwie półpłaszczyzny P_1 i P_2 oraz utworzy z pozostałymi k prostymi nowe części płaszczyzny.

W półpłaszczyźnie P_1 pozostawiamy kolory niezmienione, natomiast w półpłaszczyźnie P_2 kolor biały malujemy na czarny i czarny na biały. Weźmy teraz dwie dowolne sąsiednie części A_1 i A_2 po przeprowadzeniu prostej L_{k+1} i przemalowaniu półpłaszczyzny P_2. Możliwy jest jeden z dwóch następujących przypadków:

α) A_1 i A_2 leżą po różnych stronach prostej L_{k+1};

β) A_1 i A_2 leżą po jednej stronie prostej L_{k+1}.

W przypadku α) części A_1 i A_2 przed przeprowadzeniem prostej L_{k+1} tworzyły jedną część, były więc pomalowane jednym kolorem; obecnie część leżąca w P_1 ma kolor niezmieniony, a część leżąca w P_2 ma kolor zmieniony, zatem A_1 i A_2 mają różne kolory.

W przypadku β) części A_1 i A_2 przed przeprowadzeniem prostej L_{k+1} były dwiema różnymi częściami mającymi brzeg na jednej z k prostych, zatem były pomalowane na różne kolory; jeżeli więc leżą w P_1, to pozostają ich kolory różne, a jeżeli w P_2, to zmieniają kolory, a zatem też będą miały różne kolory.

Twierdzenie jest więc prawdziwe dla $k+1$ prostych. □

2.4. Wykazać, że w zbiorze $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ relacja $\sim_1$, gdzie

$$((m_1, n_1)\sim_1(m_2, n_2))\Leftrightarrow(m_1+n_2=n_1+m_2),$$

jest równoważnością.

Rozwiązanie. Dla dowolnych elementów relacji $\sim_1$ mamy:

$$m_1+n_1=n_1+m_1, \quad \text{tzn. } \sim_1 \text{ jest zwrotna;}$$

$$(m_1+n_2=n_1+m_2)\Rightarrow(m_2+n_1=n_2+m_1),$$

tzn. $\sim_1$ jest symetryczna;

$$[(m_1+n_2=n_1+m_2)\wedge(m_2+n_3=n_2+m_3)\Rightarrow(m_1+n_3=n_1+m_2-n_2+n_2+m_3-m_2)]\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(m_1+n_3=n_1+m_3),$$

tzn. $\sim_1$ jest przechodnia.

Przestrzeń ilorazową $\mathbf{N}\times\mathbf{N}|\sim_1$ nazywamy *zbiorem liczb całkowitych*, klasy abstrakcji relacji $\sim_1$ nazywamy *liczbami całkowitymi*. Klasę abstrakcji $[(1,1)]_{\sim_1}$ nazywamy *liczbą całkowitą zero* i oznaczamy 0, klasy $[(m,n)]_{\sim_1}$, gdzie $m>n\wedge m=n+k$, $k\in\mathbf{N}$ nazywamy liczbami całkowitymi dodatnimi, klasy $[(m,n)]_{\sim_1}$, gdzie $m<n\wedge n=m+k$, $k\in\mathbf{N}$ nazywamy *liczbami całkowitymi ujemnymi*.

2.5. Niech a, b, $d\in\mathbf{C}$. Wykazać, że $(d|a\wedge d|b)\Rightarrow\bigwedge_{k,m\in\mathbf{C}} d|(ka+mb)$.

Rozwiązanie. Należy wykazać istnienie takiej liczby całkowitej p, że $ka+mb=pd$. Z założenia mamy: istnieją liczby całkowite k_1 i k_2 takie, że $a=k_1d$ i $b=k_2d$; stąd dla dowolnych liczb całkowitych k i m mamy $ka+mb=k(k_1d)+m(k_2d)=(kk_1+mk_2)d=pd$, gdzie $p\in\mathbf{C}$. Zatem $d|(ka+mb)$. □

2.6. Wykazać, że jeżeli

(a) $$w^2<2,\quad w\in\mathbf{W},$$

to wśród liczb w nie ma liczby największej.

Rozwiązanie. Niech w oznacza dowolną dodatnią liczbę wymierną, dla której spełniona jest nierówność (a). Wykażemy, że można dobrać taką liczbę $n\in\mathbf{N}$, że

(a_1) $$\left(w+\frac{1}{n}\right)^2<2,$$

tzn. wykażemy istnienie liczby $w_1=w+1/n$, dla której $w_1^2<2$. Istotnie, nierówność (a_1) możemy zapisać następująco:

$$w^2+\frac{2w}{n}+\frac{1}{n^2}<2\quad\text{lub}\quad\frac{2w}{n}+\frac{1}{n^2}<2-w^2;$$

ale

$$\frac{2w}{n}+\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{2w}{n}+\frac{1}{n}=\frac{2w+1}{n}\cdot$$

Jeżeli więc spełniona będzie nierówność $\frac{2w+1}{n}<2-w^2$, tzn. $n>\frac{2w+1}{2-w^2}$ [1], to również będzie spełniona nierówność $\frac{2w}{n}+\frac{1}{n^2}<2-w^2$, czyli $\left(w+\frac{1}{n}\right)^2<2$. □

---

[1] Istnienie liczby naturalnej n spełniającej tę nierówność wynika z tzw. *aksjomatu Archimedesa*, który może być sformułowany następująco: *dla dowolnej liczby wymiernej $w>0$ istnieje liczba naturalna większa od w.*

2.7. Wykazać, że nie istnieje liczba wymierna w spełniająca równanie

(a) $$w^3=2.$$

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że istnieje liczba wymierna $w=p/q$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi nie mającymi wspólnego dzielnika różnego od ± 1, spełniająca równanie (a), tzn.

(a_1) $$p^3=2q^3.$$

Z (a_1) wynika, że $2|p^3$; wykażemy, że w tym przypadku i $2|p$. Istotnie, gdyby liczba p nie była podzielna przez 2, to byłaby postaci $p=2a\pm 1$, a więc

$$p^3=(2a\pm 1)^3=8a^3\pm 12a^2+6a\pm 1=2(4a^3\pm 6a^2+3a)\pm 1=2d\pm 1,$$

czyli liczba p^3 nie byłaby podzielna przez 2 wbrew założeniu.

Jest więc $p=2k$. Stąd na mocy (a_1) $8k^3=2q^3$, czyli $q^3=2(2k^3)$, a więc liczba q^3, zatem i q jest podzielna przez 2.

Liczby p i q mają więc wspólny dzielnik $2\neq\pm 1$ wbrew założeniu, zatem liczba w nie jest postaci p/q, tzn. nie jest liczbą wymierną. □

2.8. Iloma sposobami można rozstawić na szachownicy osiem wież w taki sposób, aby żadna z nich nie mogła bić żadnej z pozostałych?

Rozwiązanie. Z prawideł gry w szachy wiadomo, że dwie wieże mogą bić się wzajemnie wtedy i tylko wtedy, gdy znajdują się na tej samej linii poziomej lub pionowej. Oznaczmy symbolem (i, j) pole znajdujące się w i-tym rzędzie poziomym i w j-tym rzędzie pionowym, gdzie $i, j=1, 2, \ldots, 8$.

Dwie wieże znajdujące się na polach (i, j) i (k, l) nie mogą bić jedna drugiej wtedy i tylko wtedy, gdy $i\neq k$ i $j\neq l$. Jeżeli 8 wież rozstawionych na szachownicy zajmuje pola (i_1, j_1), (i_2, j_2), ..., (i_8, j_8) i żadna nie może bić żadnej, to wśród liczb $i_1, i_2, \ldots, i_8$ nie może być dwóch równych. Wynika stąd, że liczby $i_1, i_2, \ldots, i_8$ tworzą permutację liczb 1, 2, ..., 8; analogicznie liczby $j_1, j_2, \ldots, j_8$ tworzą permutację liczb 1, 2, ..., 8.

Porządkując pary (i, j) w taki sposób, aby liczby $i_1, i_2, \ldots, i_8$ tworzyły naturalny ciąg 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, tzn. biorąc pary $(1, j_1)$, $(2, j_2)$, ..., $(8, j_8)$ stwierdzamy, że istnieje tyle możliwych położeń wież, w których żadna nie może bić żadnej, ile jest permutacji liczb $j_1, j_2, \ldots, j_8$, czyli $8!=40320$.

2.9. Danych jest n kart ponumerowanych i k bez numerów. Karty te układamy w rząd jedna po drugiej. Ile istnieje różnych ułożeń kart przy założeniu, że karty nienumerowane są nierozróżnialne?

Rozwiązanie. Wszystkich kart jest $n+k$. Gdyby wszystkie były ponumerowane, liczba możliwych układów wynosiłaby $(n+k)!$. Ponieważ jednak k kart jest nierozróżnialnych, więc porządek, w jakim zostały one ułożone, nie jest istotny, zatem z każdego układu kart, o który pytają w zadaniu, można utworzyć $k!$ układów przestawiając k kart nienumerowanych. Jeżeli więc A oznacza poszukiwaną liczbę ułożeń kart, to

$$Ak!=(k+n)!, \quad \text{stąd} \quad A=\frac{(n+k)!}{k!}.$$

2.10. Udowodnić wzór (2).

Rozwiązanie. Z dowolnej permutacji zbioru Z możemy otrzymać $k_1!$ permutacji równoważnych jej, tworząc wszystkie permutacje elementów pierwszej grupy. Z każdej z otrzymanych $k_1!$ permutacji otrzymujemy $k_2!$ permutacji równoważnych, przestawiając na wszelkie możliwe sposoby elementy drugiej grupy. Zatem z jednej permutacji zbioru Z otrzymujemy $k_1!k_2! \dots k_s!$ permutacji z nią równoważnych.

Jeżeli więc A oznacza liczbę nierównoważnych permutacji, to $A \cdot k_1!k_2! \dots k_s!=n!$; stąd

$$A=\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_s!}. \quad \square$$

2.11. Ile jest liczb pięciocyfrowych, w których żadna cyfra nie powtarza się?

Rozwiązanie. Wszystkie możliwe liczby tworzymy z cyfr 0, 1, 2, ..., 9. Liczby pięciocyfrowe o różnych cyfrach tworzymy, biorąc wszystkie pięcioelementowe wariacje bez powtórzeń zbioru cyfr 0, 1, 2, ..., 9, których jest (por. wzór (3))

$$V_{10}^{(5)}=\frac{10!}{(10-5)!}=\frac{10!}{5!}.$$

Wśród znalezionych układów cyfr należy odrzucić takie, które na pierwszym miejscu mają cyfrę zero. Jest ich tyle, ile można utworzyć czteroelementowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru cyfr 1, 2, ..., 9, czyli

$$V_9^{(4)}=\frac{9!}{(9-4)!}=\frac{9!}{5!}.$$

Stąd poszukiwana ilość liczb wynosi

$$V_{10}^{(5)}-V_9^{(4)}=\frac{10!}{5!}-\frac{9!}{5!}=6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 9=27216.$$

2.12. Na płaszczyźnie danych jest n punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Ile różnych prostych wyznaczają te punkty?

Rozwiązanie. Ponieważ prostą wyznacza para nieuporządkowana różnych punktów, więc z uwagi na założenie niewspółliniowości żadnych trzech spośród n danych punktów, będzie istniało tyle prostych, ile jest kombinacji dwuelementowych bez powtórzeń z n elementów, tzn. $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$.

Zadania

2.13. Korzystając z aksjomatu: „jeżeli $X \subset \mathbf{N} \wedge X \neq \emptyset$, to w zbiorze X istnieje liczba najmniejsza" udowodnić twierdzenie o indukcji matematycznej.

2.14. Korzystając z twierdzenia o indukcji matematycznej wykazać prawdziwość wzorów:

a) $6 \mid (n^3 - n)$, $n \in \mathbf{N}$; b) $S_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$, $q \neq 1$ (suma n wyrazów ciągu geometrycznego);

c) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$;

d) $\sum\limits_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} a^k b^{m-k} = \binom{n}{m}(a+b)^m$, $n \geqslant m \geqslant 0$;

e) $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k a^k b^{n-k} = na(a+b)^{n-1}$;

f) $(1+a)^n \geqslant 1+na$, $n \geqslant 0$, $a \in \mathbf{R} \wedge a > -1$ (*nierówność Bernoulliego*);

g) $(1+a)^n \geqslant 1 + na + \dfrac{n(n-1)}{2} a^2$, $n \geqslant 0$, $a \in \mathbf{R} \wedge a \geqslant 0$

(*uogólniona nierówność Bernoulliego*);

h) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \dfrac{1}{\sin \frac{1}{2}x} \sin \frac{1}{2}nx \sin \frac{1}{2}(n+1)x$, $\sin \frac{1}{2}x \neq 0$;

i) $\frac{1}{2} + \cos x + \ldots + \cos nx = \dfrac{1}{2 \sin \frac{1}{2}x} \sin \frac{1}{2}(2n+1)x$, $\sin \frac{1}{2}x \neq 0$;

j) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$;

k) $(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2)$ (tzw. *nierówność Schwarza*).

2.15. Wykazać, że

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k},$$

gdzie $k, n \in \mathbf{N} \wedge n \geqslant k$ oraz $\binom{n}{0} := 1$.

2.16. Udowodnić wzór (dwumian Newtona)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

gdzie $n \in \mathbf{N}$.

2.17. Dany jest ciąg

$$(a_n)=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right).$$

Wykazać, że (a_n) jest rosnący oraz $\bigwedge_{n\in\mathbf{N}}(2\leqslant a_n<3)$.

2.18. Udowodnić, że n płaszczyzn przechodzących przez jeden punkt i takich, że żadne trzy z tych płaszczyzn nie przechodzą przez tę samą prostą, dzieli przestrzeń na $A_n=$ $=n(n-1)+2$ części.

Wsk. Skorzystać m. in. z wyniku zadania 2.20.

2.19. Zakładając, że $p+q=1$, p, $q\in\mathbf{R}_+$ ($\mathbf{R}_+=\{x\in\mathbf{R}\colon x>0\}$), udowodnić wzory:

α) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=1$; β) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=np$;

γ) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=npq$.

Uwaga. Wzory β) i γ) określają w rachunku prawdopodobieństwa nadzieję matematyczną i wariancję rozkładu dwumianowego.

2.20. Udowodnić, że n prostych na płaszczyźnie euklidesowej przechodzących przez jeden punkt, dzieli tę płaszczyznę na $2n$ części.

2.21. Udowodnić, że n okręgów leżących na płaszczyźnie dzieli ją na części, które mogą być pomalowane dwoma różnymi kolorami w taki sposób, że dwie sąsiednie części (tzn. części mające wspólny brzeg różny od punktu na tym samym okręgu) będą pomalowane różnymi kolorami.

2.22. Niech a, b, c, $k\in\mathbf{C}$. Wykazać, że:

a) $b|a\Rightarrow\bigwedge_{k\in\mathbf{C}}b|ka$; b) $b|a\wedge a|c\Rightarrow b|c$;

c) $(3|a\wedge 3|b)\Rightarrow 3|(a+b)$. Podać kontrprzykład na to, że warunek ten nie jest wystarczający;

d) $3|a\Leftrightarrow 3|a^2$.

2.23. Wykazać, że działania ($\sim_1$ oznacza relację określoną w przykładzie 2.4):

$$[(m_1,n_1)]_{\sim_1}+[(m_2,n_2)]_{\sim_1}:=[(m_1+m_2,n_1+n_2)]_{\sim_1}$$

— dodawanie liczb całkowitych,

$$[(m_1,n_1)]_{\sim_1}\cdot[(m_2,n_2)]_{\sim_1}:=[(m_1m_2+n_1n_2,\ m_1n_2+n_1m_2)]_{\sim_1}$$

— mnożenie liczb całkowitych, są jednoznaczne, tzn. nie zależą od wyboru reprezentantów klas abstrakcji relacji $\sim_1$.

2.24. Wykazać, że działanie dodawania i mnożenia liczb całkowitych określone w zadaniu 2.23 spełniają prawo przemienności, łączności oraz rozdzielności dodawania względem mnożenia.

2.25. Korzystając z zasady abstrakcji, zdefiniować zbiór liczb wymiernych.

Uwaga. Rozpatrzyć w zbiorze $M = \mathbf{C} - \{0\} \times \mathbf{C} - \{0\}$ relację $((m_1, n_1) \approx (m_2, n_2)) \Leftrightarrow (m_1 n_2 = m_2 n_1)$. Zbiór $\mathbf{W}$ liczb wymiernych jest przestrzenią ilorazową $M|\approx$.

2.26. Wykazać, że jeżeli $w^2 > 2$, gdzie w oznacza dowolną liczbę wymierną, to wśród liczb w nie istnieje liczba najmniejsza.

2.27. Wykazać, że nie istnieją liczby wymierne spełniające równania: a) $w^2 = 2$; b) $w^2 = 3$; c) $w^3 = 3$; d) $w^2 = 5$, $w \in \mathbf{W}$.

2.28. Iloma sposobami można ustawić 9 osób w rząd?

2.29. Ile liczb pięciocyfrowych można utworzyć z cyfr: 1, 2, 3, 4, 5 w taki sposób, aby żadna cyfra w liczbie nie powtarzała się?

2.30. Sprawdzić równości:

a) $\dfrac{(n+1)!\,n^n}{n!\,(n+1)^{n+1}} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n}$; b) $\dfrac{(3n+3)!\,n^{3n}}{(n+3)^{3n+3}(3n)!} = \dfrac{27(n+\frac{2}{3})(n+\frac{1}{3})}{(n+3)^2}\left(1 + \dfrac{3}{n}\right)^{-3n}$.

2.31. Ile liczb sześciocyfrowych można utworzyć z cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, w taki sposób, aby żadna cyfra w liczbie nie powtarzała się?

2.32. Ile różnych wyrazów (mających sens lub nie) można utworzyć przestawiając wszelkimi sposobami litery w wyrazie „matematyka”?

2.33. Ile sześciocyfrowych liczb parzystych można utworzyć z cyfr: 1, 1, 1, 2, 3, 4?

2.34. Ile liczb siedmiocyfrowych można utworzyć z cyfr: 1, 1, 2, 3, 3, 6, 6?

2.35. Wykazać, że liczba możliwych rozkładów kart przy grze w brydża jest równa

$$\frac{52!}{(13!)^4} > 5 \cdot 10^{28}.$$

2.36. Udowodnić wzory (3), (4) i (5).

2.37. Sześciu biegaczy startowało w biegu, w którym tylko trzy pierwsze miejsca są punktowane. Ile jest możliwych (punktowanych) rezultatów biegu?

2.38. Na pięć różnych posad zgłosiło się 16 kandydatów. Iloma sposobami można obsadzić te posady?

2.39. Ile można utworzyć różnych trójkolorowych chorągiewek z siedmiu kolorów?

2.40. Ile jest liczb czterocyfrowych, w których żadna cyfra nie powtarza się?

2.41. Ile istnieje liczb czterocyfrowych?

2.42. Ile można utworzyć liczb pięciocyfrowych z cyfr: 4, 5, 7?

2.43. Iloma sposobami można rozmieścić n ziaren w m pudełkach?

2.44. Alfabet Morse'a składa się z dwóch różnych elementów kropki i kreski. Ile znaków pisarskich można utworzyć z tych elementów, jeżeli każdy znak ma co najwyżej k miejsc oznaczonych kreskami lub kropkami? Ile znaków można utworzyć, gdy $k = 6$?

2.45. Ile co najmniej należy wypełnić kuponów Toto-Lotka (skreślenie sześciu spośród 49 liczb), aby uzyskać co najmniej jedno prawidłowe skreślenie sześciu liczb?

2.46. Iloma sposobami można rozdzielić 7 książek między 11 osób?

2.47. Do turnieju szachowego rozgrywanego systemem „każdy z każdym" zgłoszono n zawodników. Ile partii zostanie rozegranych w turnieju?

2.48. W trójwymiarowej przestrzeni danych jest n punktów, z których żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Ile prostych i ile płaszczyzn wyznaczają te punkty?

2.49. Ile przekątnych ma wielokąt wypukły o n bokach?

2.50. Na płaszczyźnie danych jest k punktów, z których m leży na jednej prostej, a z pozostałych żadne trzy nie są współliniowe oraz żadne dwa z nich nie tworzą z żadnym z m punktów położonych na prostej trójki współliniowej. Ile różnych trójkątów wyznaczają te punkty?

2.51. Z czterech rodzajów papierosów tworzymy paczki po dziesięć papierosów w każdej. Ile różnych paczek można otrzymać w ten sposób?

2.52. Należy pomalować trzy przedmioty mając do dyspozycji sześć kolorów farb. Ile układów kolorów farb można otrzymać, przy założeniu, że każdy przedmiot jest malowany wyłącznie jednym kolorem?

2.53. W kwiaciarni są cztery gatunki kwiatów. Ile można utworzyć różnych bukietów dziewięciokwiatowych?

Odpowiedzi

2.13. Wsk. Przeprowadzić dowód nie wprost.

2.16. Wsk. Przeprowadzić dowód indukcyjny oraz skorzystać z zadania 2.15.

2.17. Wsk. Skorzystać z dwumianu Newtona oraz m.in. ze wzoru

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1, \qquad n>1.$$

2.18. Por. zadanie 2.16. **2.19.** Wsk. do β) i γ) $k^2=k(k-1)+k$.

2.22. c) np. $a=2$, $b=7$. **2.28.** $9!=362\,880$.

2.29. $5!=120$. **2.31.** 600. **2.32.** $\dfrac{10!}{2!3!2!}=151\,200$.

2.33. 40. **2.34.** $\dfrac{7!}{2!2!2!}=630$. **2.37.** $\dfrac{6!}{3!}=120$.

2.38. $\dfrac{16!}{11!}=524\,160$. **2.39.** $\dfrac{7!}{4!}=210$. **2.40.** $\dfrac{10!}{6!}-\dfrac{9!}{6!}=4536$.

2.41. $10^4-10^3=9000$. **2.42.** $3^5=243$. **2.43.** m^n.

2.44. $S_k=2(2^k-1)$, dla $k=6$, $S_6=126$.

2.45. $\dbinom{49}{6}=13\,983\,816$. **2.46.** $\dbinom{11}{7}=330$. **2.47.** $\dbinom{n}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

2.48. $\dbinom{n}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$ prostych, $\dbinom{n}{3}=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ płaszczyzn.

2.49. $\binom{n}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2}$. **2.50.** $\binom{k}{3}-\binom{m}{3}$. **2.51.** $\binom{4+10-1}{10}=286$.

2.52. $\binom{6+3-1}{3}=56$. **2.53.** $\binom{9+4-1}{9}=220$.

§ 3. LICZBY RZECZYWISTE

3.1. Za pomocą liczb wymiernych można określić liczby niewymierne, korzystając z pojęcia przekroju zbioru liczb wymiernych. *Przekrojem zbioru liczb wymiernych* nazywamy każdy podział zbioru liczb wymiernych na dwie klasy (dwa zbiory) A i B, spełniający warunki:

1° żadna z klas nie jest pusta;

2° każda liczba wymierna należy dokładnie do jednej z klas;

3° każda liczba klasy A jest mniejsza od każdej liczby klasy B.

Klasę A nazywamy *klasą niższą*, klasę B — *klasą wyższą*; sam przekrój oznaczamy symbolem $[A, B]$.

Liczbami niewymiernymi nazywamy przekroje zbioru liczb wymiernych mające tę własność, że w klasie niższej nie ma liczby największej, a w klasie wyższej liczby najmniejszej. Jeżeli przekrój $[A, B]$ wyznacza liczbę niewymierną α, to będziemy pisali $\alpha=[A, B]$.

Mówimy, że liczba niewymierna $\alpha=[A, B]$ jest większa od liczby niewymiernej $\beta=$ $=[A_1, B_1]$ i piszemy $\alpha>\beta$, jeżeli klasa A zawiera w sobie całkowicie klasę A_1, nie pokrywając się z nią.

Liczby wymierne i niewymierne nazywamy *liczbami rzeczywistymi.*

Rozszerzonym zbiorem liczb rzeczywistych nazywamy zbiór $\bar{\mathbf{R}}:=\mathbf{R}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$, przy czym zakładamy, że:

$$\bigwedge_{x\in\mathbf{R}}\left((-\infty<x<+\infty)\wedge(x+\infty=+\infty)\wedge(x-\infty=-\infty)\wedge\left(\frac{x}{+\infty}=\frac{x}{-\infty}=0\right)\right),$$

$$\bigwedge_{x\in\mathbf{R}_+}((x\cdot(+\infty)=+\infty)\wedge(x\cdot(-\infty)=-\infty)),$$

$$\bigwedge_{x\in\mathbf{R}_-}((x\cdot(+\infty)=-\infty)\wedge(x\cdot(-\infty)=+\infty)).$$

3.2. Przekroje zbioru liczb rzeczywistych określa się analogicznie jak przekroje zbioru liczb wymiernych.

$\mathbf{T}_1$ (zasada ciągłości zbioru liczb rzeczywistych). *Każdy przekrój* $[A, B]$ *zbioru liczb rzeczywistych wyznacza pewną liczbę rzeczywistą, która jest albo największą w klasie dolnej A, albo najmniejszą w klasie górnej B.*

Niech $X\subset\mathbf{R}$. Zbiór X nazywamy *ograniczonym z dołu* [*z góry*], jeżeli

$$\bigvee_{M\in\mathbf{R}}\bigwedge_{x\in X}(x\geqslant M)\Big[\bigvee_{N\in\mathbf{R}}\bigwedge_{x\in X}(x\leqslant N)\Big].$$

Kresem dolnym $\inf X$ [*górnym* $\sup X$] zbioru X, nazywamy największą [najmniejszą] z liczb M [N] spełniającą dla każdego $x\in X$ nierówność $x\geqslant M$ [$x\leqslant N$].

Jeżeli $X \subset \bar{\mathbf{R}}$ i X nie jest ograniczony z dołu [z góry], to przyjmujemy $\inf X = -\infty$ [$\sup X = +\infty$].

Otoczeniem [*sąsiedztwem*] $U(x_0; \eta)$ [$Q(x_0; \eta)$] punktu $x_0 \in \mathbf{R}$ nazywamy zbiór

$$U(x_0; \eta) := \{x : |x - x_0| < \eta\} \quad [Q(x_0; \eta) = U(x_0; \eta) - \{x_0\}].$$

Punkt a nazywamy *punktem skupienia* zbioru X, jeżeli w każdym otoczeniu punktu a istnieją punkty zbioru X różne od a.

Ciąg liczbowy (a_n), $a_n \in \mathbf{R}$, nazywamy *ciągiem Cauchy'ego*, gdy

(1) $$\bigwedge_{\varepsilon \in \mathbf{R}_+} \bigvee_{n_0 \in \mathbf{N}} \bigwedge_{n,m \in \mathbf{N} \wedge n > n_0 \wedge m > n_0} |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

3.3. Liczbę Δ określoną wzorem

(2) $$\Delta = |A - a|,$$

gdzie a oznacza liczbę przybliżoną liczby A, nazywamy *błędem bezwzględnym* liczby przybliżonej a.

Błędem maksymalnym (lub *kresem górnym błędu bezwzględnego*) liczby przybliżonej a, nazywamy każdą liczbę Δ_a spełniającą nierówność

(3) $$\Delta = |A - a| \leqslant \Delta_a,$$

przy czym piszemy

(4) $$A = a \pm \Delta_a.$$

Błędem względnym δ liczby przybliżonej a nazywamy liczbę

(5) $$\delta = \frac{\Delta}{|A|}.$$

Ponieważ w praktyce liczbę A najczęściej zastępujemy jej przybliżeniem $a \approx A$, więc zamiast wzoru (5) stosujemy wzór

(6) $$\delta = \frac{\Delta}{|a|}.$$

Błędem względnym maksymalnym (lub *kresem górnym błędu względnego*) liczby przybliżonej a, nazywamy każdą liczbę δ_a spełniającą nierówność

(7) $$\delta \leqslant \delta_a.$$

Na podstawie wzoru (7) można przyjąć, że $\Delta_a = |A| \delta_a$ lub dla $A \approx a$ wzór

(8) $$\Delta_a = |a| \delta_a.$$

Błędy δ i δ_a wyrażamy często w procentach.

Niech x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, będą liczbami przybliżonymi liczb X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Jeżeli $u = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $v = x_1 x_2 \ldots x_n$ ($x_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$), $w = x_1/x_2$ ($x_2 \neq 0$), $p = x_1^m$, to można przyjąć, że

(9) $$\Delta_u = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} + \ldots + \Delta_{x_n},$$

(10) $$\delta_v = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \ldots + \delta_{x_n},$$

(11) $$\delta_w = \delta_{x_1} + \delta_{x_2},$$

(12) $$\delta_p = |m|\,\delta_{x_1}.$$

3.4. Jeżeli $g, n \in \mathbf{N} \wedge g > 1$, to istnieje dokładnie jeden układ liczb $a_i \in \mathbf{C}$ takich, że $0 \leqslant a_i < g$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $a_k \neq 0$ i

(13) $$n = a_k g^k + a_{k-1} g^{k-1} + \ldots + a_1 g + a_0.$$

Liczbę g nazywamy *podstawą* (lub *zasadą*) *systemu pozycyjnego* i piszemy $n = (a_k a_{k-1} \ldots \ldots a_1 a_0)_g$.

Najczęściej stosowany jest system o podstawie $g = 10$ (system dziesiętny) oraz system dwójkowy o podstawie $g = 2$, mający szerokie zastosowanie w maszynach cyfrowych.

Działania na liczbach zapisanych w systemie pozycyjnym o podstawie $g \neq 10$ wykonuje się podobnie jak w przypadku systemu dziesiętnego z tym, że tabelki działań są oczywiście różne.

Przykłady

3.1. Wykazać, że między dwiema różnymi liczbami niewymiernymi istnieje co najmniej jedna liczba wymierna.

Rozwiązanie. Niech x_1 i x_2 oznaczają dane różne liczby niewymierne i niech np. $x_1 < x_2$. Z definicji liczb niewymiernych wynika, że istnieją przekroje $[A_1, B_1]$ i $[A_2, B_2]$ wyznaczające liczby x_1 i x_2. Z założenia $x_1 < x_2$ wynika, że klasa A_1 jest częścią klasy A_2, lecz nie na odwrót, tzn. w klasie A_2 istnieje co najmniej jedna liczba wymierna w, której nie ma w klasie A_1, zatem $w \in B_1$. Stąd $x_1 < w < x_2$. □

3.2. Wykazać, że jeżeli $\alpha > \beta \wedge \beta > \gamma$, to $\alpha > \gamma$ (własność przechodniości), gdzie α, β i γ oznaczają dowolne liczby niewymierne.

Rozwiązanie. Niech $\alpha = [A_1, B_1]$, $\beta = [A_2, B_2]$, $\gamma = [A_3, B_3]$. Z założeń: $\alpha > \beta \wedge \beta > \gamma$ wynika, że klasa A_1 zawiera całkowicie klasę A_2, nie pokrywając się z nią, oraz że klasa A_2 zawiera całkowicie klasę A_3, nie pokrywając się z nią. Wynika stąd, że klasa A_1 zawiera klasę A_3, nie pokrywając się z nią, tzn. $\alpha > \gamma$. □

3.3. Udowodnić, że jeżeli iloczyn n liczb dodatnich równa się jedności, to ich suma jest nie mniejsza od n.

Dowód. Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Dla $n = 1$ twierdzenie jest oczywiście prawdziwe; załóżmy prawdziwość twierdzenia $\mathrm{T}(k)$, tzn. że z równości

$$x_1 x_2 \ldots x_k = 1$$

wynika nierówność

(a) $$x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geqslant k,$$

oraz weźmy wyrażenie

$$A = x_1 x_2 \dots x_k x_{k+1}.$$

Załóżmy najpierw, że $x_1 = x_2 = \dots = x_k = x_{k+1}$; w tym przypadku z równości $x_1 x_2 \dots x_k x_{k+1} = 1$ wynika, że $x_1 = x_2 = \dots = x_{k+1} = 1$, zatem $x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} \geqslant k+1$, tzn. teza $\mathrm{T}(k+1)$. Jeżeli teraz nie wszystkie liczby x_i, $i = 1, 2, \dots, k$, $k+1$ są równe, to wśród liczb x_i znajdują się liczby mniejsze od jedności i liczby większe od jedności. Nie zmniejszając ogólności rozważań możemy przyjąć, że np. $x_1 < 1$ i $x_{k+1} > 1$; stąd $(x_1 x_{k+1}) x_2 x_3 \dots \dots x_k = 1$ lub podstawiając $y_1 = x_1 x_{k+1}$ mamy $y_1 x_2 \dots x_k = 1$. Na mocy nierówności (a) otrzymujemy $y_1 + x_2 + \dots + x_k \geqslant k$; ale

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} = (y_1 + x_2 + \dots + x_k) + x_{k+1} - y_1 + x_1 \geqslant$$

$$\geqslant k + x_{k+1} - y_1 + x_1 = (k+1) + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1) > k+1,$$

ponieważ $(x_{k+1} - 1)(1 - x_1) > 0$. Otrzymaliśmy więc tezę $\mathrm{T}(k+1)$. □

3.4. Znaleźć wszystkie punkty skupienia zbioru

$$X = \left\{ x \in \mathbf{R}: \ x = \frac{5n-1}{n+1}, \ n \in \mathbf{N} \right\}.$$

Rozwiązanie. Korzystamy z definicji punktu skupienia zbioru. Zbiór X jest nieskończony, może więc mieć punkty skupienia. Ponieważ

$$\frac{5n-1}{n+1} = 5 - \frac{6}{n+1},$$

więc X jest ograniczony, przy czym

$$\bigwedge_{x \in X} (2 \leqslant x < 5).$$

Jeżeli więc istnieje punkt skupienia x, to $2 \leqslant x \leqslant 5$. Udowodnimy najpierw, że liczba 5 jest punktem skupienia zbioru X. W tym celu weźmy dowolną liczbę $a > 0$. W każdvm przedziale $5 - a < x < 5 + a$ istnieją liczby zbioru X, ponieważ

$$5 - a < 5 - \frac{6}{n+1} \quad \text{dla} \quad n > \frac{6}{a} - 1.$$

Wykażemy teraz, że liczba 5 jest jedynym punktem skupienia zbioru X. Istotnie, dla dowolnej liczby $y \in \langle 2, 5)$ może zajść jeden i tylko jeden z przypadków:

1° $y \in X$; 2° $y \notin X$.

W przypadku 1° mamy $y_1 = \dfrac{5n_1 - 1}{n_1 + 1}$; wystarczy wtedy wziąć przedział $\langle y_1, y_1 + \alpha)$, gdzie

$$\alpha < \frac{5(n_1+1)-1}{n_1+2} - \frac{5n_1 - 1}{n_1+1},$$

to w tym przedziale nie ma żadnej liczby zbioru X.

W przypadku 2° z uwagi na nierówność

$$a_n < a_{n+1}, \quad n=1,2,\ldots, \quad \text{gdzie} \quad a_n = \frac{5n-1}{n+1},$$

istnieje liczba n_0 taka, że $a_{n_0} < y < a_{n_0+1}$. W tym przypadku wystarczy wziąć przedział: $y-\beta < x < y+\beta$, gdzie β jest liczbą mniejszą od mniejszej z liczb: $y-a_{n_0}$ i $a_{n_0+1}-y$, to w tym przedziale nie ma żadnej liczby zbioru X. □

3.5. Określenie liczb rzeczywistych według Cantora. Niech (a_n), $a_n \in \mathbf{W}$ będzie ciągiem Cauchy'ego (por. (1)), tzn.

(a) $$\bigwedge_{\varepsilon \in \mathbf{W}_+} \bigvee_{n_0 \in \mathbf{N}} \bigwedge_{n, m \in \mathbf{N} \wedge n \geq n_0 \wedge m \geq n_0} |a_n - a_m| < \varepsilon \qquad (\mathbf{W}_+ := \{w \in \mathbf{W} : w > 0\}).$$

Zbiór wszystkich ciągów Cauchy'ego w zbiorze $\mathbf{W}$ oznaczamy przez Q i w Q określamy relację $\sim$:

$$((a_n) \sim (b_n)) \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon \in \mathbf{W}_+} \bigvee_{n_0 \in \mathbf{N}} \bigwedge_{n > n_0} |a_n - b_n| < \varepsilon.$$

Wykażemy, że $\sim$ jest relacją równoważności.

1° zwrotność: $(a_n) \sim (a_n)$, ponieważ $\bigwedge_{n \in \mathbf{N}} |a_n - a_n| = 0 < \varepsilon$ dla $\varepsilon > 0$;

2° symetria: $((a_n) \sim (b_n)) \Rightarrow ((b_n) \sim (a_n))$, ponieważ $\bigwedge_{n \in \mathbf{N}} (|a_n - b_n| = |b_n - a_n|)$;

3° przechodniość:

$$((a_n) \sim (b_n)) \wedge ((b_n) \sim (c_n)) \Rightarrow ((a_n) \sim (c_n)).$$

Istotnie, z założeń mamy

$$\Big(\bigwedge_{\frac{1}{2}\varepsilon \in \mathbf{W}_+} \bigvee_{n_0 \in \mathbf{N}} \bigwedge_{n \geq n_0} |a_n - b_n| < \tfrac{1}{2}\varepsilon\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{\frac{1}{2}\varepsilon \in \mathbf{W}_+} \bigvee_{\bar{n}_0 \in \mathbf{N}} \bigwedge_{n \geq \bar{n}_0} |b_n - c_n| < \tfrac{1}{2}\varepsilon\Big),$$

skąd

$$\bigwedge_{\varepsilon \in \mathbf{W}_+} \bigvee_{n_1 = \max(n_0, \bar{n}_0)} \bigwedge_{n > n_1} \left(|a_n - c_n| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon\right),$$

ponieważ

$$|a_n - c_n| = |(a_n - b_n) + (b_n - c_n)| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n|. \quad \square$$

Przestrzeń ilorazową $Q|\sim$ nazywamy *zbiorem liczb rzeczywistych*. Liczby rzeczywiste są więc klasami abstrakcji relacji $\sim$.

3.6. Za pomocą linijki z podziałką milimetrową zmierzono długość stołu i grubość jego blatu, uzyskując odpowiednio wyniki: $k = 194$ cm i $d = 2{,}5$ cm. Porównać maksymalne błędy względne obu pomiarów.

Rozwiązanie. Zakładając, że przy pomiarze odróżniano kreski podziałki odległe o 1 mm, możemy przyjąć, że $\Delta_k = \Delta_d = 1$ mm. Stąd

$$\delta_k = \frac{1\,\text{mm}}{1940\,\text{mm}} \approx 0{,}0005 = 0{,}05\%, \qquad \delta_k = \frac{1\,\text{mm}}{25\,\text{mm}} = 0{,}04 = 4\%,$$

tzn. że pomiar długości stołu jest znacznie dokładniejszy.

3.7. Przy mierzeniu pewnej wielkości uzyskano wynik $p=32{,}65$ (1). Wiedząc, że maksymalny błąd względny tego pomiaru wynosi 0,5% znaleźć przedział, w którym zawarta jest wielkość p.

Rozwiązanie. Należy znaleźć Δ_p, wówczas $32{,}65-\Delta_p<p<32{,}65+\Delta_p$. Ale

$$\delta_p=0{,}5\%\cdot\frac{1}{100\%}=\frac{1}{200},$$

skąd

$$\Delta_p=p\cdot\delta_p=32{,}65\cdot 0{,}005\approx 0{,}16,$$

zatem

$$31{,}49<p<32{,}81.$$

3.8. Dane są liczby przybliżone $x_1=17{,}21\mp 0{,}02$ i $x_2=26{,}3\mp 0{,}01$. Znaleźć maksymalny błąd iloczynu x_1x_2.

Rozwiązanie. Jeżeli $u=x_1x_2$, to $\delta_u=\delta_{x_1}+\delta_{x_2}$ oraz $\Delta_u=u\cdot\delta_u$. Ale

$$\delta_{x_1}=\frac{\Delta_{x_1}}{x_1}=\frac{0{,}02}{17{,}21}\approx 0{,}0011, \qquad \delta_{x_2}=\frac{\Delta_{x_2}}{x_2}=\frac{0{,}01}{26{,}3}\approx 0{,}0003;$$

stąd

$$\delta_u=0{,}0014,$$

zatem

$$\Delta_u\approx 17{,}2\cdot 26{,}3\cdot 0{,}0014\approx 0{,}6.$$

3.9. W systemie dziesiętnym dane są liczby: 1, 32, 121, 243. Zapisać te liczby w systemie przy podstawie:

a) $g=2$; b) $g=3$; c) $g=7$; d) $g=11$.

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzoru (13). Zauważmy, że w systemie dziesiętnym:

$$1=1\cdot 10^0=(1)_{10}, \qquad 32=3\cdot 10^1+2\cdot 10^0=(32)_{10},$$

$$121=1\cdot 10^2+2\cdot 10^1+1\cdot 10^0=(121)_{10}, \qquad 243=2\cdot 10^2+4\cdot 10^1+3\cdot 10^0=(243)_{10}.$$

W systemie dwójkowym ($g=2$) mamy dwie cyfry: 0 i 1, w systemie trójkowym trzy cyfry: 0, 1, 2, w systemie siódemkowym siedem cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, w systemie o podstawie $g=11$ mamy jedenaście cyfr: $0, 1, 2, \ldots, 9, 10$. Zatem:

a) $1=1\cdot 2^0=(1)_2, \qquad 32=1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+0\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2^1+0\cdot 2^0=(100000)_2,$

$$121=1\cdot 2^6+1\cdot 2^5+1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0=(1111001)_2,$$

$$243=1\cdot 2^7+1\cdot 2^6+1\cdot 2^5+1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0=(11110011)_2;$$

b) $1=1\cdot 3^0=(1)_3, \qquad 32=1\cdot 3^3+0\cdot 3^2+1\cdot 3^1+2\cdot 3^0=(1012)_3,$

$$121=1\cdot 3^4+1\cdot 3^3+1\cdot 3^2+1\cdot 3^1+1\cdot 3^0=(11111)_3,$$

$$243=1\cdot 3^5+0\cdot 3^4+0\cdot 3^3+0\cdot 3^2+0\cdot 3^1+0\cdot 3^0=(100000)_3;$$

(1) Pomijamy jednostki.

c) $1=1\cdot 7^0=(1)_7$, $32=4\cdot 7^1+4\cdot 7^0=(44)_7$,

$121=2\cdot 7^2+3\cdot 7^1+2\cdot 7^0=(232)_7$,

$243=4\cdot 7^2+6\cdot 7^1+5\cdot 7^0=(465)_7$;

d) $1=1\cdot 11^0=(1)_{11}$, $32=2\cdot 11^1+10\cdot 11^0=(2\,10)_{11}$,

$121=1\cdot 11^2+0\cdot 11^1+0\cdot 11^0=(100)_{11}$,

$243=2\cdot 11^2+0\cdot 11^1+1\cdot 11^0=(201)_{11}$.

3.10. Wykonać dzielenie: $(23142)_5:(431)_5$.

Rozwiązanie. Dzielenie wykonujemy podobnie jak w systemie dziesiętnym. Ponieważ $231<431$ (opuszczamy podstawę), więc sprawdzamy ile razy 431 mieści się w 2314: $1\cdot 431=431$, $2\cdot 431=1412$, $3\cdot 431=2343>2314$, czyli dwa razy. Cyfra 2 jest pierwszą cyfrą ilorazu. Następnie odejmujemy $2\cdot 431=1412$ od 2314: $2314-1412=402$, otrzymując resztę 402, do której dopisujemy ostatnią cyfrę dzielnej, tzn. 2 i otrzymujemy nową dzielną 4022.

Liczba 431 mieści się cztery razy w 4022, ponieważ $4\cdot 431=3324$, zatem następną cyfrą ilorazu jest 4. Z kolei $4\cdot 431=3324$ odejmujemy od 4022, otrzymując resztę 143. A więc w wyniku dzielenia otrzymujemy iloraz całkowity 24 i resztę 143. W praktyce opisane działania wykonujemy krócej, mianowicie:

$$\begin{array}{l} 32142:431=24 \\ \underline{1412} \\ 4022 \\ \underline{3324} \\ 143 \end{array}$$

Oczywiście, podobnie jak w systemie dziesiętnym można znajdować miejsca po przecinku, tzn. współczynniki w rozwinięciu przy potęgach 5 o wykładnikach ujemnych.

3.11. Ułożyć tabelkę dodawania i mnożenia w systemie przy podstawie $g=6$ oraz obliczyć:

$$(24)_6+(1254)_6; \quad (121)_6\cdot(335)_6.$$

Rozwiązanie. Tabelka dodawania:

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	10
2	2	3	4	5	10	11
3	3	4	5	10	11	12
4	4	5	10	11	12	13
5	5	10	11	12	13	14

w szczególności
$$\begin{array}{r} 24 \\ \underline{+1254} \\ 1322 \end{array}$$

Tabelka mnożenia:

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	10	12	14
3	3	10	13	20	23
4	4	12	20	24	32
5	5	14	23	32	41

w szczególności:

$$\begin{array}{r} 121 \\ 335 \\ \hline 1045 \\ 403 \\ 403 \\ \hline 45415 \end{array}$$

Zadania

3.12. Podać przykład przekroju zbioru liczb wymiernych, który:

a) ma liczbę największą w klasie dolnej i nie ma liczby najmniejszej w klasie górnej;
b) nie ma liczby największej w klasie dolnej i ma liczbę najmniejszą w klasie górnej;
c) nie ma liczby największej w klasie dolnej i najmniejszej w klasie górnej.

3.13. Wykazać, że nie istnieje przekrój zbioru liczb wymiernych, który ma liczbę największą w klasie dolnej i najmniejszą w klasie górnej.

3.14. Wykazać, że jeżeli $a_1 > a_2, a_2 > a_3, \ldots, a_{n-1} > a_n$, to $a_1 > a_n$, gdzie $a_i, i = 1, 2, \ldots, n$, oznaczają liczby niewymierne.

3.15. Wykazać, że między dwiema dowolnymi liczbami rzeczywistymi istnieje nieskończenie wiele liczb wymiernych.

3.16. Udowodnić, że $\bigwedge_{x \in \mathbf{R}} \bigwedge_{\varepsilon \in \mathbf{R}_+} \bigvee_{w \in \mathbf{W}} |x - w| < \varepsilon$.

3.17. Wykazać, że jeżeli (a_n), (b_n) są ciągami Cauchy'ego liczb wymiernych, to $(a_n \pm b_n)$, $(a_n b_n)$, $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$, $b_n \neq 0$, są ciągami Cauchy'ego.

3.18. Wykazać, że działania ($\sim$ oznacza relację zdefiniowaną w przykładzie 3.5):

$$[(a_n)]_\sim + [(b_n)]_\sim := [(a_n + b_n)]_\sim \quad \text{— dodawanie liczb rzeczywistych,}$$

$$[(a_n)]_\sim \cdot [(b_n)]_\sim := [(a_n b_n)]_\sim \quad \text{— mnożenie liczb rzeczywistych,}$$

są jednoznaczne.

3.19. Uprościć wyrażenie

$$\frac{2x}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}, \qquad x\in\mathbf{R}-\{0\}.$$

3.20. Rozwiązać równania: a) $|-2x|=2x$; b) $|\sin x|=\frac{1}{2}$; c) $|5x-x^2|=5$.

3.21. Wykazać równoważność:
a) $(|x|\leqslant\varepsilon)\Leftrightarrow(-\varepsilon\leqslant x\leqslant\varepsilon)$; b) $(|x|\geqslant\varepsilon)\Leftrightarrow(x\leqslant-\varepsilon\vee x\geqslant\varepsilon)$, $\varepsilon\geqslant 0$.

3.22. Rozwiązać nierówności:
a) $|x-\frac{1}{3}|\leqslant 2$; b) $|x-x_0|<\varepsilon$; c) $|x|>x+3$; d) $|x-2|<x+|x-1|$;
e) $|x^2-6x+5|\leqslant x-2$; f) $x^2+3x-4<|x^3-1|$; g) $\dfrac{|x-2|-3x+1}{x+|x|}<x+3$.

3.23. Udowodnić wzory:

a) $\left(\dfrac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\dfrac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2$;

b) $|x_1+x_2+\ldots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$, $x_i\in\mathbf{R}$, $i=1,2,\ldots,n$;

c) $|x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n|=|x_1|\cdot|x_2|\cdot\ldots\cdot|x_n|$, $x_i\in\mathbf{R}$, $i=1,2,\ldots,n$;

d) $|x_1|-|x_2|\leqslant|x_1-x_2|\leqslant|x_1|+|x_2|$, $x_1,x_2\in\mathbf{R}$;

e) $|x|=x\operatorname{sgn}x$, $x\in\mathbf{R}$, gdzie $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1 & \text{dla } x<0,\\ 0 & \text{dla } x=0,\\ 1 & \text{dla } x>0.\end{cases}$

3.24. Udowodnić nierówności:

a) $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2$;

b) $\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\leqslant|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$, $x_i\in\mathbf{R}$, $i=1,2,\ldots,n$;

c) $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_3}+\ldots+\dfrac{x_{n-1}}{x_n}+\dfrac{x_n}{x_1}\geqslant n$, $x_i\in\mathbf{R}_+$, $i=1,2,\ldots,n$;

d) $\log_{10}a+\log_a 10\geqslant 2$, $a>1$; e) $\dfrac{x^2}{1+x^4}\leqslant\frac{1}{2}$, $x\in\mathbf{R}$;

f) $\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\leqslant\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$, $x_i\in\mathbf{R}_+$; g) $n!<\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$, $n\in\mathbf{N}\wedge n\geqslant 2$.

3.25. Podać przykłady zbiorów ograniczonych i nieograniczonych. (1)

(1) W całym § 3 rozpatrujemy zbiory liczb rzeczywistych.

3.26. Podać określenie zbioru liczb X nieograniczonego z góry.

3.27. Znaleźć kresy zbiorów:

a) $X=\left\{x\colon x=\frac{1}{n},\ n\in\mathbf{N}\right\}$; b) $X=\left\{x\colon x=1-\frac{2}{y^2},\ y\in\langle 1,+\infty)\right\}$;

c) $X=\{x\colon x=1+y^2,\ y\in(-1,1)\}$; d) $X=\{x\colon x=\sqrt[3]{y}-2,\ y\in\langle -8,1)\}$.

3.28. Udowodnić:

$$[(X,\,Y\subset\mathbf{R})\wedge\bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{y\in Y}x\leqslant y]\Rightarrow\sup X\leqslant\inf Y.$$

3.29. Wykazać, że zbiór liczb postaci m/n, gdzie m i n są liczbami naturalnymi, przy czym $0<m<n$, nie ma liczby najmniejszej i największej oraz znaleźć kresy tego zbioru.

3.30. Podać przykład zbioru liczb, w którym istnieje liczba najmniejsza, nie ma liczby największej, lecz zbiór ten jest ograniczony z góry. Znaleźć kresy tego zbioru.

3.31. Dane są dowolne zbiory X, $Y\subset\bar{\mathbf{R}}$. Niech $Z=\{z\colon z=x+y,\ x\in X\wedge y\in Y\}$ oraz $Z_1=\{z\colon z=xy,\ x\in X\wedge y\in Y\}$. Wykazać, że

a) $\inf Z=\inf X+\inf Y$; b) $\sup Z=\sup X+\sup Y$, c) $\inf Z_1=\inf X\cdot\inf Y$; d) $\sup Z_1=$ $=\sup X\cdot\sup Y$.

3.32. Znaleźć punkt skupienia zbiorów:

a) $X=\left\{x\in\mathbf{R}\colon x=\frac{(-1)^n}{n},\ n\in\mathbf{N}\right\}$; b) $X=\left\{x\in\mathbf{R}\colon x=\frac{n}{2^n},\ n\in\mathbf{N}\right\}$;

c) $X=\left\{x\in\mathbf{R}\colon x=\frac{(-2)^n+n}{2^n},\ n\in\mathbf{N}\right\}$; d) $X=\left\{x\in\mathbf{R}\colon x=\frac{4+(-1)^n n}{n+1},\ n\in\mathbf{N}\right\}$;

e) $X=\left\{x\in\mathbf{R}\colon x=\sin\frac{\pi}{n},\ n\in\mathbf{N}\right\}$; f) $X=\left\{x\in\mathbf{R}\colon x=\frac{p}{2^n},\ n\in\mathbf{N},\ p\in\mathbf{R}-\{0\}\right\}$;

g) $X=\left\{x\in\mathbf{R}\colon x=\frac{3n+2}{5n+1},\ n\in\mathbf{N}\right\}$; h) $X=\left\{x\in\mathbf{R}\colon x=\frac{4}{n}+\frac{5}{m},\ n\in\mathbf{N},\ m\in\mathbf{N}\right\}$;

i) $X=\left\{x\in\mathbf{R}\colon x=m+\frac{1}{n},\ n,m\in\mathbf{N}\right\}$; j) $X=\left\{x\in\mathbf{R}\colon x=\frac{1-(-1)^n}{2},\ n\in\mathbf{N}\right\}$;

k) $X=\{x\in\mathbf{R}\colon 1<x\leqslant 2\}$.

3.33. Z dokładnością do 1 cm zmierzono wysokość wieży uzyskując wynik $h=62{,}48$ m oraz długość gwoździa z wynikiem $k=7$ cm. Znaleźć Δ_h, Δ_k, δ_h i δ_k.

3.34. Oznaczono masę ciała $m=5{,}31$ kg, przy czym $\Delta_m=2$ mg. Znaleźć maksymalny błąd względny δ_m.

3.35. Zmierzono dwa kąty z następującymi wynikami $\alpha_1=21°37'3''$ i $\alpha_2=5'12''$, przy czym $\Delta_{\alpha_1}=\Delta_{\alpha_2}=1''$. Znaleźć δ_{α_1}, δ_{α_2}.

3.36. Przy określaniu stałej gazowej powietrza otrzymano $R=29{,}25$. Wiedząc, że maksymalny błąd względny wynosi 0,1 %, znaleźć przedział, w którym zawarte jest R.

3.37. Dane są liczby przybliżone: $x_1=132{,}7\mp0{,}02$, $x_2=9{,}12\mp0{,}01$. Znaleźć Δ_u, δ_u, Δ_v, δ_v, gdzie $u=x_1+x_2$, $v=x_1-x_2$.

3.38. Długości boków prostokąta są równe: $a=4{,}02$ m i $b=4{,}96$ m, przy czym $\Delta_a=\Delta_b=1$ cm. Znaleźć pole prostokąta.

3.39. Długość boku kwadratu wynosi $x=45{,}3$ cm, przy czym $\Delta_x=1$ mm. Znaleźć pole kwadratu.

3.40. Masa ciała $m=(12{,}59\mp0{,}01)$ g, a objętość $v=(3{,}2\mp0{,}2)$ cm^3. Znaleźć gęstość d ciała oraz Δ_d i δ_d.

3.41. W trójkącie prostokątnym długość przeciwprostokątnej wynosi $(15{,}4\mp0{,}1)$ cm, długość jednej z przyprostokątnych $(6{,}8\mp0{,}1)$ cm. Znaleźć długość drugiej przyprostokątnej oraz kąt ostry do niej przyległy.

3.42. Dany jest wzór $P=\frac{37}{4}Kp^3w^2$, gdzie $\delta_K=0{,}03$, $\delta_p=0{,}0006$, $\delta_w=0{,}4$. Znaleźć δ_P.

3.43. Znaleźć δ_D, jeżeli

(a) $$D=\frac{4P}{\pi d^2 h}$$

oraz $P=(547{,}9\mp0{,}1)$ g, $d=(3{,}06\mp0{,}01)$ cm, $h=(8{,}35\mp0{,}01)$ cm, $\pi=3{,}141\mp0{,}0005$ (wzór (a) określa gęstość ciała w kształcie walca kołowego o masie P, długości wysokości h i długości średnicy podstawy d).

3.44. Znaleźć:

a) $\sqrt{x_1}$, jeżeli $x_1=81{,}1\mp0{,}05$; b) $\sqrt[3]{x_2}$, jeżeli $x_2=65{,}2\mp0{,}05$;

c) maksymalny błąd ilorazu $x_1:x_2$, jeżeli $x_1=25{,}7\mp0{,}05$, $x_2=3{,}6\mp0{,}05$.

3.45. W systemie dziesiętnym dane są liczby: 1, 3, 72, 128, 1256. Zapisać te liczby w systemie: a) dwójkowym, b) trójkowym, c) szóstkowym, d) siódemkowym.

3.46. W systemie dziesiętnym dana jest liczba 27. Zapisać tę liczbę w systemie przy podstawie $g_i=i+1$, $i=1, 2, \ldots, 12$.

3.47. Liczby: $(10)_2$, $(1001)_2$, $(11000)_2$, $(1001100)_2$, $(201)_3$, $(20121)_3$, $(165021)_7$ zapisać w systemie dziesiętnym.

3.48. Ile cyfr ma w układzie dwójkowym liczba 10^{102}?

3.49. Ile cyfr ma w układzie dziesiętnym liczba wyrażająca się w układzie dwójkowym jako jedynka ze a) stu zerami; b) tysiącem zer?

3.50. Ułożyć tabelkę dodawania i mnożenia w systemie trójkowym oraz wykonać działania: a) $(2102)_3+(1002)_3$; b) $(102)_3\cdot(1022)_3$.

3.51. Ułożyć tabelkę dodawania i mnożenia w systemie przy podstawie $g=7$ oraz wykonać działanie $(1243)_7\cdot(2125)_7$.

3.52. Obliczyć: $(10100)_2+(1100)_2$; $(2012)_3+(1122)_3$; $(3012)_4+(130)_4$; $(1412)_5+(2110)_5$; $(7120)_8+(1652)_8$.

3.53. Obliczyć: $(110111)_2-(111)_2$; $(210122)_3-(2221)_3$; $(33120)_4-(32)_4$; $(3578)_9-$ $-(172)_9$.

3.54. Obliczyć w systemie dwójkowym:

$$1101\cdot 111;\quad 101101\cdot 1011;\quad 1100111\cdot 11110101.$$

3.55. Wykonać mnożenia:

$$(2121)_3\cdot(122)_3;\quad (4121)_5\cdot(302)_5;\quad (675)_8\cdot(32)_8;\quad (821)_9\cdot(46)_9.$$

3.56. Wykonać dzielenia:

$$(101010010)_2:(11010)_2;\quad (3300)_4:(110)_4;\quad (12233)_5:(131)_5;$$
$$(612654)_7:(12)_7;\quad (31375)_9:(474)_9.$$

Odpowiedzi

3.12. Wsk. Por. przykład 2.6 i zadanie 2.26.
3.14. Wsk. Przeprowadzić dowód indukcyjny.
3.18. Wsk. Skorzystać z zadania 3.17 oraz wykazać, że definicje nie zależą od wyboru reprezentantów.

3.19. $\dfrac{x}{|x|}(1+x^2)=\begin{cases}-(1+x^2) & \text{dla} \quad x<0,\\ 1+x^2 & \text{dla} \quad x>0.\end{cases}$

3.20. a) $x\geqslant 0$; b) $x=\frac{1}{6}\pi+n\pi$ oraz $x=\frac{5}{6}\pi+n\pi$, $n\in\mathbf{C}$;

c) $x_{1/2}=\dfrac{5\mp 3\sqrt{5}}{2}$, $x_{3/4}=\dfrac{5\mp\sqrt{5}}{2}$.

3.22. a) $-\frac{5}{3}\leqslant x\leqslant\frac{7}{3}$; b) $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$; c) $x<-\frac{3}{2}$; d) $x>1$;

e) $\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{7+\sqrt{21}}{2}$; f) $x<1$ lub $x>\sqrt{3}$; g) $x>\dfrac{\sqrt{31}-5}{2}$.

3.24. c) Wsk. Por. przykład 3.3; f) Wsk. Skorzystać z przykładu 3.3; g) Wsk. Skorzystać z punktu f.

3.26. $\bigwedge\limits_{M\in\mathbf{R}}\bigvee\limits_{x\in X}(x>M)$. **3.27.** a) 0 i 1; b) -1 i 1; c) 1 i 2; d) -4 i -1.

3.29. 0 i 1.

3.30. Np. $X=\{x\in\mathbf{R}:\ a\leqslant x<b,\ a,\ b\in\mathbf{R}\}$, $\inf X=a\wedge a\in X$, $\sup X=b\wedge b\notin X$.

3.32. a) 0; b) 0; c) -1 i 1; d) -1 i 1; e) 0; f) 0; g) $\frac{3}{5}$; h) każda liczba zbioru; i) każda liczba naturalna;

j) zbiór jest skończony i składa się z dwóch liczb 0 i 1, zatem nie ma punktów skupienia;

k) każda liczba przedziału $\langle 1, 2\rangle$.

3.33. $\Delta_h = \Delta_k = 1$ cm, $\delta_h = 0{,}00016 = 0{,}016\%$, $\delta_k = 0{,}14 = 14\%$.

3.34. $\delta_m = 0{,}38\cdot 10^{-6} = 0{,}38\cdot 10^{-4}\%$.

3.35. $\delta_{\alpha_1} = 1{,}3\cdot 10^{-5} = 1{,}3\cdot 10^{-3}\%$, $\delta_{\alpha_2} = 0{,}0032 = 0{,}32\%$.

3.36. $29{,}22 \leqslant R \leqslant 29{,}28$.

3.37. $\Delta_u = \Delta_v = 0{,}03$, $\delta_u = 0{,}00021 = 0{,}021\%$, $\delta_v = 0{,}00024 = 0{,}024\%$.

3.38. $19{,}9 \mp 0{,}1$ m^2. **3.39.** $(2{,}05 \mp 0{,}01)\ 10^3$ cm^2.

3.40. $d = (3{,}93 \mp 0{,}27)$ g/cm^3, $\delta_d = 0{,}073 = 7{,}3\%$.

3.41. $(13{,}8 + 0{,}2)$ cm, $\sin\alpha = 0{,}44 \mp 0{,}01$, $\alpha = 26°15' \mp 35'$.

3.42. $\delta_P = 0{,}8318 = 83{,}18\%$. **3.43.** $\delta_D = 8\cdot 10^{-3} = 0{,}8\%$.

3.44. a) $9{,}006 \mp 0{,}003$; b) $4{,}025 \mp 0{,}001$; c) $u = x_1 : x_2$, $u = 7{,}14 \mp 0{,}11$, $\Delta u = 0{,}11$.

3.45. a) 1, 11, 1001000, 10000000, 10011101000;

b) 1, 10, 2200, 11202, 1201112; c) 1, 3, 200, 332, 5452;

d) 1, 3, 132, 242, 3443.

3.46. $(11011)_2$, $(1000)_3$, $(123)_4$, $(102)_5$, $(43)_6$, $(36)_7$, $(33)_8$, $(30)_9$, $(27)_{10}$, $(25)_{11}$, $(23)_{12}$, $(21)_{13}$.

3.47. 2, 9, 24, 76, 19, 178, 32 943.

3.48. 340 cyfr. **3.49.** a) 31; b) 302.

3.50.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

	1	2
1	1	2
2	2	11

, $(10111)_3$, $(112021)_3$.

3.51.

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	10
2	2	3	4	5	6	10	11
3	3	4	5	6	10	11	12
4	4	5	6	10	11	12	13
5	5	6	10	11	12	13	14
6	6	10	11	12	13	14	15

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	11	13	15
3	3	6	12	15	21	24
4	4	11	15	22	26	33
5	5	13	21	26	34	42
6	6	15	24	33	42	51

$(3011401)_7$.

3.52. $(100000)_2$, $(10211)_3$, $(3202)_4$, $(4022)_5$, $(10772)_8$.

3.53. $(110000)_2$, $(200201)_3$, $(33022)_4$, $(3406)_9$.

3.54. $(1011011)_2$, $(111101111)_2$, $(1100011000011011)_2$.

3.55. $(1122002)_3$, $(2310042)_5$, $(26462)_8$, $(42376)_9$.

3.56. $(1101)_2$, $(30)_4$, $(43)_5$, $(45526)_7$ reszta 6, $(58)_9$.

§ 4. ODWZOROWANIA

4.1. Niech $X \neq \emptyset$ i $Y \neq \emptyset$ oznaczają dowolne zbiory. *Odwzorowaniem* zbioru X w zbiór Y nazywamy każdą relację $\mathcal{T} \subset X \times Y$ prawostronnie jednoznaczną ([1]), której pierwszy element pary przebiega cały zbiór X, a więc relację spełniającą warunki:

1° $P_X \mathcal{T} = X$ (por. § 1 punkt 1.3),

2° $\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y,z \in Y} \big((x,y) \in \mathcal{T} \wedge (x,z) \in \mathcal{T} \Rightarrow y = z\big)$.

Odwzorowanie $\mathcal{T}$ przyporządkowuje więc każdemu elementowi $x \in X$ dokładnie jeden element $y \in Y$. Zamiast $(x,y) \in \mathcal{T}$ będziemy pisali $y = \mathcal{T}(x)$, przy czym $\mathcal{T}(x)$ nazywamy *wartością odwzorowania* $\mathcal{T}$ dla $x \in X$ lub *obrazem* elementu $x \in X$. Zbiór X nazywamy *dziedziną* (*zbiorem argumentów*) odwzorowania $\mathcal{T}$, zbiór $\mathcal{T}(X) = \{\mathcal{T}(x) \colon x \in X\}$ — *zbiorem wartości* (*przeciwdziedziną*) odwzorowania $\mathcal{T}$. Jeżeli $\mathcal{T}$ jest odwzorowaniem zbioru X w zbiór Y, to będziemy pisali $\mathcal{T} : X \to Y$, względnie $\mathcal{T} : X \ni x \to \mathcal{T}(x) \in Y$ i czytali: $\mathcal{T}$ odwzorowuje X w Y. Z określenia odwzorowania wynika, że symbole $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}(x)$ mają różne znaczenia, $\mathcal{T}$ oznacza relację, a więc zbiór par uporządkowanych $(x, \mathcal{T}(x)) \in \mathcal{T}$, natomiast $\mathcal{T}(x)$ oznacza obraz elementu $x \in P_x \mathcal{T}$, tzn. drugi element pary $(x, \mathcal{T}(x)) \in \mathcal{T}$. W praktyce często zamiast zapisu $\mathcal{T} : X \to Y$ używamy mniej precyzyjnego zapisu $y = \mathcal{T}(x)$, $x \in X$, który odczytujemy: odwzorowanie $\mathcal{T}$ określone jest wzorem $y = \mathcal{T}(x)$, $x \in X$. Jeżeli $Y \subset \mathbf{R}$, to $\mathcal{T}$ na ogół nazywamy *funkcją*, jeżeli $X = \mathbf{N}$, to $\mathcal{T}$ nazywamy *ciągiem*, przy czym oznaczamy $\mathcal{T}(n) = a_n$, $\mathcal{T} = (a_n)$, lub $\mathcal{T} = (a_n)_1^\infty$ i a_n nazywamy *n-tym wyrazem ciągu*.

Niech $\mathcal{T} : X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$. Zbiór $\mathcal{T}(A) = \{\mathcal{T}(x) : x \in A\}$ nazywamy *obrazem zbioru A*, zbiór $\mathcal{T}^{-1}(B) = \{x : \mathcal{T}(x) \in B\}$ nazywamy *przeciwobrazem zbioru B*.

Zwężeniem (lub *obcięciem*) *odwzorowania* $\mathcal{T} : X \to Y$ do zbioru $A \subset X$ nazywamy odwzorowanie $\mathcal{T}|A \colon A \to Y$ określone wzorem $(\mathcal{T}|A)(x) = \mathcal{T}(x)$ dla $x \in A$.

4.2. Niech $\mathcal{T} : X \to Y$. Jeżeli

a) $\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (x_1 \neq x_2) \Rightarrow \big(\mathcal{T}(x_1) \neq \mathcal{T}(x_2)\big)$, to odwzorowanie $\mathcal{T}$ nazywamy *odwzorowaniem różnowartościowym* lub *injekcją*;

b) $\mathcal{T}(X) = Y$, to $\mathcal{T}$ nazywamy *odwzorowaniem X na Y* lub *surjekcją* i piszemy $\mathcal{T} : X \mapsto Y$, lub $\mathcal{T} : X \overset{\text{na}}{\to} Y$;

c) $\mathcal{T} : X \mapsto Y$ i $\mathcal{T}$ jest różnowartościowe, to nazywamy je *odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym* lub *bijekcją*.

Niech $\mathcal{T} : X \to Y$, $\mathcal{F} : Y \to Z$. Odwzorowanie $\mathcal{S} : X \to Z$ określone wzorem $\bigwedge_{x \in X} \mathcal{S}(x) = \mathcal{F}(\mathcal{T}(x))$ nazywamy *superpozycją* (*złożeniem*) odwzorowań $\mathcal{T}$ i $\mathcal{F}$ i oznaczamy $\mathcal{S} = \mathcal{F} \circ \mathcal{T}$. Jest zatem

$$\bigwedge_{x \in X} (\mathcal{F} \circ \mathcal{T})(x) = \mathcal{F}\big(\mathcal{T}(x)\big).$$

Uwaga. Pojęcie superpozycji można uogólnić następująco. Niech $\mathcal{T} \colon X_1 \to Y_1$ oraz $\mathcal{F} \colon X_2 \to Y_2$ będą dowolnymi odwzorowaniami. Przez superpozycję $\mathcal{F} \circ \mathcal{T}$ odwzorowań $\mathcal{T}$ i $\mathcal{F}$ rozumiemy odwzo-

---

([1]) Relację prawostronnie jednoznaczną określamy również z iloczynu $X \times Y$.

rowanie określone na zbiorze $X=\mathcal{T}^{-1}(X_2)$ jak następuje

$$(\mathcal{F}\circ\mathcal{T})(x)=\mathcal{F}(\mathcal{T}(x)) \quad \text{dla} \quad x\in X.$$

W tym przypadku dziedzina odwzorowania $\mathcal{F}\circ\mathcal{T}$ na ogół nie jest identyczna z dziedziną odwzorowania $\mathcal{T}$.

Bijekcja $\mathcal{T}: X\mapsto Y$ określa zawsze odwzorowanie $\mathcal{T}^{-1}: Y\mapsto X$, które każdemu elementowi $y\in Y$ przyporządkowuje dokładnie jeden element $x\in X$ taki, że $\mathcal{T}(x)=y$. Odwzorowanie $\mathcal{T}^{-1}$ nazywamy *odwzorowaniem odwrotnym* do odwzorowania $\mathcal{T}$. Z definicji $\mathcal{T}^{-1}$ mamy:

$$\bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{y\in Y}(y=\mathcal{T}(x)\Leftrightarrow x=\mathcal{T}^{-1}(y))$$

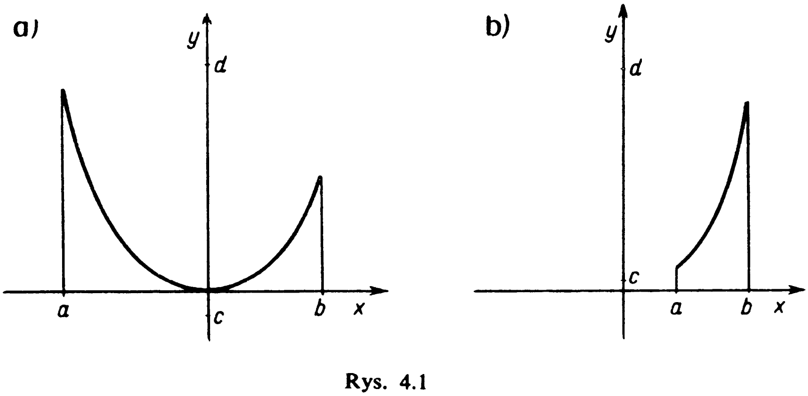
oraz

$$\bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{y\in Y}(y=\mathcal{T}(\mathcal{T}^{-1}(y))\wedge x=\mathcal{T}^{-1}(\mathcal{T}(x))).$$

4.3. Zbiory X i Y nazywamy *równolicznymi* i piszemy $X\sim Y$, jeżeli istnieje bijekcja $\mathcal{T}: X\mapsto Y$. Każdemu zbiorowi X przyporządkowujemy przedmiot $\overline{\overline{X}}$ zwany *liczbą kardynalną*, lub *mocą*, w taki sposób, że $(\overline{\overline{X}}=\overline{\overline{Y}})\Leftrightarrow(X\sim Y)$. Jeżeli X jest zbiorem skończonym n-elementowym, to przyjmujemy, że jego mocą jest liczba n, przy tym $\overline{\overline{\emptyset}}=0$. *Zbiorem przeliczalnym* nazywamy zbiór skończony lub równoliczny ze zbiorem $\mathbf{N}$. Można wykazać, że zbiór jest przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbiorem wyrazów pewnego ciągu nieskończonego lub, mówiąc mniej precyzyjnie, jeżeli można go ustawić w ciąg nieskończony. Zbiór nazywamy *nieprzeliczalnym*, jeżeli nie jest przeliczalny.

Przykłady

4.1. Dane są zbiory: $X=\langle a,b\rangle$ i $Y=\langle c,d\rangle$ oraz relacja $\mathcal{S}\subset X\times Y$, $x\mathcal{S}y\Leftrightarrow y=x^2$. Dla jakich a, b, c i d relacja ta wyznacza funkcję ? Jeżeli wyznacza funkcję, to dla jakich a, b, c i d funkcja ta jest: α) injekcją, β) surjekcją, γ) bijekcją?



Rys. 4.1

Rozwiązanie. Relacja $x\mathcal{S}y\Leftrightarrow y=x^2$ jest prawostronnie jednoznaczna i określona dla każdego $x\in\mathbf{R}$, a więc jest funkcją w $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$. Aby relacja ta była funkcją w $X\times Y$, dla każdego $x\in X$ musi istnieć $y\in Y$ spełniający warunek $y=x^2$. Jeżeli $c\leqslant 0$, to jedynym ograniczeniem jest, aby $d\geqslant\max(a^2, b^2)$ (por. rys. 4.1a), jeżeli $c>0$, to $\mathcal{S}$ jest funkcją w $X\times Y$, jeżeli $c\leqslant\min(a^2, b^2)\wedge d\geqslant\max(a^2, b^2)\wedge ab\geqslant 0$ (por. rys. 4.1b).

Jeżeli $\mathscr{S}$ jest funkcją, to jest:
α) injekcją, jeżeli $ab \geqslant 0$,
β) surjekcją, jeżeli

$$(a \geqslant 0 \wedge c = a^2 \wedge d = b^2) \vee (b \leqslant 0 \wedge c = b^2 \wedge d = a^2) \vee$$

$$\vee (ab < 0) \wedge (c = 0) \wedge (d = \max(a^2, b^2)),$$

γ) bijekcją, jeżeli jest injekcją i surjekcją, tzn. jeżeli

$$(ab \geqslant 0) \wedge [(c = b^2 \wedge d = a^2) \vee (c = a^2 \wedge d = b^2)].$$

4.2. Czy relacja $x\mathscr{R}y \Leftrightarrow y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, gdzie stałe a, b, c, $d \in \mathbf{R} \wedge ad - bc \neq 0$ wyznacza funkcję w $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$? Jeżeli nie, to jaki jest największy zbiór $X_0 \subset \mathbf{R}$, dla którego można określić funkcję w $X_0 \times \mathbf{R}$? Czy funkcja ta jest: α) injekcją, β) surjekcją (na $\mathbf{R}$)? Jeżeli nie jest surjekcją, to znaleźć $f(X_0)$.

Rozwiązanie. Relacja $\mathscr{S}$ nie wyznacza funkcji w $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, ponieważ dla $x = -\dfrac{d}{c}$ nie istnieje $y \in \mathbf{R}$, dla którego para $\left(-\dfrac{d}{c}, y\right)$ należałaby do $\mathscr{S}$. Zbiór $X_0 = \mathbf{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ jest maksymalną dziedziną, dla której istnieje funkcja f określona wzorem $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $x \in X_0$. Funkcja f jest injekcją, ponieważ

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X_0} \left(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = \frac{(ad-bc)(x_1 - x_2)}{(cx_1 + d)(cx_2 + d)} \neq 0 \right).$$

W celu zbadania czy f jest surjekcją sprawdzamy warunek $\bigwedge_{k \in \mathbf{R}} \bigvee_{\bar{x} \in X_0} f(\bar{x}) = k$. Mamy:

$$f(\bar{x}) = k = \frac{a\bar{x}+b}{c\bar{x}+d} \Rightarrow kc\bar{x} + kd = a\bar{x} + b \Rightarrow \bar{x} = \frac{kd-b}{a-kc},$$

tzn. $\bar{x}$ istnieje, jeżeli $k \neq \dfrac{a}{c}$. Wynika stąd, że $f(X_0) = \mathbf{R} - \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$, a więc f nie jest surjekcją.

4.3. Niech $\mathscr{F}: X \to Y$ oraz $A, B \subset X$. Wykazać, że $\mathscr{F}(A \cup B) = \mathscr{F}(A) \cup \mathscr{F}(B)$.

Rozwiązanie. Jeżeli $y \in \mathscr{F}(A \cup B)$, to istnieje $x \in A \cup B$ i takie, że $y = \mathscr{F}(x)$. Niech np. $x \in A$, wtedy $y \in \mathscr{F}(A)$, czyli $y \in \mathscr{F}(A) \cup \mathscr{F}(B)$. Podobnie udowadniamy, jeżeli $x \in B$. Jeżeli teraz $y \in \mathscr{F}(A) \cup \mathscr{F}(B)$, wtedy np. $y \in \mathscr{F}(A)$, a więc istnieje $x \in A$ takie, że $y = \mathscr{F}(x)$. Ale $x \in A \cup B$, stąd $y \in \mathscr{F}(A \cup B)$. □

4.4. Niech $\mathscr{F}: X \to Y$, $(C_t)_{t \in A}$, $\bigwedge_{t \in A} C_t \subset Y$. Wykazać, że

$$\mathscr{F}^{-1}\left(\bigcap_{t \in A} C_t\right) = \bigcap_{t \in A} \mathscr{F}^{-1}(C_t).$$

Rozwiązanie. Korzystając z definicji przeciwobrazu i z definicji iloczynu $\bigcap_{t\in A} C_t$ mamy:

$$x\in\mathcal{T}^{-1}(\bigcap_{t\in A} C_t)\Leftrightarrow(\mathcal{T}(x)\in\bigcap_{t\in A} C_t)\Leftrightarrow x\in\bigcap_{t\in A}\mathcal{T}^{-1}(C_t). \quad \square$$

4.5. Dane są zbiory $X=\langle 0,4\rangle$, $Y=\langle -4,5\rangle$ i relacja $\mathcal{S}\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, $x\mathcal{S}y\Leftrightarrow y=-x^2+2x+4$. Czy relacja $\mathcal{S}$ wyznacza funkcję w $X\times Y$? Jeżeli tak, to czy funkcja ta jest: α) injekcją, β) surjekcją?

Odpowiedzieć na te same pytania dla zbiorów $X_1=\langle 1,4\rangle$, Y oraz relacji $\mathcal{S}$.

Rozwiązanie. Przekształcamy funkcję określoną wzorem $y=f(x)=-x^2+2x+4$, tzn. trójmian kwadratowy. Otóż $y=-(x-1)^2+5$, skąd wynika, że trójmian przyjmuje wartość największą równą 5 w punkcie $x=1$ oraz że na przedziale $\langle 0,1\rangle$ funkcja f jest rosnąca, na przedziale $\langle 1,4\rangle$ funkcja f jest malejąca. Stąd $\bigwedge_{x\in\langle 0,4\rangle} f(x)\in\langle -4,5\rangle$, tzn. relacja $\mathcal{S}$ określa funkcję

$$F:\langle 0,4\rangle\ni x\to(-x^2+2x+4)\in\langle -4,5\rangle.$$

Ponieważ $F(X)=Y$, więc F jest surjekcją, natomiast F nie jest injekcją, ponieważ dla $y\in\in\langle 4,5)$ istnieją dwie wartości x, dla których $F(x)=y$.

Relacja $\mathcal{S}\subset X_1\times Y$ jest funkcją F_1 będącą obcięciem funkcji F dla przedziału $\langle 1,4\rangle$. Łatwo zauważyć, że F_1 jest injekcją i surjekcją, a więc jest bijekcją.

4.6. Dane są zbiory $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 1\}$, $Z=\langle 0,5\rangle\subset\mathbf{R}$ oraz relacja $\mathcal{S}\subset D\times Z$, $(x,y)\mathcal{S}z\Leftrightarrow z=5-x^2-y^2$. Czy $\mathcal{S}$ wyznacza funkcję? Jeżeli tak, to czy surjekcję? Jeżeli $\mathcal{S}$ jest funkcją f, ale nie jest surjekcją, to wyznaczyć $f(D)$. Wykazać, że

$$f_1: D_1=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : y=ax,\ a\in\mathbf{R}\wedge x\geqslant 0\wedge x^2+y^2\leqslant 1\}\to f(D),$$

gdzie $f_1(x,y)=5-x^2-y^2$ jest bijekcją.

Rozwiązanie. Funkcja $F: D\to\mathbf{R}$ określona wzorem $F(x,y)=5-x^2-y^2$, $(x,y)\in D$ przyjmuje wartości należące do przedziału $\langle 4,5\rangle\subset\mathbf{R}$ (istotnie: $5\geqslant F(x,y)=5-(x^2+y^2)\geqslant\geqslant 5-1=4$, jeżeli $x^2+y^2\leqslant 1$), przy czym $\langle 4,5\rangle\subset\langle 0,5\rangle$. Relacja $\mathcal{S}$ wyznacza więc funkcję $f: D\to Z$, która nie jest surjekcją, gdyż $f(D)=\langle 4,5\rangle\neq\langle 0,5\rangle$. Funkcja $f_1: D_1\to f(D)$, gdzie $f_1(x,y)=f_1(x,ax)=5-x^2-y^2=5-x^2(1+a^2)$, jest funkcją malejącą zmiennej x ($x\geqslant 0$), a więc jest injekcją oraz jest surjekcją, ponieważ $f_1(D_1)=\langle 4,5\rangle$. Wynika stąd, że f_1 jest bijekcją.

4.7. W zbiorze $\mathbf{R}$ dane są relacje:

$$x\mathcal{S}y\Leftrightarrow y=x\sqrt{x^2+1},\qquad x\mathcal{T}y\Leftrightarrow y=\sqrt{x^4+x^2}.$$

Czy relacje te wyznaczają funkcje? Czy są to funkcje różne? W jakim największym podzbiorze należącym do $\mathbf{R}$ obie relacje wyznaczają tę samą funkcję?

Rozwiązanie. Obie relacje wyznaczają funkcje, gdyż są prawostronnie jednoznaczne i $\bigwedge_{x\in\mathbf{R}}\bigvee_{y\in\mathbf{R}} x\mathcal{S}y$ oraz $\bigwedge_{x\in\mathbf{R}}\bigvee_{y\in\mathbf{R}} x\mathcal{T}y$. Funkcje te są różne, ponieważ dla $x<0$ pierwsza funkcja przyjmuje wartości ujemne, a druga dodatnie. Obie relacje wyznaczają tę samą funkcję w maksymalnym zbiorze $\mathbf{R}_+\cup\{0\}$.

4.8. Dane są dwie relacje w $\mathbf{R}$:

$$\mathscr{S}=\{(x,y):\ y=4-x^2\},\qquad \mathscr{T}=\{(x,y):\ y=\sqrt{x}\}.$$

Czy relacje $\mathscr{U}=\mathscr{S}\circ\mathscr{T}$ i $\mathscr{W}=\mathscr{T}\circ\mathscr{S}$ będące złożeniami tych relacji wyznaczają funkcje w $\mathbf{R}$? Jeżeli nie, to podać największy podzbiór $X_0\subset\mathbf{R}$, na którym funkcje są określone w $X_0\times\mathbf{R}$.

Rozwiązanie. Zgodnie z definicją złożenia relacji (por. zadanie 1.35)

$$\mathscr{U}=\mathscr{S}\circ\mathscr{T}=\{(x,y):\ \bigvee_z x\mathscr{T}z\wedge z\mathscr{S}y\}=\{(x,y):\ y=4-(\sqrt{x})^2\}.$$

Relacja ta wyznacza funkcję określoną wzorem $y=4-(\sqrt{x})^2$ na maksymalnym przedziale $\langle 0,+\infty)$. Z kolei

$$\mathscr{W}=\mathscr{T}\circ\mathscr{S}=\{(x,y):\ \bigvee_z x\mathscr{S}z\wedge z\mathscr{T}y\}=\{(x,y):\ y=\sqrt{4-x^2}\}.$$

Relacja ta wyznacza funkcję określoną wzorem $y=\sqrt{4-x^2}$ na maksymalnym przedziale $\langle -2,2\rangle$.

4.9. Wykazać, że iloczyn kartezjański zbiorów przeliczalnych jest przeliczalny.

Rozwiązanie. Niech $A\sim\mathbf{N}\wedge B\sim\mathbf{N}$, tzn. A można ustawić w ciąg nieskończony $a_1,a_2,\dots,a_n,\dots$ i B można ustawić w ciąg nieskończony $b_1,b_2,\dots,b_n,\dots$

Należy udowodnić, że zbiór $X=\{(a_m,b_n):\ a_m\in A\wedge b_n\in B\}$ można ustawić w ciąg nieskończony. Wystarczy dowieść, że zbiór wszystkich par (m,n), tzn. zbiór $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ można ustawić w ciąg nieskończony. W tym celu zbiór $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ zapisujemy w postaci tablicy nieskończonej

$$(1)\qquad \begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & \dots & (1,n) & \dots\\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots & (2,n) & \dots\\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & \dots & (3,n) & \dots\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
(m,1) & (m,2) & (m,3) & \dots & (m,n) & \dots
\end{array}$$

Tablicę tę zamienimy w ciąg tzw. *metodą przekątnej*, polegającą na tym, że najpierw wypisujemy pary (m,n), dla których $m+n=2$, następnie pary dla których $m+n=3$ itd., w obrębie zaś każdej z tych grup wypisujemy pary w kolejności wzrastania m ([1]). W otrzymanym w ten sposób ciągu nieskończonym (1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), ... występuje każda para (m,n). □

Uwaga. Inna metoda dowodu polega na zamianie tablicy (1) w ciąg nieskończony według konstrukcji wskazanej w tablicy (1) strzałkami.

Dowód można również przeprowadzić korzystając z funkcji $f\colon \mathbf{N}\times\mathbf{N}\ni(m,n)\to 2^{m-1}(2n-1)\in\mathbf{N}$ (por. zadanie 4.30).

([1]) Pary (m,n), dla których $m+n=k$ tworzą $k-1$ przekątną, stąd nazwa metody.

4.10. Udowodnić, że dla każdego zbioru Z, zbiór U wszystkich podzbiorów zbioru Z jest mocy większej niż zbiór Z, tzn.

(a) $$\bar{\bar{Z}} < \bar{\bar{U}}.$$

Korzystając z (a) wyprowadzić wniosek, że istnieje nieskończenie wiele różnych mocy zbiorów nieskończonych.

Rozwiązanie. Wystarczy wykazać, że $\bar{\bar{Z}} \leqslant \bar{\bar{U}} \wedge \bar{\bar{Z}} \neq \bar{\bar{U}}$.

Odwzorowanie przyporządkowujące każdemu elementowi $z \in Z$ podzbiór $\{z\} \in U$ składający się z jednego elementu z jest bijekcją f: $U \supset U_1 \to Z$, skąd $U_1 \sim Z \Rightarrow \bar{\bar{Z}} \leqslant \bar{\bar{U}}$. Dowód warunku $\bar{\bar{Z}} \neq \bar{\bar{U}}$ przeprowadzimy nie wprost. Z zaprzeczenia wynika, że zbiory Z i U są równoliczne, tzn. istnieje bijekcja g: $Z \to U$. Oznaczamy $g(z) = A_z$ i definiujemy zbiór $A = \{z \in Z: z \notin A_z\}$. Ponieważ $A \subset U$ (bo $A \subset Z$) i g jest bijekcją, więc istnieje dokładnie jeden element $a \in Z$ taki, że $g(a) = A_a = A$. Dla elementu a mogą zajść dokładnie dwie możliwości: $a \in A$ albo $a \notin A$. W przypadku $a \in A$, z definicji zbioru A wynika, że $a \notin A$, a więc sprzeczność; w przypadku $a \notin A$, również z definicji zbioru A wynika, że $a \in A$, a więc sprzeczność. Wynika stąd, że $\bar{\bar{Z}} \neq \bar{\bar{U}}$. □

W celu udowodnienia wniosku, weźmy dowolny zbiór przeliczalny, np. zbiór $\mathbf{N}$ i jego moc oznaczamy przez $\aleph_0$ (alef zero). Na podstawie udowodnionego twierdzenia $\aleph_1 = \bar{\bar{U}}_{U_\mathbf{N}} > \aleph_0 = \bar{\bar{\mathbf{N}}}$, gdzie $U_\mathbf{N}$ oznacza zbiór wszystkich podzbiorów zbioru $\mathbf{N}$. Z kolei $\aleph_2 = \bar{\bar{U}}_{U_{U_\mathbf{N}}} > \aleph_1 > \aleph_0$, gdzie $U_{U_\mathbf{N}}$ oznacza moc zbioru wszystkich podzbiorów zbioru $U_\mathbf{N}$, itd. Istnieje więc nieskończenie wiele różnych mocy nieskończonych.

Zadania

4.11. Jakie muszą spełniać warunki liczby $a, b \in \mathbf{R}$, aby istniały funkcje f_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, mające dziedziny $\langle a, b \rangle$ i przeciwdziedziny $Y \subset \mathbf{R}$, określone wzorami:

a) $f_1(x) = \dfrac{1}{x-3}$; b) $f_2(x) = \dfrac{4}{x^2 - 5x + 4}$;

c) $f_3(x) = \dfrac{1}{\log(4x+8)}$; d) $f_4(x) = \dfrac{1}{\log\dfrac{2x-2}{x-5}}$;

e) $f_5(x) = \sqrt{\log(x^2 - 8)}$; f) $f_6(x) = \sqrt{\sin(2x - \frac{1}{6}\pi)}$?

4.12. Dane są zbiory $X = \langle a, b \rangle$, $Y = \langle c, d \rangle$ i relacje $\mathscr{S}_i \subset X \times Y$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$:

a) $x \mathscr{S}_1 y \Leftrightarrow y = 2x^2 - 8$; b) $x \mathscr{S}_2 y \Leftrightarrow y = \sqrt{|x|}$;

c) $x \mathscr{S}_3 y \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{x}$; d) $x \mathscr{S}_4 y \Leftrightarrow y = \log|x|$; e) $x \mathscr{S}_5 y \Leftrightarrow y = (x-2)^2$.

Dla jakich c i d dane relacje wyznaczają funkcje? Jeżeli relacje wyznaczają funkcje, to kiedy: α) injekcję ? β) surjekcję ? γ) bijekcję ? W dyskusji uwzględnić zależność od a i b.

4.13. Dane są zbiory i relacje:

a) $X=\langle -1,3\rangle$, $Y=\langle -4,60\rangle$, $\mathscr{R}_1\subset X\times Y$, gdzie

$$x\mathscr{R}_1 y\Leftrightarrow y=3x^4-20x^3+36x^2-4x\,;$$

b) $X=\langle 0,4\rangle$, $Y=\langle 0,2\rangle$, $\mathscr{R}_2\subset X\times Y$, gdzie $x\mathscr{R}_2 y\Leftrightarrow y=\sqrt{4x-x^2}$;

c) $X=\langle 0,6\rangle$, $Y=\langle 0,10\rangle$, $\mathscr{R}_3\subset X\times Y$, gdzie

$$x\mathscr{R}_3 y\Leftrightarrow y=\log(x^2+6x+8)\,;$$

d) $X=\langle 0,2\rangle$, $Y=\langle -5,110\rangle$, $\mathscr{R}_4\subset X\times Y$, gdzie

$$x\mathscr{R}_4 y\Leftrightarrow y=3x^4-28x^3+72x^2-5\,.$$

Czy relacje $\mathscr{R}_i$, $i=1, 2, 3, 4$ wyznaczają funkcje w $X\times Y$? Jeżeli tak, to czy: α) injekcję ? czy β) surjekcję ?

4.14. Dane są zbiory $D\subset\mathbf{R}^2$, $Z\subset\mathbf{R}$ oraz relacje $\mathscr{S}\subset D\times Z$:

a) $D=\{(x,y):\ x^2+y^2-2x\leqslant 0\}$, $Z=\langle 0,6\rangle$, $(x,y)\mathscr{S}z\Leftrightarrow z=x^2+y^2$;

b) $D=\{(x,y):\ (-2\leqslant x\leqslant 2)\wedge(-1\leqslant y\leqslant 1)\}$, $Z=\langle 0,2\rangle$, $(x,y)\mathscr{S}z\Leftrightarrow z=\sqrt{4-x^2-y^2}$;

c) $D=\{(x,y):\ (-1\leqslant x\leqslant 1)\wedge(-1\leqslant y\leqslant 1)\}$, $Z=\langle 0,2\rangle$, $(x,y)\mathscr{S}z\Leftrightarrow z=\sqrt{2-x^2-y^2}$;

d) $D=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 2y\}$, $Z=\langle -2,2\rangle$, $(x,y)\mathscr{S}z\Leftrightarrow z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Czy dane relacje są funkcjami ? Jeżeli tak, to czy surjekcjami? Jeżeli są funkcjami, ale nie surjekcjami, to znaleźć $f(D)$. Wykazać, że

$$f_1:\mathbf{R}^2\supset D_1=\{(x,y):\ (x,y)\in D\wedge y=ax\wedge x\geqslant 0\}\to f(D),$$

gdzie $f_1(x,y)=f(x,y)$ dla $(x,y)\in D_1$, $a\in\mathbf{R}$ jest bijekcją.

4.15. Niech f: $X\to Y$ będzie dowolnym odwzorowaniem oraz $A\subset B\subset X$, $C\subset D\subset Y$. Wykazać, że:

a) $f(A)\subset f(B)$; b) $f^{-1}(C)\subset f^{-1}(D)$.

4.16. Niech f: $X\to Y$ będzie dowolnym odwzorowaniem oraz A, $B\subset X$, C, $D\subset Y$. Wykazać, że:

a) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$; b) $f(A)-f(B)\subset f(A-B)$;

c) $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$; d) $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$;

e) $f^{-1}(C-D)=f^{-1}(C)-f^{-1}(D)$.

4.17. Niech f: $X\to Y$ będzie dowolnym odwzorowaniem oraz $(A_t)_{t\in T}$, $\bigwedge\limits_{t\in T}A_t\subset X$, $(C_t)_{t\in T}$, $\bigwedge\limits_{t\in T}C_t\subset Y$. Wykazać, że

a) $f(\bigcup\limits_{t\in T}A_t)=\bigcup\limits_{t\in T}f(A_t)$; b) $f(\bigcap\limits_{t\in T}A_t)\subset\bigcap\limits_{t\in T}f(A_t)$;

c) $f^{-1}(\bigcup\limits_{t\in T}C_t)=\bigcup\limits_{t\in T}f^{-1}(C_t)$; d) $f^{-1}(\bigcap\limits_{t\in T}C_t)=\bigcap\limits_{t\in T}f^{-1}(C_t)$.

4.18. Dana jest funkcja f: $\mathbf{R}_+ \cup \{0\} \ni x \to \cos \frac{1}{2}x$ oraz zbiory

$$A=\{x\in\mathbf{R}: 4\pi n<x\leqslant\tfrac{1}{2}\pi+4\pi n,\ n\in\mathbf{N}\cup\{0\}\},$$

$$B=\{x\in\mathbf{R}: 4\pi n-\tfrac{1}{2}\pi\leqslant x\leqslant 4\pi n,\ n\in\mathbf{N}\},\qquad C=\langle -1, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}).$$

Znaleźć zbiory:
a) $f(A)$; b) $f(B)$; c) $f(A\cup B)$; d) $f(A\cap B)$; e) $f^{-1}(C)$.

4.19. Dana jest funkcja f: $\mathbf{R}\ni x \to |x^2-1|$ oraz zbiory: $A=\langle 1, +\infty)$, $B=(-\infty, -1)$, $C=\langle -1, 1\rangle$. Znaleźć:
a) $f(A)$; b) $f(B)$; c) $f(C)$; d) $f(B\cup C)$; e) $f^{-1}(A)$; f) $f^{-1}(C)$.

4.20. Niech $g=f|A$ (g – obcięcie funkcji f do A). Wykazać, że

$$g^{-1}(B)=A\cap f^{-1}(B).$$

4.21. Wykazać, że $f(A\cap f^{-1}(B))=f(A)\cap B$, gdzie f: $X\to Y$ i $A\subset X$, $B\subset Y$.

4.22. Dane są dwie relacje w $\mathbf{R}$:

a) $\mathscr{R}_1=\{(x,y): y=\log(x-3)\}$, $\mathscr{R}_2=\{(x,y): y=\sqrt{x}\}$;

b) $\mathscr{R}_1=\{(x,y): y=\sin x\}$, $\mathscr{R}_2=\{(x,y): y=\log x\}$;

c) $\mathscr{R}_1=\left\{(x,y): y=\dfrac{3}{x}\right\}$, $\mathscr{R}_2=\{(x,y): y=\sqrt{4-x}\}$;

d) $\mathscr{R}_1=\{(x,y): y=\sqrt{x-3}\}$, $\mathscr{R}_2=\{(x,y): y=\sqrt{x}\}$;

e) $\mathscr{R}_1=\mathscr{R}_2=\left\{(x,y): y=\dfrac{1}{2x-3}\right\}$.

Czy relacje: $\mathscr{U}=\mathscr{R}_1\circ\mathscr{R}_2$, $\mathscr{W}=\mathscr{R}_2\circ\mathscr{R}_1$ wyznaczają funkcje w $\mathbf{R}^2$? Jeżeli nie, to znaleźć największy zbiór $X_0\subset\mathbf{R}$, dla którego funkcja jest określona w $X_0\times\mathbf{R}$.

4.23. Czy w każdym z punktów a)-e) relacje $\mathscr{R}_1$ i $\mathscr{R}_2$ w $\mathbf{R}$:

a) $x\mathscr{R}_1 y \Leftrightarrow y=\log x^2$, $x\mathscr{R}_2 y \Leftrightarrow y=2\log x$;

b) $x\mathscr{R}_1 y \Leftrightarrow y=\operatorname{tg} x$, $x\mathscr{R}_2 y \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$;

c) $x\mathscr{R}_1 y \Leftrightarrow y=\sqrt{(x-3)^2}$, $x\mathscr{R}_2 y \Leftrightarrow y=x-3$;

d) $x\mathscr{R}_1 y \Leftrightarrow y=\arcsin(\sin x)$, $x\mathscr{R}_2 y \Leftrightarrow y=x$;

e) $x\mathscr{R}_1 y \Leftrightarrow y=\sin\arcsin x$, $x\mathscr{R}_2 y \Leftrightarrow y=x$

są te same? Jeżeli nie, to znaleźć największe zbiory $X_0\subset\mathbf{R}$, w których te relacje określają funkcje w $X_0\times\mathbf{R}$. Na jakich zbiorach funkcje te są te same?

4.24. Wykazać, że złożenie odwzorowań jest działaniem łącznym, tzn. $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$, oraz że złożenie odwzorowań nie jest na ogół działaniem przemiennym. Podać kontrprzykład.

4.25. Niech $f\colon X\to Y$ $g\colon Y\to Z$, $A\subset X$, $C\subset Z$. Wykazać, że
a) $(f\circ g)(A)=f(g(A))$; b) $(f\circ g)^{-1}(C)=g^{-1}(f^{-1}(C))$.

4.26. Funkcja $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ jest funkcją rosnącą. Co można powiedzieć o monotoniczności funkcji: $f_1\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, gdzie $\bigwedge\limits_{x\in\mathbf{R}} f_1(x)=f(-x)$; $f_2\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, gdzie $\bigwedge\limits_{x\in\mathbf{R}} f_2(x)=f(|x|)$; $f_3\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, gdzie $\bigwedge\limits_{x\in\mathbf{R}} f_3(x)=f(kx)$; $f_4\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, gdzie $\bigwedge\limits_{x\in\mathbf{R}} f_4(x)=|f(x)|$?

4.27. Dane są funkcje $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ i $g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$.
a) zakładając, że f i g są monotoniczne zbadać monotoniczność funkcji $f+g, f\cdot g$;
b) zakładając, że f i g są bijekcjami sprawdzić, czy funkcje $f+g$ i $f\cdot g$ są bijekcjami.

4.28. Czy można określić funkcje: $f\colon X\to Y$, jeżeli:
a) $\bar{\bar{X}}=20\wedge\bar{\bar{Y}}=10$; b) $\bar{\bar{X}}=20\wedge\bar{\bar{Y}}=20$; c) $\bar{\bar{X}}=20\wedge\bar{\bar{Y}}=22$;
d) X ma nieskończenie wiele elementów, Y ma skończoną liczbę elementów;
e) X ma skończoną liczbę elementów, Y ma nieskończoną liczbę elementów?
W przypadku gdy funkcję można określić, czy istnieje funkcja do niej odwrotna?

4.29. Wykazać, że jeżeli odwzorowanie $f\colon X\to Y$ jest różnowartościowe, to dla dowolnych $A, B\subset X$ jest $f(A-B)=f(A)-f(B)$.

4.30. Wykazać, że funkcja $f\colon \mathbf{N}\times\mathbf{N}\ni(m,n)\to 2^{m-1}(2n-1)\in\mathbf{N}$ jest bijekcją.

4.31. Wykazać, że jeżeli odwzorowania $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to Z$ są bijekcjami, to odwzorowanie $g\circ f$ jest bijekcją i $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

4.32. Udowodnić, że: a) $X\sim X$; b) $X\sim Y\Rightarrow Y\sim X$; c) $(X\sim Y)\wedge(Y\sim Z)\Rightarrow X\sim Z$ (symbol $\sim$ oznacza równoliczność zbiorów).

4.33. Znaleźć moc zbioru wszystkich funkcji różnowartościowych, przekształcających zbiór m-elementowy w zbiór n-elementowy, gdzie $n>m$.

4.34. Znaleźć moc zbioru wszystkich funkcji $f\colon X\to Y$, gdzie X składa się z m elementów oraz Y składa się z n elementów.

4.35. Udowodnić, że następujące zbiory są przeliczalne:
a) zbiór liczb całkowitych ujemnych; b) zbiór liczb całkowitych; c) zbiór liczb naturalnych parzystych; d) zbiór liczb naturalnych nieparzystych; e) zbiór liczb wymiernych.

4.36. Udowodnić, że suma zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna.

4.37. Udowodnić, że iloczyn kartezjański n zbiorów przeliczalnych jest przeliczalny.

4.38. Udowodnić, że suma przeliczalnej ilości zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna.

4.39. Udowodnić, że zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej rzeczywistej o współczynnikach całkowitych jest przeliczalny.

4.40. Udowodnić, że zbiór liczb algebraicznych, tzn. zbiór wszystkich pierwiastków wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach całkowitych jest przeliczalny.

4.41. Udowodnić, że zbiór liczb rzeczywistych przedziału (0,1) ma moc większą niż moc zbioru liczb naturalnych.

4.42. Udowodnić, że zbiór liczb rzeczywistych przedziału $\langle a, b\rangle$ jest tej samej mocy co zbiór liczb rzeczywistych przedziału $\langle c, d\rangle$.

4.43. Udowodnić, że $\bar{\bar{\mathbf{R}}}_+ = \overline{\overline{(0, a)}}$.

4.44. Udowodnić, że $\bar{\bar{\mathbf{R}}} = \overline{\overline{(a, b)}}$.

4.45. Udowodnić, że zbiór punktów kwadratu jest tej samej mocy co zbiór punktów koła.

4.46. Udowodnić, że zbiór liczb rzeczywistych przestępnych, tzn. takich, które nie są algebraiczne jest nieprzeliczalny.

Odpowiedzi

4.11. a) $3>b \vee a>3$; b) $(b<1)\vee(1<a<b<4)\vee(a>4)$;

c) $(-2<a<b<-\frac{7}{4})\vee(a>-\frac{7}{4})$; d) $(b<-3)\vee(-3<a<b<1)\vee(a>5)$;

e) $(b<-3)\vee(a>3)$; f) $k\pi+\frac{1}{12}\pi\leqslant a<b\leqslant(2k+1)\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{12}\pi$.

4.12. a) Relacja wyznacza: funkcję, jeżeli

$$[c\leqslant -8 \wedge d\geqslant \max(2a^2-8,\, 2b^2-8)] \vee [-8<c\leqslant \min(2a^2-8,\, 2b^2-8)\wedge$$
$$\wedge\, d\geqslant \max(2a^2-8,\, 2b^2-8)\wedge ab\geqslant 0];$$

injekcję, jeżeli jest funkcją i $ab\geqslant 0$;
surjekcję, jeżeli

$$[c=\min(2a^2-8,\, 2b^2-8)\wedge d=\max(2a^2-8,\, 2b^2-8)\wedge ab\geqslant 0]\vee$$
$$\vee\,[c=-8\wedge d=\max(2a^2-8,\, 2b^2-8)];$$

bijekcję, jeżeli

$$(ab\geqslant 0)\wedge[c=\min(2a^2-8,\, 2b^2-8)\wedge d=\max(2a^2-8,\, 2b^2-8)].$$

b) Relacja wyznacza: funkcję, jeżeli

$$[c\leqslant 0\wedge d\geqslant \max(\sqrt{|a|},\, \sqrt{|b|})]\vee[0<c\leqslant \min(\sqrt{|a|},\, \sqrt{|b|})\wedge$$
$$\wedge\, d\geqslant \max(\sqrt{|a|},\, \sqrt{|b|})\wedge ab\geqslant 0];$$

injekcję, jeżeli jest funkcją i $ab\geqslant 0$;
surjekcję, jeżeli

$$[c=\min(\sqrt{|a|},\, \sqrt{|b|})\wedge d=\max(\sqrt{|a|},\, \sqrt{|b|})\wedge ab\geqslant 0]\vee$$
$$\vee\,[ab<0\wedge c=0\wedge d=\max(\sqrt{|a|},\, \sqrt{|b|})];$$

bijekcję, jeżeli

$$(ab\geqslant 0)\wedge[c=\min(\sqrt{|a|},\sqrt{|b|})\wedge d=\max(\sqrt{|a|},\sqrt{|b|})].$$

c) Relacja wyznacza: funkcję, jeżeli

$$(ab>0)\wedge\left(c\leqslant\frac{1}{b}\right)\wedge\left(d\geqslant\frac{1}{a}\right),$$

injekcję zawsze, jeżeli jest funkcją;
surjekcję, jeżeli

$$(ab>0)\wedge\left(c=\frac{1}{b}\right)\wedge\left(d=\frac{1}{a}\right),$$

bijekcję, jeżeli jest surjekcją.
d) Relacja wyznacza: funkcję, jeżeli

$$(ab>0)\wedge[c\leqslant\min(\log|a|,\log|b|)]\wedge[d\geqslant\max(\log|a|,\log|b|)];$$

injekcję zawsze, jeżeli jest funkcją,
surjekcję, jeżeli

$$(ab>0)\wedge c=\min(\log|a|,\log|b|)\wedge d=\max(\log|a|,\log|b|);$$

bijekcję, jeżeli jest surjekcją.
e) Relacja wyznacza: funkcję, jeżeli

$$[c\leqslant 0\wedge d\geqslant\max((a-2)^2,(b-2)^2)]\vee[0<c\leqslant\min((a-2)^2,(b-2)^2)\wedge$$
$$\wedge\, d\geqslant\max((a-2)^2,(b-2)^2)\wedge 2\notin(a,b)];$$

injekcję, jeżeli jest funkcją i $2\notin(a,b)$;
surjekcję, jeżeli

$$[2\notin(a,b)\wedge c=\min((a-2)^2,(b-2)^2)\wedge d=\max((a-2)^2,(b-2)^2)]\vee$$
$$\vee\,[2\in\langle a,b\rangle\wedge c=0\wedge d=\max((a-2)^2,(b-2)^2)];$$

bijekcję, jeżeli

$$2\notin(a,b)\wedge c=\min((a-2)^2,(b-2)^2)\wedge d=\max((a-2)^2,(b-2)^2).$$

4.13. a) $\mathscr{R}_1$ nie jest funkcją, np. dla $x=-1$, $y=63\notin\langle -4,60\rangle$;
b) $\mathscr{R}_2$ jest funkcją, surjekcją, nie jest injekcją;
c) $\mathscr{R}_3$ jest funkcją, injekcją, nie jest surjekcją;
d) $\mathscr{R}_4$ funkcja, injekcja, nie jest surjekcją, ponieważ $f(X)=\langle -5, 107\rangle\neq\langle -5, 110\rangle$.

4.14. a) Wyznacza, ale nie jest surjekcją, $f(D)=\langle 0,4\rangle$; b) nie wyznacza; c) wyznacza surjekcję; d) wyznacza, ale nie surjekcję, $f(D)=\langle 0,2\rangle$.

4.18. a) $D=\langle\frac{1}{2}\sqrt{2},\ 1)$; b) $D\cup\{1\}$; c) $D\cup\{1\}$; d) $\emptyset$; e) $\mathbf{R}_+-A-B$.
4.19. a) $\langle 0,\ +\infty)$; b) $(0,\ +\infty)$; c) $\langle 0,\ 1\rangle$; d) $\langle 0,\ +\infty)$; e) $(-\infty,-\sqrt{2}\rangle\cup$ $\cup\langle\sqrt{2},\ +\infty)$; f) $\langle-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\rangle$.
4.22. a) $\mathscr{U}=\{(x,y):\ y=\log(\sqrt{x}-3)\}$ wyznacza funkcję na $(9,\ +\infty)$,
$\mathscr{W}=\{(x,y):\ y=\sqrt{\log(x-3)}\}$ wyznacza funkcję na $\langle 4,\ +\infty)$;
b) $\mathscr{U}=\{(x,y):\ y=\sin\log x\}$ wyznacza funkcję na $\mathbf{R}_+$,
$\mathscr{W}=\{(x,y):\ y=\log\sin x\}$ wyznacza funkcję na

$$X=\{x\in\mathbf{R}:\ 2k\pi<x<(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{C}\};$$

c) $\mathscr{U}=\left\{(x,y):\ y=\dfrac{3}{\sqrt{4-x}}\right\}$ wyznacza funkcję na $(-\infty,\ 4)$,

$\mathscr{W}=\left\{(x,y):\ y=\sqrt{4-\dfrac{3}{x}}\right\}$ wyznacza funkcję na $X=\{x:\ x<0\vee x\geqslant\frac{3}{4}\}$;

d) $\mathscr{U}=\{(x,y):\ y=\sqrt{\sqrt{x}-3}\}$ wyznacza funkcję na $\langle 9,\ +\infty)$,

$\mathscr{W}=\{(x,\ y):\ y=\sqrt[4]{x-3}\}$ wyznacza funkcję na $\langle 3,+\infty)$;

e) $\mathscr{U}=\mathscr{W}=\left\{(x,y):\ y=\dfrac{2x-3}{11-6x}\right\}$ wyznacza funkcję na $\mathbf{R}-\{\frac{3}{2},\frac{11}{6}\}$.

4.23. a) Różne, $\mathscr{R}_1$ określa funkcję na $\mathbf{R}-\{0\}$, $\mathscr{R}_2$ określa funkcją na $\mathbf{R}_+$, $\mathscr{R}_1$ i $\mathscr{R}_2$ określają tę samą funkcję na $\mathbf{R}_+$;
b) różne, $\mathscr{R}_1$ określa funkcję na $\mathbf{R}-\{(2k+1)\frac{1}{2}\pi\}$, $k\in\mathbf{C}$, $\mathscr{R}_2$ określa funkcję na $\mathbf{R}-$ $-\{k\frac{1}{2}\pi\}$, $k\in\mathbf{C}$, $\mathscr{R}_1$ i $\mathscr{R}_2$ określa tę samą funkcję na $\mathbf{R}-\{k\frac{1}{2}\pi\}$, $k\in\mathbf{C}$;
c) różne, $\mathscr{R}_1$ i $\mathscr{R}_2$ określają funkcje na $\mathbf{R}$, $\mathscr{R}_1$ i $\mathscr{R}_2$ określają tę samą funkcję na $\langle 3,\ +\infty)$;
d) różne, $\mathscr{R}_1$ i $\mathscr{R}_2$ określają funkcję na $\mathbf{R}$, $\mathscr{R}_1$ i $\mathscr{R}_2$ określają tę samą funkcję na $\langle-\frac{1}{2}\pi,$ $\frac{1}{2}\pi\rangle$;
e) różne, $\mathscr{R}_1$ określa funkcję na $\langle-1,\ 1\rangle$, $\mathscr{R}_2$ określa funkcję na $\mathbf{R}$, $\mathscr{R}_1$ i $\mathscr{R}_2$ określają tę samą funkcję na $\langle-1,\ 1\rangle$.
4.26. f_1 malejąca; f_2 nie jest monotoniczna; f_3 rosnąca dla $k>0$, malejąca dla $k<0$ oraz stała dla $k=0$; f_4 rosnąca, jeżeli $\bigwedge\limits_{x\in\mathbf{R}} f(x)\geqslant 0$, malejąca, jeżeli $\bigwedge\limits_{x\in\mathbf{R}} f(x)<0$, nie jest monotoniczna, jeżeli f przyjmuje różne znaki na $\mathbf{R}$.
4.27. a) Jeżeli f i g rosnące [malejące], to $f+g$ rosnąca [malejąca], jeżeli f i g monotoniczne, ale jedna rosnąca a druga malejąca, to $f+g$ i $f\cdot g$ mogą nie być monotoniczne;
b) $f+g$ i $f\cdot g$ może nie być bijekcją, np. $f:\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, gdzie $f(x)=x^3+5$, $g:\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, gdzie $g(x)=-x^3$, ale $(f+g):\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, gdzie $(f+g)(x)=5$ nie jest bijekcją.
4.28. a) Tak, funkcji odwrotnej nie ma; b), c), e) tak, funkcja odwrotna istnieje; d) tak, funkcji odwrotnej nie ma.
4.33. $n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$. **4.34.** n^m.

4.41. Wsk. Przeprowadzić dowód nie wprost. Każdą liczbę przedziału (0, 1) przedstawić w postaci ułamka dziesiętnego, a następnie utworzyć liczbę rzeczywistą należącą do przedziału (0, 1) i różną od wszystkich wyrazów ciągu otrzymanego z zaprzeczenia tezy.

4.42. Funkcja określona wzorem $f(x)=\frac{d-c}{b-a}x+\frac{bc-ad}{b-a}$, $x\in\langle a, b\rangle$, realizuje równoliczność.

4.43. Funkcja określona wzorem $f(x)=\frac{ax}{1+x}$, $x\in(0, a)$ realizuje równoliczność.

4.44. Wsk. Funkcja określona wzorem $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$, $x\in(-1, 1)$ jest biiekcją $f\colon \mathbf{R}\mapsto$ $\mapsto(-1, 1)$.

4.45. Wsk. Umieścić środek koła w środku kwadratu i poprowadzić półproste z tego punktu.

4.46. Wsk. Zbiór **R** jest nieprzeliczalny, zbiór liczb algebraicznych jest przeliczalny.

ROZDZIAŁ II

ELEMENTY ALGEBRY I GEOMETRII

§ 5. GRUPY. CIAŁA. PIERŚCIENIE

5.1. *Strukturą algebraiczną* (lub krótko *strukturą*) nazywamy zbiór złożony ze skończonej liczby zbiorów oraz ze skończonej liczby odwzorowań iloczynów kartezjańskich par tych zbiorów w te zbiory. Odwzorowania te będziemy nazywali *działaniami*. *Grupą* nazywamy strukturę $(G, \square)$ (będziemy pisali $(G, \square)$ zamiast $\{G, \square\}$), gdzie $G \neq \emptyset$ i $\square\colon G \times G \ni (g, h) \to g \square h \in G$, (piszemy $\square(g, h) = g \square h$), przy czym

1° $\bigwedge_{g_1, g_2, g_3 \in G} (g_1 \square (g_2 \square g_3) = (g_1 \square g_2) \square g_3)$ (łączność działania $\square$).

2° $\bigvee_{e \in G} \bigwedge_{g \in G} (e \square g = g \square e = g)$; element e nazywamy *jednością grupy* (*elementem neutralnym grupy*),

3° $\bigwedge_{g \in G} \bigvee_{h \in G} (g \square h = h \square g = e)$, element h nazywamy *elementem odwrotnym* do g i oznaczamy g^{-1}.

Jeżeli grupa spełnia ponadto warunek

4° $\bigwedge_{g, h \in G} (g \square h = h \square g)$,

to nazywamy ją *grupą abelową* (*przemienną*).

Na ogół grupę $(G, \square)$ będziemy oznaczali G.

Niech $(G, \square)$, $(H, \square')$ oznaczają grupy. Odwzorowanie $f\colon G \to H$ nazywamy *izomorfizmem grup* G i H, jeżeli:

α) $\bigwedge_{g, k \in G} (f(g \square k) = f(g) \square' f(k))$, β) f jest bijekcją.

Pierścieniem nazywamy strukturę $(G, +, \cdot)$ taką, że $(G, +)$ jest grupą abelową oraz odwzorowanie $\cdot\colon G \times G \to G$ ma własności:

$$\bigwedge_{a, b, c \in G} (a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c) \text{ (łączność)},$$

$$\bigwedge_{a, b, c \in G} ((a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c) \wedge ((b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a)) \quad \text{(rozdzielność)}.$$

5.2. *Ciałem* nazywamy strukturę $(K, +, \cdot)$, gdzie $+\colon K \times K \to K$, $\cdot\colon K \times K \to K$ są odwzorowaniami spełniającymi warunki:

C_1. $(K, +)$ – grupa abelowa,

C_2. $(K - \{0\}, \cdot)$ – grupa abelowa, gdzie 0 jest jednością grupy $(K, +)$,

C_3. $\bigwedge_{\alpha, \beta, \gamma \in K} (\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma)$ (rozdzielność działania $\cdot$ względem działania $+$).

Ciałem liczb zespolonych nazywamy strukturę $(\mathbf{Z},+,\cdot)$ (por. zadanie 5.27), gdzie $\mathbf{Z}:=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ oraz działania „+" i „·"określone są następująco:

$$\bigwedge_{(a,b),(a_1,b_1)\in\mathbf{Z}}\big((a,b)+(a_1,b_1)=(a+a_1,b+b_1)\big),$$

$$\bigwedge_{(a,b),(a_1,b_1)\in\mathbf{Z}}\big((a,b)\cdot(a_1,b_1)=(aa_1-bb_1,ab_1+a_1b)\big).$$

Uwaga. Równość elementów $(a,b),(a_1,b_1)\in\mathbf{Z}$ wynika z równości par uporządkowanych, tzn.

$$((a,b)=(a_1,b_1))\Leftrightarrow((a=a_1)\wedge(b=b_1)).$$

Zbiór $\mathbf{Z}$ nazywamy *zbiorem liczb zespolonych*, pary $(a,b)\in\mathbf{Z}$ również będziemy oznaczali przez z.

Weźmy odwzorowania:

$$f\colon\ \mathbf{Z}\ni(a,b)=z\to f(z)=\bar{z}:=(a,-b)\in\mathbf{Z},$$

$$|\ |\colon\ \mathbf{Z}\ni(a,b)=z\to|z|\in\langle 0,+\infty),$$

gdzie

$$|z|:=\sqrt{z\cdot\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\arg\colon\ \mathbf{Z}-\{(0,0)\}\ni(a,b)=z\to\arg z\in\langle 0,2\pi),$$

gdzie $\arg z$ jest jedynym rozwiązaniem układu równań:

$$\cos(\arg z)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad \sin(\arg z)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Liczby $\bar{z}\in\mathbf{Z}$, $|z|\in\mathbf{R}$, $\arg z\in\langle 0,2\pi)$ nazywamy odpowiednio: *liczbą sprzężoną z liczbą z*, *modułem liczby z*, *argumentem głównym liczby z*.

Niech $(K,+,\cdot)$, $(K,\oplus,\odot)$ oznaczają ciała.

Odwzorowanie $f\colon K\to K'$ nazywa się *izomorfizmem* ciał K i K', gdy

1° $\bigwedge_{\alpha,\beta\in K}\big((f(\alpha+\beta)=f(\alpha)\oplus f(\beta))\wedge(f(\alpha\cdot\beta)=f(\alpha)\odot f(\beta))\big)$,

2° f jest bijekcją.

Przykłady

5.1. Wykazać, że zbiór $G=\{f\colon\{a_1,a_2,\dots,a_n\}\to\{a_{k_1},a_{k_2},\dots,a_{k_n}\}\}$, gdzie $a_i\neq a_j$ dla $i\neq j$, $i,j=1,2,\dots,n$, $k_1,k_2,\dots,k_n$ są permutacjami liczb $1,2,\dots,n$ oraz f są bijekcjami, tworzy grupę nieprzemienną, jeżeli $\square=\circ$, (tzn. działaniem grupowym jest złożenie odwzorowań).

Rozwiązanie. Korzystamy z definicji grupy (por. punkt 5.1), tzn. należy wykazać, że: $\bigwedge_{f,g\in G}(f\circ g\in G)$; spełnione są warunki 1°, 2°, 3° grupy, nie spełniony jest warunek 4°.

Korzystając z wyników zadań 4.31 i 4.24 stwierdzamy, że $f\circ g$ jest bijekcją oraz że zachodzi war. 1° (łączność). Odwzorowanie tożsamościowe, tzn. odwzorowanie określone wzorem $I(a_i)=a_i$, $i=1,2,\dots,n$ jest jednością grupy (war. 2°), ponieważ

$$\big((I\circ f)(a_i)=I(f(a_i))=f(a_i)\big)\wedge\big((f\circ I)(a_i)=f(I(a_i))=f(a_i)\big)\Rightarrow\bigwedge_{f\in G}(I\circ f=f\circ I=f).$$

Elementem odwrotnym (war. 3°) jest odwzorowanie f^{-1} (zawsze istnieje, gdyż f jest bijekcją), ponieważ dla $i=1,2,\ldots,n$ mamy:

$$a_{k_i}=f(a_i)\Leftrightarrow a_i=f^{-1}(a_{k_i}),\quad (f\circ f^{-1})(a_{k_i})=f(f^{-1}(a_{k_i}))=f(a_i)=a_{k_i},$$
$$(f^{-1}\circ f)(a_i)=f^{-1}(f(a_i))=f^{-1}(a_{k_i})=a_i\Rightarrow f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=I.$$

Działanie $\circ$ nie jest przemienne (por. war. 4°). Istotnie, jeżeli

$$\left|\begin{array}{c|c} a_i & a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_{n-1}\ a_n \\ \hline f & a_2\ a_1\ a_3\ \ldots\ a_{n-1}\ a_n \end{array}\right|,\quad \left|\begin{array}{c|c} a_i & a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_{n-1}\ a_n \\ \hline g & a_n\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_{n-1}\ a_1 \end{array}\right|,$$

to

$$\left|\begin{array}{c|c} a_i & a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_{n-1}\ a_n \\ \hline f\circ g & a_n\ a_1\ a_3\ \ldots\ a_{n-1}\ a_2 \end{array}\right| \quad\text{oraz}\quad \left|\begin{array}{c|c} a_i & a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_{n-1}\ a_n \\ \hline g\circ f & a_2\ a_n\ a_3\ \ldots\ a_{n-1}\ a_1 \end{array}\right|,$$

tzn. $f\circ g\neq g\circ f$. □

Uwaga. Z definicji G wynika, że G jest zbiorem permutacji (por. § 2). Przyporządkowując każdemu elementowi a_j zbioru $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ liczbę naturalną j, stwierdzamy, że każdą permutację $f\in G$ można przedstawić w postaci

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n\end{pmatrix},$$

gdzie k_j, $j=1,2,\ldots,n$ jest pewną permutacją liczb $1,2,\ldots,n$.

5.2. Wykazać, że zbiór funkcji określonych wzorem (tzw. *funkcji homograficznych*):

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d},\quad x\in\mathbf{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\},\quad \text{gdzie}\quad ((ad-bc)\neq 0\wedge(a,b,c,d\in\mathbf{R}))$$

tworzy grupę, jeżeli działaniem □ jest złożenie funkcji.

Rozwiązanie. Należy najpierw wykazać, że złożenie $g\circ f$ jest funkcją homograficzną. Istotnie,

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\frac{a_1\dfrac{ax+b}{cx+d}+b_1}{c_1\dfrac{ax+b}{cx+d}+d_1}=\frac{(a_1a+b_1c)x+(a_1b+b_1d)}{(c_1a+d_1c)x+(c_1b+d_1d)},$$

gdzie

$$(a_1a+b_1c)(c_1b+d_1d)-(c_1a+d_1c)(a_1b+b_1d)=(ad-bc)(a_1d_1-b_1c_1)\neq 0,$$

jeżeli $(ad-bc)\neq 0\wedge(a_1d_1-b_1c_1)\neq 0$, tzn. $g\circ f$ jest funkcją homograficzną.

Z kolei należy sprawdzić warunki 1°, 2° i 3° definicji grupy. Niech f, g i h będą funkcjami homograficznymi odpowiednio o współczynnikach: a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2.

Korzystając z postaci $g \circ f$, otrzymujemy:

$$[h \circ (g \circ f)](x) = h\left(\frac{(a_1 a + b_1 c)x + (a_1 b + b_1 d)}{(c_1 a + d_1 c)x + (c_1 b + d_1 b)}\right) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} =$$

$$= \frac{(aa_1 a_2 + cb_1 a_2 + ac_1 b_2 + cd_1 b_2)x + (a_1 a_2 b + b_1 a_2 d + b_2 c_1 b + b_2 d_1 d)}{(c_2 a_1 a + c_2 b_1 c + c_1 ad_2 + d_1 cd_2)x + (c_2 a_1 b + c_2 b_1 d + d_2 bc_1 + d_2 d_1 d)}$$

oraz

$$[(h \circ g) \circ f](x) = \frac{(a_2 a_1 + b_2 c_1)\dfrac{ax+b}{cx+d} + (a_2 b_1 + b_2 d_1)}{(c_2 a_1 + d_2 c_1)\dfrac{ax+b}{cx+d} + (c_2 b_1 + d_2 d_1)} =$$

$$= \frac{(aa_1 a_2 + ab_2 c_1 + ca_2 b_1 + cb_2 d_1)x + (a_2 a_1 b + bb_2 c_1 + a_2 b_1 d + b_2 d_1 d)}{(c_2 a_1 a + d_2 c_1 a + cc_2 b_1 + cd_2 d_1)x + (c_2 a_1 b + d_2 c_1 b + dc_2 b_1 + dd_2 d_1)},$$

tzn. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Jednością grupy jest funkcja homograficzna tożsamościowa, tzn. funkcja określona wzorem

$$e(x) = \frac{1 \cdot x + 0}{0 \cdot x + 1} = x.$$

Elementem odwrotnym do elementu f, jest funkcja odwrotna f^{-1}. Łatwo sprawdzić, że jeżeli $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $ad - bc \neq 0$, to

$$f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a} \quad \text{oraz} \quad (f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x.$$

5.3. Dane są zbiory $X = \{1, 3, 5, 7\}$, $Y = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, gdzie funkcje f_i: $\mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$ określone są wzorami: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$, $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_4(x) = -\dfrac{1}{x}$ oraz odwzorowania $\vartriangle : X \times X \ni (a_1, a_2) \to m \in \mathbf{N}$ określone wzorem $a_1 \cdot a_2 = p \cdot 8 + m$, $p \in \mathbf{N}$ (tzn. m jest resztą z dzielenia iloczynu $a_1 \cdot a_2$ przez 8), $\circ : Y \times Y \ni (f_i, f_j) \to f_i \circ f_j \in G$, gdzie G jest zbiorem funkcji f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Wykazać, że struktury $(X, \vartriangle)$, $(Y, \circ)$ są grupami przemiennymi izomorficznymi.

Rozwiązanie. Należy wykazać, że: $\vartriangle(X \times X) = X$, $\circ(Y \times Y) = Y$, działania $\vartriangle$ i $\circ$ spełniają warunki 1° - 4° punktu 5.1 oraz że istnieje bijekcja realizująca izomorfizm grup X i Y. W tym celu wartości odwzorowania $\vartriangle$ wypisujemy w tabelce

$\vartriangle$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

z której wynika, że $\vartriangle(X \times X) = X$.

Łączność odwzorowania wykazujemy, sprawdzając wszystkie możliwe przypadki, tzn. 16^3 (liczba wariacji z powtórzeniami z szesnastu elementów po trzy), np.

$$(3 \vartriangle 5) \vartriangle 7 = 7 \vartriangle 7 = 1, \qquad (3 \vartriangle 3) \vartriangle 5 = 1 \vartriangle 5 = 5,$$

$$3 \vartriangle (5 \vartriangle 7) = 3 \vartriangle 3 = 1, \qquad 3 \vartriangle (3 \vartriangle 5) = 3 \vartriangle 7 = 5, \qquad \text{itd}.$$

Jednością grupy jest oczywiście element 1, natomiast elementem odwrotnym do każdego elementu jest ten sam element, ponieważ $\bigwedge_{x \in X} x \vartriangle x = 1$. Przemienność grupy (war. 4°) wynika z symetrii tabelki względem przekątnej składającej się z jedynek.

Podobnie postępujemy w przypadku struktury $(Y, \circ)$:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

skąd $\circ(Y \times Y) = Y$; łączność wykazujemy, sprawdzając 16^3 przypadków, np.

$$((f_2 \circ f_3) \circ f_4)(x) = (f_4 \circ f_4)(x) = f_1(x) = x,$$

$$(f_2 \circ (f_3 \circ f_4))(x) = (f_2 \circ f_2)(x) = f_1(x) = x, \qquad \text{itd};$$

jednością grupy jest element f_1; elementem odwrotnym do każdego elementu jest ten sam element; przemienność grupy wynika z symetrii tabelki względem przekątnej składającej się z f_1.

Izomorfizm realizuje odwzorowanie φ określone następująco: $\varphi(1) = f_1$, $\varphi(3) = f_2$, $\varphi(5) = f_3$, $\varphi(7) = f_4$. Istotnie, φ jest różnowartościowe i odwzorowuje X na Y, a więc jest bijekcją. Z kolei sprawdzamy warunek α) definicji izomorfizmu, przy czym ze względu na przemienność grup oraz $\varphi(1) = f_1$, gdzie 1 i f_1 są jednościami grup, wystarczy sprawdzić dla par (3, 3), (3, 5), (3, 7), (5, 5), (5, 7), (7, 7). Mamy:

$$\varphi(3 \vartriangle 3) = \varphi(1) = f_1, \qquad \varphi(3) \circ \varphi(3) = f_2 \circ f_2 = f_1 = \varphi(3 \vartriangle 3);$$

$$\varphi(3 \vartriangle 5) = \varphi(7) = f_4, \qquad \varphi(3) \circ \varphi(5) = f_2 \circ f_3 = f_4 = \varphi(3 \vartriangle 5);$$

$$\varphi(3 \vartriangle 7) = \varphi(5) = f_3, \qquad \varphi(3) \circ \varphi(7) = f_2 \circ f_4 = f_3 = \varphi(3 \vartriangle 7);$$

$$\varphi(5 \vartriangle 5) = \varphi(1) = f_1, \qquad \varphi(5) \circ \varphi(5) = f_3 \circ f_3 = f_1 = \varphi(5 \vartriangle 5);$$

$$\varphi(5 \vartriangle 7) = \varphi(3) = f_2, \qquad \varphi(5) \circ \varphi(7) = f_3 \circ f_4 = f_2 = \varphi(5 \vartriangle 7);$$

$$\varphi(7 \vartriangle 7) = \varphi(1) = f_1 \qquad \varphi(7) \circ \varphi(7) = f_4 \circ f_4 = f_1 = \varphi(7 \vartriangle 7).$$

5.4. Dany jest zbiór $G = \{f\colon f\colon \mathbf{R} \ni x \to (ax+b) \in \mathbf{R},\ a, b \in \mathbf{R}\}$ oraz odwzorowania $+ : G \times G \to F$ (dodawanie), $\bullet : G \times G \to F$ (mnożenie), gdzie $F = \{g\colon g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$, określone wzorami

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x),$$

$$(f_1 \bullet f_2)(x)=(f_1 \circ f_2)(x)=f_1(f_2(x)).$$

Sprawdzić czy struktura $(G, +, \bullet)$ spełnia wszystkie warunki pierścienia.

Rozwiązanie. Niech

$$\bigwedge_{f_1,f_2,f_3\in G} \big(f_1(x)=a_1x+b_1,\ f_2(x)=a_2x+b_2,\ f_3(x)=a_3x+b_3\big).$$

Sprawdzimy najpierw, czy $(G, +)$ jest grupą,

a) $(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)=(a_1+a_2)x+(b_1+b_2)$, a więc obraz $+(G\times G)\subset G$, tzn. $+$ jest działaniem;

b) $$\big(f_1+(f_2+f_3)\big)(x)=a_1x+b_1+(a_2+a_3)x+b_2+b_3=$$
$$=(a_1+a_2+a_3)x+(b_1+b_2+b_3),$$
$$\big((f_1+f_2)+f_3\big)(x)=(a_1+a_2)x+(b_1+b_2)+a_3x+b_3=$$
$$=(a_1+a_2+a_3)x+(b_1+b_2+b_3),$$

tzn. działanie $+$ jest łączne (war. 1° grupy);

c) jednością grupy jest funkcja określona wzorem $e(x)=0$, ponieważ

$$\bigwedge_f \big((0+a)x+(0+b)=(a+0)x+(b+0)=ax+b\big),$$

d) elementem odwrotnym do f jest funkcja h określona wzorem $h(x)=-ax-b$, ponieważ

$$\bigwedge_f \big((a-a)x+(b-b)=(-a+a)x+(-b+b)=0\big);$$

e) $(a_1+a_2)x+(b_1+b_2)=(a_2+a_1)x+(b_2+b_1) \Rightarrow (f_1+f_2)(x)=(f_2+f_1)(x)$, tzn. przemienność działania $+$. A więc struktura $(G, +)$ jest grupą abelową.

Z kolei sprawdzamy warunki dla działania $\bullet$;

a_1) $(f_1 \bullet f_2)(x)=(f_1\circ f_2)(x)=f_1(f_2(x))=a_1a_2x+(a_1b_2+b_1)$, tzn. $\bullet(G\times G)\subset G$, czyli $\bullet$ jest działaniem;

a_2) $$\big((f_3\circ f_2)\circ f_1\big)(x)=(f_3\circ f_2)(a_1x+b_1)=f_3[a_2(a_1x+b_1)+b_2]=$$
$$=a_1a_2a_3x+a_2a_3b_1+a_3b_2+b_3,$$
$$\big(f_3\circ(f_2\circ f_1)\big)(x)=f_3[a_2(a_1x+b_1)+b_2]=a_1a_2a_3x+a_2a_3b_1+a_3b_2+b_3=$$
$$=\big((f_3\circ f_2)\circ f_1\big)(x),$$

tzn. działanie $\bullet$ jest łączne,

a_3) sprawdzamy rozdzielność działania $\bullet$ względem $+$:

$$\big((f_2+f_3)\circ f_1\big)(x)=(f_2+f_3)(a_1x+b_1)=f_2(a_1x+b_1)+f_3(a_1x+b_1)=$$
$$=(f_2\circ f_1+f_3\circ f_1)(x),$$

tzn. mnożenie $\bullet$ jest lewostronnie rozdzielne względem dodawania;

a$_4$) $(f_1 \circ (f_2+f_3))(x)=f_1(a_2x+b_2+a_3x+b_3)=$

$$=a_1(a_2x+b_2+a_3x+b_3)+b_1=a_1(a_2+a_3)x+a_1b_2+a_1b_3+b_1$$

oraz

$$(f_1 \circ f_2)(x)+(f_1 \circ f_3)(x)=f_1(a_2x+b_2)+f_1(a_3x+b_3)=$$

$$=a_1(a_2x+b_2)+b_1+a_1(a_3x+b_3)+b_1=$$

$$=a_1(a_2+a_3)x+a_1b_2+a_1b_3+2b_1 \neq (f_1 \circ (f_2+f_3))(x),$$

tzn. mnożenie nie jest prawostronnie rozdzielne względem dodawania. Wynika stąd, że struktura $(G, +, \bullet)$ nie jest pierścieniem.

5.5. Dane są struktury $(\mathbf{W}, +, \cdot)$, $(\mathbf{W}, +, \odot)$, gdzie $\mathbf{W}$ jest zbiorem liczb wymiernych, $+$ i $\cdot$ są zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia liczb wymiernych, natomiast $\odot$ określone jest wzorem

$$\bigwedge_{w_1, w_2 \in \mathbf{W}} w_1 \odot w_2 = q w_1 w_2,$$

gdzie stała $q \in \mathbf{W} \wedge q \neq 0$. Wykazać, że struktury te są ciałami izomorficznymi.

R o z w i ą z a n i e. Zbiór $\mathbf{W}$ z działaniami $+$ i $\cdot$ jest oczywiście ciałem, przy czym jednością grupy $(\mathbf{W}, +)$ jest liczba 0, elementem odwrotnym do elementu $w \in \mathbf{W}$ jest liczba $-w$ oraz jednością grupy $(\mathbf{W}-\{0\}, \cdot)$ jest liczba 1, elementem odwrotnym do $w \in \mathbf{W}-\{0\}$ jest liczba $1/w$. Aby wykazać, że struktura $(\mathbf{W}, +, \odot)$ jest ciałem, wystarczy więc sprawdzić warunki C_2 i C_3 (por. punkt 5.2).

Niech w_1, w_2, w_3 oznaczają dowolne liczby należące do $\mathbf{W}-\{0\}$. Mamy:

a) $(w_1 \odot w_2) \odot w_3 = q w_1 w_2 \odot w_3 = q^2 w_1 w_2 w_3$ oraz

$$w_1 \odot (w_2 \odot w_3) = w_1 \odot q w_2 w_3 = q^2 w_1 w_2 w_3 = (w_1 \odot w_2) \odot w_3,$$

tzn. $\odot$ jest łączne,

b) elementem jednostkowym jest $1/q$, ponieważ

$$\bigwedge_{w \in \mathbf{W}-\{0\}} \left(w \odot \frac{1}{q} = \frac{1}{q} \odot w = w \right),$$

c) elementem odwrotnym do w jest element $\dfrac{1}{wq^2}$, ponieważ

$$\bigwedge_{w \in \mathbf{W}-\{0\}} \left(w \odot \frac{1}{wq^2} = \frac{1}{wq^2} \odot w = \frac{1}{q} \right),$$

d) $w_1 \odot w_2 = q w_1 w_2 = q w_2 w_1 = w_2 \odot w_1$, tzn. działanie $\odot$ jest przemienne (war. 4° grupy).

Wykazaliśmy więc, że $(\mathbf{W}-\{0\}, \odot)$ jest grupą przemienną (war. C_2).

Sprawdzamy warunek C_3:

$$w_1 \odot (w_2+w_3) = qw_1(w_2+w_3) = qw_1 w_2 + qw_1 w_3 = w_1 \odot w_2 + w_1 \odot w_3,$$

tzn. zachodzi rozdzielność $\odot$ względem $+$. A więc struktura $(\mathbf{W}, +, \odot)$ jest ciałem.

Izomorfizm ciał $(\mathbf{W}, +, \cdot)$, $(\mathbf{W}, +, \odot)$ realizuje funkcja f: $\mathbf{W} \to \mathbf{W}$ określona wzorem $f(w) = \frac{1}{q} w$. Istotnie f jest różnowartościowa (injekcja), przekształca $\mathbf{W}$ na $\mathbf{W}$ (jest surjekcją), tzn. jest bijekcją oraz

$$f(w_1+w_2) = \frac{1}{q}(w_1+w_2) = \frac{1}{q}w_1 + \frac{1}{q}w_2 = f(w_1)+f(w_2),$$

$$f(w_1 \cdot w_2) = \frac{1}{q} w_1 \cdot w_2 = q\frac{1}{q}w_1 \cdot \frac{1}{q}w_2 = \frac{1}{q}w_1 \odot \frac{1}{q}w_2 =$$
$$= f(w_1) \odot f(w_2),$$

tzn. spełnione są warunki 1° i 2° definicji izomorfizmu ciał.

5.6. Udowodnić wzór Moivre'a

(a) $$\big(|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \qquad n \in \mathbf{N},$$

gdzie $\mathbf{Z} \ni i = (0, 1)$ oraz $i^2 = (0, 1)\cdot(0, 1) = (0, -1) = -1 \in \mathbf{R}$.

D o w ó d   i n d u k c y j n y. Dla $n=1$ wzór jest prawdziwy. Załóżmy, że (a) jest prawdziwy dla $n=k$, tzn.

$$\big(|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^k = |z|^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$$

i weźmy lewą stronę wzoru (a) dla $n=k+1$:

$$\big(|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^{k+1} = |z|^{k+1}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^k(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$
$$= |z|^{k+1}(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$
$$= |z|^{k+1}(\cos k\varphi\cdot\cos\varphi - \sin k\varphi\cdot\sin\varphi + i(\cos k\varphi\cdot\sin\varphi + \sin k\varphi\cdot\cos\varphi)) =$$
$$= |z|^{k+1}(\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi),$$

tzn. (a) jest prawdziwy dla $n=k+1$. Z twierdzenia o indukcji wynika, że wzór (a) jest prawdziwy dla dowolnej liczby $n \in \mathbf{N}$.

U w a g a. W dowodzie korzystaliśmy z tego, że zbiór $\mathbf{Z}$ liczb zespolonych jest ciałem oraz że $\bigwedge_{z=(a,b)\in\mathbf{Z}} (z = a+bi)$ (por. zadanie 5.32).

5.7. Rozwiązać równanie

(a) $$z^n = a, \quad z, a \in \mathbf{Z}, \quad n \in \mathbf{N}$$

w ciele liczb zespolonych $\mathbf{Z}$.

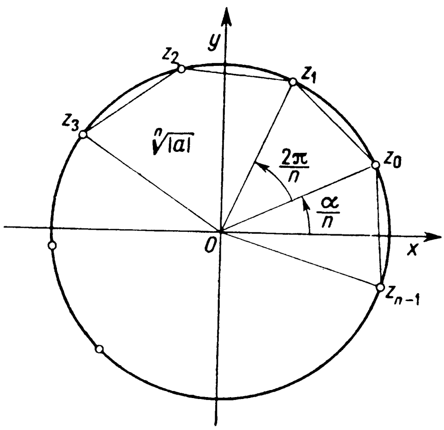
Rozwiązanie. Jeżeli $a=0$ (parę $(0,0)$ oznaczamy 0), to z zadania 5.35 wynika, że istnieje tylko jedno rozwiązanie i jest nim rozwiązanie zerowe. Niech więc $a\neq 0$ i niech $a=|a|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Należy znaleźć $|z|$ i φ. Z (a) mamy

$$(|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=|a|(\cos\alpha+i\sin\alpha)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |z|^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=|a|(\cos\alpha+i\sin\alpha)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |z|=(\sqrt[n]{|a|})\wedge(\cos n\varphi=\cos\alpha)\wedge(\sin n\varphi=\sin\alpha).$$

Korzystaliśmy ze wzoru Moivre'a oraz z jednoznaczności przedstawienia liczby zespolonej z w postaci $|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, gdzie $\alpha=\arg z$ (por. zadanie 5.33). Z równań $\cos n\varphi=\cos\alpha\wedge\sin n\varphi=\sin\alpha$ otrzymujemy $\varphi=\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}$, $k\in\mathbf{C}$. Ponieważ $\varphi=\arg z\in\langle 0,2\pi)$, więc mamy dokładnie n różnych wartości φ, mianowicie $\varphi_k=\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}$, $k=0,1,\ldots$ $\ldots,n-1$. Istnieje więc dokładnie n różnych pierwiastków równania (a) określonych wzorem

$$z_k=\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right),$$

$k=0,1,\ldots,n-1$. Geometrycznie pierwiastki z_k są wierzchołkami n-kąta foremnego wpisanego w koło o promieniu $\sqrt[n]{|a|}$ (rys. 5.1).



Rys. 5.1

Zadania

5.8. Wykazać, że zbiór

$$G=\{f: f:\mathbf{R}\ni x\to(ax+b)\in\mathcal{R},\ a\in\mathcal{R}-\{0\},\ b\in\mathbf{R}\}$$

z działaniem $\circ$ (superpozycją funkcji) tworzy grupę. Czy grupa ta jest przemienna?

5.9. Wykazać, że zbiór utworzony z symetrii kwadratu względem jego osi symetrii, z przekształcenia tożsamościowego oraz z obrotów kwadratu dookoła środka kwadratu o kąt 90°, tworzy grupę nieprzemienną złożoną z ośmiu elementów.

5.10. Wykazać, że zbiór funkcji $\left\{x,\ 1-x,\ \dfrac{1}{x},\ 1-\dfrac{1}{x},\ \dfrac{1}{1-x},\ \dfrac{x}{x-1}\right\}$ z działaniem $\square=\circ$ (superpozycja) tworzy grupę. Czy grupa ta jest przemienna?

5.11. Niech $(G,\square)$ będzie grupą. Wykazać, że
a) w G istnieje dokładnie jeden element neutralny;
b) każdy element $g\in G$ ma dokładnie jeden element odwrotny;
c) $\bigwedge_{g,p\in G}(g\square p)^{-1}=p^{-1}\square q^{-1}$.

5.12. Wykazać, że struktury $(\mathbf{C}, +)$, $(\mathbf{R}, +,)$ $(\mathbf{R}-\{0\}, \cdot)$, gdzie „$+$" jest dodawaniem oraz „$\cdot$" mnożeniem liczb rzeczywistych, są grupami przemiennymi. Jakie są elementy neutralne i odwrotne tych grup?

5.13. Wykazać, że zbiór permutacji z czterech elementów z działaniem $\square = \circ$ (superpozycją) tworzy grupę.

5.14. Dane są struktury $(Z_i, \square_i)$, $i=1, 2, 3$, gdzie Z_1 — zbiór permutacji z dwóch elementów, $\square_1$ — składanie permutacji, $Z_2=\{1, -1\}$, $\square_2 = \cdot$ (mnożenie liczb całkowitych), Z_3 — zbiór symetrii własnych odcinka, $\square_3$ — składanie symetrii własnych. Wykazać, że struktury $(Z_i, \square_i)$, $i=1, 2, 3$, tworzą grupy parami izomorficzne.

5.15. Udowodnić, że grupa permutacji trzech elementów (por. przykład 5.1) jest izomorficzna z grupą $(X, \square)$, gdzie X jest zbiorem symetrii własnych trójkąta równobocznego oraz $\square$ jest składaniem symetrii.

5.16. Wykazać, że zbiór liczb parzystych z działaniami: dodawaniem i mnożeniem liczb całkowitych tworzy pierścień.

5.17. Czy zbiór wielomianów jednej zmiennej rzeczywistej o współczynnikach rzeczywistych z działaniami: a) dodawaniem wielomianów, b) mnożeniem wielomianów, c) dodawaniem wielomianów i mnożeniem wielomianów, tworzy grupę w przypadkach a) i b), pierścień w przypadku c)?

5.18. Wykazać, że zbiór $G=\{f\colon f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$ z działaniami określonymi wzorami:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \qquad (f\cdot g)x=f(x)\cdot g(x), \qquad f, g \in G$$

tworzy pierścień.

Czy następujące podzbiory zbioru G z tymi samymi działaniami:

a) zbiór wielomianów, b) zbiór wielomianów stopnia n,

c) zbiór funkcji, dla których $f(0)=0$; d) zbiór funkcji dla których $f(0)=1$

tworzą pierścienie (tzw. podpierścienie)?

5.19. Czy zbiór $H=\{f\colon f\colon \mathbf{R} \to (0, 1\rangle\}$ z działaniami określonymi wzorami: $(f+g)(x)=$ $=f(x)\cdot g(x)$ („$\cdot$" oznacza mnożenie liczb rzeczywistych) $(f\cdot g)(x)=(f\circ g)(x)$ tworzy pierścień?

5.20. Wykazać, że zbiór funkcji $H=\{f\colon f\colon \mathbf{R}\to\langle 0, 1\rangle\}$ z działaniami określonymi wzorami:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)-[f(x)+g(x)]$$

(symbol $[f(x)+g(x)]$ oznacza część całkowitą $f(x)+g(x)$ por. zadanie 1.28),

$$(f\cdot g)(x)=(f\circ g)(x)$$

tworzy pierścień.

5.21. Wykazać, że zbiór liczb postaci $w_1+w_2\sqrt{3}$, gdzie w_1, $w_2 \in \mathbf{W}$, z działaniami: zwykłym dodawaniem i zwykłym mnożeniem tworzy ciało.

5.22. Wykazać, że zbiór liczb postaci $w_1+w_2\sqrt[3]{2}$, gdzie w_1, $w_2 \in \mathbf{W}$ z działaniami: zwykłym dodawaniem i zwykłym mnożeniem nie tworzy ciała.

5.23. Wykazać, że zbiór liczb postaci $w_1+x_0w_2$, gdzie $w_1, w_2 \in \mathbf{W}$, x_0 jest pierwiastkiem rzeczywistym równania $ax^2+bx+c=0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, z działaniami: zwykłym dodawaniem i mnożeniem tworzy ciało.

5.24. Wykazać, że zbiór funkcji $G_1=\{f: f\colon \mathbf{R} \ni x \to ax \in \mathbf{R},\ a \in \mathbf{R}\}$ z działaniami: zwykłym dodawaniem, $\cdot = \circ$ (superpozycją) tworzy ciało.

5.25. Wykazać, że zbiór funkcji wymiernych jednej zmiennej (tzn. funkcji będących ilorazem dwóch wielomianów) z działaniami: zwykłym dodawaniem funkcji i zwykłym mnożeniem funkcji tworzy ciało.

5.26. Niech p będzie liczbą pierwszą oraz $Z=\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$. Sumę „$\oplus$" i iloczyn „$\odot$" elementów $z_1, z_2 \in Z$ określamy jako resztę z dzielenia zwykłej sumy z_1+z_2 przez p (dla „$\oplus$") oraz resztę z dzielenia zwykłego iloczynu $z_1 \cdot z_2$ przez p (dla „$\odot$").

Wykazać, że struktura $(Z, \oplus, \odot)$ jest ciałem. Wykazać, że jeżeli p nie jest liczbą pierwszą, to struktura $(Z, \oplus, \odot)$ nie jest ciałem.

5.27. Udowodnić, że struktura $(Z, +, \cdot)$ występująca w definicji ciała liczb zespolonych jest ciałem.

5.28. Wykazać, że dla każdych dwóch liczb zespolonych (a, b), (c, d) istnieje dokładnie jedna liczba zespolona (e, f) taka, że $(a, b)=(c, d)+(e, f)$.

Uwaga. Liczbę (e, f) nazywamy *różnicą* liczb (a, b) i (c, d) i oznaczamy $(a, b)-(c, d)$. Działanie „$-$" nazywamy *odejmowaniem liczb zespolonych.*

5.29. Wykazać, że dla każdych dwóch liczb zespolonych (a, b), (c, d) gdzie $(c, d) \neq (0, 0)$ istnieje dokładnie jedna liczba zespolona (e, f) taka, że $(a, b)=(c, d)\cdot(e, f)$.

Uwaga. Liczbę (e, f) nazywamy *ilorazem liczb zespolonych* (a, b) i (c, d) i oznaczamy

$$(e, f)=\frac{(a, b)}{(c, d)}=(a, b):(c, d).$$

Działanie „:" nazywamy *dzieleniem liczb zespolonych.*

5.30. Wykazać, że zbiór liczb zespolonych postaci $(x, 0)$, $x \in \mathbf{R}$ z działaniami ciała liczb zespolonych tworzy ciało izomorficzne ze zbiorem liczb rzeczywistych z działaniami: zwykłym dodawaniem i mnożeniem.

5.31. Wykazać, że zbiór $R_1[i]$ wielomianów pierwszego stopnia $a+bi$, $a, b \in \mathbf{R}$, $i^2=-1$, z działaniami $+$ i $\cdot$ określonymi wzorami

$$(a+bi)+(a'+b'i)==(a+a')+(b+b')i,$$

$$(a+bi)\cdot(a'+b'i')=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i$$

jest ciałem.

5.32. Wykazać, że ciało liczb zespolonych $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ jest izomorficzne z ciałem $R_1[i]$ (por. zad. 5.31).

Uwaga. Korzystając z izomorfizmu f określonego w zadaniu 5.32 możemy liczby zespolone $(a, b) \in \in \mathbf{Z}=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ utożsamiać z dwumianami $a+bi \in R_1[i]$, $a, b \in \mathbf{R}$, $i^2=-1$.

5.33. Wykazać, że każdą liczbę zespoloną $z \in \mathbf{Z}-\{0\}$ można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$z=|z|(\cos \arg z+i \sin \arg z)$$

(tzw. *postaci trygonometrycznej*).

5.34. Wykazać, że dla $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}$ prawdziwe są wzory:

a) $\overline{z_1 \pm z_2}=\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$; b) $\overline{z_1 \cdot z_2}=\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; c) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq (0,0)$.

5.35. Wykazać, że jeżeli $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}$, to

$$(z_1 \cdot z_2=0) \Leftrightarrow (z_1=0 \vee z_2=0).$$

5.36. Udowodnić wzory:

a) $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$; b) $|z_1 \cdot z_2|=|z_1| \cdot |z_2|$;

c) $\arg(z_1 \cdot z_2)=\arg z_1+\arg z_2 \mod 2\pi$ [1];

d) $\arg \frac{1}{z}=\arg \bar{z}=-\arg z \mod 2\pi$, $z \neq 0$.

5.37. Rozwiązać w ciele $\mathbf{Z}$ równanie $z^n=1$.

5.38. Wykazać, że zbiór funkcji $G_1=\{f: f: \mathbf{R} \ni x \to (ax+b) \in \mathbf{R}, a, b \in \mathbf{R}\}$ z działaniami: „$+$" — zwykłą sumą funkcji, „$\cdot$" — resztą z dzielenia iloczynu funkcji przez x^2+1, jest ciałem izomorficznym z ciałem liczb zespolonych $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$.

5.39. Dane są struktury $(Z_i, \square_i)$, $i=1, 2, 3$, gdzie: Z_1 jest zbiorem liczb zespolonych postaci i^n, $\square_1$ jest mnożeniem liczb zespolonych; $Z_2=\left\{x, -x, \frac{x}{i}, \frac{-x}{i}\right\}$, $x \in \mathbf{R}$, $\square_2$ jest superpozycją funkcji zbioru; $Z_3=\{0, 1, 2, 3\}$, $\square_3$ jest resztą z dzielenia sumy zwykłej elementów przez 4. Wykazać, że struktury $(Z_i, \square_i)$, $i=1, 2, 3$, są parami izomorficzne.

5.40. Dany jest zbiór $Z_1=\{x, ix, -x, -ix\}$, $x \in \mathbf{R}$ z działaniem $\square = \circ$ (superpozycją funkcji) oraz zbiór $Z_2=\{i, -i, 1, -1\}$ z działaniem $\square = \cdot$ (mnożenie liczb zespolonych). Wykazać, że grupy Z_1 i Z_2 są izomorficzne.

5.41. Wykazać, że zbiór pierwiastków n-go stopnia z jedności z działaniem $\square = \cdot$ (mnożeniem liczb zespolonych) tworzy grupę. Z jaką grupą liczb całkowitych z odpowiednim działaniem grupa ta jest izomorficzna?

---

[1] Por. przykład 1.5.

Odpowiedzi

5.8. Nie. **5.10.** Nie.

5.12. $0, 0, 1$; $a \in C$, to $a^{-1} = -a$, $x \in \mathbf{R}$, to $x^{-1} = -x$, $x \in \mathbf{R} - \{0\}$, to $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

5.17. a) Grupa przemienna; b) nie tworzą grupy; c) tworzą pierścień.

5.18. a) Pierścień; b) zbiór nie jest pierścieniem; c) pierścień; d) nie jest pierścieniem np. $f(0) = 1$, $g(0) = 1$, $(f+g)(0) = 1 + 1 = 2 \neq 1$.

5.19. Pierścień.

5.26. Wsk. Jeżeli p nie jest liczbą pierwszą, to w działaniu $\odot$ nie jest określony element odwrotny.

5.28. $(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$.

5.29. $(a, b) : (c, d) = \left(\dfrac{ad + bc}{c^2 + d^2}, \dfrac{ac - bd}{c^2 + d^2}\right)$.

5.37. $z_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

§ 6. MACIERZE. WYZNACZNIKI. RÓWNANIA LINIOWE

6.1. *Macierzą* o wymiarze $m \times n$ (lub krótko macierzą) nad ciałem K nazywamy odwzorowanie

$$\mathscr{T} : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to K.$$

Macierz będziemy zapisywali w postaci

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

gdzie $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ oraz $a_{ij} = \mathscr{T}(i, j)$. W szczególności, jeżeli $m = n = 1$, to macierz $[a_{ij}]_{1 \times 1}$ utożsamiamy z elementem $a_{11} \in K$. Jeżeli $m = n$, to macierz $[a_{ij}]_{n \times n}$ nazywamy *macierzą kwadratową stopnia n*. Wartość odwzorowania $\mathscr{T}(i, j) = a_{ij}$ nazywamy *elementem i-tego wiersza* i *j-tej kolumny macierzy* $[a_{ij}]_{m \times n}$. Jeżeli $a_{ij} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, gdzie 0 jest elementem neutralnym dodawania ciała K, to macierz $[0]_{m \times n} = O$ nazywamy *macierzą zerową*. Zbiór wszystkich macierzy wymiaru $m \times n$ nad K oznaczamy $M_{m \times n}(K)$. W dalszym ciągu, jeżeli nie zaznaczymy tego oddzielnie, to: $K = \mathbf{R}$. Określimy działania w $M_{m \times n}(K)$:

α) *równość* $([a_{ij}] = [b_{ij}]) \Leftrightarrow (a_{ij} = b_{ij})$,

β) *dodawanie* [*odejmowanie*]

$$([a_{ij}] + [b_{ij}] = [c_{ij}] \in M_{m \times n}(K)) \Leftrightarrow (c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}),$$

$$([a_{ij}] - [b_{ij}] = [d_{ij}] \in M_{m \times n}(K)) \Leftrightarrow (d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}),$$

γ) *mnożenie macierzy przez elementy ciała K*

$$(k[a_{ij}]=[c_{ij}]\in M_{m\times n}(K))\Leftrightarrow(c_{ij}=ka_{ij}),$$

gdzie $k\in K$ oraz „+”, „$\cdot$” są działaniami ciała $(K, +, \cdot)$.

Macierzą przestawioną (*transponowaną*) A^{T} macierzy $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ nazywamy macierz $[c_{ij}]_{n\times m}=A^{\mathrm{T}}$, gdzie $c_{ij}=a_{ji}$.

Mnożenie macierzy. Niech $A=[a_{ij}]_{m\times p}$, $B=[b_{ij}]_{p\times n}$; macierz $C=[c_{ij}]_{m\times n}$, gdzie $c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$, nazywamy *iloczynem macierzy A* i *B* i oznaczamy $AB=C$.

6.2. Wyznaczniki. Niech $G_n=M_{n\times n}(K)$, $j_1, j_2, \dots, j_n$ oznacza dowolną permutację liczb $1, 2, \dots, n$, oraz $s(j_1, j_2, \dots, j_n)=\prod_{m<k}\operatorname{sgn}(j_k-j_m)$. Na G_n określamy odwzorowanie:

(1) $$\det : G_n\to K,\quad \text{gdzie } \det(A)=\sum_{n!} s(j_1, j_2, \dots, j_n)a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$$

i sumowanie rozciąga się na wszystkie $n!$ permutacji $j_1, j_2, \dots, j_n$ liczb $1, 2, \dots, n$. Wartość odwzorowania $\det(A)$, $A\in G_n$ (na ogół będziemy pisali $\det A$) nazywamy *wyznacznikiem stopnia n macierzy A*, lub krótko *wyznacznikiem* i piszemy

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Jeżeli w macierzy $A=[a_{ij}]_{n\times n}$, $n\geqslant 2$ skreślimy wiersz i kolumnę zawierającą element a_{ij}, to otrzymujemy macierz $W_{n-1\times n-1}$. Wyznacznik $\bar{W}_{ij}=\det W_{n-1\times n-1}$ nazywamy *podwyznacznikiem elementu* a_{ij} macierzy A, liczbę $W_{ij}=(-1)^{i+j}\bar{W}_{ij}$ nazywamy *dopełnieniem algebraicznym elementu* a_{ij} macierzy A.

Przy obliczaniu wyznaczników korzystamy m. in. ze wzorów:

(2) $$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\bar{W}_{ik}=\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+i}a_{pi}\bar{W}_{pi},$$

$i=1, 2, \dots, n$. Wzór (2) podaje najefektywniejszą (rekurencyjną) metodę obliczania wyznaczników. Na przykład, rozwinięcie według elementów pierwszego wiersza:

(3) $$\det A=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}a_{1k}\bar{W}_{1k}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}W_{1k}.$$

Z (2) i z własności wyznaczników wynikają wzory:

(4) $$\sum_{p=1}^{n}a_{kp}W_{jp}=\delta_{kj}\det A,$$

(5) $$\sum_{p=1}^{n}a_{pk}W_{pj}=\delta_{kj}\det A,$$

gdzie $\delta_{kj}=\begin{cases}0 & \text{dla } k\neq j\\ 1 & \text{dla } k=j\end{cases}$ (tzw. *symbol Kroneckera*).

$\mathbf{T}_1$. TWIERDZENIE CAUCHY'EGO. *Jeżeli* $A, B \in G_n$, *to*

$$\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B. \tag{6}$$

6.3. Specjalne macierze kwadratowe. Macierz kwadratową $A=[a_{ij}]\in G_n$ nazywamy: 1° *nieosobliwą* [*osobliwą*], jeżeli $\det A\neq 0$ [$\det A=0$], 2° *diagonalną*, jeżeli $a_{ij}=0$ dla $i\neq j$, 3° *skalarną*, jeżeli $a_{ij}=a\delta_{ij}$, $a\in K$, 4° *jednostkową* i oznaczamy I, jeżeli $a_{ij}=\delta_{ij}$, 5° *symetryczną* [*skośnie symetryczną*], jeżeli $A=A^{\mathrm{T}}$ [$A=-A^{\mathrm{T}}$], 6° *odwrotną* do $B\in G_n$, jeżeli $\det B\neq 0\wedge BA=I$ i oznaczamy $A=B^{-1}$, 7° *dołączoną macierzy* $B\in G_n$ i oznaczamy $B^{\mathrm{D}}=[a_{ij}]_{n\times n}$, jeżeli $a_{ij}=W_{ji}$, gdzie W_{ji} jest dopełnieniem algebraicznym elementu b_{ji} macierzy B, 8° *ortogonalną* i oznaczamy A^*, jeżeli $AA^{\mathrm{T}}=I$, 9° *podobną do macierzy* $C\in G_n$ (mówimy też: *macierze* A i C są *podobne*), jeżeli istnieje taka macierz nieosobliwa $D\in G_n$, że $C=DAD^{-1}$.

Minorem macierzy $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ nazywamy każdy wyznacznik $\det[b_{ij}]_{s\times s}$, gdzie $[b_{ij}]_{s\times s}$ jest macierzą kwadratową otrzymaną przez skreślenie pewnej liczby wierszy i kolumn w macierzy A, więc $s\leqslant\min(m,n)$. *Rzędem macierzy* $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ nazywamy taką liczbę r, że wszystkie minory macierzy A stopnia większego niż r (jeżeli istnieją) są równe zeru i istnieje co najmniej jeden minor stopnia r różny od zera. Rząd macierzy A oznaczamy $\mathrm{R}(A)$. Przyjmujemy, że rząd macierzy zerowej jest równy zeru.

Macierz $A-\lambda I$, $A\in M_{n\times n}(K)$, $\lambda\in K$ [wyznacznik $\det(A-\lambda I)$] nazywamy *macierzą charakterystyczną* [*wyznacznikiem charakterystycznym*] macierzy A.

Równanie

$$\det(A-\lambda I)=0 \tag{7}$$

nazywamy *równaniem charakterystycznym* macierzy A; pierwiastki równania (7) nazywamy *wartościami własnymi macierzy* A.

Minorem głównym macierzy $A\in G_n$ nazywamy minor powstający przez skreślenie wierszy i kolumn o tych samych wskaźnikach. Sumę minorów głównych stopnia k oznaczamy A_k. Na przykład $A_1=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$, $A_n=\det A$; liczbę A_1 nazywamy *śladem macierzy* A i oznaczamy $\mathrm{Tr}\,A$.

$\mathbf{T}_2$.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=(-1)^n(\lambda^n-A_1\lambda^{n-1}+A_2\lambda^{n-2}+\dots$$
$$\dots+(-1)^nA_n),$$

gdzie A_i, $i=1,2,\dots,n$, *oznacza sumę minorów głównych stopnia* i.

$\mathbf{T}_3$. $(\det(A-\lambda I)=0)\Leftrightarrow(\det(\lambda I-A)=0)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+c_2\lambda^{n-2}+\dots+c_{n-1}\lambda+c_n=0),$$

gdzie

$$c_1 = -s_1, \quad c_2 = -\tfrac{1}{2}(c_1 s_1 + s_2),$$

(8) $$c_3 = -\tfrac{1}{3}(c_2 s_1 + c_1 s_2 + s_3),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$c_n = -\frac{1}{n}(c_{n-1} s_1 + c_{n-2} s_2 + \dots + c_1 s_{n-1} + s_n)$$

oraz $s_i = \operatorname{Tr} A^i$, $i = 1, 2, \dots, n$ $(A^k = \overbrace{AA \dots A}^{k})$.

Wielomianem macierzowym nazywamy odwzorowanie

$$f\colon G_n \ni A \to G_n, \qquad G_n = M_{n\times n}(K)$$

określone wzorem

$$f(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k, \qquad a_k \in K, \qquad A^0 = I.$$

T_4. TWIERDZENIE CAYLEYA-HAMILTONA.

(9) $$\bigwedge_{A \in G_n} \Big(A^n + \sum_{k=1}^{n} c_k A^{n-k} = O\Big), \qquad A^0 = I,$$

gdzie c_k *określone są wzorami* (8).

Uwaga. T_4 mniej ściśle można wysłowić: *każda macierz* $A \in G_n$ *spełnia swoje równanie charakterystyczne.*

6.4. Układy równań liniowych. Układ m równań o n niewiadomych

(10) $$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i = b_k,\ k = 1, 2, \dots, m,\ a_{ki}, b_k, x_i \in \mathbf{R}\Big) \Leftrightarrow \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B},$$

gdzie

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{m\times n}, \qquad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

nazywamy *układem niejednorodnym* [*jednorodnym*], jeżeli $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}_{m\times 1}$ $[\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}_{m\times 1}]$. Macierz

$$\boldsymbol{A}_u = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} & b_1 \\ \dots\dots\dots & . \\ a_{m1} \dots a_{mn} & b_m \end{bmatrix}_{m\times(n+1)}$$

nazywamy *macierzą uzupełnioną* (*rozszerzoną*) macierzy $\boldsymbol{A}$. Jeżeli $m = n \wedge \det \boldsymbol{A}_{m\times n} \neq 0$, to (10) nazywamy *układem Cramera*.

Układ Cramera (10) ma jednoznaczne rozwiązanie określone wzorami

$$(11)\qquad (X=A^{-1}B)\Leftrightarrow\left(x_i=\frac{W_i}{\det A},\ i=1,2,\ldots,n\right),$$

gdzie

$$W_i=\begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1,i-1}\, b_1 & a_{1,i+1}\ldots a_{1n}\\ a_{21}\ldots a_{2,i-1}\, b_2 & a_{2,i+1}\ldots a_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}\ldots a_{n,i-1}\, b_n & a_{n,i+1}\ldots a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Uwaga. Wzory (11) dla dużych wartości n prowadzą na ogół do bardzo długich rachunków. W takich przypadkach stosujemy metodę eliminacji Gaussa wymagającą mniejszej ilości rachunków (patrz. przykłady).

T_5. TWIERDZENIE KRONECKERA-CAPELLEGO. *Układ* (10) *ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy* $R(A)=R(A_u)=r$, *przy czym istnieje dokładnie jedno rozwiązanie, jeżeli* $r=n$, *natomiast istnieje nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od* $n-r$ *parametrów, gdy* $r<n$.

W przypadku gdy $r<n$ rozwiązania otrzymujemy następująco. Znajdujemy dowolny minor $W\neq 0$ stopnia $r=R(A)$ macierzy A i rozpatrujemy układ r równań powstały z (10) przez opuszczenie tych $m-r$ równań, których współczynniki nie są elementami wyznacznika W. W otrzymanym układzie $n-r$ niewiadomych, których współczynniki nie występują w wyznaczniku W przyjmujemy jako parametry. Otrzymany w ten sposób układ r równań z r niewiadomymi jest układem Cramera ($W\neq 0$), który rozwiązujemy, korzystając ze wzorów (11).

Znalezione rozwiązania $x_1, x_2, \ldots, x_n$, których jest nieskończenie wiele (w przypadku $n>r$) spełniają układ (10).

T_6. *Jednorodny układ Cramera ma rozwiązanie niezerowe wtedy i tylko wtedy, gdy det* $A=$ $=0$.

Przykłady

6.1. Wykazać prawdziwość wzoru

$$\text{(a)}\qquad \underbrace{A+A+\ldots+A}_{n\ \text{składników}}=nA,\qquad \text{gdzie}\qquad A=[a_{ij}]_{m\times n}.$$

Rozwiązanie. Z definicji β) punktu 6.1 wynika, że dodawanie macierzy jest działaniem łącznym, zatem lewa strona równości (a) jest jednoznacznie określoną macierzą $B=[b_{ij}]_{m\times n}$, przy czym $b_{ij}=\underbrace{a_{ij}+a_{ij}+\ldots+a_{ij}}_{n\ \text{składników}}=na_{ij}$. Ale $nA=C=[c_{ij}]_{m\times n}$, gdzie $c_{ij}=na_{ij}$ (por. γ), punkt 6.1), skąd $B=C$. □

6.2. Rozwiązać równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}X+2\begin{bmatrix}6\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\\-3\end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Jeżeli macierz X istnieje, to musi mieć wymiar (3×1), zatem

$$X=\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}.$$

Korzystając z definicji: mnożenia macierzy, mnożenia macierzy przez liczbę, dodawania i równości macierzy, kolejno otrzymujemy

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-y+2z\\ x+2y+z\\ 3x+y\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}x-y+2z\\ x+2y+z\\ 3x+y\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}6\\ 1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-y+2z+12\\ x+2y+z+2\\ 3x+y+4\end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} x-\ y+2z+12&=-2,\\ x+2y+\ z+\ 2&=1,\\ 3x+\ y\qquad +\ 4&=-3,\end{aligned}$$

$x=-\frac{47}{14}$, $y=\frac{43}{14}$, $z=-\frac{53}{14}$. A więc

$$X=\begin{bmatrix}-\frac{47}{14}\\ \frac{43}{14}\\ -\frac{53}{14}\end{bmatrix}=-\frac{1}{14}\begin{bmatrix}47\\ -43\\ 53\end{bmatrix}.$$

6.3. Obliczyć wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix}4 & 6\\ -1 & 2\end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 4 & -2 & 3\end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 4 & 6 & 3\end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 4 & -2 & 6\end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -1\\ 6 & -2 & 3\end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & -2\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 2 & -1\end{vmatrix}$.

Rozwiązanie: a) $Z(1)$ dla $n=2$ otrzymujemy:

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\sum_{2!=2} s(j_1,j_2)a_{1j_1}a_{2j_2}=s(1,2)a_{11}a_{22}+s(2,1)a_{12}a_{21}=$$

$$=\operatorname{sgn}(2-1)a_{11}a_{22}+\operatorname{sgn}(1-2)a_{12}a_{21}=$$

I-przek.

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\begin{matrix}-\\ +\end{matrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

II-przek.

Widzimy więc, że wyznacznik stopnia drugiego równa się iloczynowi elementów pierwszej przekątnej minus iloczyn elementów drugiej przekątnej. Stąd

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot 2-(-1)\cdot 6=14.$$

b) Rozwiniemy wyznacznik np. według elementów pierwszego wiersza (por. wzór (3)),

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11}-(-1)A_{12}+3A_{13},$$

gdzie

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad A_{12}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix},$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

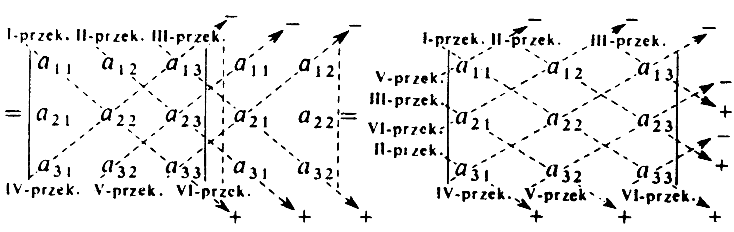
Stąd

$$D_1=1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=1(3-2)+(6+4)+3(-4\;-4)=-13.$$

c) Dla wyznaczników stopnia trzeciego istnieje pewien skrócony sposób ich obliczenia zwany metodą Sarrusa. Otóż ze wzoru (1) dla $n=3$ wynika, że

$$\text{(a)}\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}=$$



tzn. wyznacznik równa się sumie iloczynów elementów I, II i III przekątnej minus suma iloczynów elementów IV, V i VI przekątnej. Dopisane po prawej stronie elementy pierwszej i drugiej kolumny są pomocnicze i praktyczne ich nie dopisujemy.

Zatem:

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 4 & 6 & 3\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot3+2(-1)4+3\cdot2\cdot6-4\cdot1\cdot3-6(-1)1-3\cdot2\cdot2=13.$$

d) Tym razem rozwiniemy wyznacznik np. według elementów trzeciej kolumny (por. (4)),

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 4 & -2 & 6\end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\cdot2A_{13}+(-1)^{2+3}\cdot1\cdot A_{23}+(-1)^{3+3}\cdot6A_{33}=$$

$$=2\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & -2\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2(-4\ -4)-(-2+4)+6(1+2)=0.$$

e) Przed obliczeniem wyznacznika przekształcimy go w taki sposób, aby co najmniej jeden z jego elementów był zerem. Otóż korzystając z twierdzenia o wyznacznikach dodajemy elementy drugiego wiersza do odpowiednich elementów pierwszego wiersza, skąd

$$D_4=\begin{vmatrix}3 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 6 & -2 & 3\end{vmatrix}.$$

Z kolei elementy drugiego wiersza, mnożymy przez dwa i dodajemy do elementów trzeciego wiersza (jedno z twierdzeń o wyznacznikach), otrzymując

$$D_4=\begin{vmatrix}3 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 8 & 0 & 1\end{vmatrix}.$$

Wyznacznik D_4 wygodnie jest rozwinąć według elementów drugiej kolumny,

$$D_4=-0\cdot A_{12}+1\cdot A_{22}-0\cdot A_{32}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 8 & 1\end{vmatrix}=-13.$$

f) Korzystamy z twierdzenia: jeżeli dwa wiersze [kolumny] wyznacznika mają odpowiednie elementy proporcjonalne, to wyznacznik ten równa się zeru. Ponieważ $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}$, zatem pierwszy i drugi wiersz mają elementy proporcjonalne, stąd

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & -2\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}=0.$$

g) Przed zastosowaniem wzoru (2) przekształcamy wyznacznik następująco: dodajemy elementy trzeciej kolumny do elementów drugiej, a następnie mnożymy elementy czwartego wiersza przez (-5) i dodajemy do trzeciego wiersza, stąd

$$D_5=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ -14 & 0 & -7 & 4\\ 3 & 1 & 2 & -1\end{vmatrix}.$$

Z kolei rozwijamy wyznacznik według elementów drugiej kolumny

$$D_5=(-1)^{1+2}\cdot 0\cdot A_{12}+(-1)^{2+2}\cdot 0\cdot A_{22}+(-1)^{3+2}\cdot 0\cdot A_{32}+(-1)^{4+2}\cdot 1\cdot A_{42}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ -14 & -7 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 11\end{vmatrix}=11\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=33.$$

6.4. Dane są macierze $A=[a_{ij}]_{n\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times m}$. Wykazać, że

$$\text{(a)}\qquad \det W=\det\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0\\ c_{n+1,1} & \dots & c_{n+1,n} & b_{11} & \dots & b_{1m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ c_{n+m,1} & \dots & c_{n+m,n} & b_{m1} & \dots & b_{mm}\end{bmatrix}=\det A\det B,$$

gdzie $C=[c_{ij}]_{m\times n}$ jest dowolną macierzą.

Dowód. Przeprowadzimy dowód indukcyjny względem m przy stałym n. Dla $m=1$ wzór (a) wynika natychmiast z rozwinięcia wyznacznika $\det W$ względem ostatniej kolumny. Załóżmy, że wzór (a) jest prawdziwy dla $m-1$ i obliczmy dopełnienie algebraiczne W_{1m} elementu b_{1m} macierzy W. Mamy

$$W_{1m}=(-1)^{n+1+m+n}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0\\ c_{n+2,1} & \dots & c_{n+2,n} & b_{21} & \dots & b_{2,m-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ c_{n+m,1} & \dots & c_{n+m,n} & b_{m1} & \dots & b_{m,m-1}\end{vmatrix}.$$

Z kolei korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$W_{1m}=(-1)^{m+1}\det A\cdot\begin{vmatrix} b_{21} & \dots & b_{2,m-1}\\ \dots & \dots & \dots\\ b_{m1} & \dots & b_{m,m-1}\end{vmatrix}=\det A\cdot B_{1m},$$

gdzie B_{1m} jest dopełnieniem algebraicznym elementu b_{1m} macierzy B. Obliczając podobnie dopełnienia algebraiczne elementów b_{jm} macierzy W dla $j=2, 3, \dots, m$ otrzymujemy $W_{jm}=$ $=\det A\cdot B_{jm}$. Rozwijając teraz wyznacznik $\det W$ według elementów ostatniej kolumny mamy

$$\det W=\sum_{j=1}^{m} b_{jm}W_{jm}=\det A\cdot\sum_{j=1}^{m} b_{jm}B_{jm}=\det A\det B. \qquad \square$$

6.5. Niech $A=[a_{ij}]_{n\times n}$. Wykazać, że macierz $A+A^{\mathrm{T}}$ jest symetryczna, a macierz $A-A^{\mathrm{T}}$ antysymetryczna.

Rozwiązanie. Z definicji macierzy A^{T} wynikają natychmiast wzory

$$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A,\quad (kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}},\quad (A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}},$$

zatem

$$(A+A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+A=A+A^{\mathrm{T}},$$

tzn. macierz $C=A+A^{\mathrm{T}}$ jest macierzą symetryczną oraz

$$(A-A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+[(-A)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+(-A)=A^{\mathrm{T}}-A=-(A-A^{\mathrm{T}}),$$

tzn. macierz $B=A-A^{\mathrm{T}}$ jest macierzą antysymetryczną.

Uwaga. Korzystając z wyprowadzonych wzorów możemy każdą macierz kwadratową przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antysymetrycznej. Mianowicie

$$A=\tfrac{1}{2}(A+A^{T})+\tfrac{1}{2}(A-A^{T}).$$

6.6. Znaleźć rząd macierzy

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Ponieważ $R(A)\leqslant \min(3,5)=3$, należy więc najpierw obliczać minory stopnia trzeciego macierzy A. Skreślając np. czwartą i piątą kolumnę, otrzymujemy macierz

$$B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix},$$

zatem

$$\det B=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix}=\tfrac{1}{2}(-1)\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix}=-\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix}=0.$$

Zamiast liczyć pozostałe minory stopnia trzeciego macierzy A najpierw przekształcimy ją następująco:

$$A_1=\tfrac{1}{2}(-1)\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 & 2 \\ -3 & -1 & -1 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jak wiadomo, przy takim przekształceniu rząd macierzy nie ulega zmianie, a więc wystarczy zbadać rząd macierzy

$$A_2=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 & 2 \\ -3 & -1 & -1 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Łatwo zauważyć, że dodając elementy pierwszego wiersza do elementów drugiego wiersza otrzymujemy wiersz trzeci, zatem każdy minor stopnia trzeciego macierzy A_2 będzie miał dwa wiersze identyczne, a więc będzie zerem. Wnosimy stąd, że $R(A)=R(A_2)<$

<3; ale np. $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, tzn. istnieje minor stopnia drugiego macierzy A_2 różny od zera, stąd $\mathrm{R}(A)=2$.

6.7. Wykazać prawdziwość wzoru

(a) $$AA^{\mathrm{D}} = A^{\mathrm{D}}A = \det A I,$$

gdzie $A=[a_{ij}]_{n\times n}$, $I=[\delta_{ij}]_{n\times n}$, tzn. I jest macierzą jednostkową.

Rozwiązanie. Korzystając z 7° i z def. mnożenia macierzy, kolejno otrzymujemy

$$A^{\mathrm{D}} = B = [b_{ij}]_{n\times n}, \quad \text{gdzie} \quad b_{ij} = A_{ji},$$

$$C = A\cdot A^{\mathrm{D}} = AB = [c_{ij}]_{n\times n}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}.$$

Z kolei korzystając z (4) otrzymujemy

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} \det A,$$

tzn. $C = I\det A = \det AI$ oraz analogicznie:

$$A^{\mathrm{D}}A = BA = A_1 = [a_{ij}^{*}],$$

$$a_{ij}^{*} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} \det A,$$

czyli $A_1 = \det A\, I = C$. □

6.8. Znaleźć macierz A^{-1} macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzoru $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{\mathrm{D}}$ (por. przykład 6.7)

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

stąd, korzystając z zadania 6.43, otrzymujemy

$$A^{-1} = \tfrac{1}{5} A^{\mathrm{D}} = \tfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \\ -5 & -4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -1 & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} \end{bmatrix}.$$

6.9. Wykazać prawdziwość wzoru

(a) $$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

gdzie A i B są macierzami kwadratowymi nieosobliwymi tego samego stopnia.

Rozwiązanie. Udowodnimy najpierw wzór

$$(a_1) \qquad IA = AI = A,$$

gdzie $A=[a_{ij}]_{n\times n}$, $I=[\delta_{ij}]_{n\times n}$, $n=1,2,\ldots$

Istotnie, jeżeli $B=[b_{ij}]_{n\times n}=IA$, to $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}a_{kj}=a_{ij}$, $i,j=1,2,\ldots,n$, tzn. $B=A$, oraz jeżeli $C=AI=[c_{ij}]_{n\times n}$, to $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\delta_{kj}=a_{ij}$, czyli $C=A$.

W celu wykazania prawdziwości wzoru (a) podstawmy

$$(a_2) \qquad X=(AB)^{-1}$$

oraz pomnóżmy obie strony równości (a_2) lewostronnie przez macierz AB (z równości $A=B$ wynika równość $CA=CB$ oraz równość $AC=BC$, o ile wymiar macierzy C spełnia warunki wykonalności mnożenia). Stąd $(AB)X=(AB)(AB)^{-1}$, zatem na mocy zadania 6.23 i definicji 6° z punktu 6.3, otrzymujemy

$$(a_3) \qquad ABX=I.$$

Mnożąc z kolei równość (a_3) lewostronnie przez A^{-1} oraz korzystając: z łączności mnożenia, z 6° z punktu 6.3 i wzoru (a_1) mamy

$$(A^{-1}A)BX=A^{-1}I,$$

czyli

$$BX=A^{-1}.$$

Stąd

$$(B^{-1}B)X=B^{-1}A^{-1}, \qquad IX=B^{-1}A^{-1}, \qquad \text{tzn.} \qquad X=B^{-1}A^{-1}. \qquad \square$$

6.10. Wykazać, że macierze podobne mają ten sam wielomian charakterystyczny.

Rozwiązanie. Niech $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$, przy czym A i B są macierzami podobnymi, tzn. (por. 9°) istnieje macierz nieosobliwa C taka, że $A=CBC^{-1}$. Z ostatniej równości kolejno otrzymujemy:

$$C^{-1}A=IBC^{-1}, \qquad C^{-1}AC=B.$$

Mamy wykazać, że $\det(A-\lambda I)=\det(B-\lambda I)$. Otóż dla każdej macierzy nieosobliwej C mamy:

$$C^{-1}AC-\lambda I=C^{-1}AC-\lambda C^{-1}C=C^{-1}AC-\lambda C^{-1}IC=$$
$$=C^{-1}(AC-\lambda IC)=C^{-1}(A-\lambda I)C.$$

Stąd, na mocy $\mathbf{T}_1$

$$\det(B-\lambda I)=\det(C^{-1}AC-\lambda I)=\det[C^{-1}(A-\lambda I)C]=$$
$$=\det C^{-1}\det(A-\lambda I)\det C=$$
$$=\det(C^{-1}C)\det(A-\lambda I)=\det(A-\lambda I). \qquad \square$$

6.11. Rozwiązać układy równań:

a) $2x-y=2$, $3x+2y=1$; b) $x+5y=2$, $2x+10y=4$; c) $x+2y-z=1$, $2x+4y-2z=1$, $x+3y-z=3$;

d) $x+3y+2z=0$, $2x-y+z=1$, $3x+2y+3z=1$; e) $x+y-z+t=2$, $2x-y+z+t=1$, $x+2y+3z-t=0$, $3x-y+2z-t=1$; f) $x-y+z=0$, $2x-3y+2z=0$, $x+y-z=0$.

Rozwiązanie. W każdym z punktów a)-f) mamy układ typu (10) ($n=m$), przy czym f) jest układem jednorodnym.

W przypadku gdy $\det A\neq 0$ stosujemy wzory (11), w przeciwnym przypadku korzystamy z twierdzenia T_5.

a) $\det A=\begin{vmatrix}2&-1\\3&2\end{vmatrix}=7\neq 0$ (układ Cramera), stąd (wzory (11))

$$x=\frac{W_x}{\det A}=\frac{\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix}}{7}=\frac{5}{7},\qquad y=\frac{W_y}{\det A}=\frac{\begin{vmatrix}2&2\\3&1\end{vmatrix}}{7}=-\frac{4}{7}.$$

b) $\det A=\begin{vmatrix}1&5\\2&10\end{vmatrix}=0$, stosujemy T_5. Wyznacznik $a_{11}=1\neq 0$, więc $R(A)=1$; badamy rząd macierzy

$$A_u=\begin{bmatrix}1&5&2\\2&10&4\end{bmatrix}.$$

Otóż

$$\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix}5&2\\10&4\end{vmatrix}=0$$

zatem $R(A_u)<2$, stąd $R(A)=1=R(A_u)$.

Badany układ jest rozwiązalny, przy czym $n=2>r=1$, a więc istnieje nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru ($n-r=2-1=1$).

Wybieramy wyznacznik stopnia $R(A)=1$ macierzy A, np: $a_{11}=1$ i rozpatrujemy tylko równanie pierwsze układu, tzn. równanie $\underline{1}\cdot x+5y=2$, odrzucając równanie, którego współczynniki nie wchodzą w skład wyznacznika a_{11}. Z kolei niewiadomą y traktujemy jako parametr (np. k) i rozwiązujemy równanie $x+5k=2$. Stąd

$$\text{(a)}\qquad x=2-5k,\quad y=k,\quad k\in\mathbf{R}.$$

Rozwiązania (a) spełniają również drugie równanie układu (por. T_5).

c) $\det A=\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\1&3&-1\end{vmatrix}=0$ (por. przykład 6.3f)), znajdujemy $R(A)$. Otóż

$$W_1=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Z kolei badamy rząd macierzy

$$A_u=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -1 & 3\end{bmatrix}; \quad \text{np.} \quad \begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 1\\ 3 & -1 & 3\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

więc $R(A_u)=3\neq 2=R(A)$, czyli układ jest sprzeczny.

d) $\det A=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 3\end{vmatrix}=0$; badamy $R(A)$ i $R(A_u)$. Otóż

$$W=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-7\neq 0\Rightarrow R(A)=2;$$

z kolei

$$A_u=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 3 & 1\end{bmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 3\end{vmatrix}=0,$$

czyli $R(A_u)<3$. Ale $R(A)=2$, stąd oczywiście $R(A_u)=2$, zatem układ jest rozwiązalny. Postępując podobnie jak w b), otrzymujemy

(a)
$$\underline{1}\cdot x+\underline{3}\cdot y=-2k,$$
$$\underline{2}\cdot x-\underline{1}\cdot y=1-k,$$

gdzie podkreślone są współczynniki przy niewiadomych tworzące wyznacznik $W=-7\neq 0$, a k jest parametrem. Stosując wzory (11) do układu Cramera (a), otrzymujemy

$$x=-\tfrac{1}{7}(5k-3), \qquad y=-\tfrac{1}{7}(3k+1).$$

Zatem istnieje nieskończenie wiele rozwiązań określonych wzorami

$$x=-\tfrac{1}{7}(5k-3), \qquad y=-\tfrac{1}{7}(3k+1), \qquad z=k,$$

gdzie k jest dowolną liczbą rzeczywistą.

e) $\det A=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 2 & -1\end{vmatrix}=33\neq 0$ (por. przykł. 6.3g), stosujemy więc wzory (11). Stąd

$$x=\frac{1}{33}\begin{vmatrix}2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\frac{29}{33}, \qquad y=\frac{1}{33}\begin{vmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 3 & -1\\ 3 & 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\frac{14}{33},$$

$$z=\frac{1}{33}\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -1\\ 3 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-\frac{17}{33},\qquad t=\frac{1}{33}\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 0\\ 3 & -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=\frac{2}{11}.$$

f) $\det A=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=2\neq 0.$

Ponieważ badany układ jest jednorodny, więc $x=y=z=0$, przy czym $R(A)=R(A_u)=3$, tzn. na mocy T6 rozwiązanie $x=y=z=0$ jest jedynym rozwiązaniem układu.

6.12. W zależności od parametru a podać warunki rozwiązalności i rozwiązać (o ile rozwiązania istnieją) układ równań

$$\text{(a)}\qquad \begin{aligned} ax+\ y+\ z&=1,\\ x+ay+\ z&=a,\\ x+\ y+az&=a^2.\end{aligned}$$

Rozwiązanie. Mamy

$$\det A=\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=(a-1)^2(a+2),$$

zatem dla $a\neq 1$ i $a\neq -2$ (a) jest układem Cramera. Stąd

$$x=\frac{W_x}{\det A}=\frac{1}{\det A}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & a & 1\\ a^2 & 1 & a\end{vmatrix}=\frac{-(a-1)^2(a+1)}{(a-1)^2(a+2)}=-\frac{a+1}{a+2},$$

$$y=\frac{W_y}{\det A}=\frac{1}{\det A}\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & a^2 & a\end{vmatrix}=\frac{(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)}=\frac{1}{a+2},$$

$$z=\frac{W_z}{\det A}=\frac{1}{\det A}\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & a\\ 1 & 1 & a^2\end{vmatrix}=\frac{(a^2-1)^2}{(a-1)^2(a+2)}=\frac{(a+1)^2}{a+2}.$$

Niech teraz $a=1$; układ (a) przyjmuje wówczas postać:

$$(\text{a}_1)\qquad \begin{aligned} x+y+z&=1,\\ x+y+z&=1,\\ x+y+z&=1,\end{aligned}$$

przy czym, jak łatwo stwierdzić, $R(A)=R(A_u)=1$. Zatem rozwiązania układu (a_1) są następujące:

$$x=1-k-v,\quad y=k,\quad z=v,$$

gdzie k i v przebiegają dowolne liczby rzeczywiste. Jeżeli $a=-2$, to $\det A=0$ oraz $R(A)=2$, natomiast rząd macierzy

$$A_u=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

$R(A_u)=3$, ponieważ np.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix}=-W_y=-(a-1)^2$$

(przestawiając sąsiednie kolumny wyznacznika zmieniamy jego znak), tzn. dla $a=-2$ mamy

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}=-9\neq 0.$$

Czyli $R(A)\neq R(A_u)$, a więc układ (a) jest sprzeczny dla $a=-2$.

6.13. Dla jakich wartości parametru k układ równań

$$x+ky-3z=0,$$
$$2x+y+z=0,$$
$$3x+ky-z=0$$

ma rozwiązanie niezerowe? Po znalezieniu wartości k (jeżeli istnieją) rozwiązać ten układ.

Rozwiązanie. Korzystamy z T_6. Otóż

$$\left(\det A=\begin{vmatrix} 1 & k & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & k & -1 \end{vmatrix}=0\right)\Leftrightarrow(k=4).$$

Z kolei rozwiązujemy jednorodny układ równań

$$x+4y-3z=0,$$
$$2x+y+z=0,$$
$$3x+4y-z=0.$$

Ponieważ wyznacznik układu równa się zero, znajdujemy (dla $k=4$) minor macierzy A różny od zera, np.

$$W=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-7\neq 0.$$

Stąd

$$\underline{1}\cdot x+\underline{4}\cdot y=3t,$$
$$\underline{2}\cdot x+\underline{1}\cdot y=-t,$$

zatem: $x=-t$, $y=t$, $z=t$, gdzie t przebiega wszystkie liczby rzeczywiste.

6.14. Rozwiązać układy równań:

a) $\begin{aligned}3x-y+z&=2,\\ x+y+2z&=1;\end{aligned}$ b) $\begin{aligned}x-y+1&=0,\\ 2x+3y-2&=0,\\ 5x-3y+6&=0;\end{aligned}$ c) $\begin{aligned}2x+3y-3z&=4,\\ 3x-y+z&=17,\\ x+y-2z&=1,\\ 3x+2y-2z&=11;\end{aligned}$

d) $\begin{aligned}3x+y&=0,\\ x-2y&=0,\\ 5x+y&=0;\end{aligned}$ e) $\begin{aligned}x+3y+2z&=0,\\ 2x-y+3z&=0,\\ 3x-5y+4z&=0,\\ x+17y+4z&=0.\end{aligned}$

Rozwiązanie. Stosujemy T_5, a więc w każdym z przypadków badamy rzędy macierzy A i A_u.

a) $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$, $A_u=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$. Weźmy np. wyznacznik

$$W=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=4\neq 0\Rightarrow R(A)=2\Rightarrow R(A_u)\geqslant 2.$$

Ale

$$(R(A)\leqslant\min(2,3)=2)\wedge(R(A_u)\leqslant\min(2,4)=2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(R(A)=R(A_u)=2).$$

Układ jest więc rozwiązalny, przy czym istnieje nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n-r=3-2=1$ parametru. Wystarczy rozwiązać układ Cramera

$$\underline{3}\cdot x-\underline{1}\cdot y=2-t,$$
$$\underline{1}\cdot x+\underline{1}\cdot y=1-2t.$$

Otóż $x=\frac{3}{4}(1-t)$, $y=\frac{1}{4}(1-5t)$, stąd rozwiązanie układu:

$$x=\tfrac{3}{4}(1-t),\quad y=\tfrac{1}{4}(1-5t),\quad z=t,\quad t\in\mathbf{R}.$$

b) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\\ 5 & -3\end{bmatrix}$, $A_u=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & 3 & 2\\ 5 & -3 & -6\end{bmatrix}$, np.

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=5\neq 0\Rightarrow R(A)=2;$$

$$\det A_u=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & 3 & 2\\ 5 & -3 & -6\end{vmatrix}=-13\neq 0\Rightarrow(R(A_u)=3\neq 2=R(A)),$$

czyli układ nie ma rozwiązań.

c) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $A_u=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 17 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 11 \end{bmatrix}$; np.

$$W=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=11\neq 0 \Rightarrow (\mathrm{R}(A)=3\leqslant \mathrm{R}(A_u)),$$

(ponieważ wyznacznik W jest jednocześnie wyznacznikiem macierzy A_u). Macierz A_u ma tylko jeden minor stopnia czwartego, mianowicie

$$\det A_u=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 17 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 11 \end{vmatrix}=0\Rightarrow (\mathrm{R}(A_u)\leqslant 3)\Rightarrow (\mathrm{R}(A_u)=\mathrm{R}(A)=3).$$

Badany układ ma więc jedyne rozwiązanie, ponieważ $n=r=3$, które znajdziemy rozwiązując układ Cramera:

$$\underline{2}\cdot x+\underline{3}\cdot y-\underline{3}\cdot z=4,$$

$$\underline{3}\cdot x-\underline{1}\cdot y+\underline{1}\cdot z=17,$$

$$\underline{1}\cdot x+\underline{1}\cdot y-\underline{2}\cdot z=1.$$

Otóż $x=5$, $y=0$, $z=2$.

d) $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $A_u=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-7\neq 0\Rightarrow (\mathrm{R}(A)=2=\mathrm{R}(A_u)),$$

ponieważ jedyny minor stopnia trzeciego macierzy A_u $\det A_u=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$. Badany układ jednorodny ma zatem rozwiązanie, przy czym jedyne rozwiązanie $x=y=z=0$, ponieważ $n=r=2$.

e) $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 17 & 4 \end{bmatrix}$, $A_u=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 & 0 \\ 1 & 17 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix}=0,$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 17 & 4 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 17 & 4 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 17 & 4 \end{vmatrix}=0,$$

również $\det A_u = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 & 0 \\ 1 & 17 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$ oraz wszystkie minory stopnia trzeciego macierzy A_u są równe zeru. Stąd $R(A)<3 \wedge R(A_u)<3$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Rightarrow \left(R(A)=R(A_u)=2\right).$$

Istnieje więc nieskończenie wiele rozwiązań układu zależnych od jednego parametru ($n-r=3-2=1$), które znajdujemy rozwiązując układ Cramera:

$$\underline{1}\cdot x+\underline{3}\cdot y=-2t,$$

$$\underline{2}\cdot x-\underline{1}\cdot y=-3t.$$

Otóż $x=-\frac{11}{7}t$, $y=-\frac{1}{7}t$, stąd rozwiązanie układu: $x=-\frac{11}{7}t$, $y=-\frac{1}{7}t$, $z=t$, gdzie parametr $t\in\mathbf{R}$.

6.15. Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać układ równań

$$\text{(a)}\qquad \begin{array}{ll} \text{I} & x_1+2x_2-3x_3+x_4+x_5=-1, \\ \text{II} & 2x_1+2x_2-x_3+3x_4-x_5=-1, \\ \text{III} & x_1+x_2-2x_3-2x_4+x_5=3, \\ \text{IV} & 3x_1-2x_2+x_3-2x_4+x_5=10, \\ \text{V} & x_1-x_2+x_3-2x_4-5x_5=0. \end{array}$$

Rozwiązanie. Metoda eliminacji (Gaussa) rozwiązywania układu Cramera polega na kolejnym rugowaniu niewiadomych. W przypadku większej liczby równań prowadzi ona szybciej do celu niż stosowanie wzorów (11), przy czym jest to metoda dokładna (istnieją metody przybliżone).

Załóżmy, że (a) jest układem Cramera, tzn. ma jednoznaczne rozwiązanie. Wyrugujemy najpierw niewiadomą x_1. W tym celu weźmy równanie I

$$(\text{a}_1)\qquad x_1+2x_2-3x_3+x_4+x_5=-1$$

(gdyby współczynnik $a_{11}\neq 0$ przy niewiadomej x_1 był różny od 1, to należałoby najpierw podzielić równanie I przez a_{11}); mnożąc je kolejno przez -2, -1, -3 i -1 i dodając odpowiednio do równań II, III, IV i V otrzymujemy układ

$$(\text{a}_2)\qquad \begin{array}{l} -2x_2+5x_3+x_4-3x_5=1, \\ -x_2+x_3-3x_4=4, \\ -8x_2+10x_3-5x_4-2x_5=13, \\ -3x_2+4x_3-3x_4-6x_5=1 \end{array}$$

nie zawierający niewiadomej x_1. Z kolei, dzieląc pierwsze równanie układu (a_2) przez -2, otrzymujemy

$$(a_3) \qquad x_2-\tfrac{5}{2}x_3-\tfrac{1}{2}x_4+\tfrac{3}{2}x_5=-\tfrac{1}{2},$$

a następnie analogicznie jak poprzednio rugujemy niewiadomą x_2 i otrzymujemy układ trzech równań o trzech niewiadomych x_3, x_4 i x_5

$$(a_4) \qquad \begin{aligned} -\tfrac{3}{2}x_3-\tfrac{7}{2}x_4+\tfrac{3}{2}x_5&=\tfrac{7}{2},\\ -10x_3-9x_4+10x_5&=9,\\ -\tfrac{7}{2}x_3-\tfrac{9}{2}x_4-\tfrac{3}{2}x_5&=-\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Z kolei rugujemy niewiadomą x_3. Otóż

$$(a_5) \qquad x_3+\tfrac{7}{3}x_4-x_5=-\tfrac{7}{3}$$

oraz

$$(a_6) \qquad \begin{aligned} \tfrac{43}{3}x_4 \qquad &=-\tfrac{43}{3},\\ \tfrac{11}{3}x_4-5x_5&=-\tfrac{26}{3}. \end{aligned}$$

Z układu (a_6) mamy $x_4=-1$, $x_5=1$, następnie z (a_5) otrzymujemy $x_3=1$, z (a_3) otrzymujemy $x_2=0$ oraz z (a_1) otrzymujemy $x_1=2$. Wykonywane rachunki wygodnie jest zapisać w następującym schemacie podanym w tabelce 1.

Część A_0 schematu zawiera współczynniki przy niewiadomych łącznie z wyrazami wolnymi, przy czym w kolumnie $\sum$ piszemy sumę liczb wiersza łącznie z wyrazem wolnym.

Ostatni wiersz części A_0 (tzw. wiersz znaczony), otrzymujemy z wiersza pierwszego, dzieląc każdy jego element przez współczynnik a_{11} przy x_1 (w naszym przypadku przez $a_{11}=1$). Elementy części A_1 otrzymujemy następująco: elementy wiersza znaczonego części A_0 mnożymy przez liczbę $-a_{21}$ (a_{21} współczynnik przy x_1 w drugim równaniu; w naszym przypadku $-a_{21}=-2$) oraz dodajemy do odpowiednich elementów wiersza drugiego części A_0; otrzymany wiersz, w którym pierwsza liczba będzie zerem (w tabelce zero pomijamy) jest pierwszym wierszem części A_1. Wiersz drugi otrzymujemy mnożąc elementy wiersza znaczonego przez $-a_{31}$ (w naszym przypadku $-a_{31}=-1$) i dodając do elementów trzeciego wiersza części A_0, itd. Ostatni wiersz części A_1 (wiersz znaczony) otrzymujemy analogicznie jak w części A_0. Części A_2, A_3 i A_4 otrzymujemy podobnie, przy czym w ostatniej części (w naszym przypadku w A_4) jest tylko jeden wiersz poza wierszem znaczonym. Mając tak przygotowaną tabelkę znajdujemy niewiadome, korzystając tylko z wierszy znaczonych. Otóż wyraz wolny w wierszu znaczonym części A_4 jest wartością niewiadomej x_5 (ostatniej niewiadomej). Pozostałe niewiadome x_i ($i=4, 3, 2, 1$) obliczamy kolejno przez odjęcie od wyrazu wolnego w wierszu znaczonym części A_{i-1} sumy iloczynów odpowiednich elementów tego wiersza przez uprzednio znalezione wartości niewiadomych (np. $x_2=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x_5-(-\frac{1}{2})x_4-(-\frac{5}{2})x_3$). Wartości te wpisujemy kolejno do kolumny wyrazów wolnych w części B. Umieszczone w tej części jedynki pomagają wyszukiwać dla danego x_i odpowiednie współczynniki w wierszach znaczonych.

Tabelka 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	wyraz wolny	$\sum$	część schematu
1	2	-3	1	1	-1	1	
2	2	-1	3	-1	-1	4	
1	1	-2	-2	1	3	2	A_0
3	-2	1	-2	1	10	11	
1	-1	1	-2	-5	0	-6	
1	2	-3	1	1	-1	1	
	-2	5	1	-3	1	2	
	-1	1	-3	0	4	1	
	-8	10	-5	-2	13	8	A_1
	-3	4	-3	-6	1	-7	
	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	
		$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	0	
		-10	-9	10	9	0	A_2
		$-\frac{7}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-10	
		1	$\frac{7}{3}$	-1	$-\frac{7}{3}$	0	
			$\frac{43}{3}$	0	$-\frac{43}{3}$	0	
			$\frac{11}{3}$	-5	$-\frac{26}{3}$	-10	A_3
			1	0	-1	0	
				-5	-5	-10	A_4
				1	1	2	
				1	x_5		
			1		x_4		
		1			x_3		B
	1				x_2		
1					x_1		

Poprawność wykonywanych obliczeń sprawdzamy za pomocą kolumny $\sum$, tzw. *sum, kontrolnych*. Mianowicie na sumach kontrolnych wykonujemy te same działania co na pozostałych elementach wiersza, przy czym, jeżeli w trakcie obliczeń nie popełniliśmy błędu, elementy kolumny $\sum$ będą równe sumom odpowiadających im przekształconych wierszy.

6.16. Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać następujący układ równań

$$7{,}9x_1+5{,}6x_2+5{,}7x_3-7{,}2x_4=6{,}68\,,$$

$$8{,}5x_1-4{,}8x_2+0{,}8x_3+3{,}5x_4=9{,}95\,,$$

$$4{,}3x_1+4{,}2x_2-3{,}2x_3+9{,}3x_4=8{,}6\,,$$

$$3{,}2x_1-1{,}4x_2-8{,}9x_3+3{,}3x_4=1\,.$$

Sporządzamy tabelkę 2 (por. przykład 6.15), z której obliczamy niewiadome, korzystając z wierszy znaczonych. Otóż z części A_3 otrzymujemy $x_4=0{,}56790$ (wyraz wolny w wierszu znaczonym); z kolei korzystając z wiersza znaczonego części A_2 obliczamy x_3, odejmując od wyrazu wolnego tego wiersza liczbę $-2{,}09836$ pomnożoną przez znalezioną wartość $x_4=0{,}56790$; stąd $x_3=0{,}42630$; analogicznie znajdujemy $x_2=0{,}12480$ i $x_1=0{,}96710$.

Tabelka 2

x_1	x_2	x_3	x_4	wyrazy wolne	$\sum$	części schematu
7,9	5,6	5,7	−7,2	6,68	18,68	A_0
8,5	−4,8	0,8	3,5	9,95	17,95	
4,3	4,2	−3,2	9,3	8,6	23,2	
3,2	−1,4	−8,9	3,3	1	−2,8	
1	0,70886	0,72152	−0,91139	0,84557	2,36456	
	−10,82531	−5,33292	11,24682	2,76265	−2,14876	A_1
	1,15190	−6,30254	13,21898	4,96405	13,03239	
	−3,66835	−11,20886	6,21645	−1,70582	−10,36658	
	1	0,49263	−1,03894	−0,25520	0,19849	
		−6,87000	14,41573	5,25801	12,80374	A_2
		−9,40172	2,40525	−2,64198	−9,63845	
		1	−2,09836	−0,76536	−1,86372	
			−17,32294	−9,83768	−27,16062	A_3
			1	0,56790	1,56790	
			1	0,56790		B
		1		0,42630		
	1			0,12480		
1				0,96710		

Kontrolę obliczeń przeprowadzamy za pomocą kolumny $\sum$, na której wykonujemy te same działania co na pozostałych kolumnach. Tak np. suma elementów pierwszego wiersza części A_1 wynosi $-2{,}14876$; z drugiej strony mamy $-8{,}5\cdot 2{,}36456+17{,}95=-2{,}148760$. Analogicznie można sprawdzić pozostałe elementy kolumny $\sum$.

Zadania

6.17. Dane są macierze:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 5 & 6 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3}\\ -1 & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

Znaleźć: a) $A+B$; b) $A-C$; c) $A+B+C$; d) $A-2B+3C$.

6.18. Wykazać prawdziwość wzorów: a) $k(rA)=(kr)A$; b) $k(A+B)=kA+kB$; c) $(k+r)A=kA+rA$, gdzie k i r oznaczają liczby rzeczywiste, a A i B są macierzami tego samego wymiaru.

6.19. Znaleźć macierz X spełniającą równość

$$4X+3A=C, \quad \text{gdzie} \quad A=[a_{ij}]_{n\times m}, \quad C=[c_{ij}]_{n\times m}.$$

6.20. Zbadać, czy istnieje macierz X spełniająca równość

$$2A+3X=B,$$

gdzie

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

i w przypadku istnienia znaleźć ją.

6.21. Dana jest macierz $A=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & -9 \\ 12 & 0 & -3 & 27 \\ 15 & 9 & 0 & 9 \end{bmatrix}$; znaleźć: a) $\frac{1}{3}A$; b) A^{T}.

6.22. Wykazać, że mnożenie macierzy nie jest przemienne.

6.23. Wykazać, że mnożenie macierzy jest łączne.

6.24. Wykazać prawdziwość wzorów:

a) $A(B+C)=AB+AC$, b) $(A+B)C=AC+BC$,

gdzie A, B i C oznaczają macierze.

6.25. Wykazać, że zbiór macierzy postaci $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbf{R}$ z działaniem $\square = \cdot$ („$\cdot$" oznacza mnożenie macierzy) tworzy grupę izomorficzną z grupą $(\mathbf{Z}, \odot)$, gdzie $\mathbf{Z}$ oznacza zbiór liczb zespolonych, $\odot$ – mnożenie liczb zespolonych.

6.26. Obliczyć wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & -3 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 13 & 19 \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; i) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

6.27. Metodą Sarrusa rozwinąć wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 0 & \sin x & \operatorname{ctg} x \\ \sin x & 0 & \sin x \\ \operatorname{ctg} x & \sin x & 0 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$.

6.28. Rozwinąć wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ a & e & 0 & 0 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

6.29. Wykazać, że

$$\begin{vmatrix} x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

6.30. Rozwiązać równania:

a) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \dfrac{3}{2}$; b) $\begin{vmatrix} 4\sin x & 0 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$; c) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2x & -1 \end{vmatrix} = 0$.

6.31. Sprawdzić tożsamości:

a) $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$; b) $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$;

c) $\begin{vmatrix} \sin a\cos b & \sin a\sin b & \cos a \\ r\cos a\cos b & r\cos a\sin b & -r\sin a \\ -r\sin a\sin b & r\sin a\cos b & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin a$.

6.32. Sprawdzić tożsamości:

a) $\begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+b) \end{vmatrix} = -2\sin(a-c)\sin(c-b)\sin(b-a)$;

b) $\begin{vmatrix} 1 & \sin a & \sin^2 a \\ 1 & \sin b & \sin^2 b \\ 1 & \sin c & \sin^2 c \end{vmatrix} = (\sin a - \sin b)(\sin b - \sin c)(\sin c - \sin a)$;

c) $\begin{vmatrix} \sin^2 x & \sin x\cos x & \cos^2 x \\ \sin^2 y & \sin y\cos y & \cos^2 y \\ \sin^2 z & \sin z\cos z & \cos^2 z \end{vmatrix} = -\sin(x-y)\sin(y-z)\sin(z-x)$.

6.33. Rozwiązać nierówności:

a) $\begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} > 5$; b) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$; c) $\begin{vmatrix} 3x-5 & x-2 & x-3 \\ 2x+1 & x-1 & x+2 \\ 3x+2 & x-1 & 2x+3 \end{vmatrix} > 0$.

6.34. Wykazać, że

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

6.35. Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Przedstawić macierz A w postaci sumy macierzy symetrycznej i antysymetrycznej.

6.36. Wykazać, że jeżeli $[a_{ij}]_{n\times n}$ jest macierzą antysymetryczną, to $a_{ii}=0$.

6.37. Wykazać, że $\det A = 0$, jeżeli $A = [a_{ij}]_{3\times 3} = -A^{\mathrm{T}}$.

6.38. Ile minorów można utworzyć z macierzy $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ $(n<m)$?

6.39. Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzić, czy istnieje macierz ABC (por. zadanie 6.23) i w przypadku istnienia znaleźć ją. Czy wyrażenie BAC jest macierzą?

6.40. Znaleźć ABC, jeżeli

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & -2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

6.41. Znaleźć $\det(AA^{\mathrm{T}})$, jeżeli $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

6.42. Znaleźć rzędy macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 5 & -3 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 4 \end{bmatrix}$.

6.43. Znaleźć macierz dołączoną A^D macierzy

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

6.44. Dane są macierze:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\\ 1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}.$$

Znaleźć: a) AB, b) BC; c) $(ABC)^2$.

6.45. Sprawdzić, że $\det(AB)=\det A\cdot\det B$, jeżeli

$$A=[a_{ij}]_{2\times 2},\quad B=[b_{ij}]_{2\times 2}.$$

6.46. Znaleźć $AB-BA$, jeżeli:

a) $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 4\\ -3 & 5 & -1\end{bmatrix}$; b) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

6.47. Znaleźć:

a) $\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}^2$; b) $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}^3$; c) $\begin{bmatrix}3 & 2\\ -4 & -2\end{bmatrix}^5$; d) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}^n$; e) $\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^n$.

6.48. Dane są macierze

$$A=\begin{bmatrix}-6 & -4 & -2\\ -9 & -6 & -3\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 0\end{bmatrix};$$

wykazać, że $AB=O$, a $BA\neq O$.

6.49. Znaleźć macierze X spełniające równania:

a) $\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}4 & -6\\ 2 & 1\end{bmatrix}$; b) $X\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{bmatrix}$.

6.50. Wykazać, że jeżeli $AB=BA$, to:

a) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$; b) $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$.

6.51. Wykazać prawdziwość wzoru $(AB)^T=B^TA^T$.

6.52. Znaleźć macierze odwrotne do danych

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $(ad-bc \neq 0)$;

c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

6.53. Niech A, $B \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$, $\det A \neq 0 \wedge \det B \neq 0$. Wykazać, że
a) $A^{-1}A = AA^{-1} = I$; b) $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$;
c) $(A^{-1})^{-1} = A$; d) $(AB = BA) \Rightarrow (A^{-1}B = BA^{-1})$.

6.54. Niech A, B, $C \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$. Wykazać, że:
a) macierz AA^{T} i $A^{\mathrm{T}}A$ są symetryczne;
b) (A skośnie symetryczna) $\Rightarrow$ ($A^2 = AA$ symetryczna);
c) ((A symetryczna) $\wedge$ (B ortogonalna)) $\Rightarrow$ ($B^{-1}AB$ symetryczna);
d) ((A skośnie symetryczna) $\wedge$ (B ortogonalna)) $\Rightarrow$ ($B^{-1}AB$ skośnie symetryczna);
e) ((A symetryczna) $\wedge$ (B, C ortogonalne)) $\Rightarrow$ ($C^{-1}B^{-1}\,ABC$ symetryczna).

6.55. Rozwiązać równanie macierzowe

$$AX + B = O,$$

(gdzie $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times n}$, $\det A \neq 0$ oraz O oznacza macierz zerową $[0]_{n\times n}$.

6.56. Rozwiązać następujący układ równań macierzowych:

$$AX + BY = M,$$

$$CX + DY = N,$$

gdzie macierze A, B, C, D, M i N są dane, X i Y niewiadome, przy czym A, B, C i D są macierzami kwadratowymi nieosobliwymi stopnia n oraz $M = [m_{ij}]_{n\times 1}$, $N = [n_{ij}]_{n\times 1}$.

6.57. Wykazać, że zbiór macierzy $M_{n\times n}(K)$ z działaniami „+" dodawanie macierzy, „·" mnożeniem macierzy tworzy pierścień.

6.58. Dane są zbiory $Z_1 = \{A, B, C, D\}$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix},$$

oraz

$$Z_2 = \left\{ z \in \mathbf{Z}:\ i^7 z^4 = \frac{-\sqrt{3} - i}{1 - i\sqrt{3}}\ (i = (0, 1) \in \mathbf{Z}) \right\}.$$

Udowodnić, że struktury $(Z_i, \cdot)$, $i = 1, 2$, gdzie „·" oznacza mnożenie macierzy (lub dla Z_2, mnożenie liczb zespolonych) są grupami oraz że grupy te są izomorficzne.

6.59. Niech $A, B \in G_n(\mathbf{R})$ będą macierzami ortogonalnymi. Wykazać, że:

a) $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$, $\quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}$;

b) $\det A = -1 \vee \det A = 1$;

c) A^{-1} jest ortogonalna; d) AB jest ortogonalna;

e) $A_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{jeżeli } \det A = 1 \\ -a_{ij}, & \text{jeżeli } \det A = -1, \end{cases}$

gdzie A_{ij} oznacza dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij} macierzy $A = [a_{ij}]_{n \times n}$.

6.60. Niech $X = [x_i]_{n \times 1}$, $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, $Y = AX$. Wykazać, że

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \Leftrightarrow (A \text{ jest ortogonalna}).$$

6.61. Dane są macierze:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Sprawdzić, czy AB i BA są ortogonalne.

6.62. Niech $A \approx B$, gdzie $A, B \in G_n(\mathbf{R})$ oznacza, że macierze A i B są podobne. Wykazać, że relacja $\approx$ jest równoważnością w zbiorze $G_n(\mathbf{R})$.

6.63. Sprawdzić, czy macierze:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -13 & -70 & 119 \\ -4 & -19 & 34 \\ -4 & -20 & 35 \end{bmatrix}$

są podobne.

6.64. Niech $A, B \in G_n(\mathbf{R})$. Wykazać, że jeżeli co najmniej jedna z macierzy A, B jest nieosobliwa, to $AB \approx BA$. Podać przykład macierzy osobliwych A i B, dla których AB i BA nie są podobne.

6.65. Niech $A, B \in G_n(\mathbf{R})$. Wykazać, że
a) $\mathrm{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \mathrm{Tr}\, A + \beta \mathrm{Tr}\, B$; b) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

6.66. Wykazać, że wszystkie wartości własne macierzy nieosobliwej są różne od zera.

6.67. Udowodnić T_2 dla $n = 3$.

6.68. Znaleźć równania charakterystyczne i wartości własne macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

6.69. Znając wartości własne macierzy A znaleźć:
a) wartości własne macierzy A^{-1} (zakładamy, że $\det A \neq 0$); b) wartości własne macierzy $A^2 = AA$.

6.70. Podać warunki konieczne i wystarczające na to, żeby wartości własne macierzy $A_{2\times 2}$ były równe.

6.71. Wykazać, że wielomian charakterystyczny macierzy W z przykładu 6.4 jest iloczynem wielomianów charakterystycznych macierzy A i B przykładu 6.4.

6.72. Udowodnić, że jeżeli $\det A_{n\times n} \neq 0$, to macierze AB i BA mają ten sam wielomian charakterystyczny.

6.73. Niech $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ oraz $f(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$ $(A^0 = I)$. Udowodnić, że jeżeli λ jest pierwiastkiem charakterystycznym macierzy A, to $f(\lambda)$ jest pierwiastkiem charakterystycznym macierzy $f(A)$.

6.74. Sprawdzić wzór (6) dla $n=3$.

6.75. Korzystając z twierdzenia Cayleya-Hamiltona znaleźć macierze odwrotne macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

6.76. Rozwiązać układy równań:

a) $\begin{aligned} 2x - 5y &= 1, \\ 4x - 10y &= 3; \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x - y &= 3, \\ 2x + y &= 7; \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 3x + y &= 1, \\ 9x + 3y &= 3; \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x - y + 3z &= 2, \\ 2x + 7y + 5z &= 1, \\ 2x - 2y + 6z &= -5; \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} x + y - 4z &= 0, \\ 2x + 2y - 8z &= 1, \\ 5x + 5y - 20z &= 3; \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} 5x - 6y + 4z &= 3, \\ 3x - 3y + 2z &= 2, \\ 4x - 5y + 2z &= 1; \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} x - y + z - t &= 2, \\ 3x - y - 7z + 2t &= 0, \\ 6x + 2y - z - t &= 3, \\ 2x - 2y + 2z - 2t &= 5; \end{aligned}$ h) $\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4t &= 5, \\ 2x + y + 2z + 3t &= 1, \\ 3x + 2y + z + 2t &= 1, \\ 4x + 3y + 2z + t &= -5; \end{aligned}$ i) $\begin{aligned} x + 2y + 3z - 4t &= 4, \\ y - z + t &= -3, \\ x + 3y \quad - 3t &= 1, \\ -7y + 3z + t &= -3. \end{aligned}$

6.77. Rozwiązać układy równań:

a) $\begin{aligned} 2x-y+z-2&=0,\\ x+y-z-3&=0,\\ 4x+y-z-8&=0;\end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x+3y\qquad\quad -8&=0,\\ 3x\qquad +2z\quad -9&=0,\\ 4y\qquad +3t-20&=0,\\ 2z+t-10&=0;\end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x-y+3z&=0,\\ 2x+y+z&=0,\\ 5x+2y-5z&=0;\end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x-y-z&=0,\\ x+4y+2z&=0,\\ 3x+7y+3z&=0;\end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 2x+3y-z+5t&=0,\\ 3x-y+2z-7t&=0,\\ 4x+y-3z+6t&=0,\\ x-2y+4z-7t&=0;\end{aligned}$ f) $\begin{aligned} 3x+4y-5z+7t&=0,\\ 2x-3y+3z-2t&=0,\\ 4x+11y-13z+16t&=0,\\ 7x-2y+z+3t&=0.\end{aligned}$

6.78. Rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned} 2ax-3by+cz&=0,\\ 3ax-6by+5cz&=2abc,\\ 5ax-4by+2cz&=3abc, \quad \text{gdzie} \quad abc\neq 0.\end{aligned}$$

6.79. Rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned} y+z+t&=a,\\ x\quad +z+t&=b,\\ x+y\quad +t&=c,\\ x+y+z\quad &=d.\end{aligned}$$

6.80. Metodą macierzową rozwiązać następujący układ równań:

$$\begin{aligned} x+y-z\quad &=1,\\ 3x-y\quad +t&=2,\\ 6x+2y+z-t&=9,\\ 3x-y-2z+t&=0.\end{aligned}$$

6.81. Zbadać warunki rozwiązalności układów równań (a, b, k, m — parametry)

a) $\begin{aligned} 3x-2y+z&=b,\\ 5x-8y+9z&=3,\\ 2x+y+az&=-1;\end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 3x-2y+z&=0,\\ kx-14y+15z&=0,\\ x-2y-3z&=0;\end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x+2y+4z&=4,\\ (a-1)x+(a+1)y+(2a+2)z&=a+1,\\ (a+1)x+(3a-1)y+16z&=3a+7;\end{aligned}$ d) $\begin{aligned} (a+1)x+ay+(a-1)z&=a+7,\\ (a-7)x+(a-6)y+(a-5)z&=-10,\\ 4x+3y+2z&=11;\end{aligned}$

e) $$\begin{aligned} x+(a+1)y+(2a+3)z&=0,\\ 2x+(3a+1)y+10z&=0,\\ x+2y+5z&=0; \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 3x+5y+6z&=8,\\ (m+2)x+(6+m)y+(8+m)z&=12+m,\\ (m-1)x+5y+(m+2)z&=m+4; \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} x+(m+1)y+(m+1)z&=2m+4,\\ 2x+(2m-1)y+mz&=m+5,\\ x+2y+2z&=3m+3; \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} 3x+(a-1)y+2z&=0,\\ (a+3)x+(2a-2)y+(2a-2)z&=0,\\ 5x+2y-4z&=0; \end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned} ax+(a+4)y+(a-4)\ &=a-\ ,\\ x+(a+1)y+3z&=2a+7,\\ x-y+3z&=a+5; \end{aligned}$$

j) $$\begin{aligned} ax+(a+2)y+(a+1)z&=4a+1,\\ (2a-2)x+2a\,y+(2a-1)z&=3a+3,\\ 2x+4y+3z&=2a+5; \end{aligned}$$

k) $$\begin{aligned} x+(a-1)y+(a+3)z&=0,\\ 2x+(a+1)y+(3a+3)z&=0,\\ x+2y+3z&=0; \end{aligned}$$

l) $$\begin{aligned} x+3y+z&=a+1,\\ (a+1)x+(4a+1)y+(2a-1)z&=4a+1,\\ 2x+2ay+2z&=a+4; \end{aligned}$$

ł) $$\begin{aligned} x+(a-1)y+(a+2)z&=a+4,\\ (a-2)x+(a+2)y+(2a+4)z&=2a+3,\\ (a+1)x+(4a-1)y+(5a+10)z&=5a+15; \end{aligned}$$

m) $$\begin{aligned} x+2y+4z&=0,\\ (2+a)x+(3+a)y+(5+a)z&=0,\\ (4+2a)x+(5+a)y+8z&=0; \end{aligned}$$

n) $$\begin{aligned} ax+y+z+t&=1,\\ x+ay+z+t&=a,\\ x+y+az+t&=a^2,\\ x+y+z+at&=a^3. \end{aligned}$$

6.82. Rozwiązać układy równań:

a) $$\begin{aligned} 3x-y+z&=2,\\ 6x-2y+2z&=1; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x+2y-3z&=2,\\ 5x-y+z&=1; \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x-3y&=8,\\ x+y&=-1,\\ 5x-y&=7; \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 3x+y-1&=0,\\ x-y+6&=0,\\ 2x+5y-7&=0; \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x+y-3z&=-1,\\ 2x+y-2z&=1,\\ x+y+z&=3,\\ x+2y-3z&=1; \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 2x+y+z&=2,\\ x+3y+z&=5,\\ x+y+5z&=-7,\\ 2x+3y-3z&=14; \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} x+y+z+1&=0,\\ 2x-y+z-2&=0,\\ 5x-y+3z-3&=0,\\ 7x-2y+4z-5&=0; \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} 3x-5y+2z+4t&=2,\\ 7x-4y+z+3t&=5,\\ 5x+7y-4z-6t&=3; \end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned} x-2y+z+t&=1,\\ x-2y+z-t&=-1,\\ x-2y+z+5t&=5; \end{aligned}$$

j) $$\begin{aligned} 3x-2y+5z+4t&=2,\\ 6x-4y+4z+3t&=3,\\ 9x-6y+3z+2t&=4; \end{aligned}$$

k) $$\begin{aligned} 3x+2y+2z+2t&=2,\\ 2x+3y+2z+5t&=3,\\ 9x+y+4z-5t&=1,\\ 2x+2y+3z+4t&=5,\\ 7x+y+6z-t&=7; \end{aligned}$$

l) $$\begin{aligned} 6x+4y+5z+2t+3u&=1,\\ 3x+2y+4z+t+2u&=3,\\ 3x+2y-2z+t&=-7,\\ 9x+6y+z+3t+2u&=2. \end{aligned}$$

6.83. Rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned} x+y+z&=2,\\ 2x-y-z&=1,\\ 4x+y+3z&=3,\\ x+y-5z&=8,\\ 6x+3y-z&=13. \end{aligned}$$

6.84. Rozwiązać układy równań:

a) $\begin{aligned} 2x-5y&=0,\\ 3x+y&=0,\\ 5x+6y&=0; \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 3x-2y+5z&=0,\\ x+2y-3z&=0; \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x-y+z&=0,\\ 3x+y-2z&=0,\\ 5x+y+z&=0,\\ 6x-y+3z&=0; \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 3x-2y+z&=0,\\ x+2y-3z&=0,\\ 4x-4y+3z&=0,\\ 8x+12y-19z&=0; \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x-2y+z-t+u&=0,\\ 2x+y-z+2t-3u&=0,\\ 3x-2y-z+t-2u&=0,\\ 2x-5y+z-2t+2u&=0; \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} x_1-x_3+x_5&=0,\\ x_2-x_4+x_6&=0,\\ x_1-x_2+x_5-x_6&=0,\\ x_2-x_3+x_6&=0,\\ x_1-x_4+x_5&=0. \end{aligned}$

6.85. Zbadać warunki rozwiązalności układów równań (a, b, c – parametry):

a) $\begin{aligned} ax+y&=2,\\ 3x-y&=1,\\ x+4y&=a; \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} (a+1)x+y&=a+2,\\ (a+3)x+2y&=3a+1,\\ 3x+y&=5; \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} (a+4)x+2y&=5a+8,\\ (a+1)x+y&=3a+3,\\ 3x+y&=9; \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x+2y&=a+2,\\ (a+1)x+3ay&=3a+6,\\ 3x-y&=5; \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 3x+4y&=5,\\ (4+a)x+(6+a)y&=12-a,\\ ax+(4-a)y&=a+1; \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} 2x+ay&=10,\\ 3x+(a+1)y&=3a+4,\\ 4x+(a+2)y&=20; \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} x+(a+1)y&=5,\\ 3x+(2a+1)y&=12,\\ (a+1)x+4y&=10; \end{aligned}$ h) $\begin{aligned} x-2y-z&=1,\\ 2x+y+az&=2,\\ bx+2y-z&=0,\\ 3x-2y+z&=1; \end{aligned}$

i) $\begin{aligned} x+y-z&=1, \\ 2x+y+z&=-1, \\ x+2y+z&=2, \\ ax+by+z&=1, \\ 2ax-by+z&=1; \end{aligned}$ j) $\begin{aligned} x+y+z&=9, \\ 3x-y+2z&=10, \\ 2x+7y-3z&=8, \\ ax-by+cz&=20, \\ ax+by+cz&=44, \\ 10ax+3by-cz&=26. \end{aligned}$

6.86. Zbadać warunki rozwiązalności układów równań (a, m – parametry):

a) $\begin{aligned} (a-1)x+ay+2z&=a, \\ 2x+(2a-3)y+2z&=a+3; \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} ax+(a+2)y+2az&=a+2, \\ (a-2)x+(2a-5)y+(2a-4)z&=a-1; \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} (a-1)x+(a+1)y+(2a-2)z&=2a+8, \\ (a-3)x+(2a-7)y+(2a-6)z&=2a-1; \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} (a-2)x+ay+(a+2)z&=a+1, \\ (2a-4)x+2ay+(3a-2)z&=2a-1; \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} ax+(2a+3)y+2az&=3a+9, \\ (2a-2)x+(3a+1)y+(4a-4)z&=7a+1; \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} (m+1)x-(m-3)y+(2m+2)z&=3m+5, \\ (m-3)x+(2m-4)y+(2m-6)z&=m-9; \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} 2x-y+z+t&=1, \\ x+2y-z+4t&=2, \\ x+7y-4z+11t&=a. \end{aligned}$

6.87. Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać układy równań:

a) $$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5&=13, \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4+4x_5&=10, \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5&=11, \\ 2x_1+2x_2+2x_3+x_4+2x_5&=6, \\ 2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+x_3&=3; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1+2x_2-3x_3+4x_4-x_5&=-1, \\ 2x_1-x_2+3x_3-4x_4+2x_5&=8, \\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5&=3, \\ 4x_1+3x_2+4x_3+2x_4+2x_5&=-2, \\ x_1-x_2-x_3+2x_4-3x_5&=-3; \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x_1-3x_2+5x_3-7x_4&=-8{,}9, \\ 3x_1-x_2-x_3+4x_4&=17{,}2, \\ 5x_1-2x_2-6x_3+8x_4&=22{,}7, \\ 3x_1+2x_2+x_3-4x_4&=-10{,}1; \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x_1+3x_2-2x_3\qquad-2x_5&=0{,}5, \\ 3x_1+4x_2-5x_3+x_4-3x_5&=5{,}4, \\ -2x_1-5x_2+3x_3-2x_4+2x_5&=5{,}0, \\ x_2-2x_3+5x_4+3x_5&=7{,}5, \\ -2x_1-3x_2+2x_3+3x_4+4x_5&=3{,}3. \end{aligned}$$

Odpowiedzi.

6.17. a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & \frac{10}{3} & -\frac{8}{3} \\ 6 & \frac{26}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 3 & \frac{11}{3} & \frac{8}{3} \\ 5 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6.19. $X=\frac{1}{4}C-\frac{3}{4}A=[x_{ij}]_{n\times m}$, gdzie $x_{ij}=\frac{1}{4}c_{ij}-\frac{3}{4}a_{ij}$. **6.20.** $X=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}=$ $=\frac{1}{3}(B-2A)$.

6.21. a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -1 & 9 \\ 5 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3 & 12 & 15 \\ 6 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & 0 \\ -9 & 27 & 9 \end{bmatrix}$.

6.26. a) -11; b) 0; c) -27; d) 0; e) -10;
f) 48; g) 0; h) 6480; i) 1060.

6.27. a) $-2x+y+5$; b) $(x-y)(y-z)(z-x)$; c) $\sin 2x$;
d) $xyz(x-y)(y-z)(z-x)$, por. punkt b).

6.28. a) $4x+7y+5z-30$; b) $(be-cd)(be-ac)$; c) $-16x_1+12x_2-12x_3+8x_4-4$.

6.30. a) $x_1=-\frac{1}{6}$, $x_2=\frac{3}{2}$; b) $x=(-1)^n\frac{1}{12}\pi+n\frac{1}{2}\pi$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;
c) nie istnieją pierwiastki rzeczywiste.

6.33. a) $x<-3$; b) $-6<x<-4$; c) $-1<x<0 \vee x>1$.

6.35. Wsk. Por. przykład 6.5

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

6.38. $\sum_{i=1}^{n}\binom{m}{i}\binom{n}{i}$. **6.39.** $\begin{bmatrix} 54 \\ 49 \end{bmatrix}$; nie. **6.40.** $ABC=\begin{bmatrix} 120 & 81 & 42 \\ -30 & -29 & -28 \\ 60 & 65 & 70 \end{bmatrix}$.

6.41. 45. **6.42.** a) 2; b) 1; c) 0; d) 2; e) 3.

6.43. $A^{D}=\begin{bmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \\ -5 & -4 & 7 \end{bmatrix}$.

6.44. a) $AB=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -3 & 9 \end{bmatrix}$; b) $BC=\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; c) $(ABC)^2=\begin{bmatrix} 133 & 270 \\ 360 & 733 \end{bmatrix}$.

6.46. a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix}$.

6.47. a) $\begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{bmatrix}$;
c) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$.

6.49. a) $\begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

6.52. a) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$; b) $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$;

d) $\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; e) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

6.55. $X=-A^{-1}B$.

6.56. $X=A^{-1}M-A^{-1}BY$, $Y=(A^{-1}B-C^{-1}D)^{-1}\ (A^{-1}M-C^{-1}N)$, przy czym zakładamy, że macierz $(A^{-1}B-C^{-1}D)$ jest nieosobliwa.

6.61. AB i BA są ortogonalne.

6.63. a) Podobne; b) A i C podobne; A i B oraz B i C nie są podobne.

6.64. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

6.68. a) $\lambda^2-3\lambda-1=0$, $\lambda_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$;

b) $-\lambda^3+13\lambda-12=0$, $\lambda_1=-4$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=3$;

c) $\lambda^3-18\lambda^2+64\lambda-64=0$, $\lambda_1=2$, $\lambda_{2,3}=4(2\pm\sqrt{2})$;

d) $(\lambda+2)^2(\lambda-2)^2=0$, $\lambda_1=\lambda_2=-2$, $\lambda_3=\lambda_4=2$;

e) $\lambda^4-16\lambda^3+52\lambda^2-48\lambda=0$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3=2$, $\lambda_4=12$.

6.69. a) Odwrotności wartości własnych macierzy A;

b) Kwadraty wartości własnych macierzy A.

6.70. $(a_{11}+a_{22})^2+4a_{12}a_{21}=0$.

6.73. Wsk. Udowodnić, że $\big(f(x)\,g(x)=h(x)\big) \Rightarrow \big(f(A)\,g(A)=h(A)\big)$ oraz, że wielomian $f(x)-f(\lambda)$ jest podzielny przez $x-\lambda$.

6.75. a) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -8 & 1 & 2 \\ \frac{22}{3} & -\frac{4}{3} & -1 \end{bmatrix}$; b) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 6 & -7 & -4 \\ 3 & -5 & 7 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6.76. a) Sprzeczny; b) $x=\frac{10}{3}$, $y=\frac{1}{3}$; c) $x=u$, $y=1-3u$;

d) sprzeczny; e) sprzeczny; f) $x=y=z=1$; g) sprzeczny;

h) $x=-2$, $y=2$, $z=-3$, $t=3$; i) $x=-8$, $y=0$, $z=0$, $t=-3$.

6.77. a) $x=\frac{5}{3}$, $y=u+\frac{4}{3}$, $z=u$; b) $x=1$, $y=2$, $z=3$, $t=4$;

c) $x=y=z=0$; d) $x=2u$, $y=-3u$, $z=5u$;

e) $x=y=z=t=0$; f) $x=\frac{1}{17}(3u-13v)$, $y=\frac{1}{17}(19u-20v)$, $z=u$, $t=v$.

Występujące w odpowiedziach punktów a), d) i f) parametry u i v przebiegają wszystkie liczby rzeczywiste.

6.78. $x=bc$, $y=ac$, $z=ab$.

6.79. $x=-\frac{1}{3}(2a-b-c-d)$, $y=-\frac{1}{3}(2b-a-c-d)$, $z=-\frac{1}{3}(2c-a-b-d)$, $t=-\frac{1}{3}(2d-a-b-c)$.

6.80. $x=y=z=1$, $t=0$.

6.81. a) Gdy $a\neq -3$ — rozwiązanie jest jednoznaczne; gdy $a=-3\wedge b\neq\frac{1}{3}$ — układ jest sprzeczny; gdy $a=-3\wedge b=\frac{1}{3}$ — istnieje nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru;

b) gdy $k\neq 5$ — jednoznaczne rozwiązanie zerowe; gdy $k=5$ — istnieje nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru;

c) gdy $a\neq 3$ — rozwiązanie jednoznaczne; gdy $a=3$ — układ sprzeczny;

d) gdy $a\neq 5$ — układ sprzeczny; gdy $a=5$ — nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru;

e) gdy $a\neq 1$ — istnieje tylko rozwiązanie zerowe; gdy $a=1$ — istnieje nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od dwóch parametrów;

f) gdy $m\neq 4$ — jednoznaczne rozwiązanie; gdy $m=4$ — nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od dwóch parametrów;

g) gdy $m\neq 1$ — rozwiązanie jednoznaczne; gdy $m=1$ — nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru (y lub z dowolne);

h) gdy $a\neq 3\wedge a\neq\frac{11}{7}$ — istnieje tylko rozwiązanie zerowe; gdy $a=3$ lub $a=\frac{11}{7}$ — nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru;

i) gdy $a\neq -2$ — rozwiązanie jednoznaczne; gdy $a=-2$ — nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od dwóch parametrów;

j) gdy $a\neq 2$ — układ sprzeczny; gdy $a=2$ — nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od dwóch parametrów;

k) gdy $a\neq 3\wedge a\neq\frac{3}{2}$ — istnieje tylko rozwiązanie zerowe; gdy $a=3$ — jest $z=0$, a między x i y zachodzi zależność $x=-2y$ (x lub y dowolne); gdy $a=\frac{3}{2}$ — jedną ze zmiennych można przyjąć dowolnie, pozostałe wyrażają się liniowo od tej zmiennej;

l) gdy $a\neq 2\ \wedge a\neq 3$ — rozwiązanie jednoznaczne; gdy $a=2$ — jest $y=0$, a między x i z zachodzi zależność $x+z=3$; gdy $a=3$ — układ sprzeczny;

ł) gdy $a\neq 4$ — nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru; gdy $a=4$ — układ sprzeczny;

m) gdy $a\neq -1$ — istnieje tylko rozwiązanie zerowe; gdy $a=-1$ — nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od dwóch parametrów;

n) gdy $a\neq 1\wedge a\neq -3$ — rozwiązanie jednoznaczne; gdy $a=-3$ — układ sprzeczny; gdy $a=1$ — istnieje nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od trzech parametrów.

6.82. a) Sprzeczny; b) $x=\frac{1}{11}(v+4)$, $y=\frac{1}{11}(16v+9)$, $z=v$;

c) $x=1$, $y=-2$; d) sprzeczny; e) sprzeczny; f) $x=1$, $y=2$, $z=-2$;

g) $x=\frac{1}{3}(1-2v)$, $y=-\frac{1}{3}(v+4)$, $z=v$; h) sprzeczny;

i) $x=v$, $y=w$, $z=2w-v$, $t=1$; j) $x=v$, $y=w$, $z=6-15v+10w$, $t=-7+18v-12w$;

k) $x=\frac{1}{7}(-6+8v)$, $y=\frac{1}{7}(1-13v)$, $z=\frac{1}{7}(15-6v)$, $t=v$;

ł) $x=v$, $y=w$, $z=13$, $t=19-3v-2w$, $u=-34$.

W odpowiedziach punktów b), g), i), j), k) i l) parametry v i w przebiegają wszystkie liczby rzeczywiste.

6.83. $x=1, y=2, z=-1$.

6.84. a) $x=y=0$; b) $x=-2v$, $y=7v$, $z=4v$; c) $x=y=z=0$;

d) $x=2v$, $y=5v$, $z=4v$;

e) $x=\frac{1}{8}(-4v+7w)$, $y=\frac{1}{8}(-4v+5w)$, $z=\frac{1}{8}(4v-5w)$, $t=v$, $u=w$;

f) $x_1=v-w$, $x_2=v-k$, $x_3=v$, $x_4=v$, $x_5=w$, $x_6=k$.

W odpowiedziach punktów b), d), e) i f) parametry v, w i k przebiegają wszystkie liczby rzeczywiste.

6.85. a) gdy $a\neq\frac{1}{2}(-7-\sqrt{157})\wedge a\neq\frac{1}{2}(-7+\sqrt{157})$ – układ sprzeczny; a gdy $a=\frac{1}{2}(-7-\sqrt{157})\vee a=\frac{1}{2}(-7+\sqrt{157})$ – rozwiązanie jednoznaczne;

b) gdy $a\neq 3\wedge a\neq\frac{3}{2}$ – układ sprzeczny; gdy $a=3\vee a=\frac{3}{2}$ – rozwiązanie jednoznaczne;

c) gdy $a\neq 2$ – układ sprzeczny; gdy $a=2$ – nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru;

d) gdy $a\neq 2\wedge a\neq -\frac{3}{2}$ – układ sprzeczny; gdy $a=2\vee a=-\frac{3}{2}$ – rozwiązanie jednoznaczne;

e) gdy $a\neq 2\wedge a\neq\frac{31}{18}$ – układ sprzeczny; gdy $a=\frac{31}{18}\vee a=2$ – rozwiązanie jednoznaczne;

f) gdy $a\neq\frac{11}{3}$ – układ sprzeczny; gdy $a=\frac{11}{3}$ – rozwiązanie jednoznaczne;

g) gdy $a\neq 1\wedge a\neq -\frac{1}{2}$ – układ sprzeczny; gdy $a=1\vee a=-\frac{1}{2}$ – rozwiązanie jednoznaczne;

h) gdy $(a\in\mathbf{R}-\{3\})\wedge(b=-\frac{4}{5}a-\frac{9}{5})$ – rozwiązanie jednoznaczne, dla pozostałych wartości parametrów a i b układ sprzeczny;

i) gdy $a=-\frac{7}{9}\wedge b=\frac{7}{27}$ – rozwiązanie jednoznaczne, dla pozostałych wartości parametrów a i b układ sprzeczny;

j) gdy $a=2\wedge b=4\wedge c=6$ – rozwiązanie jednoznaczne, dla pozostałych wartości parametrów a, b, c układ sprzeczny.

6.86. a) gdy $a=3$ – układ sprzeczny; gdy $a\neq 3$ – nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru;

b) gdy $a=1$ – układ sprzeczny; gdy $a=4$ – nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od dwóch parametrów; gdy $a\neq 4\wedge a\neq 1$ – nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru;

c) gdy $a=2$ – układ sprzeczny; gdy $a=5$ – nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od dwóch parametrów; gdy $a\neq 2\wedge a\neq 5$ – nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru;

d) gdy $a=6$ – układ sprzeczny; gdy $a\neq 6$ – nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru (x lub y dowolne);

e) gdy $a=-3$ – układ sprzeczny; gdy $a=2$ – nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od dwóch parametrów; gdy $a\neq -3\wedge a\neq 2$ – nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru;

f) gdy $m=\frac{5}{3}$ – układ sprzeczny; gdy $m=1$ – nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od dwóch parametrów; gdy $m\neq\frac{5}{3}\wedge m\neq 1$ – nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru;

g) gdy $a\neq 5$ – układ sprzeczny; gdy $a=5$ – istnieje nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od dwóch parametrów.

6.87. a) $x_1=0,\ x_2=2,\ x_3=-2,\ x_4=0,\ x_5=3$;
b) $x_1=2,\ x_2=0,\ x_3=-2,\ x_4=-2,\ x_5=1$;
c) $x_1=1{,}3,\ x_2=-0{,}7,\ x_3=2{,}6,\ x_4=3{,}8$;
d) $x_1=-6{,}0978,\ x_2=-2{,}2016,\ x_3=-6{,}8011,\ x_4=-0{,}8996,\ x_5=0{,}1998$.

§ 7. PRZESTRZENIE METRYCZNE. PRZESTRZENIE WEKTOROWE

7.1. Strukturę (X, d), gdzie $X\neq\emptyset$ jest dowolnym zbiorem oraz d jest funkcją (zwaną odległością lub metryką) $d\colon X\times X\to \mathbf{R}_+\cup\{0\}$ spełniającą warunki:

1° $(d(x,y)=0)\Leftrightarrow(x=y)$,

2° $d(x,y)=d(y,x)$,

3° $d(x,y)+d(y,z)\geqslant d(x,z)$ (nierówność trójkąta)

nazywamy *przestrzenią metryczną*. Elementy zbioru X nazywamy *punktami*. Przestrzeń metryczną (X, d) oznaczamy nieraz przez X. Ważnym przykładem przestrzeni metrycznej jest struktura $(\mathbf{R}^n, d_1)$, gdzie

$$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\colon x_i\in\mathbf{R},\ i=1,2,\ldots,n\}$$

(por. zadanie 1.21) oraz

$$\bigwedge_{x,y\in\mathbf{R}^n}\Big(d_1(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\Big).$$

Metrykę (por. przykład 7.1) d_1 nazywamy *metryką pitagorejską*. Niech (X, d_X), (Y, d_Y) będą przestrzeniami metrycznymi. Odwzorowanie $f\colon X\to Y$ nazywamy *izometrią*, jeżeli:

$$\bigwedge_{x^1,x^2\in X}\big(d_X(x^1,x^2)=d_Y(f(x^1);f(x^2))\big).$$

7.2. Niech dana będzie przestrzeń metryczna (X, d). Zbiory, o których będziemy mówili w punkcie 7.2, będą zawsze podzbiorami zbioru X.

Kulą [*sferą*] o promieniu $r\in\mathbf{R}_+$ i środku $x_0\in X$ nazywamy zbiór:

$$K(x_0;\ r)=\{x\in X\colon\ d(x_0,x)<r\}$$

$$[F(x_0;\ r)=\{x\in X\colon\ d(x_0,x)=r\}].$$

Otoczeniem $U(x_0;\ r)$ (dokładnie: *otoczeniem kulistym*) punktu $x_0\in X$, nazywamy każdą kulę $K(x_0;\ r)$. *Sąsiedztwem* punktu $x_0\in X$ nazywamy zbiór $Q(x_0;\ r):=U(x_0;\ r)-\{x_0\}$. *Średnicą* zbioru $E\neq\emptyset$ nazywamy liczbę

$$\operatorname{dia}E:=\sup\{d(x,y)\colon\ x,y\in E\}.$$

Przyjmujemy $\operatorname{dia}\emptyset=0$. Zbiór E nazywamy *ograniczonym* [*nieograniczonym*], jeżeli $\operatorname{dia}E<+\infty$ [dla $E=+\infty$].

Punkt $x_0\in X$ nazywamy *punktem wewnętrznym zbioru E*, jeżeli istnieje otoczenie $U(x_0;\ r)\subset E$. Zbiór wszystkich punktów wewnętrznych zbioru E nazywamy *wnętrzem* zbioru E i oznaczamy $\operatorname{int}E$.

Zbiór $E \neq \emptyset$ nazywamy *zbiorem otwartym* (dokładnie: otwartym w X), jeżeli int $E = E$. Zbiór $\emptyset$ jest otwarty, ponieważ jego wnętrze jest zbiorem pustym. Punkt $x_0 \in X$ nazywamy *punktem skupienia zbioru* E (por. § 3), jeżeli w każdym otoczeniu punktu x_0 istnieje punkt $y \neq x_0 \wedge y \in E$. Zbiór $\bar{E} := E \cup E_s$, gdzie E_s jest zbiorem wszystkich punktów skupienia zbioru E nazywamy *domknięciem zbioru* E. Zbiór E nazywamy *domkniętym*, jeżeli $\bar{E} = E$.

Punkt $x_0 \in X$ nazywamy *punktem brzegowym* zbioru E, jeżeli w każdym otoczeniu punktu x_0 istnieją punkty należące do E i istnieją punkty nie należące do E. Zbiór wszystkich punktów brzegowych zbioru E nazywamy *brzegiem zbioru* E. Zbiór E nazywamy *zbiorem spójnym*, jeżeli dla każdego rozkładu zbioru E na sumę rozłącznych i niepustych zbiorów A i B zachodzi $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \neq \emptyset$. Zbiór otwarty i spójny nazywamy *obszarem*.

Zbiór

$$P = \{\mathbf{R}^n \ni (x_1, x_2, \ldots, x_n) : a_i < x_i < b_i,\ a_i, b_i \in \mathbf{R},\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

$$[Q = \{\mathbf{R}^n \ni (x_1, x_2, \ldots, x_n) : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ a_i, b_i \in \mathbf{R},\ i = 1, 2, \ldots, n\}]$$

nazywamy *przedziałem* (lub *kostką*) *otwartym* [*przedziałem domkniętym*].

7.3. *Przestrzenią wektorową* (będziemy pisać: p.w.) *nad ciałem* K nazywamy taką strukturę algebraiczną $(V, \square; K, +, \cdot, \circ)$, że

1° $(V, \square)$ jest grupą abelową,

2° $(K, +, \cdot)$ jest ciałem

oraz działanie $\circ$ jest odwzorowaniem $\circ : K \times V \to V$, takim, że jeżeli $\alpha, \beta \in K$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, 1 jest jednością grupy $(K - \{0\}, \cdot)$, to

3° $\left.\begin{array}{l} \alpha \circ (\mathbf{v} \square \mathbf{w}) = \alpha \circ \mathbf{v} \square \alpha \circ \mathbf{w} \\ (\alpha + \beta) \circ \mathbf{v} = \alpha \circ \mathbf{v} \square \beta \circ \mathbf{v} \end{array}\right\}$ rozdzielność,

4° $\alpha \circ (\beta \circ \mathbf{v}) = (\alpha \cdot \beta) \circ \mathbf{v}$ łączność,

5° $1 \circ \mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Elementy zbioru V nazywamy *wektorami*.

Przestrzeń $(V, \square; K, +, \cdot, \circ)$ będziemy oznaczali czasem przez V. Działania $\square$ i $\circ$ będziemy na ogół oznaczali przez $+$ i . Element neutralny grupy 1° będziemy oznaczali przez $\mathbf{o}$, element odwrotny elementu $\mathbf{x}$ grupy 1° będziemy oznaczali $-\mathbf{x}$.

Strukturę $(V_1, \square; K, +, \cdot, \circ)$, gdzie $V_1 \subset V$ i $(V, \square; K, +, \cdot, \circ)$ p.w. nazywamy *podprzestrzenią liniową* p.w. V, jeżeli:

$$1)\ V_1 \neq \emptyset, \qquad 2) \bigwedge_{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2 \in V} \bigwedge_{a, b \in K} (a\mathbf{v}^1 + b\mathbf{v}^2) \in V_1 .$$

Łatwo sprawdzić, że struktura $(V_1, \square; K, +, \cdot, \circ)$ jest p.w. nad K.

7.4. Niech $\mathbf{v}_i \in V$, $\lambda_i \in K$, $i = 1, 2, \ldots, n$, gdzie V jest p.w. nad K.

Wektor $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i$ nazywamy *kombinacją liniową wektorów* $\mathbf{v}_i$. Wektory $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ nazywamy *liniowo niezależnymi* (piszemy l.n.), gdy

$$\bigwedge_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\right).$$

Wektory $\mathbf{v}_i, i=1,2,\ldots,n$, które nie są liniowo niezależnymi nazywamy *liniowo zależnymi* (l.z.). Zbiór skończony wektorów $B\subset V$ nazywamy bazą p.w. V, jeżeli B jest zbiorem wektorów l.n. oraz każdy wektor $\mathbf{v}\in V$ jest kombinacją liniową wszystkich wektorów zbioru B. Moc bazy B nazywamy *wymiarem* p.w. V. Jeżeli $\mathbf{v}_i\in V$, $i=1,2,\ldots,n$ jest bazą skończoną p.w. V, to z definicji bazy wynika, że

$$\bigwedge_{\mathbf{v}\in V}\ \bigvee_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in K}\left(\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathbf{v}_i\right).$$

Liczby λ_i, wyznaczone jednoznacznie przez $\mathbf{v}$ i wektory $\mathbf{v}_i$ (por. zadanie 7.38) nazywamy *współrzędnymi wektora* $\mathbf{v}$ w bazie $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^{n}$.

Przykładem p.w. jest struktura $(\mathbf{R}^n, \Box; \mathbf{R}, +, \cdot, \circ)$. W zadaniu 1.21 określono działania $\Box$ i $\circ$ (oznaczone tam przez „+" i „·") i sprawdzono, że spełniają one warunki 1°-5° (por. punkt 7.3).

Jednością grupy $(\mathbf{R}^n, \Box)$ jest wektor $\mathbf{o}=(0,0,\ldots,0)\in\mathbf{R}^n$, elementem odwrotnym do $\mathbf{x}\in V$ jest wektor $-\mathbf{x}=\mathbf{o}-\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$.

Zastępując w p.w. $(\mathbf{R}^n, \Box; \mathbf{R}, +, \cdot, \circ)$ ciało $\mathbf{R}$ dowolnym ciałem liczbowym K oraz określając działania „+", „·" analogicznie jak w zadaniu 1.21, otrzymujemy p.w. $(K^n, \Box; K, +, \cdot, \circ)$, gdzie $K^n=\{(a_1,a_2,\ldots,a_n):\ a_i\in K,\ i=1,2,\ldots,n\}$.

Uwaga 1. Wektory $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ będziemy czasem utożsamiać z macierzami kolumnowymi, tzn. będziemy pisali $\mathbf{x}=X=[x_i]_{n\times 1}$.

Uwaga 2. W dalszym ciągu będziemy mówili tylko o p.w. mających skończone bazy.

Przykłady

7.1. Udowodnić, że struktura $(\mathbf{R}^n, d_1)$ (por. punkt 7.1) jest przestrzenią metryczną.

Rozwiązanie. Należy wykazać, że funkcja d_1 spełnia warunki 1°, 2° i 3°. Weźmy dowolne punkty $x,y\in\mathbf{R}^n$. Jeżeli $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=0$, to $x_i=y_i$, $i=1,2,\ldots,n$ oraz $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i)^2}=0$, tzn. warunek 1° jest spełniony. Z kolei

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}\Rightarrow(d_1(x,y)=d_1(y,x)),$$

tzn. że warunek 2° jest spełniony. Przy dowodzie warunku 3° skorzystamy z nierówności Schwarza

$$\text{(a)}\qquad \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\right)$$

wynikającej stąd, że trójmian kwadratowy zmiennej t: $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i t+\beta_i)^2$ jest dla wszystkich t nieujemny, a więc

$$\frac{\Delta}{4}=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\right)\Rightarrow\text{(a)}.$$

Aby wykazać, że dla $x, y, z \in \mathbf{R}^n$ $d_1(x, z) \leqslant d_1(x, y) + d_1(y, z)$, zauważmy, że

$$d_1^2(x, z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i + y_i - z_i)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)(y_i - z_i) + \sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2.$$

Korzystając z nierówności Schwarza mamy

$$d_1^2(x, z) \leqslant \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2} + \sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2}\right)^2 = (d_1(x, y) + d_1(y, z))^2.$$

Ponieważ $d_1(x, y) \geqslant 0 \wedge d_1(y, z) \geqslant 0 \wedge d_1(x, z) \geqslant 0$, więc $d_1(x, z) \leqslant d_1(x, y) + d_1(y, z)$, tzn. warunek 3° jest spełniony. □

7.2. Wykazać, że przekrój skończonej liczby zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Rozwiązanie. Niech $A_i = \operatorname{int} A_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $B = \bigcap_{i=1}^{k} A_i$. Należy wykazać, że

$$(\operatorname{int} B = B) \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in B} \bigvee_{U(x;r)} U(x; r) \subset B.$$

Ponieważ

$$x \in B \Leftrightarrow \Big(\bigwedge_{i \in \{1, 2, \ldots, k\}} x \in A_i \wedge A_i = \operatorname{int} A_i\Big),$$

więc

$$\bigwedge_{i \in \{1, 2, \ldots, k\}} \bigvee_{U(x; r_i)} (U(x; r_i) \subset A_i) \Rightarrow \bigwedge_{i \in \{1, 2, \ldots, k\}} U(x; r) \subset A_i,$$

gdzie $r = \min(r_1, r_2, \ldots, r_k)$, czyli $U(x; r) \subset B$. □

Uwaga. Przekrój nieskończonej liczby zbiorów otwartych może nie być zbiorem otwartym, np. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n} - 2, 3 + \frac{1}{n}\right) = \langle -2, 3 \rangle$ (por. zadanie 1.7e).

7.3. Dane są p.m. $(\mathbf{R}^n, d_1)$, $(\mathbf{R}^n, d_2)$ (por. przykład 7.1 i zadanie 7.8 i)), gdzie d_1 jest metryką pitagorejską, $d_2(x, y) = \sup_{i = 1, 2, \ldots, n} |x_i - y_i|$. Wykazać, że metryki d_1 i d_2 są równoważne.

Rozwiązanie. Mówimy, że metryki d_i p.m. (X, d_i), $i = 1, 2$ są równoważne, jeżeli istnieją takie liczby $a, b \in \mathbf{R}_+$, że

(a) $$\bigwedge_{x, y \in X} (d_1(x, y) \leqslant a\, d_2(x, y) \wedge d_2(x, y) \leqslant b\, d_1(x, y)).$$

Korzystając z zadania 3.24b i z definicji kresu górnego, otrzymujemy

$$d_1(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leqslant n \sup_{i = 1, 2, \ldots, n} |x_i - y_i|,$$

tzn. istnieje liczba $a=n$ występująca w (a) oraz

$$d_1(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\geqslant|x_i-y_i|, \qquad i=1,2,\ldots,n,$$

skąd

$$d_2(x,y)=\sup_{i=1,2,\ldots,n}|x_i-y_i|\leqslant 1\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=d_1(x,y),$$

tzn. istnieje liczba $b=1$ występująca w (a). □

7.4. Dany jest jednorodny układ m równań liniowych z n ($m<n$) niewiadomymi

(a) $$AX=O,$$

gdzie $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $a_{ij}\in\mathbf{R}$, $\mathrm{R}(A)=r$, $X=[x_i]_{n\times 1}$, $O=[0]_{m\times 1}$. Każde rozwiązanie x_1, $x_2,\ldots,x_n$ układu (a) można traktować jako wektor $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n$. Zbiór wszystkich tych wektorów oznaczamy przez $G\subset\mathbf{R}^n$.

Definiujemy odwzorowania (działania):

$$\oplus : G\times G\to\mathbf{R}^n, \qquad \bullet : \mathbf{R}\times G\to\mathbf{R}^n$$

określone wzorami:

$$\mathbf{x}\oplus\mathbf{y}=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)=[x_i+y_i]_{n\times 1},$$

$$\alpha\bullet\mathbf{x}=[\alpha x_i]_{n\times 1}.$$

Udowodnić, że struktura $P=(G,\oplus;\ \mathbf{R},+,\cdot,\bullet)$ jest p.w. $(n-r)$-wymiarową.

Rozwiązanie. Z jednorodności układu (a) wynika, że

$$\bigwedge_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in G}(\mathbf{x}\oplus\mathbf{y})\in G\wedge\bigwedge_{\alpha\in\mathbf{R}}\bigwedge_{\mathbf{x}\in G}(\alpha\bullet\mathbf{x})\in G.$$

Z kolei z zadania 1.21 wynika, że działania $\oplus$ i $\bullet$ spełniają warunki grupy 1° - 5° (por. punkt 7.3), a więc struktura P jest p.w. Załóżmy teraz, że $\det B_{r\times r}\neq 0$ (istnienie wyznacznika $\det B_{r\times r}\neq 0$ wynika z założenia $\mathrm{R}(A)=r\leqslant m<n$) utworzony jest ze współczynników przy pierwszych r zmiennych układu (a). Podstawiając do układu (a) za zmienne x_{r+p}, $p=1,2,\ldots,n-r$ kolejno liczby $x^i_{r+i}=1\wedge x^i_{r+k}=0$ dla $0<k\leqslant n-r\wedge k\neq i$, $i=1,2,\ldots,n-r$, otrzymujemy (por. tw. Kroneckera-Capellego, § 6) rozwiązania układu (a)

(a₁) $$\begin{cases}\mathbf{x}^1=(x_1^1,x_2^1,\ldots,x_r^1,\ \overbrace{1,0,\ldots,0}^{n-r\ \text{elementów}}),\\ \mathbf{x}^2=(x_1^2,x_2^2,\ldots,x_r^2,\ 0,1,0,\ldots,0),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \mathbf{x}^{n-r}=(x_1^{n-r},x_2^{n-r},\ldots,x_r^{n-r},\ 0,0,\ldots,0,1),\end{cases}$$

tworzące bazę przestrzeni rozwiązań. Istotnie, wektory $\mathbf{x}^i$, $i=1,2,\ldots,n-r$ są liniowo niezależne, ponieważ

$$\bigwedge_{c_1, c_2, \ldots, c_{n-r} \in \mathbf{R}} \Big(\Big(\sum_{i=1}^{n-r} c_i \mathbf{x}^i = \mathbf{o}\Big) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Big(\sum_{i=1}^{n-r} c_i x_1^i, \ldots, \sum_{i=1}^{n-r} c_i x_r^i, c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}\Big) = \mathbf{o}\Big) \Rightarrow c_i = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n-r$$

oraz dowolne rozwiązanie $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_r^0, x_{r+1}^0, \ldots, x_n^0)$ układu (a) jest kombinacją liniową rozwiązań (a_1). Istotnie, z jednoznaczności rozwiązania układu Cramera wynika, że $\mathbf{x}^0 = \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i^0 \mathbf{x}^i$, gdzie $\alpha_i^0 \in \mathbf{R}$ stałe. Przestrzeń rozwiązań układu (a) jest zatem przestrzenią $(n-r)$-wymiarową o bazie (a_1).

7.5. Udowodnić, że dowolna przestrzeń wektorowa $(X, \square; K, +, \cdot, \circ_1)$ jest izomorficzna z przestrzenią $(K^n, \oplus; K, +, \cdot, \circ_2)$.

Rozwiązanie. Mówimy, że dwie p.w.

$$(X_1, \square_1; K, +, \cdot, \circ_1), \quad (X_2, \square_2; K, +, \cdot, \circ_2)$$

nad tym samym ciałem są *izomorficzne*, jeżeli istnieje odwzorowanie $f\colon X_1 \to X_2$ spełniające warunki:

1° f jest bijekcją,

2° $\bigwedge_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X_1} f(\mathbf{x} \square_1 \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) \square_2 f(\mathbf{y})$,

3° $\bigwedge_{\mathbf{x} \in X_1} \bigwedge_{\alpha \in K} (f(\alpha \circ_1 \mathbf{x}) = \alpha \circ_2 f(\mathbf{x}))$ (por. 5.1, § 5).

Niech $(\mathbf{g}_i)_{i=1}^n$ będzie dowolną bazą p.w. X. Każdemu wektorowi $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \circ_1 \mathbf{g}_i \in X$ przyporządkowujemy wektor $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$. Odwzorowanie $f\colon X \to K^n$ jest bijekcją oraz

$$\bigwedge_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X} \Big(f(\mathbf{x} \square \mathbf{y}) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \circ_1 \mathbf{g}_i \,\square\, \sum_{i=1}^{n} y_i \circ_1 \mathbf{g}_i\Big) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) =$$

$$= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \oplus (y_1, y_2, \ldots, y_n) = f(\mathbf{x}) \oplus f(\mathbf{y})\Big),$$

$$\bigwedge_{\mathbf{x} \in X} \bigwedge_{\alpha \in K} \Big(f(\alpha \circ_1 \mathbf{x}) = f\Big(\alpha \circ_1 \sum_{i=1}^{n} x_i \circ_1 \mathbf{g}_i\Big) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) = \alpha \circ_2 f(\mathbf{x})\Big). \quad \square$$

Korzystając z udowodnionego twierdzenia możemy zawsze n-wymiarową przestrzeń wektorową X nad ciałem K, zastąpić przestrzenią K^n nad K. W szczególności może być $K = \mathbf{R}$.

7.6. *Zmiana bazy.* Niech w przestrzeni n-wymiarowej K^n nad ciałem K będą dane dwie bazy $(\mathbf{u}_i)_{i=1}^n$, $(\mathbf{u}_i')_{i=1}^n$. Znaleźć związki między współrzędnymi tego samego wektora w obu bazach.

Rozwiązanie. Jeżeli

(a) $$\mathbf{u}'_i=\sum_{k=1}^{n} b_{ki}\,\mathbf{u}_k\,,\qquad i=1,2,\ldots,n\,,$$

to macierz

$$B=[b_{ij}]_{n\times n}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn}\end{bmatrix}$$

nazywamy *macierzą przejścia* od starej bazy $(\mathbf{u}_i)_{i=1}^{n}$ do nowej bazy $(\mathbf{u}'_i)_{i=1}^{n}$. Niech teraz będzie dany wektor $\mathbf{x}$, który w starej bazie ma współrzędne $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a w nowej bazie $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, tzn. $\mathbf{x}=\sum_{k=1}^{n} x_k\mathbf{u}_k$ oraz $\mathbf{x}=\sum_{j=1}^{n} x'_j\mathbf{u}'_j$. Korzystając z (a), otrzymujemy

$$\mathbf{x}=\sum_{j=1}^{n} x'_j\mathbf{u}'_j=\sum_{j=1}^{n} x'_j\Big(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}\mathbf{u}_k\Big)=\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} b_{kj}x'_j\Big)\mathbf{u}_k\,,$$

$$\mathbf{x}=\sum_{k=1}^{n} x_k\mathbf{u}_k=\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} b_{kj}x'_j\Big)\mathbf{u}_k\,.$$

Z jednoznaczności przedstawienia wektora jako kombinacji liniowej wektorów bazy (por. zadanie 7.38) wynika, że

(a_1) $$\Big(x_k=\sum_{j=1}^{n} b_{kj}x'_j,\ k=1,2,\ldots,n\Big)\Leftrightarrow(X=BX'),$$

gdzie $X=[x_i]_{n\times 1}$, $X'=[x'_i]_{n\times 1}$.

Uwaga. Udowadnia się (por. zadanie 7.48), że macierz przejścia B jest nieosobliwa ($\det B\neq 0$), skąd wynika, że macierz B^{-1} jest macierzą przejścia od bazy $(\mathbf{u}'_i)_{i=1}^{n}$ do bazy $(\mathbf{u}_i)_{i=1}^{n}$, przy czym $X'=B^{-1}X$.

Zadania

7.7. Nie korzystając z przykładu 7.1 wykazać, że struktury $(\mathbf{R}, d_1)$, $(\mathbf{R}^2, d_2)$, gdzie funkcje d_1 i d_2 określone są wzorami

$$d_1(x,y)=|x-y|,\qquad d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\,,$$

są p.m.

7.8. Udowodnić, że struktury:

a) $(\mathbf{N}, d_1)$, gdzie $d_1(n,m)=\dfrac{|n-m|}{nm}$;

b) $(\mathbf{N}, d_2)$, gdzie $d_2(n,m)=\begin{cases}0, & \text{dla}\quad n=m\\[2mm] 1+\dfrac{1}{|n-m|}, & \text{dla}\quad n\neq m\,;\end{cases}$

c) $(\mathbf{R}_+, d_3)$, gdzie $d_3(x, y)=\left|\log\frac{x}{y}\right|$,

d) $(\mathbf{R}, d_4)$, gdzie $d_4(x, y)=\begin{cases}|x-y|, & \text{dla } |x-y|<1, \\ 1, & \text{dla } |x-y|\geqslant 1;\end{cases}$

e) $(\mathbf{R}^2, d_5)$, gdzie $d_5((x_1, y_1), (x_2, y_2))=a|x_1-x_2|+b|y_1-y_2|$, $a, b\in\mathbf{R}_+$;

f) $(\mathbf{R}^2, d_6)$, gdzie $d_6((x_1, y_1), (x_2, y_2))=\max(a|x_1-x_2|, b|y_1-y_2|, a, b\in\mathbf{R}_+)$;

g) $(\mathbf{R}^2, d_7)$, gdzie $d_7((x_1, y_1), (x_2, y_2))=\sqrt{|x_1-x_2|}+\sqrt{|y_1-y_2|}$;

h) $(\mathbf{R}^n, d_8)$, gdzie $d_8(x, y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$;

i) $(\mathbf{R}^n, d_9)$, gdzie $d_9(x, y)=\max_{i=1,2,\ldots,n}|x_i-y_i|$;

j) (X, d_{10}), gdzie $d_{10}(x, y)=\begin{cases}0, & \text{dla } x=y, \\ 1, & \text{dla } x\neq y\end{cases}$

są p.m.

Uwaga. P.m. z j) nazywamy *przestrzenią dyskretną.*

7.9. Przyjmując, że $\mathbf{R}^2$ jest płaszczyzną z układem Oxy narysować sferę $F((0, 0); 1)$ w przestrzeniach metrycznych z przykładów: i) zad. 7.8 dla $n=2$; e) zad. 7.8 dla $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$; f) zad. 7.8 dla $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$.

7.10. Niech $f\colon X\to Y$, gdzie $X\neq\emptyset$ jest dowolnym zbiorem, f jest odwzorowaniem różnowartościowym oraz (Y, d_Y) jest p.m. Przyjmując: $d_X(x^1, x^2)=d_Y(f(x^1), f(x^2))$, $x^1, x^2\in X, f(x^1), f(x^2)\in Y$ udowodnić, że struktura (X, d_X) jest p.m.

7.11. Korzystając z zadania 7.10 zmetryzować (tzn. znaleźć metrykę) zbiór $X=\{y\colon y=ax^2+bx+c,\ a, b, c\in\mathbf{R}\}$.

7.12. Korzystając z zadania 7.10 zmetryzować zbiór wszystkich sfer w $\mathbf{R}^3$.

7.13. Niech (X_i, d_i), $i=1, 2, \ldots, k$ będą p.m. oraz

$$X=\bigtimes_{i=1}^{k}X_i=\{(x_1, x_2, \ldots, x_k)\colon x_i\in X_i,\ i=1, 2, \ldots, k\}.$$

Wykazać, że struktury $(X, d^{(i)})$, $i=1, 2, 3$, gdzie

$$d^{(1)}(x, y)=\sum_{i=1}^{k}d_i(x_i, y_i),$$

$$d^{(2)}(x, y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}d_i^2(x_i, y_i)},$$

$$d^{(3)}(x, y)=\max_{i=1,2,\ldots,k}d_i(x_i, y_i)$$

są p.m.

7.14. Niech $X=\{f\colon f\colon\langle a, b\rangle\to\mathbf{R},\ f \text{ ciągła na } \langle a, b\rangle\}$. Wykazać, że struktura (X, d), gdzie $d(f, g)=\sup_{t\in\langle a, b\rangle}|f(t)-g(t)|$ jest p.m.

7.15. Dane są p.m. $(\mathbf{R}^n, d_1)$, $(\mathbf{R}^n, d_2)$ z przykładu 7.3 oraz p.m. $(\mathbf{R}^n, d_8)$ (por. zadanie 7.8h)). Wykazać, że: a) metryki d_1 i d_8 są równoważne; b) metryki d_2 i d_8 są równoważne.

7.16. Udowodnić, że w dowolnej p.m. (X, d) metryka określona wzorem $d_1(x, y) = \min\big(d(x, y), 1\big)$ jest równoważna z metryką d.

7.17. Udowodnić, że w dowolnej p.m. (X, d) metryka określona wzorem $d_1(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$ jest równoważna z metryką d.

7.18. Wykazać, że metryka $d(x, y)=|x-y|$ w p.m. $(\mathbf{R}, d)$ nie jest równoważna z metryką dyskretną w $\mathbf{R}$.

7.19. Niech (X, d) będzie p.m. oraz $x, y \in X$. Każdy punkt $z \in X$ taki, że $d(x, z) = d(z, y) = \frac{1}{2}d(x, y)$ nazywamy *środkiem pary punktów* x i y. Wykazać, że w przestrzeni metrycznej $(\mathbf{R}^n, d_1)$, gdzie d_1 jest metryką pitagorejską (przestrzeń tę nazywamy *przestrzenią kartezjańską*), dla każdej pary punktów istnieje jednoznacznie określony środek.

Czy istnieje środek dla dowolnej pary różnych punktów w przestrzeni dyskretnej?

7.20. Wykazać, że struktura (S, d), gdzie S jest zbiorem punktów danego okręgu o promieniu 1 oraz funkcja d określona jest wzorem

$$d(x, y) = \text{długość łuku } \overset{\smile}{xy} \leqslant \pi$$

jest p.m. Wykazać, że istnieją pary $x, y \in S$ mające nieskończenie wiele środków.

7.21. Wykazać, że w przestrzeni metrycznej punktu h) zadania 7.8 dla dowolnych różnych punktów istnieje na ogół więcej niż jeden środek.

7.22. Wykazać, że dia $K(x^0; r) \leqslant 2r$.

7.23. Znaleźć dia $K(x^0; r)$, jeżeli $K(x^0; r) \subset (X, d)$, gdzie (X, d) jest przestrzenią dyskretną.

7.24. Wykazać, że jeżeli x^0 jest punktem skupienia zbioru E, to do dowolnego otoczenia punktu x^0 należy nieskończenie wiele punktów zbioru E.

7.25. Wykazać, że skończony zbiór punktów nie ma punktów skupienia.

7.26. Wykazać, że dowolna kula jest zbiorem otwartym.

7.27. Wykazać, że zbiór $E = \{x \in X : d(x^0, x) \leqslant r\}$ jest domknięty oraz znaleźć brzeg zbioru E.

7.28. Znaleźć brzeg zbioru $E = \mathbf{W} \times \mathbf{W}$, gdzie $\mathbf{W} \subset \mathbf{R}$ jest zbiorem liczb wymiernych.

7.29. Wykazać, że:

a) Suma dowolnej liczby zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym;

b) suma skończonej liczby zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym oraz że suma nieskończonej liczby zbiorów domkniętych może nie być zbiorem domkniętym;

c) przekrój dowolnej liczby zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

7.30. Wykazać, że dopełnienie zbioru otwartego [domkniętego] jest zbiorem domkniętym [otwartym].

7.31. Niech $A\subset B\wedge B=\bar{B}$. Wykazać, że $\bar{A}\subset B$.

7.32. Wykazać, że przedział otwarty [domknięty] w przestrzeni kartezjańskiej $\mathbf{R}^n$ jest zbiorem otwartym [domkniętym].

7.33. Wykazać, że jeżeli X i Y są zbiorami otwartymi, to zbiór $X\times Y$ jest otwarty.

7.34. Wykazać, że w dowolnej p.w. V nad ciałem K prawdziwe są wzory:

1) $\bigwedge\limits_{\alpha,\beta,\gamma\in V}(\alpha+\beta=\alpha+\gamma)\Rightarrow\beta=\gamma;$

2) $\bigwedge\limits_{\alpha,\beta\in V}\bigwedge\limits_{a\in K}((a\neq 0\wedge a\alpha=a\beta)\Rightarrow\alpha=\beta);$

3) $\bigwedge\limits_{a,b\in K}\bigwedge\limits_{\alpha\in V}((\alpha\neq\mathbf{o}\wedge a\alpha=b\alpha)\Rightarrow a=b).$

7.35. Dana jest p.w. V nad K. Różnicę „$-$" elementów α, $\beta\in V$ określamy wzorem

$$\alpha-\beta:=\alpha+(-\beta).$$

Wykazać, że

a) $\bigwedge\limits_{\alpha,\beta\in V}\bigvee\limits_{\mathbf{x}\in V}(\alpha+\mathbf{x}=\beta);$ b) $\bigwedge\limits_{\alpha,\beta\in V}(\alpha-\alpha=\beta-\beta=\mathbf{o});$

c) $\bigwedge\limits_{\alpha\in V}0\alpha=\mathbf{o};$ d) $\bigwedge\limits_{a\in K}a\cdot\mathbf{o}=\mathbf{o}.$

7.36. Wykazać, że każde ciało jest p.w. nad samym sobą. Znaleźć bazę tej przestrzeni.

7.37. Wykazać, że wektory $\alpha_i\in V$, $i=1,2,\dots,k$, p.w. V nad K, są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z nich jest kombinacją liniową pozostałych.

7.38. Wykazać, że współrzędne wektora względem bazy w p.w. są wyznaczone jednoznacznie.

7.39. Wykazać, że p.w. $(K^n,\ \square;\ K,\ +,\ \cdot,\ \circ)$ ma wymiar n.

7.40. Wykazać, że zbiór macierzy $M_{m\times n}(K)$ (por. punkt 6.1 § 6) z działaniami: $\square$ – dodawaniem macierzy, $\circ$ – mnożeniem macierzy przez elementy ciała K jest p.w. nad K. Znaleźć element neutralny i przeciwny grupy $(M_{m\times n}(K),\ \square)$.

7.41. Wykazać, że zbiór rozwiązań układu równań:

$$x+2y+z=0,\quad 2x-y+3z=0,$$

jest p.w. izomorficzną (por. przykłady 7.4 i 7.5) z przestrzenią $\mathbf{R}$, (por. zadanie 7.36).

7.42. Wykazać, że zbiór rozwiązań równania

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0$$

jest p.w. izomorficzna (por. przykłady 7.4 i 7.5) z przestrzenią $\mathbf{R}^3$ nad $\mathbf{R}$.

7.43. Wykazać, że zbiór wielomianów rzeczywistych o współczynnikach rzeczywistych stopnia mniejszego lub równego n z działaniami: $\square$ — dodawaniem wielomianów, $\circ$ — mnożeniem wielomianów przez liczby rzeczywiste tworzy p.w. nad $\mathbf{R}$. Wskazać bazę tej przestrzeni.

7.44. Wykazać, że zbiór wielomianów

$$G=\{W_n\colon \big(W_n(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i},\ a_i,\, x\in\mathbf{R}\big)\ \wedge \bigvee_{x_0\in\mathbf{R}} W_n(x_0)=0\}$$

z działaniami określonymi w zadaniu 7.43 tworzy p.w. nad $\mathbf{R}$. Jaki jest wymiar tej przestrzeni? Wskazać bazę tej przestrzeni.

7.45. Wykazać, że zbiór liczb postaci $w_1+w_2\sqrt{2}$, $w_1, w_2\in\mathbf{W}$ ze zwykłymi działaniami (tzn. $\square=+$, $\circ=\cdot$) jest p.w. nad $\mathbf{W}$ izomorficzną z przestrzenią $\mathbf{W}\times\mathbf{W}$ nad $\mathbf{W}$.

7.46. Sprawdzić, czy niżej podane zbiory $Q_i\subset\mathbf{R}^n$, $i=1, 2, 3, 4, 5$ są podprzestrzeniami liniowymi p.w. $(\mathbf{R}^n, \square;\ \mathbf{R}, +, \cdot, \circ)$ (por. punkt 7.3):

a) $Q_1=\{\mathbf{R}^n\ni(x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon x_i\in\mathbf{C},\ i=1, 2, \ldots, n,\ \mathbf{C}$ — zbiór liczb całkowitych$\}$;

b) $Q_2=\{\mathbf{R}^n\ni(x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon x_i=0,\ i=1, 2, \ldots, k\wedge k<n\}$;

c) $Q_3=\{\mathbf{R}^n\ni(x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon \sum_{i=1}^{n} x_i=0\}$;

d) $Q_4=\{\mathbf{R}^n\ni(x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon \sum_{i=1}^{n} x_i=a,\ a\in\mathbf{R}-\{0\}\}$;

e) Q_5 jest zbiorem wszystkich kombinacji liniowych danych wektorów $\mathbf{u}_i\in\mathbf{R}^n$, $i=1, 2, \ldots, k$.

7.47. Wykazać, że niżej podane podzbiory przestrzeni wektorowej $\mathbf{R}^n$ nad $\mathbf{R}$ są podprzestrzeniami liniowymi oraz znaleźć ich bazy i wymiar:

a) $Q_1=\{\mathbf{R}^n\ni(x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon x_1=x_n\}$:

b) zbiór wszystkich wektorów w $\mathbf{R}^n$, których współrzędne z numerami parzystymi są zerami,

c) zbiór wszystkich wektorów postaci $(a, b, a, b, a, b, \ldots)$, gdzie $a, b\in\mathbf{R}$ są dowolnymi liczbami.

7.48. Wykazać, że macierz B przejścia od bazy do bazy (por. przykład 7.6) jest nieosobliwa.

7.49. W przestrzeni wektorowej K^3 and K dana jest baza $(\alpha_i)_{i=1}^{3}$. Znaleźć:

a) współrzędne wektora $\alpha=3\alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3$ w nowej bazie, gdzie $(\alpha_i')_{i=1}^{3}$, gdzie

$$\alpha_1'=\alpha_1-\alpha_2,\quad \alpha_2'=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\quad \alpha_3'=2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3,$$

b) współrzędne wektora $\alpha=6\alpha_1+9\alpha_2+14\alpha_3$ w nowej bazie $(\alpha_i')_{i=1}^{3}$, gdzie

$$\alpha_1'=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\quad \alpha_2'=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3,\quad \alpha_3'=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3;$$

c) współrzędne wektora $\alpha=6\alpha_1+2\alpha_2-7\alpha_3$ w nowej bazie $(\alpha_i')_{i=1}^3$, gdzie

$$\alpha_1'=2\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3, \quad \alpha_2'=3\alpha_1+2\alpha_2-5\alpha_3, \quad \alpha_3'=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3.$$

7.50. W przestrzeni wektorowej K^3 nad K w bazie $(\alpha_i)_{i=1}^3$ dane są wektory: $\beta_1=(1,0,1)$, $\beta_2=(0,1,0)$, $\beta_3=(2,3,4)$. Sprawdzić, że wektory te tworzą nową bazę w K^3 oraz znaleźć współrzędne wektora $\alpha=(1,-3,-3)$ w nowej bazie.

7.51. W przestrzeni wektorowej K^4 nad K w bazie $(\alpha_i)_{i=1}^4$ dane są wektory $\beta_1=(1,1,1,1)$, $\beta_2=(1,1,-1,-1)$, $\beta_3=(1,-1,1,-1)$, $\beta_4=(1,-1,-1,1)$. Sprawdzić, że wektory te tworzą nową bazę oraz znaleźć współrzędne wektora $\alpha=(1,2,1,1)$ w nowej bazie.

7.52. W p.w. K^4 nad K w bazie $(\alpha_i)_{i=1}^4$ dane są wektory $\beta_1=(1\ 2,1,-2)$, $\beta_2=(2,3,0,-1)$, $\beta_3=(1,2,1,3)$, $\beta_4=(1,3,-1,0)$, $\beta_5=(7,14,-1,1)$. Sprawdzić, że wektory $(\beta_i)_{i=1}^4$ tworzą bazę w K^4 oraz znaleźć współrzędne wektora β_5 w tej bazie.

7.53. W p.w. K^3 nad K w bazie $(\alpha_i)_{i=1}^3$ dane są wektory $\beta_1=(2,1,0)$, $\beta_2=(1,2,0)$, $\beta_3=(1,1,1)$, $\gamma_1=(1,3,1)$, $\gamma_2=(0,1,1)$, $\gamma_3=(1,0,1)$. Sprawdzić, że wektory $(\beta_i)_{i=1}^3$ i $(\gamma_i)_{i=1}^3$ tworzą bazy w K^3 oraz znaleźć zależność między współrzędnymi dowolnego wektora w tych bazach.

7.54. W p.w. K^n nad K dane są bazy: $(\alpha_i)_{i=1}^n$, $(\alpha_i')_{i=1}^n$, $(\alpha_i'')_{i=1}^n$ oraz macierze przejścia: $\boldsymbol{B}$ $\left(\text{z}(\alpha_i)_{i=1}^n \text{ do } (\alpha_i')_{i=1}^n\right)$ i $\mathbf{C}$ $\left(\text{z } (\alpha_i')_{i=1}^n \text{ do } (\alpha_i'')_{i=1}^n\right)$. Znaleźć macierze przejścia z bazy $(\alpha_i')_{i=1}^n$ do $(\alpha_i'')_{i=1}^n$ oraz z bazy $(\alpha_i'')_{i=1}^n$ do $(\alpha_i)_{i=1}^n$.

7.55. W p.w. K^3 nad K w bazie $(\alpha_i)_{i=1}^3$ dane są wektory: $\beta_1=(2,1,0)$, $\beta_2=(0,-1,1)$, $\beta_3=(1,-1,0)$, $\gamma_1=(1,1,1)$, $\gamma_2=(0,1,2)$, $\gamma_3=(1,0,1)$. Sprawdzić, że wektory $(\beta_i)_{i=1}^3$ i $(\gamma_i)_{i=1}^3$ można przyjąć za bazy w K^3 oraz znaleźć zależności między współrzędnymi wektora $\alpha\in K^3$ w tych bazach.

7.56. W p.w. K^4 nad K w bazie $(\alpha_i)_{i=1}^4$ dane są wektory: $\beta_1=(1,1,1,1)$, $\beta_2=(1,2,1,1)$, $\beta_3=(1,1,2,1)$, $\beta_4=(1,3,2,3)$, $\gamma_1=(1,0,3,3)$, $\gamma_2=(-2,-3,-5,-4)$, $\gamma_3=(2,2,5,4)$, $\gamma_4=(-2,-3,-4,-4)$. Sprawdzić, że wektory $(\beta_i)_{i=1}^4$ i $(\gamma_i)_{i=1}^4$ można przyjąć za bazy w K^4 oraz znaleźć zależności między współrzędnymi wektora $\alpha\in K^4$ w tych bazach.

7.57. W p.w. K^3 nad K dane są bazy $(\alpha_i')_{i=1}^3$ i $(\alpha_i'')_{i=1}^3$. Znaleźć macierze przejścia od bazy $(\alpha_i')_{i=1}^3$ do bazy $(\alpha_i'')_{i=1}^3$ oraz od bazy $(\alpha_i'')_{i=1}^3$ do $(\alpha_i')_{i=1}^3$, jeżeli współrzędne tych wektorów w bazie $(\alpha_i)_{i=1}^3$ p.w. K^3 są:

a) $\alpha_1'=(2,1,1)$, $\alpha_2'=(1,2,1)$, $\alpha_3'=(1,1,2)$,
$\alpha_1''=(1,0,-1)$, $\alpha_2''=(1,-1,1)$, $\alpha_3''=(0,-1,1)$;

b) $\alpha_1'=(1,0,-1)$, $\alpha_2'=(1,-2,1)$, $\alpha_3'=(1,-3,1)$,
$\alpha_1''=(1,1,2)$, $\alpha_2''=(2,1,2)$, $\alpha_3''=(2,1,1)$;

c) $\alpha_1'=(1,0,1)$, $\alpha_2'=(1,2,0)$, $\alpha_3'=(0,-1,1)$,
$\alpha_1''=(1,1,1)$, $\alpha_2''=(0,1,1)$, $\alpha_3''=(1,1,0)$;

d) $\alpha_1'=(2,1,-1)$, $\alpha_2'=(1,-1,1)$, $\alpha_3'=(0,1,1)$,
$\alpha_1''=(1,0,1)$, $\alpha_2''=(1,2,0)$, $\alpha_3''=(1,1,1)$.

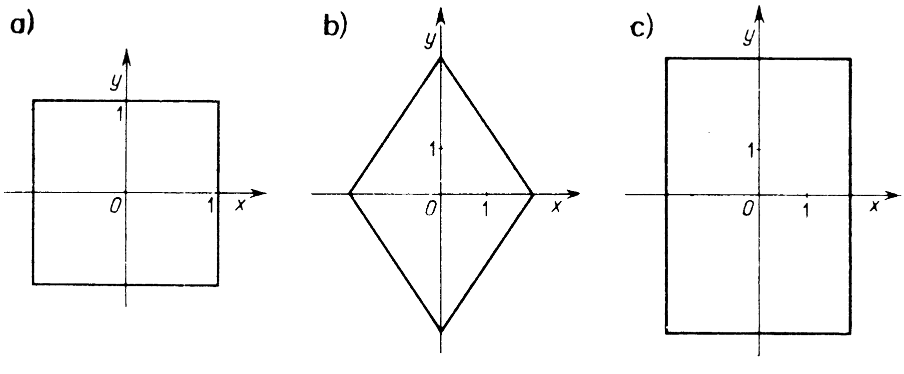
7.58. W p.w. K^3 nad K w bazie $(\boldsymbol{\alpha}_i)_{i=1}^3$ dane są wektory: $\boldsymbol{\beta}_1=(1, 2, 1)$, $\boldsymbol{\beta}_2=(4, 3, 2)$, $\boldsymbol{\beta}_3=(16, 17, 10)$, $\boldsymbol{\beta}_4=(10, 10, 6)$. Wyrazić wektor $\boldsymbol{\beta}_4$ jako kombinację liniową wektorów $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$. Czy wektory $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ można przyjąć za bazę w K^3?

7.59. W p.w. K^3 nad K w bazie $(\boldsymbol{\alpha}_i)_{i=1}^3$ dane są wektory: $\boldsymbol{\beta}_1=(1, 5, 1)$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1, 3, 4)$, $\boldsymbol{\beta}_3=(2, 1, 2)$, $\boldsymbol{\beta}_4=(11, 13, 20)$. Czy można wektor $\boldsymbol{\beta}_1$ przedstawić jako kombinację liniową wektorów $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$, $\boldsymbol{\beta}_4$?

7.60. W p.w. K^4 nad K w bazie $(\boldsymbol{\alpha}_i)_{i=1}^4$ dane są wektory: $\boldsymbol{\beta}_1=(1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{\beta}_2=(2, 3, 1, 1)$, $\boldsymbol{\beta}_3=(1, 3, 2, 1)$, $\boldsymbol{\beta}_4=(8, 12, 7, 6)$, $\boldsymbol{\beta}_5=(6, 9, 6, 5)$. Wyrazić wektor $\boldsymbol{\beta}_5$ jako kombinację liniową wektorów $(\boldsymbol{\beta}_i)_{i=1}^4$.

Odpowiedzi.

7.9. i) Rys. 7.1a; e) rys. 7.1b; f) rys. 7.1c.
7.11. Np. $f(ax^2+bx+c)=(a, b, c)\in\mathbf{R}^3$.
7.12. Np. $f[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2]=(a, b, c, r)\in\mathbf{R}^4\wedge r\in\mathbf{R}_+$.



Rys. 7.1

7.19. Nie. **7.23.** Zero, jeżeli $r\in(0, 1)$ i x^0 dowolne, 1 — jeżeli $r\neq 1$ i x^0 dowolne.
7.27. Sfera $F=\{x\in X:\ d(x^0, x)=r\}$.
7.28. Płaszczyzna $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$. **7.29.** b) Por. 1.7a.
7.36. Wsk. Por. def. ciała w § 5. Baza składa się z jednego dowolnego elementu $a\in K\wedge\wedge a\neq 0$.
7.39. Baza: $\mathbf{k}_i=(\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{in})$, $i=1, 2, \ldots, n$.
7.40. $O=[0]_{m\times n}$, dla każdej $A\in M_{m\times n}(K)$ element przeciwny $-A$.
7.43. Baza: x^n, x^{n-1}, ..., x, 1.
7.44. Wymiar n; baza: $x-x_0$, $(x-x_0)^2$, ..., $(x-x_0)^n$.
7.46. a) Nie; b) tak; c) tak; d) nie; e) tak.
7.47. a) np.: $(1, 0, \ldots, 0, 1)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $(0, \ldots, 0, 1, 0)$; wymiar $n-1$;

b) bazę tworzą np. wektory o współrzędnych: jeżeli k oznacza numer wektora bazy, to jego współrzędna z numerem $2k-1$ równa jest 1, a pozostałe zero, dla $k=1, 2, \ldots$ $\ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right]$ ($\left[\frac{n+1}{2}\right]$ oznacza część całkowitą $\frac{n+1}{2}$ por. zadanie 1.28); wymiar $\left[\frac{n+1}{2}\right]$;

c) bazę tworzą np. wektory $(1, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ i $(0, 1, 0, 1, 0, \ldots, 0)$; wymiar 2.

7.49. a) $\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}_1'+\frac{10}{3}\boldsymbol{\alpha}_2'+\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3'$; b) $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1'+2\boldsymbol{\alpha}_2'+3\boldsymbol{\alpha}_3'$; c) $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1'+\boldsymbol{\alpha}_2'+\boldsymbol{\alpha}_3'$.

7.50. $\boldsymbol{\alpha}=(5, 3, -2)$.

7.51. $\boldsymbol{\alpha}=(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$. **7.52.** $\boldsymbol{\beta}_5=(0, 2, 1, 2)$.

7.53. Jeżeli x_i', $i=1, 2, 3$, współrzędne w bazie $(\boldsymbol{\beta}_i)_{i=1}^3$, x_i'', $i=1, 2, 3$, współrzędne w bazie $(\boldsymbol{\gamma}_i)_{i=1}^3$, to

$$x_1'=-\tfrac{2}{3}x_1''-\tfrac{2}{3}x_2''+\tfrac{1}{3}x_3'', \qquad x_2'=\tfrac{4}{3}x_1''+\tfrac{1}{3}x_2''-\tfrac{2}{3}x_3'', \qquad x_3'=x_1''+x_2''+x_3''.$$

7.54. $\boldsymbol{B}^{-1}\mathbf{C}$, $\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{B}$.

7.55. Jeżeli x_i', $i=1, 2, 3$, współrzędne w bazie $(\boldsymbol{\beta}_i)_{i=1}^3$, x_i'', $i=1, 2, 3$, współrzędne w bazie $(\boldsymbol{\gamma}_i)_{i=1}^3$, to

$$x_1''=2x_1'-\tfrac{3}{2}x_2'-\tfrac{1}{2}x_3', \qquad x_2''=-x_1'+\tfrac{1}{2}x_2'-\tfrac{1}{2}x_3', \qquad x_3''=\tfrac{3}{2}x_2'+\tfrac{3}{2}x_3'.$$

7.56. Jeżeli x_i', $i=1, 2, 3, 4$, współrzędne w bazie $(\boldsymbol{\beta}_i)_{i=1}^3$, x_i'', $i=1, 2, 3, 4$, współrzędne w bazie $(\boldsymbol{\gamma}_i)_{i=1}^4$, to

$$x_1'=2x_1''+x_3''-x_4'', \qquad x_2'=-3x_1''+x_2''-2x_3''+x_4'', \qquad x_3'=x_1''-2x_2''+2x_3''-x_4'',$$
$$x_4'=x_1''-x_2''+x_3''-x_4''.$$

7.57. a) $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-2 & -3 & -3\\ 4 & 4 & 4\\ -5 & -6 & -5\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \frac{3}{4} & 0\\ 0 & -\frac{5}{4} & -1\\ -1 & \frac{3}{4} & 1\end{bmatrix}$;

b) $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & -5 & -7\\ 0 & 8 & 11\\ 1 & -5 & -7\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{11}{2} & 7 & \frac{11}{2}\\ -4 & -5 & -4\end{bmatrix}$;

c) $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & 2 & -2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}$;

d) $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4 & 2 & -2\\ 3 & 0 & -1\\ -5 & -1 & 3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & 1 & 1\end{bmatrix}$.

7.58. $\boldsymbol{\beta}_4=2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)=\frac{2}{3}(\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\beta}_1)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3)$. Układ wektorów $(\boldsymbol{\beta}_i)_{i=1}^3$ nie tworzy bazy.

7.59. Nie.

7.60. $\boldsymbol{\beta}_5=(3-3p)\boldsymbol{\beta}_1+(1-2p)\boldsymbol{\beta}_2+(1-p)\boldsymbol{\beta}_3+p\boldsymbol{\beta}_4$, gdzie $p\in K$ – dowolna stała.

§ 8. WEKTORY w $\mathbf{R}^n$

8.1. Każdą przestrzeń metryczną, która jest izometryczna z przestrzenią kartezjańską $(\mathbf{R}^n, d_1)$ (por. przykład 7.1) nazywamy *n-wymiarową przestrzenią euklidesową* i oznaczamy $\mathbf{R}^n$. W szczególności, przestrzeń kartezjańska $(\mathbf{R}^n, d_1)$ jest przestrzenią euklidesową. Jeżeli $x(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, to liczby x_i, $i=1,2,\ldots,n$ nazywamy *współrzędnymi punktu x*. Zbiór

$$U_i=\{x\in\mathbf{R}^n:\ x_j=\delta_{ij}t,\ \ t\in\mathbf{R},\ j=1,2,\ldots,n\}$$

$i=1,2,\ldots,n$ nazywamy *i-tą osią współrzędnych* (jest to oś liczbowa) i oznaczamy Ox_i. Zauważmy, że

$$\bigwedge_{i\in\{1,2,\ldots,n\}} O(0,0,\ldots,0)\in Ox_i.$$

Uporządkowany układ $\{Ox_1, Ox_2, \ldots, Ox_n\}$ osi nazywamy *układem współrzędnych* (dokładnie: *ortokartezjańskim układem współrzędnych*) i oznaczamy $Ox_1x_2\ldots x_n$. Punkt $O(0,0,\ldots,0)$ nazywamy *początkiem układu współrzędnych*. Współrzędna $x_i\in\mathbf{R}$ punktu $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in\mathbf{R}^n$ jest współrzędną rzutu punktu x na oś Ox_i.

W dalszym ciągu będziemy zakładali, że w $\mathbf{R}^n$ dany jest ortokartezjański układ współrzędnych.

Na punktach przestrzeni $\mathbf{R}^n$ określamy działania:

$x+y:=z(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$ – *dodawanie punktów*,

$t\cdot x:=w(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)$, $t\in\mathbf{R}$ – *mnożenie punktu przez liczbę*,

$x\bullet y:=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ – *iloczyn skalarny punktów*.

Liczbę $|x|=\sqrt{x\bullet x}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}=d(x,0)$ nazywamy *normą punktu* $x\in\mathbf{R}^n$. Należy tu podkreślić, że działania na punktach „+", „·" i „•" przestrzeni euklidesowej $\mathbf{R}^n$, nie mają charakteru geometrycznego, tzn. zależą od układu współrzędnych. W dalszych paragrafach, w celu skrócenia zapisów będziemy używali działań na punktach, jak również będziemy czasem interpretować punkt $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in\mathbf{R}^n$ jako macierz kolumnową, tzn. będziemy pisali $x=X=[x_i]_{n\times 1}$.

8.2. Parę uporządkowaną punktów $a, b\in\mathbf{R}^n$ nazywamy *wektorem związanym* w $\mathbf{R}^n$ i oznaczamy $\overline{ab}$. Punkt a nazywamy *początkiem*, punkt b *końcem wektora* $\overline{ab}$. Liczbę $|\overline{ab}|=$ $=d_1(a, b)$ nazywamy *długością wektora* $\overline{ab}$, liczby b_i-a_i, $i=1,2,\ldots,n$, gdzie $a(a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n)$, $b(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ nazywamy *współrzędnymi wektora* $\overline{ab}$ i piszemy $\overline{ab}=(b_1-a_1,$ $b_2-a_2, \ldots, b_n-a_n)$. W zbiorze Φ wektorów związanych w $\mathbf{R}^n$ relacja $\equiv$ określona wzorem

$$(\overline{ab}\equiv\overline{cd})\Leftrightarrow(b_i-a_i=d_i-c_i,\ \ i=1,2,\ldots,n)$$

jest równoważnością (por. zadanie 8.84), wyznacza więc przestrzeń ilorazową $\Phi|\equiv$.

Elementy $[\overline{ab}]_\equiv$ przestrzeni $\Phi|\equiv$, tzn. klasy abstrakcji relacji $\equiv$, nazywamy *wektorami swobodnymi* w $\mathbf{R}^n$. Każdy wektor związany $\overline{ab}\in[\overline{ab}]_\equiv$ zwany *reprezentantem wektora swobodnego* $[\overline{ab}]_\equiv$ wyznacza go jednoznacznie, przy czym współrzędne $b_i-a_i, i=1,2,\ldots,n,$

wektora $\overline{ab}$ nazywamy *współrzędnymi wektora swobodnego* $[\overline{ab}]_{\equiv}$ i piszemy np. $[\overline{ab}]_{\equiv} = = \mathbf{x} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. W zbiorze $\Phi|\equiv = V^n$ wektorów swobodnych w $\mathbf{R}^n$ określamy działania:

$\mathbf{x}+\mathbf{y} := \mathbf{z} = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$ – *dodawanie wektorów swobodnych,*

$t \cdot \mathbf{x} := \mathbf{w} = (tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)$, $t \in \mathbf{R}$ – *mnożenie wektora swobodnego przez liczbę,*

$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ – *iloczyn skalarny wektorów swobodnych.*

Łatwo sprawdzić, że zbiór V^n z działaniami „+” i „·” jest przestrzenią wektorową nad $\mathbf{R}$ (por. zadanie 1.21).

Z kolei definiujemy:

$-\mathbf{x} := (-1)\mathbf{x}$ – *wektor przeciwny do wektora swobodnego* $\mathbf{x}$,

$\mathbf{x}-\mathbf{y} := \mathbf{x}+(-1)\mathbf{y}$ – *różnica wektorów swobodnych,*

$|\mathbf{x}| := \sqrt{\mathbf{x} \bullet \mathbf{x}}$ – *długość (norma) wektora swobodnego* $\mathbf{x}$.

Zauważmy, że

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \bullet (\mathbf{x}-\mathbf{y})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

tzn. że przestrzeń V^n z normą jest przestrzenią metryczną. W dalszym ciągu zamiast „wektor swobodny” będziemy mówili „wektor”. Bazę $\{\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\} = (\mathbf{e}_i)_{i=1}^{n}$, gdzie $\mathbf{e}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots$ $\ldots, \delta_{in})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, przestrzeni V^n (por. zadanie 7.39) nazywamy *bazą standardową.* Ponieważ

$$\bigwedge_{\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V^n} \left(\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i\right),$$

więc liczby x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, są współrzędnymi wektora $\mathbf{x} \in V^n$ względem bazy standardowej.

Można udowodnić, że przestrzeń V^n z działaniami „+” i „·” jest izomorficzna (por. § 7) z euklidesową przestrzenią $\mathbf{R}^n$ (w której ustalony jest kartezjański układ współrzędnych) z działaniami „+” i „$\bullet$” (izomorfizm realizuje np. funkcja określona wzorem $f(x) = = \overline{Ox}$, $x \in \mathbf{R}^n$, $\overline{Ox} \in V^n$).

Z twierdzenia tego będziemy czasem korzystali (np. przy odwzorowaniach $\mathcal{T}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$) interpretując $\mathbf{R}^n$ względnie $\mathbf{R}^m$ jako zbiór punktów lub jako zbiór wektorów.

8.3. W punkcie 8.2 podaliśmy określenia:

1° sumy wektorów $\mathbf{x}+\mathbf{y}$,

2° iloczynu wektora przez liczbę $t \cdot \mathbf{x}$,

3° wektora przeciwnego $-\mathbf{x}$,

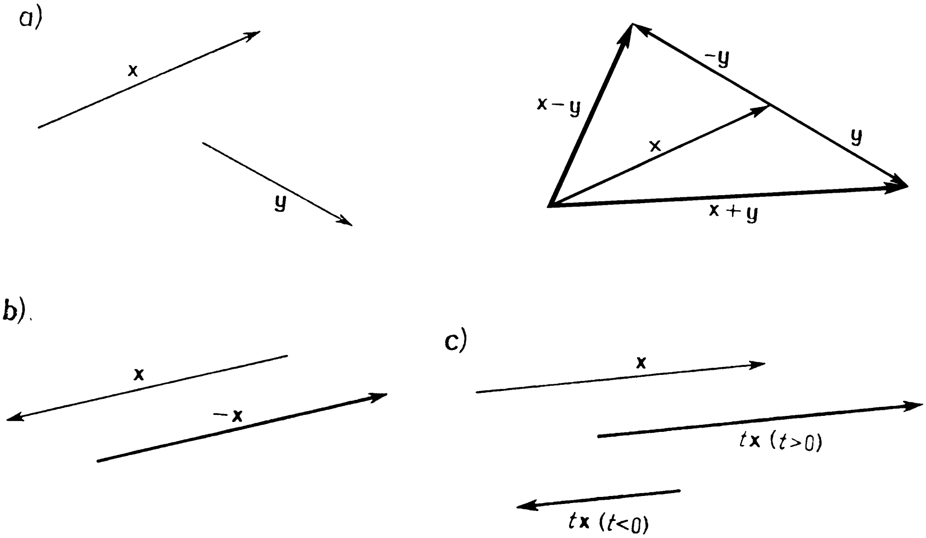
4° różnicy wektorów $\mathbf{x}-\mathbf{y}$.

Z kolei definiujemy:

5° *równoległość wektorów*: dla wektorów niezerowych

$$\mathbf{x} \| \mathbf{y} \Leftrightarrow \bigvee_{t \in \mathbf{R}-\{0\}} (\mathbf{x} = t\mathbf{y}),$$

przy czym jeżeli $t>0$ $[t<0]$, to mówimy, że wektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ są *zgodnie równoległe* [*przeciwnie* *równoległe*]. Wektor zerowy uważamy za równoległy do każdego wektora. Interpretacje geometryczne w $\mathbf{R}^3$ do punktów 1°-5° podano na rysunku 8.1.



Rys. 8.1

6° *prostopadłość* (*ortogonalność*) *wektorów*

(1) $$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = 0,$$

7° *wersor*: wektor o długości 1,

8° wersor wektora $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$: wersor zgodnie równoległy z $\mathbf{x}$, oznaczamy $\mathbf{x}^w$,

9° *miara* (lub *współrzędna*) *wektora równoległego do osi względem tej osi*: jeżeli $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ jest równoległy do osi Os, to miara $x_s := \varepsilon|\mathbf{x}|$, gdzie $\varepsilon = -1$ [$\varepsilon = 1$], jeżeli $\mathbf{x}$ jest przeciwnie [zgodnie] równoległy do Os.

Udowadnia się wzór Chasles'a:

jeżeli $a_i \in \mathbf{R}^n \wedge a_i \in Os$, $i = 1, 2, \ldots, k$, to

(2) $$\sum_{i=1}^{k-1} (a_i a_{i+1})_s + (a_k a_1)_s = 0$$

($(a_i a_{i+1})_s$ oznacza miarę wektora $\overline{a_i a_{i+1}}$ względem osi Os).

W $\mathbf{R}^3$ definiujemy:

10° *Kątem* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ między niezerowymi wektorami $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ nazywamy ten z dwóch kątów zwykłych między półprostymi k_1 i k_2 wyznaczonymi przez wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ (rys. 8.2), którego miara łukowa spełnia warunek $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

Jeżeli $\mathbf{a} = \mathbf{o} \vee \mathbf{b} = \mathbf{o}$, to kąt $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ jest nieokreślony. *Miarą* φ kąta $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, nazywamy miarę kąta zwykłego wyznaczającego kąt $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Będziemy pisali $\varphi = \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$[1].

---

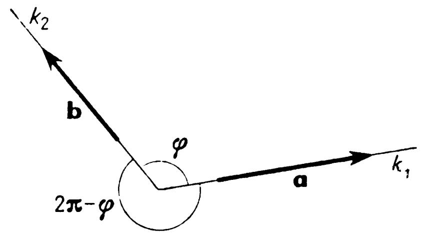
[1] W geometrii analitycznej chodzi nam przede wszystkim o miarę φ.

11° *Kątem zorientowanym* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ między niezerowymi wektorami **a** i **b** nazywamy kąt $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, w którym wyróżniono ramię początkowe **a** i końcowe **b**.

Miarą φ *kąta zorientowanego* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ względem płaszczyzny zorientowanej(1) (wyznaczonej przez wektory **a** i **b** mające wspólny początek) nazywamy każdą liczbę postaci

$$\alpha + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{3}$$

gdzie α jest miarą łukową kąta zwykłego, jaki zatoczy ramię początkowe **a** obracając się w zwrocie dodatnim do pierwszego pokrycia (2) się z ramieniem **b**. Będziemy pisali $\varphi = \measuredangle[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.



Rys. 8.2

Przez kąt między osią Os i wektorem **a**, rozumiemy kąt między wektorami **b** i **a**, gdzie **b** jest dowolnym wektorem zgodnie równoległym z osią Os.

12° Rzutem(3) $\mathbf{a}_s$ wektora **a** na oś Os (mówimy też składową wektora **a** względem osi Os) nazywamy wektor, którego początek jest rzutem początku, a koniec rzutem końca wektora **a** na tę oś. *Współrzędną* a_s wektora **a** względem osi Os nazywamy miarę rzutu wektora $\mathbf{a}_s$ względem tej osi. Prawdziwe są wzory

$$a_s = |\mathbf{a}| \cos \varphi, \tag{4}$$

$$\mathbf{a}_s = a_s \mathbf{s}^w, \tag{5}$$

gdzie φ oznacza miarę kąta zorientowanego $[Os, \mathbf{a}]$, a $\mathbf{s}^w$ oznacza wersor osi Os.

Pojęcia te uogólniamy na przypadek przestrzeni $\mathbf{R}^n$. Mianowicie:

13° *miara* $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ *kąta między wektorami*: jeżeli $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n - \{\mathbf{o}\}$, to ze wzoru

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| \cos \varphi$$

otrzymujemy

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|}.$$

Jeżeli $\mathbf{x} = \mathbf{o} \vee \mathbf{y} = \mathbf{o}$, to kąt między wektorami nie jest określony.

14° *rzut wektora na wektor*: rzutem wektora **x** na wektor $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$ nazywamy wektor $\mathbf{x}_y$ taki, że

$$\mathbf{x}_y \| \mathbf{y} \wedge (x_y)_s = \frac{\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}}{|\mathbf{y}|},$$

gdzie $(x_y)_s$ oznacza miarę wektora $\mathbf{x}_y$ względem osi Os wyznaczonej przez wektor **y**.

---

(1) Mówimy, że płaszczyzna jest *zorientowana*, jeżeli wyróżniono na niej jeden z dwóch możliwych kierunków obrotu.

(2) Chodzi o pokrycie się półprostych wyznaczonych przez wektory **a** i **b**.

(3) Przez *rzut* będziemy rozumieli zawsze *rzut prostokątny*.

Udowadnia się wzór

(6) $$\mathbf{x}_{\mathbf{y}}=x_{\mathbf{y}}\mathbf{y}^{w}=\frac{\mathbf{x}\bullet\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^2}\mathbf{y}.$$

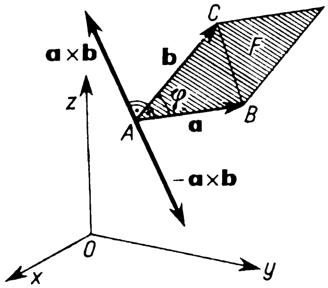
8.4. Niech $(\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{R}^3-\{\mathbf{o}\})\wedge\sim(\mathbf{a}\|\mathbf{b})$ (tzn. $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ są liniowo niezależne). *Iloczynem wektorowym* wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ nazywamy wektor $\mathbf{w}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ określony następująco (rys. 8.3):

α) $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\varphi=S_F$, gdzie S_F oznacza pole równoległoboku F (rys. 8.3),

β) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{a}\wedge\mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{b}$,

γ) zwrot wektora $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ jest taki, że trójka uporządkowana wektorów $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ jest zgodnie zorientowana z trójką uporządkowaną wersorów $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

Jeżeli $\mathbf{a}=\mathbf{o}\vee\mathbf{b}=\mathbf{o}\vee\mathbf{a}\|\mathbf{b}$, to przyjmujemy $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{o}$. Współrzędne wektora $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, gdzie $\mathbf{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\mathbf{b}=(b_x,b_y,b_z)$ obliczamy ze wzoru



Rys. 8.3

(7) $$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix},$$

gdzie po prawej stronie wzoru (7) występuje wyznacznik symboliczny (nie liczbowy).

Z α) otrzymujemy wzór na pole trójkąta ABC

(8) $$S_{\triangle ABC}=\tfrac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|.$$

Objętość czworościanu T o wierzchołkach A, B, C i D:

(9) $$V_T=\tfrac{1}{6}|\overline{AD}\bullet(\overline{AB}\times\overline{AC})|.$$

Objętość równoległościanu R zbudowanego na wektorach $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$:

(10) $$V_R=|\mathbf{w}\bullet(\mathbf{u}\times\mathbf{v})|.$$

Momentem $\mathrm{Mom}_O\,\overline{AB}$ wektora $\overline{AB}$ względem punktu O nazywamy wektor

(11) $$\mathbf{w}=\mathrm{Mom}_O\overline{AB}=\overline{OA}\times\overline{AB}.$$

Momentem $\mathrm{Mom}_{L_{\overline{CD}}}\overline{AB}$ wektora $\overline{AB}$ względem osi $L_{\overline{CD}}$ wyznaczonej przez wektor $\overline{CD}$ nazywamy wektor

(12) $$\mathbf{v}=\mathrm{Mom}_{L_{\overline{CD}}}\overline{AB}=(\mathrm{Mom}_E\overline{AB})_{L_{\overline{CD}}}=(\overline{EA}\times\overline{AB})_{L_{\overline{CD}}},$$

gdzie symbol $(\mathrm{Mom}_E\overline{AB})_{L_{\overline{CD}}}$ oznacza rzut wektora $\mathrm{Mom}_E\overline{AB}$ na oś $L_{\overline{CD}}$, przy czym E (por. przykład 8.12) jest dowolnym punktem osi $L_{\overline{CD}}$.

Iloczyn wektorowy definiujemy również w $\mathbf{R}^k$. Otóż, *iloczynem wektorowym układu uporządkowanego $k-1$ wektorów* $\mathbf{u}_i$, $i=1,2,\dots,k-1$ liniowo niezależnych nazywamy wektor o następujących własnościach:

α′) długość $|\mathbf{w}|$ jest równa $(k-1)$-wymiarowej mierze (por. § 33) równoległościanu rozpiętego na wektorach $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_{k-1}$,

β′) $\mathbf{w}\perp\mathbf{u}_i$, $i=1,2,\dots,k-1$ (istnienie wektora prostopadłego do każdego z wektorów $\mathbf{u}_i$ wynika z ich liniowej niezależności),

γ') zwrot wektora $\mathbf{w}$ jest taki, że układ wektorów $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}$ jest zorientowany dodatnio([1]). Korzystając z podanej definicji wyprowadza się wzór

$$\mathbf{w}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \ldots & \mathbf{e}_k \\ u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{k-1,1} & u_{k-1,2} & \ldots & u_{k-1,k} \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Jeżeli wektory $\mathbf{u}_i$, $i=1,2,\ldots,k-1$, są l.z. przyjmujemy, że ich iloczyn wektorowy $\mathbf{w}=\mathbf{o}$.

Przykłady

8.1. Na osi Os dane są punkty A, B i C, przy czym miara $AB=4$ i miara $AC=1$. Znaleźć taki punkt $X\in Os$, aby stosunek miar AX i BX był dwa razy większy od stosunku miar AC i BC.

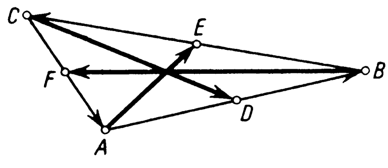
Rozwiązanie. Z warunku zadania mamy

$$\frac{AX}{BX} = 2\cdot\frac{AC}{BC}. \tag{a}$$

Miarę BC znajdujemy, stosując wzór (2) do punktów A, B, C. Otóż $AB+BC+CA=0$, stąd $BC=-CA-AB=AC-AB=-3$. Wstawiając $BC=-3$ do równości (a), otrzymujemy

$$\frac{AX}{BX} = 2\cdot\frac{1}{-3}, \quad \text{czyli} \quad 3AX+2BX=0.$$

Stosując jeszcze raz wzór (2) do punktów A, B, X mamy $BX+XA+AB=0$, stąd $BX=AX-4$, czyli $3AX+2AX-8=0$, tzn. $AX=\frac{8}{5}=1{,}6$.



Rys. 8.4

8.2. Wykazać, że ze środkowych trójkąta można zbudować trójkąt.

Rozwiązanie. Niech dany będzie trójkąt ABC (rys. 8.4), gdzie odcinki AE, BF i CD oznaczają środkowe trójkąta, tzn. $\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}$, $\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$, $\overline{CF}=\frac{1}{2}\overline{CA}$. Stąd $\overline{AE}=\overline{AB}+\overline{BE}=\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BC}$, $\overline{BF}=\overline{BC}+\overline{CF}=\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{CA}$, $\overline{CD}=\overline{CA}+\overline{AD}=\overline{CA}+\frac{1}{2}\overline{AB}$. Z kolei $\overline{AE}+\overline{BF}+\overline{CD}=\frac{3}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})=\mathbf{o}$, czyli wektory $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ i $\overline{CD}$ tworzą wielobok zamknięty, a więc trójkąt. □

([1]) Mówimy, że wektory l.n. $u_i=(u_{1i}, u_{2i}, \ldots, u_{ki})$, $i=1,2,\ldots,k$, są zorientowane dodatnio jeżeli $\det[u_{mi}]_{k\times k}>0$.

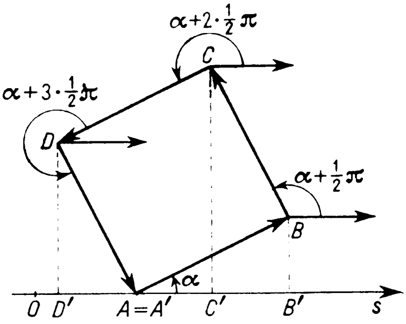
8.3. Udowodnić tożsamość

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}\pi)+\cos(\alpha+2\cdot\tfrac{1}{2}\pi)+\cos(\alpha+3\cdot\tfrac{1}{2}\pi)=0.$$

Rozwiązanie. Weźmy oś Os, dowolny kąt α i kwadrat o długości boku równej jedności (rys. 8.5). Weźmy sumę wektorów tworzących wielobok zamknięty $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}=\mathbf{o}$ i jej rzut na oś Os. Ponieważ rzut sumy równa się sumie rzutów oraz współrzędna rzutu sumy równa się sumie współrzędnych rzutów, kolejno otrzymujemy

$$\overline{AB}_s+\overline{BC}_s+\overline{CD}_s+\overline{DA}_s=\mathbf{o},$$

$$\text{(a)}\qquad AB_s+BC_s+CD_s+DA_s=0.$$



Rys. 8.5

Z kolei uwzględniając rysunek 8.5, wzór (4) i równość (a) mamy

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}\pi)+\cos(\alpha+2\cdot\tfrac{1}{2}\pi)+\cos(\alpha+3\cdot\tfrac{1}{2}\pi)=0. \quad \square$$

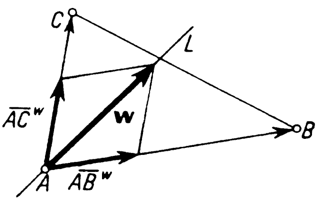
8.4. Dany jest trójkąt o wierzchołkach A, B, C. Znaleźć wektor leżący na dwusiecznej kąta wewnętrznego przy wierzchołku A.

Rozwiązanie. Łatwo sprawdzić, że dla $\mathbf{a}\neq\mathbf{o}$, $\mathbf{a}^w=\frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$. Istotnie,

$$|\mathbf{a}^w|=\left|\frac{1}{|\mathbf{a}|}\,|\mathbf{a}|\right|=\frac{1}{|\mathbf{a}|}|\mathbf{a}|=1\wedge\mathbf{a}^w\|\mathbf{a}\quad\text{zgodnie.}$$

Stąd

$$\overline{AB}^w=\frac{1}{|\overline{AB}|}\overline{AB},\qquad \overline{AC}^w=\frac{1}{|\overline{AC}|}\overline{AC}\quad\text{(rys. 8.6)}.$$



Rys. 8.6

Wektor $\mathbf{w}=\overline{AB}^w+\overline{AC}^w$, z uwagi na równości $|\overline{AB}^w|=|\overline{AC}^w|=1$ leży na przekątnej rombu o bokach nierównoległych $\overline{AB}^w$ i $\overline{AC}^w$, a więc leży na dwusiecznej kąta przy wierzchołku A. Stąd poszukiwany wektor

$$\mathbf{w}=\frac{1}{|\overline{AB}|}\overline{AB}+\frac{1}{|\overline{AC}|}\overline{AC}.$$

8.5. Dane są punkty $A(3, -1, 2)$, $B(-1, 6, 0)$, $C(4, 1, 3)$. Znaleźć:
a) $\overline{BC}^w$; b) $\frac{1}{3}\overline{AB}+\frac{2}{3}\overline{BC}$; c) $(\frac{1}{2}\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})_y$.

Rozwiązanie. a)

$$\overline{BC}^w=\frac{1}{|\overline{BC}|}\overline{BC} \quad \text{(por. przykład 8.4)},$$

ale $\overline{BC}=(4+1, 1-6, 3-0)=(5, -5, 3)$ (por. def. współrzędnych wektora związanego, punkt 8.2), stąd

$$\overline{BC}^w=\frac{1}{\sqrt{5^2+5^2+3^2}}(5\mathbf{i}-5\mathbf{j}+3\mathbf{k})=\frac{5}{\sqrt{59}}\mathbf{i}-\frac{5}{\sqrt{59}}\mathbf{j}+\frac{3}{\sqrt{59}}\mathbf{k},$$

czyli

$$\overline{BC}^w=\left(\frac{5}{\sqrt{59}}, \frac{-5}{\sqrt{59}}, \frac{3}{\sqrt{59}}\right).$$

b) Kolejno znajdujemy

$$\overline{AB}=(-1-3)\mathbf{i}+(6+1)\mathbf{j}+(0-2)\mathbf{k}=-4\mathbf{i}+7\mathbf{j}-2\mathbf{k}, \qquad \overline{BC}=5\mathbf{i}-5\mathbf{j}+3\mathbf{k},$$

stąd

$$\mathbf{c}=\tfrac{1}{3}\overline{AB}+\tfrac{2}{3}\overline{BC}=\tfrac{1}{3}(-4\mathbf{i}+7\mathbf{j}-2\mathbf{k})+\tfrac{2}{3}(5\mathbf{i}-5\mathbf{j}+3\mathbf{k})=(-\tfrac{4}{3}+\tfrac{10}{3})\mathbf{i}+(\tfrac{7}{3}-\tfrac{10}{3})\mathbf{j}+$$
$$+(-\tfrac{2}{3}+2)\mathbf{k}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\tfrac{4}{3}\mathbf{k}=(2, -1, \tfrac{4}{3}).$$

c) Znajdujemy

$$\overline{AC}=(4-3)\mathbf{i}+(1+1)\mathbf{j}+(3-2)\mathbf{k}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k},$$

stąd

$$\mathbf{b}=\tfrac{1}{2}\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=\tfrac{1}{2}(-4\mathbf{i}+7\mathbf{j}-2\mathbf{k})+5\mathbf{i}-5\mathbf{j}+3\mathbf{k}+\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}=4\mathbf{i}+\tfrac{1}{2}\mathbf{j}+3\mathbf{k}=(4, \tfrac{1}{2}, 3).$$

W celu znalezienia wektora $\mathbf{b}_y$, zauważmy, że liczba $\frac{1}{2}$ jest miarą rzutu wektora $\mathbf{b}$ na oś Oy, zatem na mocy wzoru (5) $\mathbf{b}_y=\frac{1}{2}\mathbf{j}$.

8.6. Kąty α, β i γ, jakie tworzy wektor $\mathbf{a}=(a_x, a_y, a_z)\neq\mathbf{o}$ z osiami Ox, Oy i Oz nazywamy *kątami kierunkowymi wektora* $\mathbf{a}$, a ich cosinusy, *cosinusami kierunkowymi wektora* $\mathbf{a}$. Wykazać, że:

$$(\mathrm{a}_1) \qquad \cos\alpha=a_x^w, \quad \cos\beta=a_y^w, \quad \cos\gamma=a_z^w,$$

$$(\mathrm{a}_2) \qquad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

gdzie a_x^w, a_y^w, a_z^w oznaczają współrzędne wektora $\mathbf{a}^w$.

Rozwiązanie. Z przykładu 8.4 mamy

$$\mathbf{a}^w=\frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}=\left(\frac{a_x}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_y}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_z}{|\mathbf{a}|}\right).$$

Z kolei z 13° otrzymujemy:

$$\cos\alpha=\frac{\mathbf{a}\bullet\mathbf{i}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{i}|}=\frac{a_x\cdot 1+a_y\cdot 0+a_z\cdot 0}{|\mathbf{a}|\cdot 1}=\frac{a_x}{|\mathbf{a}|}=a_x^w,$$

$$\cos\beta=\frac{\mathbf{a}\bullet\mathbf{j}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{j}|}=\frac{a_x\cdot 0+a_y\cdot 1+a_z\cdot 0}{|\mathbf{a}|\cdot 1}=\frac{a_y}{|\mathbf{a}|}=a_y^w,$$

$$\cos\gamma=\frac{\mathbf{a}\bullet\mathbf{k}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{k}|}=\frac{a_x\cdot 0+a_y\cdot 0+a_z\cdot 1}{|\mathbf{a}|\cdot 1}=\frac{a_z}{|\mathbf{a}|}=a_z^w,$$

zatem wykazaliśmy prawdziwość wzoru (a_1). Wzór (a_2) wynika z (a_1) i z definicji wersora. Istotnie

$$|\mathbf{a}^w|^2=1, \quad \text{czyli} \quad (a_x^w)^2+(a_y^w)^2+(a_z^w)^2=1,$$

tzn. wzór (a_2).

8.7. Znaleźć rzut $\mathbf{a}_\mathbf{b}$ wektora $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ na oś Os wyznaczoną przez wektor $\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$.

Rozwiązanie. Stosujemy wzór (6):

$$\mathbf{a}_\mathbf{b}=\frac{\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}=\frac{2-2-3}{1+4+9}\mathbf{b}=\tfrac{-3}{14}\mathbf{b}=-\tfrac{3}{14}\mathbf{i}-\tfrac{3}{7}\mathbf{j}+\tfrac{9}{14}\mathbf{k}.$$

8.8. Mając dane wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ znaleźć wektor

$$\left(\frac{\mathbf{a}+3\mathbf{b}}{4}\right)\times\left(\mathbf{b}-\frac{\mathbf{a}}{2}\right).$$

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzoru

$$(k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2)\times(t_1\mathbf{b}_1+t_2\mathbf{b}_2)=(k_1t_1)(\mathbf{a}_1\times\mathbf{b}_1)+(k_1t_2)(\mathbf{a}_1\times\mathbf{b}_2)+$$
$$+(k_2t_1)(\mathbf{a}_2\times\mathbf{b}_1)+(k_2t_2)(\mathbf{a}_2\times\mathbf{b}_2)$$

(por. zadanie 8.60). Otóż $k_1=\frac{1}{4}$, $k_2=\frac{3}{4}$, $t_1=1$, $t_2=-\frac{1}{2}$, $\mathbf{a}_1=\mathbf{b}_2=\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_2=\mathbf{b}_1=\mathbf{b}$, stąd

$$(\tfrac{1}{4}\mathbf{a}+\tfrac{3}{4}\mathbf{b})\times(\mathbf{b}-\tfrac{1}{2}\mathbf{a})=\tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})-\tfrac{1}{8}(\mathbf{a}\times\mathbf{a})+\tfrac{3}{4}(\mathbf{b}\times\mathbf{b})-\tfrac{3}{8}(\mathbf{b}\times\mathbf{a})=$$
$$=\tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+\tfrac{3}{8}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\tfrac{5}{8}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

8.9. Znaleźć pole trójkąta $A(3,-1,2)$, $B(4,6,3)$, $C(-1,5,1)$.

Rozwiązanie. Stosujemy wzór (8). Otóż $\overline{AB}=(4-3,6+1,3-2)=(1,7,1)$, $\overline{AC}=(-1-3,5+1,1-2)=(-4,6,-1)$. Stąd (por. (7))

$$\mathbf{w}=\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&7&1\\-4&6&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7&1\\6&-1\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}1&1\\-4&-1\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}1&7\\-4&6\end{vmatrix}\mathbf{k}=-13\mathbf{i}-3\mathbf{j}+34\mathbf{k},$$

zatem

$$S_\triangle=\tfrac{1}{2}\sqrt{(-13)^2+(-3)^2+34^2}=\tfrac{1}{2}\sqrt{1334}.$$

8.10. Znaleźć wektor $\mathbf{u}=(u_x, u_y, u_z)$ wiedząc, że jest on prostopadły do wektorów $\mathbf{v}=(1,2,-3)$, $\mathbf{w}=(-1,4,2)$ i spełnia warunek $\mathbf{u}\bullet\mathbf{a}=-150$, gdzie $\mathbf{a}=(4,5,1)$.

Rozwiązanie. Ponieważ $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}\perp\mathbf{w}$, to $\mathbf{u}\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}$, czyli $\mathbf{u}=m(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ (por. 5°). Znajdujemy

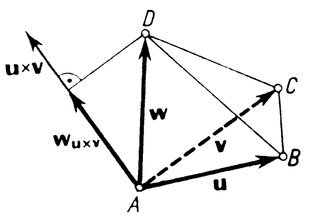
$$\begin{array}{l}\mathbf{v}=(1,2,-3)\\ \mathbf{w}=(-1,4,2)\\ \hline \mathbf{b}=\mathbf{v}\times\mathbf{w}=(16,1,6),\end{array}$$

a więc $\mathbf{u}=m\mathbf{b}=(16m,\ m,\ 6m)$. Liczbę m znajdziemy z warunku $\mathbf{u}\bullet\mathbf{a}=-150$. Otóż $64m+5m+6m=-150\Rightarrow m=-2$, zatem

$$\mathbf{u}=(-32,-2,-12).$$

8.11. Wyprowadzić wzór (9).

Rozwiązanie. Niech dany będzie czworościan T o wierzchołkach A, B, C i D (rys. 8.7).



Rys. 8.7

Przyjmujemy oznaczenia: $\mathbf{u}=\overline{AB}$, $\mathbf{v}=\overline{AC}$, $\mathbf{w}=\overline{AD}$ oraz korzystamy ze wzoru $V_T=\frac{1}{3}S_p\cdot h$. Ale $S_p=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|=\frac{1}{2}|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$, a długość wysokości h jest wartością bezwzględną miary rzutu wektora $\mathbf{w}$ na wektor prostopadły do podstawy, np. na wektor $\mathbf{a}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}$. Stąd korzystając z 14°, otrzymujemy

$$h=|\mathbf{w}_a|=\frac{|\mathbf{w}\bullet(\mathbf{u}\times\mathbf{v})|}{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|},$$

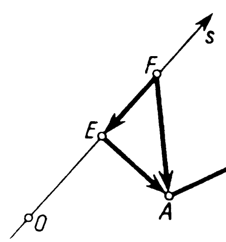
zatem

$$V_T=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|\cdot\frac{|\mathbf{w}\bullet(\mathbf{u}\times\mathbf{v})|}{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|}=\frac{1}{6}|\mathbf{w}\bullet(\mathbf{u}\times\mathbf{v})|=\frac{1}{6}|\overline{AD}\bullet(\overline{AB}\times\overline{AC})|.\quad\square$$

8.12. Wykazać, że definicja momentu wektora względem osi jest jednoznaczna, tzn. nie zależy od wyboru punktu E na osi (por. wzór (12)).

Rozwiązanie. Weźmy oś Os, wektor $\overline{AB}$ (związany) niewspółpłaszczyznowy z osią Os i dwa dowolne punkty $E\in Os$ i $F\in Os$ (rys. 8.8). Należy wykazać, że

$$\mathrm{Mom}_{Os}\overline{AB}=(\mathrm{Mom}_E\overline{AB})_{Os}=(\mathrm{Mom}_F\overline{AB})_{Os}.$$



Rys. 8.8

Weźmy wektor $(\mathrm{Mom}_F\overline{AB})_{Os}=(\overline{FA}\times\overline{AB})_{Os}$. Ale $\overline{FA}=\overline{FE}+\overline{EA}$ (rys. 8.8), skąd, korzystając ze wzoru $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ oraz z twierdzenia, że rzut sumy wektorów na oś równa się sumie rzutów tych wektorów na tę oś, otrzymujemy

$$(\overline{FA}\times\overline{AB})_{Os}=[(\overline{FE}+\overline{EA})\times\overline{AB}]_{Os}=(\overline{FE}\times\overline{AB}+\overline{EA}\times\overline{AB})_{Os}=(\overline{FE}\times\overline{AB})_{Os}+(\overline{EA}\times\overline{AB})_{Os}.$$

Ale $(\overline{FE}\times\overline{AB})\perp\overline{FE}$ oraz $\overline{FE}\,\|\,Os$, zatem rzut wektora $\overline{FE}\times\overline{AB}$ na oś Os jest wektorem zerowym, czyli $(\overline{FE}\times\overline{AB})_{Os}=\mathbf{o}$. Stąd $(\overline{FA}\times\overline{AB})_{Os}=(\overline{EA}\times\overline{AB})_{Os}$. $\square$

Uwaga. Jeżeli wektor $\overline{AB}$ leży w jednej płaszczyźnie z osią Os, to $(\overline{EA}\times\overline{AB})\perp Os$ dla dowolnego punktu $E\in Os$, zatem

$$\mathrm{Mom}_{Os}\,\overline{AB}=(\overline{EA}\times\overline{AB})_{Os}=\mathbf{o}.$$

8.13. Dane są punkty $A(3,1,4)$, $B(-1,2,0)$, $C(2,-1,2)$, $D(1,4,-1)$. Znaleźć $\mathrm{Mom}_{L_{\overline{BD}}}\overline{AC}$.

Rozwiązanie. Korzystamy z przykładu 8.12 i ze wzoru (6):

$$\mathbf{w}=\mathrm{Mom}_{L_{\overline{BD}}}\overline{AC}=(\overline{BA}\times\overline{AC})_{L_{\overline{BD}}}=\mathbf{u}_{\overline{BD}}=\frac{\mathbf{u}\bullet\overline{BD}}{|\overline{BD}|^2}\,\overline{BD},$$

gdzie $\mathbf{u}=\overline{BA}\times\overline{AC}$. Ale

$$\begin{array}{r}\overline{BA}=(4,-1,4)\\ \overline{AC}=(-1,-2,-2)\\ \hline \mathbf{u}=\overline{BA}\times\overline{AC}=(10,4,-9)\end{array},\qquad \overline{BD}=(2,2,-1),$$

skąd

$$\mathbf{w}=\frac{20+8+9}{4+4+1}\,\overline{BD}=\tfrac{37}{9}\overline{BD}=(\tfrac{74}{9},\tfrac{74}{9},-\tfrac{37}{9}).$$

8.14. Wykazać, że

$$(\mathbf{x}\|\mathbf{y}\ \text{przeciwnie})\Leftrightarrow(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|).$$

Rozwiązanie. W przypadku $\mathbf{x}=\mathbf{o}\vee\mathbf{y}=\mathbf{o}$ równoważność jest oczywista. Załóżmy więc, że $|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|>0$.

$\Rightarrow$: z 5° mamy

$$\bigvee_{t\in\mathbf{R}_-}\mathbf{x}=t\mathbf{y}\Rightarrow|\mathbf{x}|=|t\mathbf{y}|=-t|\mathbf{y}|,$$

zatem

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=|t\mathbf{y}-\mathbf{y}|=|t-1|\,|\mathbf{y}|=(-t+1)|\mathbf{y}|=-t|\mathbf{y}|+|\mathbf{y}|=|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|.\quad\Box$$

$\Leftarrow$: Z definicji długości wektora mamy

$$\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2=\sum_{i=1}^n x_i^2+2\sqrt{\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big)}+\sum_{i=1}^n y_i^2,$$

skąd

$$\text{(a)}\qquad -\sum_{i=1}^n x_iy_i=\sqrt{\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big)}\Rightarrow\Big(\sum_{i=1}^n x_iy_i\Big)^2=\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big).$$

Weźmy teraz wyrażenie

$$\sum_{i=1}^n(ty_i+x_i)^2=t^2\sum_{i=1}^n y_i^2+2t\sum_{i=1}^n x_iy_i+\sum_{i=1}^n x_i^2,$$

gdzie $t\in\mathbf{R}$ jest parametrem. Z (a) wynika, że wyróżnik trójmianu po prawej stronie wyrażenia jest zerem, stąd

$$ty_i+x_i=0\Rightarrow x_i=-ty_i\wedge t>0,\qquad i=1,2,\ldots,n.$$

Istnieje więc taka liczba $k=-t<0$, że $\mathbf{x}=k\mathbf{y}$. $\Box$

8.15. Dane są wektory $\mathbf{a}_1=(1,2,-1,3)$, $\mathbf{a}_2=(2,1,0,4)$, $\mathbf{a}_3=(-1,-2,1,2)$ oraz wektory $\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3$, $\mathbf{b}_2=2\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$, $\mathbf{b}_3=3\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3$. Wykazać, że

$$\mathbf{w}(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3)=-3\mathbf{w}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3).$$

Rozwiązanie: Korzystamy ze wzoru (13):

$$\mathbf{w}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)=\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{e}_1-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{e}_2+\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{e}_3-\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{e}_4=$$

$$=5\mathbf{e}_1-10\mathbf{e}_2-15\mathbf{e}_3+0\mathbf{e}_4.$$

Z kolei

$$\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3=(4,5,-2,5),\quad \mathbf{b}_2=2\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3=(-1,1,-1,4),$$

$$\mathbf{b}_3=3\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3=(8,10,-4,15),$$

zatem

$$\mathbf{w}(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3)=\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ 4 & 5 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 4 \\ 8 & 10 & -4 & 15 \end{vmatrix}=-15\mathbf{e}_1+30\mathbf{e}_2+45\mathbf{e}_3+0\mathbf{e}_4=$$

$$=-3\mathbf{w}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3).\quad \square$$

Zadania

8.16. Sprawdzić, czy trójkąty o wierzchołkach: a) $O(0,0)$, $B(3,1)$, $C(1,7)$; b) $A_1(1,0)$, $B_1(-1,3)$, $C_1(1,10)$; c) $A_2(3,2,1)$, $B_2(-1,6,5)$, $C_2(5,3,2)$; są prostokątne?

8.17. Sprawdzić, czy w czworokąt o wierzchołkach $A(3,1)$, $B(2,1)$, $C(-1,6)$, $D(9,12)$ można wpisać koło?

8.18. Sprawdzić, czy czworokąt o wierzchołkach $A(-5,-5)$, $B(4,7)$, $C(2,8)$, $D(-1,4)$ jest równoległobokiem?

8.19. Sprawdzić, czy punkty $A(1,0,3)$, $B(0,2,4)$, $C(2,-2,2)$ są współliniowe?

8.20. Podać przykłady wielkości wektorowych w fizyce.

8.21. Udowodnić wzór (2).

8.22. Na osi dane są punkty A, B i C, przy czym $AB=3$, $BC=2$. Znaleźć taki punkt X leżący na osi, aby miara AX wektora $\overline{AX}$ była dwa razy większa od miary CA wektora $\overline{CA}$.

8.23. Na płaszczyźnie dane są wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Znaleźć wektory: a) $-\mathbf{a}$; b) $-\mathbf{b}$; c) $2\mathbf{a}$; d) $-\frac{1}{3}\mathbf{b}$; e) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$; f) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$; g) $3\mathbf{a}-2\mathbf{b}$; h) $\frac{1}{2}\mathbf{a}-\frac{2}{3}\mathbf{b}$.

8.24. Korzystając z równoległoboku zbudowanego na wektorach $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ sprawdzić na rysunku tożsamości:

a) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+(\mathbf{a}-\mathbf{b})=2\mathbf{a}$; b) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})-(\mathbf{a}-\mathbf{b})=2\mathbf{b}$;
c) $\mathbf{a}+(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\mathbf{b}$; d) $(\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b})+(\mathbf{b}+\frac{1}{2}\mathbf{a})=\frac{3}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$.

8.25. W rombie $ABCD$ dane są przekątne $\overline{AC}=\mathbf{a}$, $\overline{BD}=\mathbf{b}$. Wyrazić za pomocą wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ wektory $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$.

8.26. W równoległoboku $ABCD$ mamy $\mathbf{a}=\overline{AB}$, $\mathbf{b}=\overline{AD}$. Wyrazić za pomocą wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ wektory: $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$, $\overline{MD}$, gdzie M jest punktem przecięcia przekątnych równoległoboku.

8.27. Wykazać, że suma wektorów o wspólnym początku w środku ciężkości trójkąta i końcach w wierzchołkach tego trójkąta jest wektorem zerowym.

8.28. W czworościanie $ABCD$ dane są krawędzie wychodzące z wierzchołka A: $\mathbf{b}=\overline{AB}$, $\mathbf{c}=\overline{AC}$ i $\mathbf{d}=\overline{AD}$. Wyrazić za pomocą tych wektorów następujące wektory: $\overline{DC}$, $\overline{CB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DM}$, $\overline{AQ}$; gdzie odcinek DM jest środkową w trójkącie BCD oraz Q jest środkiem ciężkości trójkąta BCD.

8.29. Dany jest równoległobok $ABCD$, gdzie $\overline{AB}=\mathbf{a}$, $\overline{AD}=\mathbf{b}$, przy czym $|\mathbf{a}|>|\mathbf{b}|$. Wyrazić za pomocą wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ wektor $\overline{EC}$, gdzie E jest punktem przecięcia dwusiecznej kąta wewnętrznego przy wierzchołku A z bokiem DC.

8.30. Wektory $\overline{OA}=\mathbf{r}_1$, $\overline{OB}=\mathbf{r}_2$ i $\overline{OC}=\mathbf{r}_3$ są krawędziami równoległościanu. Znaleźć wektor $\overline{OD}$, gdzie D jest punktem przecięcia przekątnej równoległościanu, wychodzącej z wierzchołka O, z płaszczyzną wyznaczoną przez wierzchołki A, B i C.

8.31. Udowodnić dla dowolnego kąta α, że:

a) $\cos\alpha+\cos(\alpha+\frac{1}{3}\cdot 2\pi)+\cos(\alpha+\frac{2}{3}\cdot 2\pi)=0$;

b) $$\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{1}{n}\cdot 2\pi\right)+\cos\left(\alpha+\frac{2}{n}\cdot 2\pi\right)+\ldots+\cos\left(\alpha+\frac{n-1}{n}\cdot 2\pi\right)=0.$$

8.32. Punkty $A_1(x_1)$, $A_2(x_2)$, ..., $A_n(x_n)$ leżące na osi Ox mają odpowiednio masy $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Znaleźć współrzędne ich środka ciężkości, tj. takiego punktu $S\in Ox$, dla którego $m_1 A_1S+m_2 A_2S+\ldots+m_n A_nS=0$, gdzie A_iS oznaczają miary wektorów $\overline{A_iS}$, $i=1, 2, \ldots, n$, względem osi Ox.

8.33. Dany jest wektor $\mathbf{a}=(3, -1, 2)$ o początku w punkcie $A(-3, 4, 5)$. Znaleźć współrzędne końca wektora.

8.34. Dane są wektory $\mathbf{a}=\overline{AB}$ i $\mathbf{b}=\overline{CD}$, gdzie $A(2, 3, 1)$, $B(5, 1, 7)$, $C(5, 0, 2)$ i $D(3, 1, 2)$. Znaleźć rzuty na osie układu wektorów: a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$; b) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$; c) $2\mathbf{a}$; d) $-\frac{1}{2}\mathbf{b}$; e) $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$; f) $\frac{1}{3}\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

8.35. Wykazać, że wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy są liniowo zależne.

8.36. Wykazać, że wektory $\mathbf{a}_i=(a_{1i}, a_{2i}, a_{3i})$, $i=1,2,3$, są liniowo zależne [niezależne] wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0 \quad [\ldots\neq 0].$$

8.37. Wykazać, że wektory $\mathbf{a}_i=(a_{1i}, a_{2i}, a_{3i})$, $i=1,2,3,\ldots,k$, są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{R}(A)=3$, gdzie

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3k} \end{bmatrix}.$$

8.38. Zbadać liniową niezależność układów wektorów: a) $\mathbf{a}_1=(2)$, $\mathbf{a}_2=(-3)$; b) $\mathbf{b}_1=(3,1)$, $\mathbf{b}_2=(-2,1)$; c) $\mathbf{c}_1=(-1,2)$, $\mathbf{c}_2=(2,6)$, $\mathbf{c}_3=(3,2)$; d) $\mathbf{d}_1=(1,1,-2)$, $\mathbf{d}_2=(3,1,0)$, $\mathbf{d}_3=(-1,2,1)$.

8.39. Wykazać, że mnożenie skalarne wektorów nie jest działaniem łącznym.

8.40. Dane są punkty $A(4,-1,2a)$, $B(a,2,4)$, $C(-2,4,2)$, $D(3-a,1,-3)$. Dla jakich wartości parametru a iloczyn skalarny $\overline{AB}\bullet\overline{CD}$ jest dodatni?

8.41. Sprawdzić, czy wektory $\mathbf{c}$ i $\mathbf{w}=\mathbf{a}(\mathbf{b}\bullet\mathbf{c})-\mathbf{b}(\mathbf{a}\bullet\mathbf{c})$ są prostopadłe.

8.42. Kiedy zachodzi równość

$$(\mathbf{a}\bullet\mathbf{b})^2=|\mathbf{a}|^2\cdot|\mathbf{b}|^2\,?$$

8.43. Znaleźć cosinusy kierunkowe wektora $\mathbf{c}=(-1,4,5)$.

8.44. Wektor o początku w punkcie $A(-4,2,3)$ ma długość 14 i następujące cosinusy kierunkowe: $\frac{2}{7}$, $-\frac{3}{7}$, $-\frac{6}{7}$. Znaleźć współrzędne końca wektora.

8.45. Wykazać prawdziwość wzoru

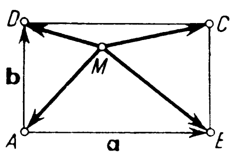
$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2+(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2=2(|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2)$$

oraz podać jego sens geometryczny.

8.46. Dany wektor $\mathbf{a}$ rozłożyć na sumę dwóch wektorów (składowych), z których jeden byłby równoległy, a drugi prostopadły do danego wektora $\mathbf{b}\neq\mathbf{o}$.

8.47. Dany jest trójkąt równoboczny ABC o długości boku a. Obliczyć wartość wyrażenia

$$\overline{BC}\bullet\overline{CA}+\overline{CA}\bullet\overline{AB}+\overline{AB}\bullet\overline{BC}.$$



Rys. 8.9

8.48. Dany jest prostokąt $ABCD$ i punkt M leżący wewnątrz niego (rys. 8.9). Wykazać, że

(a) $$\overline{MA}\bullet\overline{MC}=\overline{MB}\bullet\overline{MD},$$

(a_1) $$|\overline{MA}|^2+|\overline{MC}|^2=|\overline{MB}|^2+|\overline{MD}|^2.$$

8.49. Znaleźć kąty wewnętrzne trójkąta o wierzchołkach $A(2,-1,3)$, $B(1,1,1)$, $C(0,0,5)$.

8.50. Dane są wektory $\mathbf{a}=(5,-6,1)$, $\mathbf{b}=(-4,3,0)$, $\mathbf{c}=(5,-8,10)$. Obliczyć: a) $3\mathbf{a}^2-4\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}+2\mathbf{c}^2$; b) $2\mathbf{a}^2+4\mathbf{b}^2-5\mathbf{c}^2$; c) $3\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}-4\mathbf{b}\bullet\mathbf{c}-5\mathbf{a}\bullet\mathbf{c}$.

8.51. Dla jakich wartości a i b wektor $\mathbf{u}=(\frac{1}{3}\sqrt{3}, a, b)$ jest wersorem prostopadłym do wektora $\mathbf{v}=(1,1,1)$?

8.52. Znaleźć wektor $\mathbf{a}$ wiedząc, że jest on prostopadły do wektorów $\mathbf{b}=(2,3,-1)$, $\mathbf{c}=(1,-2,3)$ oraz spełnia warunek $\mathbf{a}\bullet(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})=-6$.

8.53. Dane są wektory $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ i $\mathbf{c}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k}$. Znaleźć wektor $\mathbf{d}$ spełniający warunki $\mathbf{d}\bullet\mathbf{a}=-5$, $\mathbf{d}\bullet\mathbf{b}=-11$ i $\mathbf{d}\bullet\mathbf{c}=20$.

8.54. Dane są wektory $\mathbf{a}=(2,1,-3)$, $\mathbf{b}=(4,1,5)$. Znaleźć $\mathbf{a}_{\mathbf{b}}$.

8.55. Wektor $\mathbf{a}=(3,-1,2)$ przedstawić w postaci sumy dwóch wektorów, z których jeden jest równoległy, a drugi prostopadły do wektora $\mathbf{b}=(-1,4,5)$.

8.56. Wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ spełniają warunki $(2\mathbf{a}-\mathbf{b})\perp(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ i $(3\mathbf{a}-2\mathbf{b})\perp(4\mathbf{a}-\mathbf{b})$. Wyznaczyć kąt między wektorami $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

8.57. Wykazać prawdziwość wzoru

$$(k\mathbf{a})\times\mathbf{b}=k(\mathbf{a}\times\mathbf{b}), \tag{a}$$

gdzie k jest dowolną liczbą rzeczywistą.

8.58. Opierając się na wzorze (a) zadania 8.57 wykazać prawdziwość wzoru

$$\mathbf{a}\times(m\mathbf{b})=m(\mathbf{a}\times\mathbf{b}), \tag{a}$$

$$(k\mathbf{a})\times(m\mathbf{b})=(km)(\mathbf{a}\times\mathbf{b}), \tag{a$_1$}$$

gdzie k i m są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

8.59. Korzystając ze wzoru $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$, wykazać prawdziwość wzorów

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}, \tag{a}$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{c}+\mathbf{d})=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{a}\times\mathbf{d}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{d}. \tag{b}$$

8.60. Wykazać prawdziwość wzoru

$$\begin{aligned}(k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+k_3\mathbf{a}_3)\times(m_1\mathbf{b}_1+m_2\mathbf{b}_2+m_3\mathbf{b}_3)&=(k_1m_1)(\mathbf{a}_1\times\mathbf{b}_1)+\\ +(k_1m_2)(\mathbf{a}_1\times\mathbf{b}_2)+(k_1m_3)(\mathbf{a}_1\times\mathbf{b}_3)&+(k_2m_1)(\mathbf{a}_2\times\mathbf{b}_1)+\\ +(k_2m_2)(\mathbf{a}_2\times\mathbf{b}_2)+(k_2m_3)(\mathbf{a}_2\times\mathbf{b}_3)&+(k_3m_1)(\mathbf{a}_3\times\mathbf{b}_1)+\\ +(k_3m_2)(\mathbf{a}_3\times\mathbf{b}_2)+(k_3m_3)(\mathbf{a}_3\times\mathbf{b}_3)&.\end{aligned}$$

8.61. Wykazać prawdziwość wzoru: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{a}\bullet\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\bullet\mathbf{c})\mathbf{a}$.

8.62. Sprawdzić, że

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{o},\quad \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}=-\mathbf{j}\times\mathbf{i},\quad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}=-\mathbf{k}\times\mathbf{j},\quad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}=-\mathbf{i}\times\mathbf{k},$$

gdzie $\mathbf{i}=(1, 0, 0)$, $\mathbf{j}=(0, 1, 0)$, $\mathbf{k}=(0, 0, 1)$ są wersorami osi układu $Oxyz$.

8.63. Wykazać prawdziwość wzoru (7).

8.64. Wykazać prawdziwość wzoru (10).

8.65. Wykazać, że $(2\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}+2\mathbf{b})=3(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

8.66. Znaleźć pole trójkąta o wierzchołkach $A(1, -2, 8)$, $B(0, 0, 4)$ $C(6, 2, 0)$ oraz długość wysokości h_B z wierzchołka B.

8.67. Znaleźć objętość czworościanu o wierzchołkach $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 6)$ i $D(2, 3, 8)$ oraz długość wysokości h_D z wierzchołka D.

8.68. Znaleźć objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach $\overline{AB}=\mathbf{b}$, $\overline{AC}=\mathbf{c}$ i $\overline{AD}=\mathbf{d}$, gdzie $A(3, 4, 3)$, $B(9, 5, -1)$, $C(1, 7, 0)$ i $D(3, 2, 5)$.

8.69. Dane są wektory $\mathbf{b}=\overline{AB}$, $\mathbf{c}=\overline{AC}$, $\mathbf{d}=\overline{AD}$, gdzie $A(1, 1, 2)$, $B(-1, 3, 2)$, $C(2, -1, 4)$ i $D(2, 3, 0)$. Znaleźć: objętość czworościanu T o wierzchołkach A, B, C, D; objętość równoległościanu R zbudowanego na wektorach $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ i $\mathbf{d}$ oraz długość wysokości h_D czworościanu z wierzchołka D.

8.70. Dane są wektory $\mathbf{a}=(2, -3, 1)$, $\mathbf{b}=(1, 6, -1)$, $\mathbf{c}=(1, 5, 3)$. Znaleźć:
a) $[(\mathbf{a}\bullet\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}]\times(\mathbf{c}+\mathbf{a})$; b) $[(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}][(\mathbf{c}+\mathbf{a})\bullet\mathbf{b}]$; c) $[(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}][(\mathbf{a}\bullet\mathbf{c})(\mathbf{b}+2\mathbf{c})]$.

8.71. Dane są wektory $\mathbf{a}=(3, -2, 1)$, $\mathbf{b}=(1, 2, 1)$, $\mathbf{c}=(-1, 4, 3)$. Znaleźć:
a) $[(\mathbf{a}-2\mathbf{b})\times\mathbf{c}]\times[(\mathbf{a}\bullet\mathbf{c})(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]$; b) $[(\mathbf{b}\bullet\mathbf{c})(2\mathbf{c}\times\mathbf{a})]\bullet[(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{a}+\mathbf{c})]$.

8.72. Sprawdzić tożsamość

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2=|\mathbf{a}|^2\cdot|\mathbf{b}|^2+(\mathbf{a}\bullet\mathbf{b})^2.$$

8.73. Mając wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ znaleźć:

a) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b})$; b) $\mathbf{b}\times(\mathbf{a}+\mathbf{b})$; c) $\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}\times\left(\mathbf{b}-\dfrac{\mathbf{a}}{2}\right)$.

8.74. Dane są wektory $\mathbf{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b}=(b_x, b_y, b_z)$, $\mathbf{c}=(c_x, c_y, c_z)$. Wykazać, że

$$\mathbf{a}\bullet(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Uwaga. Liczbę $a\bullet(b\times c)$ nazywamy *iloczynem mieszanym*.

8.75. Dane są trzy wektory $\mathbf{r}_1=\overline{OA}$, $\mathbf{r}_2=\overline{OB}$ i $\mathbf{r}_3=\overline{OC}$. Wykazać, że wektor $\mathbf{u}=\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_3\times\mathbf{r}_1$ jest prostopadły do płaszczyzny ABC.

8.76. Wykazać, że wektory dane w zadaniu 8.74 są równoległe do jednej płaszczyzny (*komplanarne*) wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{a}\bullet(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=0$.

8.77. Wykazać, że $\mathrm{Mom}_O\,\overline{AB}=\mathbf{o}$, jeżeli $O\in L(A;B)$ (patrz notkę na str. 137).

8.78. Wykazać, że $\mathrm{Mom}_O \overline{AB} = \overline{OC} \times \overline{AB}$, gdzie C jest dowolnym punktem leżącym na prostej $L(A; B)$ ([1]).

8.79. Wykazać, że moment wektora względem osi, równa się momentowi rzutu tego wektora na dowolną płaszczyznę prostopadłą do tej osi, względem punktu przebicia tej płaszczyzny z osią.

8.80. Dane są punkty $A(0, 0, 1)$, $B(3, -1, 2)$, $C(2, 2, 4)$. Znaleźć:
a) $\mathrm{Mom}_O \overline{AB} + \mathrm{Mom}_O \overline{BC} + \mathrm{Mom}_O \overline{CA}$; b) $\mathrm{Mom}_C \overline{AB}$; c) $\mathrm{Mom}_{L_{\overline{BC}}} \overline{OA}$, gdzie $O\,(0,0,0)$;
d) momenty wektora $\overline{AB}$ względem osi układu.

8.81. Niech $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j \in \mathbf{R}^n$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Wykazać, że

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}_i\right) \bullet \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbf{y}_j\right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j (\mathbf{x}_i \bullet \mathbf{y}_j).$$

8.82. Niech $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \wedge \alpha \in \mathbf{R}$. Wykazać, że
a) $|\mathbf{x}| \geqslant 0$; b) $(|\mathbf{x}| = 0) \Leftrightarrow (\mathbf{x} = \mathbf{o})$; c) $|\alpha \mathbf{x}| = |\alpha| |\mathbf{x}|$;
d) $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{y} \bullet \mathbf{x}$; e) $|\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|$; f) $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$;
g) $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leqslant |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{z}|$.

8.83. Wykazać, że $(\mathbf{x} \| \mathbf{y}$ zgodnie$) \Leftrightarrow (|\mathbf{x} + \mathbf{y}| = |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)$.

8.84. Wykazać, że relacja $\equiv$ (por. punkt 8.2) w zbiorze wektorów związanych w $\mathbf{R}^n$ jest równoważnością.

8.85. Sprawdzić, że współrzędne $b_i - a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, wektora $\overline{ab} \in \mathbf{R}^n$ są miarami rzutów wektora $\overline{ab}$ na osie Ox_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

8.86. Niech $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^n \wedge \alpha_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Wykazać, że

$$\left(\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i \wedge \mathbf{a} \perp \mathbf{x}_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\right) \Rightarrow (\mathbf{a} = \mathbf{o}).$$

8.87. Niech $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$. Wykazać, że

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \tfrac{1}{4}\left(|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2\right).$$

8.88. W $\mathbf{R}^4$ dane są wektory: $\mathbf{a}_1 = (2, 0, 1, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 1, -1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (1, -2, 2, 3)$. Znaleźć wektor $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^4$ spełniający warunki:

$$(\mathbf{b} \perp \mathbf{a}_i,\ i = 1, 2, 3) \wedge (|\mathbf{b}| = 3\sqrt{3}).$$

8.89. Wykazać, że jeżeli wektory $\mathbf{a}_i \in \mathbf{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, są liniowo niezależne oraz $\alpha_{ij} \in \mathbf{R}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n-1$, to dla wektorów $\mathbf{b}_i = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{ij} \mathbf{a}_j$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, prawdziwy

---

([1]) Symbol $L(A; B)$ oznacza prostą wyznaczoną przez punkty A i B.

jest wzór:

$$\mathbf{w}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}) = k\mathbf{w}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}),$$

gdzie $k = \det [a_{ij}]_{n-1 \times n-1}$.

8.90. Niech $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^n$ będzie bazą standardową w $\mathbf{R}^n$. Wykazać, że

$$\mathbf{e}_j = \mathbf{w}(\mathbf{e}_{j+1}, \mathbf{e}_{j+2}, \ldots, \mathbf{e}_{j+(n-j)}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{j-1}), \quad j = 1, \ldots, n.$$

8.91. Wykazać, że iloczyn wektorowy określony wzorem (13) spełnia warunki α') i γ') definicji podanej w punkcie 8.4.

Uwaga. Dowód własności β') wymaga wiadomości z teorii miary (por. § 33).

Odpowiedzi

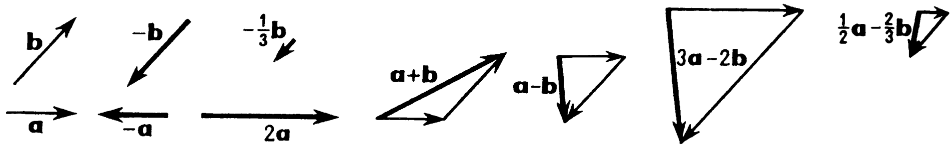
8.16. a) Tak; b) nie; c) tak. **8.17.** Nie.

8.18. Nie; jest trapezem. **8.19.** Tak.

8.20. Np. siła, prędkość, przyspieszenie, natężenie pola elektromagnetycznego.

8.21. Wsk. Przeprowadzić dowód indukcyjny.

8.22. $AX = -10$. **8.23.** Rys. 8.10.



Rys. 8.10

8.25. $\overline{AB} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$, $\overline{BC} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, $\overline{CD} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$, $\overline{DA} = -\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$.

8.26. $\overline{MA} = -\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, $\overline{MB} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$, $\overline{MC} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, $\overline{MD} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$.

8.28. $\overline{DC} = \mathbf{c}-\mathbf{d}$, $\overline{CB} = \mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\overline{BD} = \mathbf{d}-\mathbf{b}$, $\overline{DM} = \frac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{b}-2\mathbf{d})$, $\overline{AQ} = \frac{1}{3}(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})$.

8.29. Wsk. Skorzystać z przykładu 8.4; $\overline{EC} = \dfrac{|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\,\mathbf{a}$.

8.30. $\overline{OD} = \frac{1}{3}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3)$.

8.31. Wsk. W przypadku a) rozpatrzyć rzut trójkąta równobocznego na oś; w przypadku b) rozpatrzyć rzut n-kąta foremnego na oś.

8.32. $S\left(\dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}\right)$. **8.33.** $B(0, 3, 7)$.

8.34. a) $\mathbf{i}$, $-\mathbf{j}$, $6\mathbf{k}$; b) $5\mathbf{i}$, $-3\mathbf{j}$, $6\mathbf{k}$; c) $6\mathbf{i}$, $-4\mathbf{j}$, $12\mathbf{k}$; d) $\mathbf{i}$, $-\frac{1}{2}\mathbf{j}$, $\mathbf{o}$; e) $\mathbf{o}$, $-\mathbf{j}$, $12\mathbf{k}$; f) $3\mathbf{i}$, $-\frac{5}{3}\mathbf{j}$, $2\mathbf{k}$.

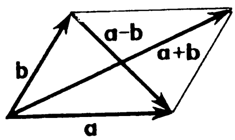
8.38. Liniowo zależne w przypadkach a) i c); liniowo niezależne w przypadkach b) i d).

8.40. $\alpha\in\left(\frac{1}{2}(19-\sqrt{165}),\ \frac{1}{2}(19+\sqrt{165})\right)$. **8.41.** Tak.

8.42. Jeżeli wektory **a** i **b** są równoległe.

8.43. $\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{42}}$, $\cos\beta=\dfrac{4}{\sqrt{42}}$, $\cos\gamma=\dfrac{5}{\sqrt{42}}$. **8.44.** $B(0,\ -4,\ -9)$.

8.45. Suma kwadratów długości boków równoległoboku równa się sumie kwadratów długości jego przekątnych, por. rys. 8.11.



Rys. 8.11

8.46. $\mathbf{a}'=\dfrac{\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}=\mathbf{a}_\mathbf{b}$, $\mathbf{a}''=\mathbf{a}-\mathbf{a}_\mathbf{b}$ **8.47.** $-\frac{3}{2}a^2$.

8.49. $\sphericalangle ABC=\sphericalangle ACB=\frac{1}{4}\pi$, $\sphericalangle BAC=\frac{1}{2}\pi$.

8.50. a) 716; b) -721; c) -353.

8.51. $a=\frac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mp 1\right)$, $b=\frac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\pm 1\right)$.

8.52. $\mathbf{a}=(-3,3,3)$. **8.53.** $\mathbf{d}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$.

8.54. $\mathbf{a}_\mathbf{b}=-\frac{1}{7}\mathbf{b}=-\frac{4}{7}\mathbf{i}-\frac{1}{7}\mathbf{j}-\frac{5}{7}\mathbf{k}$.

8.55. $\mathbf{a}'=\mathbf{a}_\mathbf{b}=\dfrac{\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}=\left(-\frac{1}{14},\frac{2}{7},\frac{5}{14}\right)$, $\mathbf{a}''=\mathbf{a}-\mathbf{a}'=\left(\frac{43}{14},\ -\frac{9}{7},\frac{23}{14}\right)$.

8.56. $\cos\alpha=\dfrac{16}{3\sqrt{34}}$.

8.60. Wsk. Skorzystać z zadań 8.57 i 8.59.

8.63. Wsk. Skorzystać z zadania 8.60 oraz ze wzorów zadania 8.62.

8.64. Wsk. Por. przykład 8.11. **8.66.** $S=7\sqrt{5}$, $h_B=\frac{2}{3}\sqrt{21}$.

8.67. $V=14$, $h_D=\sqrt{14}$. **8.68.** $V=12$.

8.69. $V_T=\frac{4}{3}$, $V_R=8$, $h_D=\frac{4}{3}$.

8.70. a) $\mathbf{w}=-17(14\mathbf{i}+5\mathbf{j}-13\mathbf{k})$; b) $\mathbf{u}=33(3\mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k})$; c) 570.

8.71. a) $-160(-\mathbf{i}+4\mathbf{j}+3\mathbf{k})$; b) -7200.

8.73. a) $-2\mathbf{a}\times\mathbf{b}$; b) $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$; c) $\frac{3}{4}\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

8.75. Wsk. Wystarczy wykazać prostopadłość wektora $\mathbf{u}$ do dwóch spośród wektorów $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$.

8.78. Wsk. Skorzystać z zadania 8.60.

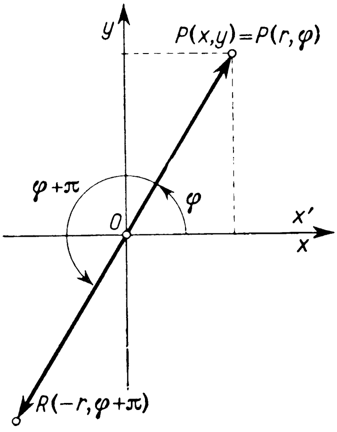
8.79. Wsk. Przyjąć np., że osią jest oś Oz, a płaszczyzną prostopadłą płaszczyzna Oxy.

8.80. a) $\mathbf{u}=(-5, -7, 8)$; b) $\mathbf{w}=(-5, -7, 8)$; c) $\mathbf{v}=(-\frac{4}{7}, \frac{12}{7}, \frac{8}{7})$;
d) $\mathrm{Mom}_{Ox}\overline{AB}=\mathbf{i}$, $\mathrm{Mom}_{Oy}\overline{AB}=3\mathbf{j}$, $\mathrm{Mom}_{Oz}\overline{AB}=\mathbf{o}$.

8.88. $(1, -4, -3, -1)$, $(-1, 4, 3, 1)$

§ 9. UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH BIEGUNOWYCH. ZMIANA UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH PRZEKSZTAŁCENIA GEOMETRYCZNE

9.1. *Układem współrzędnych biegunowych* $Or\varphi$ na płaszczyźnie zorientowanej (np. dodatnio) nazywamy figurę utworzoną ze stałego punktu O zwanego *biegunem* i stałej półosi dodatniej Ox' zwanej *osią biegunową* (rys. 9.1). *Współrzędnymi biegunowymi* punktu $P\neq O$ nazywamy parę uporządkowaną liczb (r, φ), gdzie $r=d(O, P)$ (*promień wodzący*), $\varphi = = \sphericalangle[Ox, \overline{OP}]$ (*argument*). Wartość argumentu spełniającą nierówność $0\leqslant\varphi<2\pi$ nazywamy *wartością główną argumentu*. Punkt P o współrzędnych biegunowych r i φ będziemy oznaczali przez $P(r, \varphi)$.



Rys. 9.1

Liczba $r>0$ określona jest jednoznacznie, natomiast argument φ określony jest z dokładnością do liczby $2k\pi$, $k\in\mathbf{C}$ (czasem przyjmujemy, że $r<0$, przy czym zamiast argumentu φ bierzemy wówczas argument $\varphi+\pi$). Dla bieguna O promień $r=0$, natomiast argument nie jest określony. Często na tej samej płaszczyźnie będziemy rozpatrywali jednocześnie układ biegunowy $Or\varphi$ i kartezjański Oxy, którego początek układu pokrywa się z biegunem, a półoś dodatnia Ox z osią biegunową (rys. 9.1). Układy takie będziemy oznacza i $Or\varphi\sim Oxy$, lub $Oxy\sim Or\varphi$. Związki między współrzędnymi tego samego punktu różnego od punktu $O(0, 0)$ w obu takich układach określone są wzorami

(1) $$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi,$$

(2) $$r=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

9.2. Mówimy, że układ współrzędnych kartezjańskich $O'x'$ na prostej, powstaje z układu Ox tej prostej przez przesunięcie, jeżeli układy mają zgodną orientację i równe odcinki jednostkowe. Związek między współrzędnymi x i x' tego samego punktu P w obu układach określony jest wzorem

(3) $$x = x' + a,$$

gdzie a oznacza współrzędną „nowego" początku układu O' w układzie Ox.

Związki między współrzędnymi tego samego punktu P w układach Oxy i $O'x'y'$, gdzie układ $O'x'y'$ powstał z układu Oxy przez przesunięcie równoległe wyrażają się wzorami

(4) $$x = x' + a, \quad y = y' + b,$$

przy czym liczby a i b oznaczają współrzędne „nowego" początku układu O' w układzie Oxy.

Przejście od jednego układu do drugiego symbolicznie oznaczamy następująco

$$Oxy \xrightarrow[(a,b)]{} O'x'y'.$$

W przypadku gdy układ $Ox''y''$ powstaje z układu Oxy przez obrót dookoła początku układu o kąt α (oznaczamy $Oxy \xrightarrow[\alpha]{} Ox''y''$), związki między współrzędnymi tego samego punktu w obu układach są następujące:

(5) $$x = x'' \cos\alpha - y'' \sin\alpha, \quad y = x'' \sin\alpha + y'' \cos\alpha,$$

gdzie $\alpha = \sphericalangle[Ox, Ox'']$.

9.3. Odwzorowanie $\mathscr{T}$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ nazywamy *przekształceniem afinicznym*, jeżeli istnieją takie macierze

$$A = [a_{ij}]_{n\times n} \wedge \det A \neq 0, \qquad B = [b_i]_{n\times 1},$$

że

(6) $$(y = \mathscr{T}(x)) \Leftrightarrow (Y = AX + B) \Leftrightarrow \left(y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\right),$$

gdzie $X = [x_i]_{n\times 1}$, $Y = [y_i]_{n\times 1}$. Jeżeli $B = O$, to (6) nazywamy *przekształceniem centroafinicznym*; jeżeli $A = I = [\delta_{ij}]$, to (6) nazywamy *przesunięciem*; jeżeli $A = I \wedge B = O$, to (6) nazywamy *przekształceniem tożsamościowym*.

T$_1$. *Przekształcenie afiniczne jest przekształceniem izometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest ortogonalna.*

W szkole średniej rozpatrywane było przekształcenie (6) na $\mathbf{R}^1$ i $\mathbf{R}^2$. W szczególności przekształcenia:

1° $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ — *przesunięcie płaszczyzny*,

2° $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ — *symetria względem osi Ox [Oy] dla* $a = 1 \wedge b = -1$ [$a = -1 \wedge \wedge b = 1$], *symetria względem początku układu dla* $a = b = -1$, *powinowactwo osiowe prostokątne* dla $a = 1 \wedge b \neq 1 \wedge b \neq 0$,

3° $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0(1-k) \\ y_0(1-k) \end{bmatrix}$ — *jednokładność o środku w punkcie* $S(x_0, y_0)$ *i stosunku jednokładności* $k \neq 0$.

Punkt $x_0 \in \mathbf{R}^n$, dla którego $\mathcal{T}(x_0)=x_0$, nazywamy *stałym punktem przekształcenia* $\mathcal{T}$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Niech

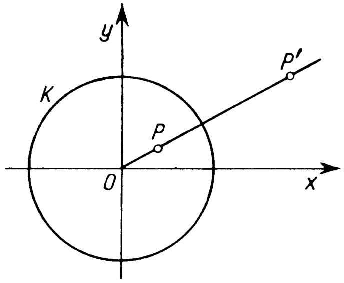
$$\mathcal{G}_1=\{f: f\colon \mathbf{R}^n\to \mathbf{R}^n \wedge f \text{ bijekcja}\}.$$

Podzbiór $\mathcal{G}\subset\mathcal{G}_1 \wedge \mathcal{G}\neq\emptyset$ nazywamy *grupą przekształceń*, jeżeli:

$1^\circ \bigwedge\limits_{f\in\mathcal{G}} f^{-1}\in\mathcal{G}$, $\quad 2^\circ \bigwedge\limits_{f,g\in\mathcal{G}} (f\circ g)\in\mathcal{G}$.

Uwaga. Grupa przekształceń jest oczywiście grupą w sensie definicji podanej w § 5.

9.4. Niech dany będzie okrąg K: $x^2+y^2=r^2$. Jeżeli każdemu punktowi $P(x,y)\neq O(0,0)$, przyporządkowany jest punkt $P'(x',y')=\mathcal{T}(P)$ leżący na półprostej OP (rys. 9.2) i spełniający warunek



Rys. 9.2

(7) $$d(O,P)\,d(O,P')=r^2, \quad r\in\mathbf{R}_+,$$

to przekształcenie $\mathcal{T}$ nazywamy *inwersją* względem okręgu K. Jeżeli każdemu punktowi $P(x,y)\in\mathbf{R}^2-L_0$ (L_0 (1) oznacza zbiór punktów prostej $a_0x+b_0y+c_0=0$) przyporządkowany jest punkt $P'(x',y')=f(P)\in\mathbf{R}^2$, gdzie

(8) $$x'=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_0x+b_0y+c_0}, \quad y'=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{a_0x+b_0y+c_0},$$

to f nazywamy *przekształceniem rzutowym*. Przekształcenie f przekształca zbiór $\mathbf{R}^2-L_0$ na $\mathbf{R}^2-L$, gdzie L jest zbiorem punktów pewnej prostej na $\mathbf{R}^2$.

Przykłady

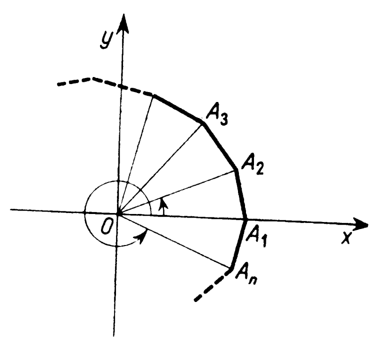
9.1. Obliczyć współrzędne biegunowe i prostokątne wierzchołków $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n-kąta foremnego wpisanego w koło o promieniu a, obierając za oś biegunową półprostą OA_1, gdzie O jest środkiem koła wpisanego (rys. 9.3).

Rozwiązanie. Z rysunku 9.3 otrzymujemy

$$d(O,A_i)=a, \quad \sphericalangle[Ox,\overline{OA_i}]=(i-1)\frac{2\pi}{n}+2k\pi,$$

$i=1,2,\ldots,n$; $k\in\mathbf{C}$. Stąd $A_i\left(a,(i-1)\dfrac{2\pi}{n}+2k\pi\right)$, $i=1,2,\ldots,n$; $k\in\mathbf{C}$.

Współrzędne kartezjańskie wierzchołków w układzie $Or\varphi\sim Oxy$ otrzymujemy, korzystając ze wzorów (1). Otóż $A_i(x_i,y_i)$, gdzie $x_i=a\cos\alpha_i$, $y_i=a\sin\alpha_i$, $\alpha_i=(i-1)\dfrac{2\pi}{n}$, $i=1,2,\ldots,n$.



Rys. 9.3

(1) W geometrii rzutowej rozpatruje się przekształcenia rzutowe $\mathbf{R}^2$ na $\mathbf{R}^2$, w których obrazy punktów prostej L_0 są tzw. *punktami niewłaściwymi*, które można utożsamić z kierunkami prostych równoległych.

9.2. Na osi Ox dane są punkty $A(x_1)$, $B(x_2)$ oraz dana jest liczba $k \in \mathbf{R} \wedge k \neq 1$. Znaleźć punkt $C(x) \in Ox$, dla którego

(a) $$\frac{AC}{BC} = k \quad (^1),$$

gdzie AC i BC oznaczają miary wektorów $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ względem osi Ox.

Rozwiązanie. Z warunku $k \in \mathbf{R} \wedge k \neq 1$ wynika, że

$$(A \neq B \wedge B \neq C) \Leftrightarrow (x_1 \neq x_2 \wedge x \neq x_2).$$

Korzystając z definicji miary, otrzymujemy

(a$_1$) $$\frac{x - x_1}{x - x_2} = k,$$

skąd

(a$_2$) $$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}.$$

Zauważmy, że i na odwrót, dla danych punktów $A(x_1)$, $B(x_2)$, $C(x)$, gdzie $A \neq B \wedge B \neq C$, istnieje jednoznacznie określona liczba $k \in \mathbf{R} - \{1\}$, dla której $\frac{AC}{BC} = k$, mianowicie $k = \frac{x - x_1}{x - x_2}$.

Jeżeli punkt C leży między punktami A i B, to $k < 0$ (wektory $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ mają zwroty przeciwne), jeżeli leży zewnątrz odcinka AB, to $k > 0$, jeżeli $C = A$, to $k = 0$. W szczególności, dla środka S odcinka AB mamy $\frac{AC}{BC} = k = -1$, skąd

(a$_3$) $$S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

Z powyższej dyskusji wynika, że jeżeli na osi Ox dane są dwa różne punkty $A(x_1)$, $B(x_2)$, to między punktami tej osi różnymi od punktu B i liczbami rzeczywistymi różnymi od jedności zachodzi wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość określona wzorem (a). Liczbę

(a$_4$) $$k = \frac{AC}{BC} = (ABC)$$

nazywamy *stosunkiem pojedynczego podziału* trójki uporządkowanej punktów A, B, C. Mówimy też, że wzór (a) określa podział odcinka AB punktem C w danym stosunku k.

9.3. Mając dane $k = (ABC)$, znaleźć (BAC) i (ACB).

Rozwiązanie. Należy wyrazić za pomocą liczby $k = \frac{AC}{BC}$ ułamki $\frac{BC}{AC} = (BAC)$

---

(1) Zauważmy, że stosunek miar nie zależy od zwrotu osi Ox.

i $\frac{AB}{CB}=(ACB)$. W pierwszym przypadku mamy natychmiast

$$\frac{BC}{AC}=\frac{1}{\frac{AC}{CB}}=\frac{1}{k}=(BAC);$$

w drugim przypadku korzystamy ze wzoru (2) § 8 dla punktów A, B, C. Otóż $AB+BC+$ $+CA=0$; stąd $AB=-BC-CA=CB+AC$. Ale $AC=k\cdot BC$, zatem

$$(ACB)=\frac{AB}{CB}=\frac{CB+k\cdot BC}{-BC}=-k+1.$$

9.4. W układzie Oxy dany jest punkt $A(2, 3)$. Znaleźć współrzędne punktu A w układzie: a) $O'x'y'$, gdzie $Oxy \xrightarrow[(-1,2)]{} O'x'y'$; b) $Ox''y''$, gdzie $Oxy \xrightarrow[\alpha=\frac{2}{3}\pi]{} Ox''y''$.

Rozwiązanie. a) Stosując wzory (4), otrzymujemy $2=x'-1$, $3=y'+2$; stąd $x'=3$, $y'=1$, zatem w układzie $O'x'y'$ mamy $A(3, 1)$.

b) Wzory $x=x''\cos\alpha-y''\sin\alpha$, $y=x''\sin\alpha+y''\cos\alpha$ wyrażają współrzędne x, y za pomocą współrzędnych x'', y''. W naszym przypadku wygodniej będzie wyrazić zmienne x'', y'' za pomocą zmiennych x, y. Otóż jeżeli $Oxy \xrightarrow[\alpha]{} Ox''y''$, to $Ox''y'' \xrightarrow[-\alpha]{} Oxy$, stąd na mocy wzorów (5)

(a) $$x''=x\cos\alpha+y\sin\alpha, \qquad y''=-x\sin\alpha+y\cos\alpha.$$

Dla punktu $A(2, 3)$ i kąta $\alpha=\frac{2}{3}\pi$ otrzymujemy

$$x''=2\cos\tfrac{2}{3}\pi+3\sin\tfrac{2}{3}\pi, \qquad y''=-2\sin\tfrac{2}{3}\pi+3\cos\tfrac{2}{3}\pi,$$

czyli w układzie $Ox''y''$ mamy $A(-1+\frac{3}{2}\sqrt{3}, -\sqrt{3}-\frac{3}{2})$.

9.5. W układzie Oxy biegunem układu biegunowego jest punkt $O'(3, 5)$, a oś biegunowa jest zgodnie równoległa z osią Oy. Znaleźć współrzędne biegunowe punktu $A(5, 5-2\sqrt{3})$.

Rozwiązanie. W celu zastosowania wzorów (2) dokonujemy najpierw przesunięcia $Oxy \xrightarrow[(3,5)]{} O'x'y'$, a następnie obrotu $O'x'y' \xrightarrow[\alpha=\frac{1}{2}\pi]{} O'x''y''$. Odpowiednie wzory na zmianę układu są następujące:

(a) $$x=x'+3, \qquad y=y'+5$$

oraz

(a_1) $$x'=x''\cos\tfrac{1}{2}\pi-y''\sin\tfrac{1}{2}\pi=-y'', \qquad y'=x''\sin\tfrac{1}{2}\pi+y''\cos\tfrac{1}{2}\pi=x''.$$

Stąd współrzędne punktu A w układzie $O'x'y'$: $A(2, -2\sqrt{3})$ oraz w układzie $O'x''y''$: $A(-2\sqrt{3}, -2)$. Z kolei stosując wzory (2), otrzymujemy $A(r_1, \varphi_1)$, $r_1=\sqrt{12+4}=4$, $\cos\varphi_1=-\frac{2}{4}\sqrt{3}=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin\varphi_1=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$, zatem $A(4, \frac{7}{5}\pi)$.

9.6. Dane są przekształcenia afiniczne określone wzorami:

$$\mathscr{T}_1: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$\mathscr{T}_2: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć: a) $\mathscr{T}_1^{-1}$; b) $\mathscr{T}_2 \circ \mathscr{T}_1$; c) $\mathscr{T}_2 \circ \mathscr{T}_1^{-1}$.

Rozwiązanie. a) Z (6) (por. punkt 9.3) otrzymujemy

$$X = A^{-1}Y - A^{-1}B \qquad (\det A \neq 0),$$

skąd

$$\mathscr{T}_1^{-1}: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \tfrac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \tfrac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

b) Z definicji złożenia przekształceń (tzn. złożenia odwzorowań) otrzymujemy

$$\mathscr{T}_2 \circ \mathscr{T}_1: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

c) Korzystając z a) mamy:

$$\mathscr{T}_2 \circ \mathscr{T}_1^{-1}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{7}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

9.7. Zbadać stałe punkty przekształcenia afinicznego (6).

Rozwiązanie. Z definicji stałego punktu przekształcenia (por. punkt 9.3) wynika, że $x \in \mathbf{R}^n$ jest stałym punktem przekształcenia (6), jeżeli

a) $$(\mathscr{T}(x) = x) \Leftrightarrow (AX + B = X) \Leftrightarrow (I - A)X = B,$$

Oznaczając

$$C = I - A = \begin{bmatrix} 1 - a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 - a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$C_u = \begin{bmatrix} 1 - a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 - a_{nn} & b_n \end{bmatrix}_{n \times n+1},$$

mamy:

1° jeżeli det $C\neq 0$, to istnieje dokładnie jeden stały punkt przekształcenia (6) i zachodzi wzór

$$X_0=(I-A)^{-1}B;$$

2° jeżeli $\mathrm{R}(C)\neq\mathrm{R}(C_u)$, to nie istnieją stałe punkty przekształcenia (6);

3° jeżeli $\mathrm{R}(C)=\mathrm{R}(C_u)=r<n$, to istnieje nieskończenie wiele stałych punktów przekształcenia (6), przy czym współrzędne każdego stałego punktu zależą od $n-r$ parametrów.

9.8. Udowodnić T_1.

Dowód. Niech dane będzie przekształcenie afiniczne (6) i dwa dowolne punkty $x^1(x_1^1, \dots, x_n^1)$ i $x^2(x_1^2, \dots, x_n^2)$. Mamy

$$X^1=[x_i^1]_{n\times 1}, \qquad X^2=[x_i^2]_{n\times 1}.$$

Z § 7 wiemy, że $\mathscr{T}$ jest izometrią, jeżeli

$$\big(d(\mathscr{T}(x^1), \mathscr{T}(x^2))=d(x^1, x^2)\big)\Leftrightarrow\big(|(AX^1+B)-(AX^2+B)|=|X^1-X^2|\big)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\big(|A(X^1-X^2)|=|X^1-X^2|\big),$$

gdzie przyjmujemy

$$|X_{n\times 1}|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Należy więc wykazać, że

(a) $$\big(|A(X^1-X^2)|=|X^1-X^2|\big)\Leftrightarrow(A \text{ ortogonalna}).$$

Na mocy zadania 6.60 wzór (a) jest prawdziwy.

9.9. Dany jest okrąg K: $x^2+y^2=r^2$. Znaleźć obraz $\mathscr{T}(F)$ zbioru

(a) $$F=\{(x, y)\in\mathbf{R}^2:\ A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0\},$$

jeżeli $\mathscr{T}$ jest inwersją płaszczyzny względem okręgu K.

Rozwiązanie Stosujemy wynik zadania 9.88:

$$F'=\left\{(x', y')\in\mathbf{R}^2:\ A\left(\frac{r^4x'^2}{(x'^2+y'^2)^2}+\frac{r^4y'^2}{(x'^2+y'^2)^2}\right)+B\,\frac{r^2x'}{x'^2+y'^2}+C\,\frac{r^2y'}{x'^2+y'^2}+D=0\right\},$$

skąd po przekształceniu otrzymujemy

$$F'=\{(x', y')\in\mathbf{R}^2:\ D(x'^2+y'^2)+Br^2x'+Cr^2y'+Ar^4=0\}.$$

Rozróżnimy przypadki:

α) F jest okręgiem przechodzącym przez początek układu, tzn. $A\neq 0$ i $B^2+C^2>0$ i $D=0$, wówczas zbiór

$$F'=\{(x', y')\in\mathbf{R}^2:\ Br^2x'+Cr^2y'+Ar^4=0\}$$

jest prostą nie przechodzącą przez początek układu;

β) F jest okręgiem nie przechodzącym przez początek układu, tzn. $A \cdot D \neq 0$. Wówczas F' jest również okręgiem nie przechodzącym przez początek układu;

γ) F jest prostą przechodzącą przez początek układu, tzn. $A = D = 0 \wedge B^2 + C^2 > 0$, to zbiór

$$F' = \{(x', y') \in \mathbf{R}^2 : Bx' + Cy' = 0\}$$

jest tą samą prostą;

δ) F jest prostą nie przechodzącą przez początek układu, tzn. $A = 0$, $D \neq 0$, $B^2 + C^2 > 0$, to zbiór

$$F' = \{(x', y') \in \mathbf{R}^2 : D(x'^2 + y'^2) + Br^2 x' + Cr^2 y' = 0\}$$

jest okręgiem przechodzącym przez początek układu.

9.10. Dane jest przekształcenie rzutowe określone wzorami:

(a) $$x' = \frac{x+1}{x-2}, \quad y' = \frac{y}{x-2}, \quad x \neq 2.$$

Znaleźć: a) obrazy zbiorów: $L_1 = \{(x, y) : y = 0\} - \{(2, 0)\}$, $L_2 = \{(x, y) : x = 0\}$, $L_3 = \{(x, y) : 2x - y + 1 = 0\} - \{(2, 5)\}$;

b) przeciwobrazy zbiorów: $L_4 = \{(x', y') : x' = 0\}$, $L_5 = \{(x', y') : y' = 0\} - \{(1, 0)\}$, $L_6 = \{(x', y') : 3x' + y' - 2 = 0\} - \{(1, -1)\}$.

Uwaga. Zauważmy, że zbiory L_1, L_3, L_5, L_6 są prostymi bez jednego punktu.

Rozwiązanie. W punkcie b) korzystamy bezpośrednio ze wzorów (a); w punkcie a) znajdujemy odwzorowanie f^{-1} odwzorowania (a), rozwiązując układ (a) względem zmiennych x i y. Otóż

$$x = \frac{2x'+1}{x'-1}, \quad y = \frac{3y'}{x'-1}, \quad x' \neq 1,$$

skąd:

a) $0 = \dfrac{3y'}{x'-1}$, $x' \neq 1 \Rightarrow f(L_1) = \{(x', y') : y' = 0\} - \{(1, 0)\}$, tzn. oś Ox (bez punktu $(2, 0)$) przechodzi na oś Ox (bez punktu $(1, 0)$);

$$0 = \frac{2x'+1}{x'-1}, \ x' \neq 1 \Rightarrow f(L_2) = \{(x', y') : x' = -\tfrac{1}{2}\};$$

$$2\frac{2x'+1}{x'-1} - \frac{3y'}{x'-1} + 1 = 0, \ x' \neq 1 \Rightarrow f(L_3) = \{(x', y') : 5x' - 3y' + 1 = 0\} - \{(1, 2)\};$$

b) $0 = \dfrac{x+1}{x-2}$, $x \neq 2 \Rightarrow f^{-1}(L_4) = \{(x, y) : x = -1\}$;

$$0 = \frac{y}{x-2}, \ x \neq 2 \Rightarrow f^{-1}(L_5) = \{(x, y) : y = 0\} - \{(2, 0)\};$$

$$3\frac{x+1}{x-2} + \frac{y}{x-2} - 2 = 0, \ x \neq 2 \Rightarrow f^{-1}(L_6) = \{(x, y) : x + y + 7 = 0\} - \{(2, -9)\}.$$

Zadania

9.11. Na osi Ox dane są punkty $A(4)$ i $B(7)$. Znaleźć taki punkt $P \in Ox$, że $d(P, A)+d(P, B)=5$.

9.12. Na osi Ox dany jest punkt $A(5)$. Znaleźć taki punkt $P \in Ox$, że $d(P, O)\, d(P, A)=5$.

9.13. Znaleźć stosunek pojedynczego podziału (ABC) punktów:
a) $A(2)$, $B(7)$, $C(5)$; b) $A(-1)$, $B(2)$, $C(3)$; c) $A(2)$, $B(3)$, $C(3)$.

9.14. Wykazać, że jeżeli $O(0)$, $E(1)$ i $A(x)$, to $x=(AEO)$.

9.15. Znaleźć współrzędne punktu C dzielącego odcinek o końcach $A(2)$, $B(5)$ w stosunku: a) $k=-3$; b) $k=-1$; c) $k=4$.

9.16. Znaleźć odległość środków odcinków AB i CD, jeżeli $A(-2)$, $B(4)$, $C(6)$, $D(11)$.

9.17. Mając dane $k=(ABC)$, znaleźć (BCA), (CAB) i (CBA).

9.18. Mając dane $k=(ABP)$ i $r=(ABQ)$, znaleźć (PQA).

9.19. *Stosunkiem anharmonicznym* (lub *dwustosunkiem*) czwórki uporządkowanej punktów A, B, C, D ($A \neq B$, $B \neq C$, $B \neq D$ i $A \neq D$) (1) leżących na osi nazywamy liczbę

(a) $$w=\frac{(ABC)}{(ABD)}=(ABCD).$$

Jeżeli punkty $A(x_1)$, $B(x_2)$, $C(x_3)$, $D(x_4)$ leżą na osi Ox, to ze wzoru (a_1) przykładu 9.2 otrzymujemy

(a_1) $$w=\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}\cdot\frac{x_4-x_2}{x_4-x_1}.$$

Jeżeli $(ABCD)=-1$, to mówimy, że punkty C i D dzielą harmonicznie punkty A i B, lub że czwórka uporządkowana punktów A, B, C, D jest czwórką harmoniczną.

Znaleźć stosunek anharmoniczny $(ABCD)$ punktów $A(-1)$, $B(3)$, $C(-3)$, $D(6)$.

9.20. Znaleźć stosunek anharmoniczny czwórek punktów:
a) $A(-\frac{11}{9})$, $B(-6)$, $O(0)$, $D(5)$; b) $A(1)$, $B(-1)$, $C(1)$, $D(4)$; c) $A(-1)$, $B(6)$, $C(-4)$, $D(-4)$.

9.21. Mając punkty $A(-2)$, $B(3)$, $C(5)$ i $(ABCD)=-\frac{49}{10}$, znaleźć punkt D.

9.22. Mając punkty $A(2)$, $B(-1)$, $C(4)$ i $(ABCD)=-1$, znaleźć punkt D (tzw. *czwarty harmoniczny*).

9.23. Wykazać, że jeżeli $(ABCD)=-1$, to $(BACD)=(ABDC)=(CDAB)=(BADC)= =-1$.

9.24. Wykazać, że jeżeli $(ABCD)=w$, to $(ACBD)=1-w$.

---

(1) W geometrii rzutowej określa się stosunek anharmoniczny przy słabszych założeniach o punktach A, B, C i D, mianowicie zakłada się tylko, że $A \neq B$ i że punkty C i D nie mogą pokrywać się jednocześnie ani z A, ani z B.

9.25. Na osi Ox dane są punkty A, B, C i D. Wykazać, że jeżeli punkt E jest środkiem odcinka AB oraz $(ABCD) = -1$, to

(a) $$EA^2 = EC \cdot ED,$$

gdzie liczby EA, EC i ED oznaczają miary wektorów $\overline{EA}$, $\overline{EC}$ i $\overline{ED}$ względem osi Ox.

9.26. Wykazać, że jeżeli $(ABCD) = -1$, to $\dfrac{2}{AB} = \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD}$, gdzie AB, AC i AD oznaczają miary wektorów $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AE}$ względem osi, na której leżą punkty A, B, C i D.

9.27. Na osi Os w układzie Oxy dane są punkty $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ oraz dana jest liczba $k \neq 1$. Znaleźć punkt $C(x, y) \in Os$ $(C \neq B)$, dla którego $k = \dfrac{AC}{BC}$, gdzie AC i BC oznaczają miary wektorów $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ względem osi Os. (Liczbę k nazywamy *stosunkiem pojedynczego podziału* uporządkowanej trójki punktów A, B i C i oznaczamy przez $k = (ABC)$ (por. przykład 9.2).

9.28. Znaleźć współrzędne punktu C dzielącego odcinek o końcach $A(3, 2)$, $B(-1, 6)$ w stosunku $k = 3$.

9.29. Sprawdzić, że punkty $A(1, 6)$, $B(5, 10)$ i $C(-3, 2)$ leżą na jednej prostej i znaleźć $k = (ABC)$.

9.30. Dane są środki $A_1(2, 1)$, $B_1(-3, 0)$ i $C_1(2, 4)$ boków trójkąta. Znaleźć jego wierzchołki.

9.31. Znaleźć współrzędne środka ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$.

9.32. Dane są punkty $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Znaleźć pole trójkąta ABC.

9.33. Znaleźć punkty A i B wiedząc, że $(ABC) = -\frac{3}{4}$ i $(ABD) = -\frac{2}{3}$, gdzie $C(-5, 4)$ i $D(6, -5)$.

9.34. Znaleźć długość dwusiecznej kąta wewnętrznego przy wierzchołku A w trójkącie o wierzchołkach $A(-2, 0)$, $B(6, 6)$, $C(1, -4)$.

9.35. Dane są punkty $A(-1, 3)$, $B(1, 2)$. Znaleźć punkty przecięcia prostej AB z osiami układu współrzędnych.

9.36. Dane są punkty $A(9, -1)$ i $B(-2, 6)$. W jakim stosunku punkt C przecięcia prostej AB z dwusieczną kąta między osiami w II i IV ćwiartce dzieli odcinek AB?

9.37. Dane są końce $A(3, 0)$ i $C(-4, 1)$ przekątnej kwadratu. Znaleźć współrzędne pozostałych wierzchołków kwadratu.

9.38. Mając dwa przeciwległe wierzchołki rombu $A(8, -3)$ i $C(10, 11)$ oraz długość jego boku równą 10, znaleźć pozostałe wierzchołki.

9.39. Na osi rzędnych znaleźć punkt P oddalony o cztery jednostki długości od punktu $B(k, 3)$. Przeprowadzić dyskusję względem parametru k.

9.40. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A(2, 1)$, $B(3, 4)$, $C(1, 6)$.

9.41. Obliczyć pole pięciokąta o wierzchołkach $A(-2, 0)$, $B(0, -1)$, $C(2, 0)$, $D(3, 2)$ i $E(-1, 3)$.

9.42. Znaleźć odległość punktu $A(2, 0)$ od prostej wyznaczonej przez punkty $B(1, 1)$ i $C(5, 4)$.

9.43. Obliczyć długość wysokości rombu, mając dane dwa jego wierzchołki $A(2, 1)$, $C(-4, 3)$ i długość boku równą $5\sqrt{2}$.

9.44. W układzie biegunowym $Or\varphi$ dane są punkty $A_1(r_1, \varphi_1)$, $A_2(r_2, \varphi_2)$. Znaleźć $d(A_1, A_2)$.

9.45. W układzie biegunowym $Or\varphi$ dany jest punkt $A(5, \frac{1}{3}\pi)$. Znaleźć w tym układzie:
a) punkt B położony symetrycznie do A względem bieguna;
b) punkt C położony symetrycznie względem osi biegunowej.

9.46. W układzie biegunowym $Or\varphi$ dane są punkty $A(2, \frac{3}{8}\pi)$, $B(6, \frac{5}{8}\pi)$, znaleźć $d(A, B)$.

9.47. Dany jest sześciokąt foremny o boku a. Przyjmując biegun w jednym z jego wierzchołków oraz oś biegunową przechodzącą przez bok sześciokąta, znaleźć współrzędne biegunowe pozostałych wierzchołków.

9.48. W układzie biegunowym $Or\varphi$ dane są punkty $A(2, \frac{1}{6}\pi)$, $B(3, \frac{4}{3}\pi)$, $C(5, \pi)$, $D(5, 0)$. Znaleźć współrzędne tych punktów w układzie $Oxy \sim Or\varphi$.

9.49. W układzie Oxy dane są punkty $A(0, 5)$, $B(-3, 0)$, $C(\sqrt{3}, 1)$, $D(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ i $E(1, -\sqrt{3})$. Znaleźć współrzędne tych punktów w układzie biegunowym $Or\varphi \sim Oxy$.

9.50. Udowodnić, że średnie arytmetyczne odciętych i średnie arytmetyczne rzędnych wierzchołków wielokąta foremnego równają się odpowiednio odciętej i rzędnej środka okręgu opisanego na wielokącie.

9.51. W układzie Ox (na prostej) dane są punkty $A(-2)$, $B(3)$. Znaleźć współrzędne punktów A i B w układzie przesuniętym $O'x'$, gdzie $O'(2)$.

9.52. W układzie Oxy dany jest punkt $A(4, -2)$. Znaleźć współrzędne punktu A w układzie $O'x'y'$, gdzie $Oxy \xrightarrow[(4,\,5)]{} O'x'y'$.

9.53. W układzie Oxy dany jest punkt $A(-2, 5)$. Znaleźć współrzędne punktu A w układzie $Ox''y''$, gdzie $Oxy \xrightarrow[\alpha = \frac{1}{3}\pi]{} Ox''y''$.

9.54. W układzie $Ox''y''$ dane są punkty $A(2\sqrt{3}, -4)$, $B(\sqrt{3}, 0)$, $C(0, -2\sqrt{3})$. Znaleźć współrzędne tych punktów w układzie Oxy, gdzie $Oxy \xrightarrow[\alpha = \frac{1}{3}\pi]{} Ox''y''$.

9.55. W układzie Oxy dany jest punkt $A(6, -2)$. Układ ten przesunięto: $Oxy \xrightarrow[(3,\,-4)]{} O'x'y'$, a następnie obrócono: $O'x'y' \xrightarrow[\alpha]{} O'x''y''$, gdzie $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$. Znaleźć współrzędne punktu A w układzie $O'x''y''$.

9.56. Układ Oxy przesunięto: $Oxy \xrightarrow[(a,\,b)]{} O'x'y'$, a następnie obrócono: $O'x'y' \xrightarrow[\alpha]{} O'x''y''$ $(\alpha \neq 0)$. Znaleźć punkt mający względem układów Oxy i $O'x''y''$ te same współrzędne.

9.57. Znaleźć stały punkt przekształcenia afinicznego $\mathscr{T}$: $\mathbf{R} \ni x \to (ax+b) \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

9.58. Wykazać, że zbiór przekształceń określonych wzorem: $x' = ax + b$ $(a \neq 0)$ tworzy grupę.

9.59. Wykazać, że stałym punktem przekształcenia 3° jest środek jednokładności (x_0, y_0).

9.60. Czy zbiór przekształceń prostej na siebie określonych wzorem $x' = -x + b$, $b \in \mathbf{R}$ tworzy grupę?

9.61. Dane są przekształcenia: $\mathscr{T}_1$: $x' = 2x + 3$, $\mathscr{T}_2$: $x' = -x + 8$ ([1]). Znaleźć przekształcenia:

a) $\mathscr{T}_2 \circ \mathscr{T}_1$; b) $\mathscr{T}_1 \circ \mathscr{T}_2$; c) $\mathscr{T}_1^{-1} \circ \mathscr{T}_2$; d) $\mathscr{T}_2^{-1} \circ \mathscr{T}_1$; e) $\mathscr{T}_1^2 \circ \mathscr{T}_2$ $(\mathscr{T}_1^2 = \mathscr{T}_1 \circ \mathscr{T}_1)$.

9.62. Dane jest przekształcenie prostej na siebie $\mathscr{T}$: $x' = 2x - 3$. Znaleźć obrazy punktów $O(0)$, $B(4)$ i obraz wektora $\overline{C(2)D(-1)}$.

9.63. Znaleźć obrazy punktów $A(2)$, $B(3)$, $C(-1)$ przy jednokładności $x' = 2(x-3)+3$.

9.64. Znaleźć powinowactwo $x' = ax + b$, przy którym obrazami punktów $A(2)$, $B(-1)$ są punkty $A'(-3)$, $B'(2)$.

9.65. Znaleźć wzór na przekształcenie skali termometrycznej Celsjusza na skalę Fahrenheita.

9.66. Obrazem punktu $A(4)$, przy jednokładnym przekształceniu o środku $x_0 = 5$ prostej na siebie jest punkt $A'(-3)$. Znaleźć stosunek jednokładności.

9.67. Obrazem punktu $A(3)$, przy jednokładnym przekształceniu o stosunku $k = -2$ prostej na siebie jest punkt $A'(-7)$. Znaleźć środek jednokładności.

9.68. Znaleźć powinowactwo prostej na siebie, przy którym obrazami różnych punktów $A(x_1)$, $B(x_2)$ są punkty $A'(x_1')$, $B'(x_2')$.

9.69. Znaleźć: $\mathscr{T}^{-1}$ jeżeli

$$\mathscr{T}: \begin{array}{l} x' = 2x + 3y - 7, \\ y' = 3x + 5y - 9. \end{array}$$

9.70. Dane są przekształcenia

$$\mathscr{T}_1: \begin{array}{l} x' = 2x + y - 5, \\ y' = 3x - y + 7, \end{array} \qquad \mathscr{T}_2: \begin{array}{l} x' = x - y + 4, \\ y' = -x + 2y + 5. \end{array}$$

Znaleźć: a) $\mathscr{T}_1 \circ \mathscr{T}_2$; b) $\mathscr{T}_2 \circ \mathscr{T}_1$.

9.71. Znaleźć obraz prostej $x + 2y - 3 = 0$ przy obrocie płaszczyzny dookoła punktu $A(2, 3)$ o kąt α taki, że $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$.

([1]) Uwaga. Zamiast zapisu $\mathscr{T}$: $\mathbf{R} \ni x \to (ax + b) \in \mathbf{R}$ często będziemy pisali $\mathscr{T}$: $x' = ax + b$. Podobnie, zamiast $\mathscr{T}$: $R^2 \ni (x, y) \to (a_1 x + b_1 y + c_1, a_2 x + b_2 y + c_2) \in \mathbf{R}^2$ będziemy pisali

$$\mathscr{T}: \begin{array}{l} x' = a_1 x + b_1 y + c_1, \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2. \end{array}$$

9.72. Znaleźć tangens kąta, o jaki należy obrócić płaszczyznę dookoła dowolnego jej punktu, aby obraz prostej $2x+5y-3=0$ był prostą równoległą do osi Oy.

Uwaga. Prosta jest oczywiście niezmiennikiem obrotu płaszczyzny.

9.73. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A(0, 1)$, $B(2, 5)$ i $C(4, -1)$. Znaleźć obraz trójkąta ABC przy przekształceniach określonych wzorami:

a) $x'=x$, $y'=\frac{1}{2}y$; b) $x'=-x$, $y'=y$; c) $x'=-x$, $y'=-x$;

d) $x'=k(x-x_0)+x_0$, $y'=k(y-y_0)+y_0$; e) $x'=\frac{1}{2}\sqrt{2}(x-y)-2$, $y'=\frac{1}{2}\sqrt{2}(x+y)+1$.

9.74. Dane jest przekształcenie afiniczne $\mathscr{T}$: $x'=3x+y-6$, $y'=x+y+1$. Znaleźć punkt $A(x, y)$, jeżeli $A'(9, 8)=\mathscr{T}(A)$.

9.75. Dane jest przekształcenie afiniczne określone wzorami: $x'=3x+4y-12$, $y'=4x-3y+6$. Na prostej $7x-2y-24=0$ znaleźć punkt, którego obraz przy tym przekształceniu, leży na tej prostej.

9.76. Zbadać, czy przekształcenia określone wzorami:

a) $x'=3x-y+2$, $y'=-2x+2y+3$; b) $x'=2x-y+1$, $y'=x+3y-2$;

c) $x'=4x+y+7$, $y'=3x+2y+7$; d) $x'=3x+4y-8$, $y'=x+3y-3$;

e) $x'=4x+5y-11$, $y'=2x+4y-7$

mają stałe punkty i w przypadku ich istnienia znaleźć je.

9.77. Znaleźć przekształcenie afiniczne, przy którym obrazami punktów $O(0,0)$, $A(2, 0)$ i $B(3, 1)$ są punkty $O'(1, -1)$, $A'(5, 1)$, $B'(4, 4)$.

9.78. Wykazać, że przy przekształceniu afinicznym płaszczyzny na siebie: a) obrazem prostej jest prosta; b) obrazy prostych równoległych są prostymi równoległymi; c) stosunek pojedynczego podziału nie ulega zmianie.

9.79. Znaleźć przekształcenia afiniczne, w których każdy punkt prostej $Ax+By+C=0$ jest punktem stałym.

9.80. Znaleźć przekształcenie afiniczne, przy którym każdy punkt prostej L: $3x-y+2=0$ jest punktem stałym oraz punkt $A'(1, 3)$ jest obrazem punktu $A(-1, 6)$.

9.81. Wykazać, że zbiór przekształceń afinicznych płaszczyzny na siebie tworzy grupę przekształceń.

9.82. Znaleźć przekształcenie afiniczne, przy którym obrazami prostych L_1: $5x-6y-7=0$, L_2: $3x-4y=0$ są proste L_1': $2x'+y'-4=0$, L_2': $x'-y'+1=0$ i obrazem punktu $A(6, 4)$ jest punkt $A'(2, 1)$.

9.83. Wykazać, że przekształcenie określone wzorem

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix}$$

jest izometrią,

9.84. Znaleźć przekształcenie odwrotne do przekształcenia określonego wzorami: $y_1=2x_1$, $y_2=x_1+2x_2$, $y_3=2x_1+2x_2+x_3$, $y_4=x_1+x_2+x_3+x_4$.

9.85. Wykazać, że zbiór wszystkich przekształceń afinicznych (por. (6)) $\mathbf{R}^n$ na $\mathbf{R}^n$ jest grupą przekształceń.

9.86. Wykazać, że kąt między wektorami w $\mathbf{R}^n$ nie ulega zmianie (jest niezmiennikiem) przy przekształceniu (6), gdy A jest macierzą ortogonalną.

9.87. Zbadać, czy zbiór przekształceń postaci (6), gdy $\det A=-1$, jest grupą przekształceń.

9.88. Znaleźć związki między współrzędnymi punktu $P(x, y)$ i współrzędnymi jego obrazu $P'(x', y')$ przy inwersji płaszczyzny względem okręgu K: $x^2+y^2=r^2$.

9.89. Płaszczyzna jest przekształcona przez inwersję względem okręgu K: $x^2+y^2=16$. Znaleźć obrazy: a) punktów $A(2, 0)$, $B(1, 1)$, $C(2, 2)$, $D(0, -4)$; b) odcinka o końcach $A(2, 0)$ i $B(0, 4)$; c) prostej $y=-2x$ $(x\neq 0)$; d) prostej $x+y-2=0$; e) prostej $x-2y=8$.

9.90. Znaleźć obrazy okręgów:
a) $x^2+y^2=\frac{1}{4}$; b) $x^2+y^2=9$; c) $x^2+y^2+4x=0$; d) $x^2+y^2+2x-8y=0$;

e) $x^2+y^2-6x+8y+23=0$; f) $x^2+y^2-6x-8y+1=0$
przy inwersji płaszczyzny względem okręgu K: $x^2+y^2=1$.

9.91. Punkt $A'(8, 4)$ jest obrazem punktu $A(2, 1)$ przy inwersji płaszczyzny względem okręgu K: $x^2+y^2=r^2$. Znaleźć promień r.

9.92. Dla jakiej wartości parametru α obrazem okręgu K_1: $(x-\alpha)^2+(y-3)^2=16$ przy inwersji płaszczyzny względem okręgu K: $x^2+y^2=4$ jest ten sam okrąg?

9.93. Wykazać, że złożenie $\mathcal{T}_2\circ\mathcal{T}_1$ inwersji

$$\mathcal{T}_1:\ x'=\frac{r_1^2x}{x^2+y^2},\quad y'=\frac{r_1^2y}{x^2+y^2};$$

$$\mathcal{T}_2:\ x'=\frac{r_2^2x}{x^2+y^2},\quad y'=\frac{r_2^2y}{x^2+y^2}$$

jest jednokładnością o środku w punkcie $O(0, 0)$ i stosunku jednokładności $k=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$.

9.94. Wykazać, że inwersja względem okręgu K: $x^2+y^2=r^2$ przekształca okrąg K_1: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ w ten sam okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi K i K_1 są ortogonalne.

9.95. Dana jest inwersja względem okręgu K: $x^2+y^2=r^2$. Wykazać, że obrazy prostych równoległych są do siebie styczne. (W przypadku gdy żadna z prostych nie przechodzi przez początek układu chodzi o styczność okręgów, w przeciwnym przypadku chodzi o styczność prostej i okręgu).

9.96. Sprawdzić, że przy inwersji płaszczyzny względem okręgu K: $x^2+y^2=1$, kąt niezorientowany między prostymi $y=2x+3$, $y=-3x+3$ jest równy kątowi niezorientowanemu między obrazami tych prostych.

9.97. Dane jest przekształcenie rzutowe określone wzorami:

$$\text{(a)}\qquad x'=\frac{2x-y+1}{x+y},\quad y'=\frac{x+2y-1}{x+y},\quad x+y\neq 0.$$

Znaleźć: a) obrazy punktów $A(0,3)$, $B(-2,0)$, $C(5,6)$, $D(1,3)$, $E(5,-2)$;
b) przeciwobrazy punktów $A_1'(2,-2)$, $A_2'(0,0)$, $A_3'(6,7)$.

9.98. Dane jest przekształcenie rzutowe określone wzorami:

$$x'=\frac{x}{x+2y-1},\quad y'=\frac{1}{x+2y-1},\quad x+2y-1\neq 0.$$

Znaleźć obrazy zbiorów: a) $L_{\cdot}=\{(x,y)\colon x=0\}-\{(0,\frac{1}{2})\}$;
b) $L_2=\{(x,y)\colon y=0\}-\{(1,0)\}$; c) $L_3=\{(x,y)\colon 3x+y-1=0\}-\{(\frac{1}{3},\frac{2}{3})\}$.

9.99. Dane jest przekształcenie rzutowe określone wzorami:

$$x'=\frac{2x+y-2}{x-y+1},\quad y'=\frac{y}{x-y+1},\quad x-y+1\neq 0.$$

Znaleźć przeciwobrazy zbiorów: a) $L_1'=\{(x',y')\colon x'=0\}-\{(0,-2)\}$;
b) $L_2'=\{(x',y')\colon y'=0\}-\{(2,0)\}$; c) $L_3'=\{(x',y')\colon 4x'-y'+2=0\}-\{(-\frac{4}{3},-\frac{10}{3})\}$.

9.100. Dane jest przekształcenie rzutowe określone wzorami:

$$x'=\frac{x}{x-2y+3},\quad y'=\frac{2x-y+1}{x-2y+3},\quad x-2y+3\neq 0.$$

Sprawdzić, że obrazami prostych równoległych $x-4y+6=0$ (bez punktu $(0,\frac{3}{2})$) i $2x-8y+1=0$, (bez punktu $(-\frac{11}{2},-\frac{5}{4})$) są proste nierównoległe, a obrazami przecinających się [1] prostych $x+y=0$ (bez punktu $(-1,1)$) i $3x+y+2=0$ (bez punktu $(-1,1)$ są proste równoległe.

Odpowiedzi

9.11. Istnieją dwa punkty $P_1(3)$ i $P_2(8)$.
9.12. $P(x_i)$, $i=1,2,3,4$, gdzie $x_1=\frac{1}{2}(5-3\sqrt{5})$, $x_2=\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})$, $x_3=\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})$, $x_4=\frac{1}{2}(5+3\sqrt{5})$.
9.13. a) $-\frac{3}{2}$; b) 4; c) nie istnieje.
9.15. a) $C(\frac{17}{4})$; b) $C(\frac{7}{2})$; c) $C(6)$. **9.16.** $\frac{15}{2}$.
9.17. Wsk. Por. przykład 9.3; $(BCA)=\dfrac{k-1}{k}$, $(CAB)=\dfrac{1}{1-k}$, $(CBA)=\dfrac{k}{k-1}$.

---

[1] Zauważmy, że punkt przecięcia prostych leży na prostej $x-2y+3=0$. Można udowodnić, że jeżeli punkt przecięcia prostych leży na prostej L_0 (por. wzór (8), to obrazy tych prostych są prostymi równoległymi.

9.18. $(PQA)=\frac{k}{r}\cdot\frac{r-1}{k-1}$. **9.19.** $\frac{1}{7}$. **9.20.** a) $\frac{121}{336}$; b) 0; c) 1.

9.21. $D(\frac{1}{12})$. **9.22.** $D(\frac{8}{7})$. **9.24.** Wsk. Zastosować wzór Chasles'a.

9.27. $x=\frac{x_1-kx_2}{1-k}$, $y=\frac{y_1-ky_2}{1-k}$; w szczególności otrzymujemy środek $S\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ odcinka AB dla $k=-1$. W zadaniu tym przyjmujemy te same określenia jak w przykładzie 9.2.

9.28. $C(-3, 8)$. **9.29.** Wsk. Sprawdzić, że $\overline{AB}\|\overline{BC}$, $k=\frac{1}{2}$.

9.30. $A(-3, 3), B(7, 5), C(-3, -3)$. **9.31.** $S\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

9.32. $S=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$.

9.33. $A(160, -131)$, $B(-225, 184)$.

9.34. Wsk. Zastosować twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta oraz wzory na podział odcinka w danym stosunku; $\frac{10}{3}\sqrt{2}$.

9.35. $C(5, 0)$, $D(0, \frac{5}{2})$. **9.36.** $k=-2$.

9.37. $B(0, 4)$, $D(-1, -3)$. **9.38.** $B(16, 3)$, $D(2, 5)$.

9.39. $P_{1,2}(0,3\pm\sqrt{16-k^2})$, dla $|k|>4$ punkty P nie istnieją, dla $k=\pm 4$ istnieje dokładnie jeden punkt i dla $|k|<4$ istnieją dwa różne punkty.

9.40. $S=4$. **9.41.** $S=12,5$.

9.42. Wsk. Obliczyć najpierw pole trójkąta ABC, $d=\frac{7}{5}$.

9.43. $4\sqrt{2}$. **9.44.** $d(A_1, A_2)=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1 r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$.

9.45. a) $B(5, \frac{4}{3}\pi)$; b) $C(5, \frac{5}{3}\pi)$. **9.46.** $2\sqrt{10-3\sqrt{2}}$.

9.47. $A_1=O(0, 0)$, $A_2(a, 0)$, $A_3(\sqrt{3}a, \frac{1}{6}\pi)$, $A_4(2a, \frac{1}{3}\pi)$, $A_5(\sqrt{3}a, \frac{1}{2}\pi)$, $A_6(a, \frac{2}{3}\pi)$.

9.48. $A(\sqrt{3}, 1)$, $B(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{3})$, $C(-5, 0)$, $D(5, 0)$.

9.49. $A(5, \frac{1}{2}\pi)$, $B(3, \pi)$, $C(2, \frac{1}{6}\pi)$, $D(2, -\frac{3}{4}\pi)$, $E(2, -\frac{1}{3}\pi)$.

9.50. Wsk. Udowodnić najpierw, że $\overline{SA}_1+\overline{SA}_2+\ldots+\overline{SA}_n=\mathbf{o}$, gdzie S oznacza środek okręgu opisanego, a punkty A_i, $i=1, 2, \ldots, n$, oznaczają wierzchołki wielokąta, względnie skorzystać z przykładu 9.1.

9.51. $A(-4)$, $B(1)$. **9.52.** $A(0, -7)$. **9.53.** $A(\frac{5}{2}\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+\frac{5}{2})$.

9.54. $A(3\sqrt{3}, 1)$, $B(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2})$, $C(3, -\sqrt{3})$ **9.55.** $A(2, 3)$.

9.56. $\left(\frac{a(1-\cos\alpha)-b\sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)}, \frac{a\sin\alpha+b(1-\cos\alpha)}{2(1-\cos\alpha)}\right)$.

9.57. $x_0=\dfrac{b}{1-a}$, $a\neq 1$, $x\in\mathbf{R}$ dla $a=1$, $b=0$. **9.60.** Nie.

9.61. a) $x'=-2x+5$; b) $x'=-2x+19$; c) $x=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$;
d) $\mathscr{T}_2^{-1}\circ\mathscr{T}_1=\mathscr{T}_2\circ\mathscr{T}_1$; e) $x'=-4x+41$.

9.62. $O'(-3)$, $B'(5)$, $C'(1)D'(-5)$. **9.63.** $A'(1)$, $B'(3)$, $C'(-5)$.

9.64. $x'=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$. **9.65.** $F=\frac{9}{5}C+32$. **9.66.** $k=8$. **9.67.** $x_0=-\frac{1}{3}$.

9.68. $x'=\dfrac{x_2'-x_1'}{x_2-x_1}x+\dfrac{x_1'x_2-x_1x_2'}{x_2-x_1}$.

9.69. $\mathscr{T}^{-1}$: $x'=5x-3y+8$, $y'=-3x+2y-3$.

9.70. a) $\mathscr{T}_1\circ\mathscr{T}_2$: $x'=x+8$, $y'=4x-5y+14$; b) $\mathscr{T}_2\circ\mathscr{T}_1$: $x'=-x+2y-8$, $y'=4x-3y+24$.

9.71. $11x+2y-3=0$. **9.72.** $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{2}$.

9.73. a) $A'(0,\frac{1}{2})$, $B'(2,\frac{5}{2})$, $C'(4,-\frac{1}{2})$; b) $A'(0,1)$, $B'(-2,5)$, $C'(-4,-1)$;
c) $A'(0,-1)$, $B'(-2,-5)$, $C'(-4,1)$;
d) $A'[(1-k)x_0,\ y_0+(1-y_0)k]$, $B'[x_0+(2-x_0)k,\ y_0+(5-y_0)k]$, $C'[x_0+(4-x_0)k,\ y_0+(-1-y_0)k]$;
e) $A'\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}-2,\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1\right)$, $B'\left(\dfrac{-3\sqrt{2}}{2}-2,7\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1\right)$, $C'\left(5\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2,\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+1\right)$.

9.74. $A(4,3)$. **9.75.** $A(4,2)$.

9.76. a) Nie istnieją; b) $A(0,1)$;
c) istnieje nieskończenie wiele punktów stałych tworzących prostą $3x+y+7=0$;
d) nie istnieją; e) $A(2,1)$.

9.77. $x'=2x-3y+1$, $y'=x+2y-1$.

9.79. $x'=x+k(Ax+By+C)$, $y'=y+p(Ax+By+C)$, gdzie k i p są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

9.80. Wsk. Por. zadanie 9.79. $x'=\frac{1}{7}x+\frac{2}{7}y-\frac{4}{7}$, $y'=\frac{9}{7}x+\frac{4}{7}y+\frac{6}{7}$.

9.82. $x'=\frac{1}{3}(-2x+2y+10)$, $y'=\frac{1}{3}(-11x+14y+13)$.

9.84. $x_1=\frac{1}{2}y_1$, $x_2=-\frac{1}{4}y_1+\frac{1}{2}y_2$, $x_3=-\frac{1}{2}y_1-y_2+y_3$, $x_4=\frac{1}{4}y_1+\frac{1}{2}y_2-y_3+y_4$.

9.87. Nie. **9.88.** $x'=r^2\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $y'=r^2\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

9.89. a) $A'(8,0)$, $B'(8,8)$, $C'(4,4)$, $D'(0,-4)$;
b) łuk okręgu $(x-4)^2+(y-2)^2=20$ położony w pierwszej ćwiartce z włączeniem punktów $A'(8,0)$ i $B'(0,4)$;
c) $y=-2x$ $(x\neq 0)$; d) $(x-4)^2+(y-4)^2=32$; e) $(x-1)^2+(y+2)^2=5$.

9.90. a) $x^2+y^2=4$; b) $x^2+y^2=\frac{1}{9}$; c) $x=-\frac{1}{4}$; d) $2x-8y+1=0$;
e) $x^2+y^2-\frac{6}{23}x+\frac{8}{23}y+\frac{1}{23}=0$; f) $x^2+y^2-6x-8y+1=0$.

9.91. $r=2\sqrt{5}$. **9.92.** $\alpha=\mp\sqrt{11}$.

9.94. Wsk. Por. wzór (a) przykład 14.4.

9.97. a) $A'(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$, $B'(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, $C'(\frac{5}{11}, \frac{16}{11})$, $D'(0, \frac{3}{2})$, $E'(\frac{13}{3}, 0)$.
b) $A_1(0, \frac{1}{4})$, $A_2(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$, $A_3(-\frac{6}{11}, \frac{5}{11})$.

9.98. a) $L'_1=\{(x', y'):\ x'=0\}-\{(0,0)\}$; b) $L'_2=\{(x', y'):\ x'-y'-1=0\}-\{(1,0)\}$;
c) $L'_3=\{(x', y'):\ 5x'-y'+1=0\}-\{(-\frac{1}{5}, 0)\}$.

9.99. a) $L_1=\{(x, y);\ 2x+y-2=0\}-\{(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})\}$; b) $L_2=\{(x, y):\ y=0\}-\{(-1, 0)\}$;
c) $L_3=\{(x, y):\ 10x+y-6=0\}-\{(\frac{5}{11}, \frac{16}{11})\}$.

§ 10. ODWZOROWANIA LINIOWE. FORMY KWADRATOWE

10.1. Niech U i V p.w. nad $\mathbf{R}$. Odwzorowanie $\mathbf{L}\colon U \to V$ nazywamy *odwzorowaniem (przekształceniem) liniowym*, gdy

$$\text{(1)} \qquad \bigwedge_{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U} \ \bigwedge_{a, b \in \mathbf{R}} \left(\mathbf{L}(a\mathbf{u}_1+b\mathbf{u}_2)=a\mathbf{L}(\mathbf{u}_1)+b\mathbf{L}(\mathbf{u}_2)\right).$$

Zbiór wszystkich odwzorowań liniowych U w V oznaczamy $L(U, V)$. Niech $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, przy czym w $\mathbf{R}^n$ i $\mathbf{R}^m$ ustalone są bazy, oraz niech dany będzie zbiór macierzy $M=M_{m\times n}(\mathbf{R})$ (por. § 6).

T$_1$. *Istnieje dokładnie jedna bijekcja* $\mathscr{T}\colon L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \to M$, *przy czym*

$$\text{(2)} \qquad (\mathbf{y}=\mathbf{L}(\mathbf{x})) \Leftrightarrow (Y=AX),$$

gdzie $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$, $\mathbf{y}\in\mathbf{R}^m$, $A\in M$, $X=[x_i]_{n\times 1}$, $Y=[y_i]_{m\times 1}$.

Uwaga. Podkreślamy, że biiekcja $\mathscr{T}$ istnieje przy ustalonych bazach w $\mathbf{R}^n$ i $\mathbf{R}^m$. Biorąc inne bazy dla tego samego odwzorowania otrzymujemy na ogół różne macierze (por. zad. 10.17).

10.2. Niech $\mathbf{L}\in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. Wektorem własnym przekształcenia $\mathbf{L}$ o macierzy A (por. (2)) nazywamy taki wektor $\mathbf{x}\neq\mathbf{o}$, który zachowuje kierunek przy przekształceniu, tzn. istnieje taka stała $\lambda\in\mathbf{R}-\{0\}$ zwana *wartością własną przekształcenia* $\mathbf{L}$, że

$$(\mathbf{L}(\mathbf{x})=\lambda\mathbf{x}) \Leftrightarrow (AX=\lambda X) \Leftrightarrow (A-\lambda I)X=O.$$

Każdej wartości własnej λ_i, $i=1, 2, \ldots, n$ odpowiada wektor własny, przy czym

$$(A-\lambda_i I)X=O.$$

T$_2$. *Wektory własne przekształcenia* $\mathbf{L}\in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ *o macierzy rzeczywistej symetrycznej, odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne.*

10.3. *Formą kwadratową* nazywamy funkcję $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ określoną wzorem

$$\text{(3)} \qquad f(\mathbf{x})=\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}x_i x_j, \qquad \mathbf{x}\in\mathbf{R}^n, \qquad c_{ij}\in\mathbf{R}, \qquad i, j=1, 2, \ldots, n.$$

Przyjmując: $X=[x_i]_{n\times 1}$, $C=[c_{ij}]_{n\times n}$, $A=\frac{1}{2}(C+C^T)$ możemy zawsze zapisać (3) w postaci (por. zad. 10.26)

(4) $$f(\mathbf{x})=X^TCX=X^TAX, \quad \text{gdzie} \quad A=A^T.$$

(macierz $[a_{11}]_{1\times 1}$ utożsamiamy z elementem a_{11}, por. punkt 6.1).

A nazywamy *macierzą formy*, $\det A$ — *wyznacznikiem formy*, $R(A)=\operatorname{rz} f$ — *rzędem formy*. Jeżeli

(5) $$f(X)=\sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2, \quad a_i\neq 0, \quad i=1,2,\ldots,r.$$

to (5) nazywamy *postacią kanoniczną formy*, przy czym $r=\operatorname{rz} f$.

Niech d oznacza liczbę współczynników dodatnich formy w postaci (5), m — liczbę współczynników ujemnych. Jeżeli $(r=d<n)\vee(r=m<n)$, to forma nazywa się *półokreślona*, przy czym *dodatnio* [*ujemnie*] *półokreślona*, jeżeli $r=d$ $[m=r]$. Jeżeli $(r=n\wedge d=n)\vee(r=n\wedge m=n)$, to forma nazywa się *określona*, przy czym *dodatnio* [*ujemnie*] *określona*, jeżeli $d=n$ $[m=n]$.

T_3. *Na to aby forma* (3) *była określona* [*półokreślona*] *dodatnio potrzeba i wystarcza żeby*

$$\bigwedge_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n-\{\mathbf{o}\}} f(\mathbf{x})>0 \qquad [\bigwedge_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x})\geqslant 0 \wedge \bigvee_{\mathbf{x}\neq\mathbf{o}} f(\mathbf{x})=0]$$

Zastępując nierówność $>[\geqslant]$ w T_3 nierównościami $<[\leqslant]$ otrzymujemy twierdzenie, *dla form określonych* [*półokreślonych*] *ujemnie*.

T_4. *Forma* (3) *jest określona dodatnio* [*ujemnie*] *wtedy i tylko wtedy, gdy minory główne*

$$M_k=\det[a_{ij}]_{k\times k}>0, \ k=1,2,\ldots,n \qquad [(-1)^k M_k>0, \ k=1,2,\ldots,n].$$

T_5 (twierdzenie o bezwładności form). *Każdą formę kwadratową można zawsze za pomocą przekształcenia ortogonalnego przekształcić do postaci kanonicznej*

(6) $$f(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2,$$

przy czym $r=\operatorname{rz} f$, λ_i, $i=1,2,\ldots,r$, *są wartościami własnymi macierzy formy.*

Uwaga. Postać (6) jest określona z dokładnością do porządku pierwiastków λ_i, $i=1,2,\ldots,r$.

Postać kanoniczną formy kwadratowej można również otrzymać metodą Lagrange'a, którą wyjaśnimy w przykładach (por. przykład 10.4).

Przykłady

10.1. Udowodnić T_1.

Dowód. Niech $(\boldsymbol{\alpha}_i)_{i=1}^n$, $(\boldsymbol{\beta}_i)_{i=1}^m$ będą ustalonymi bazami odpowiednio w $\mathbf{R}^n$ i $\mathbf{R}^m$ i niech dane będzie dowolne odwzorowanie $\mathbf{L}\in L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$.

Ponieważ $\mathbf{L}(\boldsymbol{\alpha}_i)\in\mathbf{R}^m$, $i=1,2,\ldots,n$, więc

(a) $$\mathbf{L}(\boldsymbol{\alpha}_i)=\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\boldsymbol{\beta}_j, \quad i=1,2,\ldots,n,$$

przy czym liczby a_{jl} są określone jednoznacznie. Niech $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ (kolumny macierzy A są współrzędnymi obrazu wektora $\boldsymbol{\alpha}_i$ w bazie $(\boldsymbol{\beta})_{i=1}^{m}$) oraz $\mathbf{L}(\mathbf{x})=\mathbf{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_m)\in\mathbf{R}^m$. Jeżeli $\mathbf{R}^n\ni\mathbf{x}=\sum_{k=1}^{n} x_k\boldsymbol{\alpha}_k$, to

$$\mathbf{R}^m\ni\mathbf{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_m)=\mathbf{L}(\mathbf{x})=\mathbf{L}\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\boldsymbol{\alpha}_k\Big)=\sum_{k=1}^{n} x_k\mathbf{L}(\boldsymbol{\alpha}_k)=\sum_{k=1}^{n} x_k\sum_{j=1}^{m} a_{jk}\boldsymbol{\beta}_j=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k\Big)\boldsymbol{\beta}_j\Rightarrow Y=AX,$$

gdzie $Y=[y_i]_{m\times 1}$, $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $X=[x_i]_{n\times 1}$, tzn. $\mathscr{T}(\mathbf{L})=A\in M$.

Niech teraz dana będzie dowolna macierz $A\in M_{m\times n}(\mathbf{R})$. Odwzorowanie $\mathbf{f}\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ określone wzorem $Y=AX$ jest liniowe, ponieważ dla dowolnych $a,\ b\in\mathbf{R}$ i dowolnych macierzy X^1, X^2 odpowiadających wektorom $\mathbf{x}^1=(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$, $\mathbf{x}^2=(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)$ mamy

$$Y=A(aX^1+bX^2)=AaX^1+AbX^2=a(AX^1)+b(AX^2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\mathbf{f}(a\mathbf{x}^1+b\mathbf{x}^2)=a\mathbf{f}(\mathbf{x}^1)+b\mathbf{f}(\mathbf{x}^2).$$

Wykazaliśmy więc, że dla każdej macierzy $A\in M$ istnieje przekształcenie liniowe $\mathbf{f}\in$ $\in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Z kolei jeżeli $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)\wedge\mathbf{f}_1\neq\mathbf{f}_2$, to $\mathscr{T}(\mathbf{f}_1)=A_1\neq\mathscr{T}(\mathbf{f}_2)=A_2$. Wykazaliśmy więc, że $\mathscr{T}$ jest bijekcją. □

10.2. Udowodnić T_2.

Dowód. Niech $\lambda_1\neq\lambda_2$ oznaczają wartości własne macierzy symetrycznej rzeczywistej A. Odpowiadające wektorom własnym $\mathbf{x}^1=(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$, $\mathbf{x}^2=(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)$ dla wartości λ_1 i λ_2 macierze X_1 i X_2 są niezerowe i spełniają warunki

(a) $$(AX_1=\lambda_1X_1)\Leftrightarrow(X_1^{\mathrm{T}}A=\lambda_1X_1^{\mathrm{T}}),\qquad AX_2=\lambda_2X_2.$$

Korzystając z (a) będziemy obliczali wyrażenie $X_1^{\mathrm{T}}AX_2$:

$$X_1^{\mathrm{T}}AX_2=(X_1^{\mathrm{T}}A)X_2=(\lambda_1X_1^{\mathrm{T}})X_2=\lambda_1(X_1^{\mathrm{T}}X_2)$$

oraz

$$X_1^{\mathrm{T}}AX_2=X_1^{\mathrm{T}}(AX_2)=X_1^{\mathrm{T}}(\lambda_2X_2)=\lambda_2(X_1^{\mathrm{T}}X_2),$$

skąd

$$(\lambda_1(X_1^{\mathrm{T}}X_2)=\lambda_2(X_1^{\mathrm{T}}X_2))\Leftrightarrow(\lambda_1-\lambda_2)(X_1^{\mathrm{T}}X_2)=O\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(X_1^{\mathrm{T}}X_2=O)\Leftrightarrow\mathbf{X}^1\perp\mathbf{X}^2,$$

ponieważ $\lambda_1\neq\lambda_2$. □

Z udowodnionego twierdzenia wynika, że jeżeli macierz symetryczna rzeczywista A ma n różnych wartości własnych λ_i, $i=1, 2, \ldots, n$, to odpowiadające im wektory własne $\mathbf{x}^i$, $i=1, 2, \ldots, n$ tworzą układ ortogonalny, tzn.

$$\mathbf{x}^i\bullet\mathbf{x}^j=\delta_{ij}|\mathbf{x}^i||\mathbf{x}^j|,\qquad i, j=1, 2, \ldots, n.$$

Macierz

$$P=\left[\frac{x_j^i}{|\mathbf{x}^i|}\right]_{n\times n}=\begin{bmatrix}\frac{x_1^1}{|\mathbf{x}^1|} & \frac{x_2^1}{|\mathbf{x}^1|} & \cdots & \frac{x_n^1}{|\mathbf{x}^1|}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{x_1^n}{|\mathbf{x}^n|} & \frac{x_2^n}{|\mathbf{x}^n|} & \cdots & \frac{x_n^n}{|\mathbf{x}^n|}\end{bmatrix}$$

spełnia warunek $PP^{\mathrm{T}}=I$, tzn. jest ortogonalna oraz macierz $PAP^{-1}=PAP^{\mathrm{T}}=[\delta_{ij}\lambda_i]_{n\times n}$ jest diagonalna. Istotnie,

$$PP^{\mathrm{T}}=[b_{ij}]_{n\times n}=\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^i}{|\mathbf{x}^i|}\frac{x_k^j}{|\mathbf{x}^j|}\right]=\left[\frac{|\mathbf{x}^i||\mathbf{x}^j|\delta_{ij}}{|\mathbf{x}^i||\mathbf{x}^j|}\right]=[\delta_{ij}]=I.$$

Z kolei

$$PAP^{\mathrm{T}}=(PA^{\mathrm{T}})P^{\mathrm{T}},\qquad PA^{\mathrm{T}}=[c_{ij}]_{n\times n}=\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^i}{|\mathbf{x}^i|}a_{jk}\right],$$

ale $\frac{\mathbf{x}^i}{|\mathbf{x}^i|}=\left[\frac{x_1^i}{|\mathbf{x}^i|},\frac{x_2^i}{|\mathbf{x}^i|},\ldots,\frac{x_n^i}{|\mathbf{x}^i|}\right]$ jest wersorem własnym macierzy A (dokładnie: odwzorowania liniowego $\mathbf{L}$ odpowiadającego macierzy A) odpowiadającym wartości własnej λ_i. Stąd

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^i}{|\mathbf{x}^i|}a_{jk}=\frac{1}{|\mathbf{x}^i|}\sum_{k=1}^{n}x_k^i a_{jk}=\frac{1}{|\mathbf{x}^i|}\lambda_i x_j^i\Rightarrow PA^{\mathrm{T}}=\left[\frac{\lambda_i x_j^i}{|\mathbf{x}^i|}\right].$$

Mamy więc

$$(PA^{\mathrm{T}})P^{\mathrm{T}}=[d_{ij}]=\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_i x_k^i}{|\mathbf{x}^i|}\frac{x_k^j}{|\mathbf{x}^j|}\right]=\left[\frac{\lambda_i|\mathbf{x}^i||\mathbf{x}^j|}{|\mathbf{x}^i||\mathbf{x}^j|}\delta_{ij}\right]=[\delta_{ij}\lambda_i]\qquad\square$$

10.3. Korzystając z T_5 przekształcić formę

(a) $$6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$$

do postaci kanonicznej.

Rozwiązanie. Niech macierz symetryczna rzeczywista A formy $X^{\mathrm{T}}AX$ ma n różnych wartości własnych λ_i. Z przykładu 10.2 wynika, że przekształcenie $Y=PX$ (P jest macierzą utworzoną z wersorów własnych macierzy A (por. przykład 10.2)) jest ortogonalne, przy czym forma

$$X^{\mathrm{T}}AX=Y^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}})^{-1}AP^{-1}Y=Y^{\mathrm{T}}(P^{-1})^{\mathrm{T}}AP^{-1}Y=Y^{\mathrm{T}}(PAP^{-1})Y=Y^{\mathrm{T}}[\delta_{ij}\lambda_i]Y=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2$$

jest w postaci kanonicznej.

W przypadku formy (a) mamy

$$A=\begin{bmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 5 & 0\\ 2 & 0 & 7\end{bmatrix},$$

$$\left(W(\lambda)=\begin{vmatrix}6-\lambda & -2 & 2\\ -2 & 5-\lambda & 0\\ 2 & 0 & 7-\lambda\end{vmatrix}=0\right)\Rightarrow(\lambda_1=3,\ \lambda_2=6,\ \lambda_3=9).$$

Współrzędne x_1, x_2, x_3 wektorów własnych spełniają układ

$$\begin{aligned} (6-\lambda)x_1 \quad -2x_2 \quad\quad +2x_3&=0,\\ -2x_1+(5-\lambda)x_2 \quad\quad\quad &=0,\\ 2x_1 \quad\quad\quad +(7-\lambda)x_3&=0, \end{aligned}$$

gdzie $\lambda=\lambda_i$, $i=1,2,3$.

Dla $\lambda=\lambda_1=3$ mamy

$$\left.\begin{aligned} 3x_1-2x_2+2x_3&=0\\ -2x_1+2x_2 \quad\quad &=0\\ 2x_1 \quad\quad +4x_3&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1=x_2=-2x_3.$$

Przyjmując $x_3=1$, otrzymujemy wektor własny $\mathbf{v}_1=(-2,-2,1)$, skąd wersor własny $\mathbf{v}_1^w=(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$.

Podobnie znajdujemy wersory własne

$$\mathbf{v}_2^w=(\tfrac{1}{3},-\tfrac{2}{3},-\tfrac{2}{3}),\qquad \mathbf{v}_3^w=(-\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3},-\tfrac{2}{3}).$$

Stąd macierz ortogonalna

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

A więc forma (a) przyjmuje postać kanoniczną

$$3y_1^2+6y_2^2+9y_3^2.$$

10.4. Korzystając z metody Lagrange'a przekształcić formę

(a) $$2x_1^2+5x_2^2+10x_3^2-4x_1x_2+2x_2x_3+6x_1x_3$$

do postaci kanonicznej oraz zbadać określoność tej formy.

Rozwiązanie. *Metoda Lagrange'a* polega na kolejnym uzupełnianiu pewnych składników formy do kwadratu sumy, a następnie stosowaniu przekształceń liniowych.

W przypadku formy (a) (jest to przypadek gdy $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}^2>0$ dla formy $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$) postępujemy następująco:

$$\begin{aligned} &2x_1^2+5x_2^2+10x_3^2-4x_1x_2+2x_2x_3+6x_1x_3=\\ &\qquad=2(x_1^2-2x_1x_2+3x_1x_3)+5x_2^2+10x_3^2+2x_2x_3=\\ &\qquad=2(x_1-x_2+\tfrac{3}{2}x_3)^2-2(x_2-\tfrac{3}{2}x_3)^2+5x_2^2+10x_3^2+2x_2x_3=\\ &\qquad=2(x_1-x_2+\tfrac{3}{2}x_3)^2+3x_2^2+\tfrac{11}{2}x_3^2+8x_2x_3=\\ &\qquad=2(x_1-x_2+\tfrac{3}{2}x_3)^2+3(x_2+\tfrac{4}{3}x_3)^2+\tfrac{1}{6}x_3^2. \end{aligned}$$

Stosując przekształcenie liniowe określone wzorami:

$$y_1 = x_1 - x_2 + \tfrac{3}{2}x_3, \quad y_2 = x_2 + \tfrac{4}{3}x_3, \quad y_3 = x_3,$$

otrzymujemy $2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{1}{6}y_3^2$, tzn. formę w postaci kanonicznej. Ponieważ $d = 3 = n$, więc forma (a) jest określona dodatnio.

Uwaga. W przypadku gdy w formie $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$, $a_{ii} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, wtedy korzystając ze wzorów $x_i x_j = \frac{1}{4}[(x_i + x_j)^2 - (x_i - x_j)^2]$ sprowadzamy formę do postaci z przypadku rozpatrywanego w przykładzie.

Zadania

10.5. Niech U jest p.w. nad $\mathbf{R}$. Wykazać, że odwzorowanie $\mathbf{f}\colon U \to U$ określone wzorem $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = a\mathbf{x}$, $a \in \mathbf{R}$ jest liniowe i przekształca U na U, gdy $a \neq 0$ oraz U w U, gdy $a = 0$.

10.6. Wykazać, że odwzorowanie $\mathbf{f}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ określone wzorem $\mathbf{f}((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ jest liniowe. Podać interpretację geometryczną odwzorowania $\mathbf{f}$.

10.7. Wykazać, że odwzorowanie $\mathbf{f}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ określone wzorem $\mathbf{f}((x_1, x_2)) = (x_1, x_2, x_1 + x_2) \in \mathbf{R}^3$ jest liniowe.

10.8. Znaleźć macierze odwzorowań liniowych określonych w zadaniach 10.6 i 10.7 względem ustalonych baz w $\mathbf{R}^2$ i $\mathbf{R}^3$.

10.9. Zakładając, że w zadaniu 10.5 $U = \mathbf{R}^n$, znaleźć macierz określonego tam przekształcenia.

10.10. Wykazać, że dla każdego odwzorowania liniowego (1) (por. punkt 10.1)

$$\mathbf{L}\Big(\sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{u}_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{L}(\mathbf{u}_i), \quad \mathbf{u}_i \in U, \quad a_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

10.11. Korzystając z definicji odwzorowania liniowego (por. (1)), wykazać, że superpozycja odwzorowań liniowych jest odwzorowaniem liniowym.

10.12. Dane są odwzorowania $\mathbf{f}_1\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\mathbf{f}_2\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ określone wzorami: $\mathbf{f}_1((x_1, x_2)) = (x_1 + 2x_2, x_1)$, $\mathbf{f}_2((x_1, x_2)) = (x_1, 2x_2)$. Wykazać, że $\mathbf{f}_1$ i $\mathbf{f}_2$ są odwzorowaniami liniowymi oraz znaleźć $\mathbf{f}_1 \circ \mathbf{f}_2$ i $\mathbf{f}_2 \circ \mathbf{f}_1$

10.13. Sprawdzić, że superpozycja obrotów na płaszczyźnie (por. § 9) jest odwzorowaniem liniowym przemiennym, tzn. $\mathbf{f}_1 \circ \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_2 \circ \mathbf{f}_1$.

10.14. Znaleźć macierz superpozycji odwzorowań liniowych przestrzeni euklidesowych.

10.15. Dane są odwzorowania liniowe $\mathbf{f}$ i $\mathbf{g}$ określone wzorami

$$\mathbf{f}\colon Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}\colon Z = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć (jeżeli istnieje) przekształcenie $\mathbf{h}=\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$ oraz obraz punktu $P(1,2,4)$ przy przekształceniu $\mathbf{h}$. Czy istnieje $\mathbf{h}^{-1}$?

10.16. Dane jest przekształcenie liniowe $\mathbf{f}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ określone wzorem $Y=AX$, gdzie macierz $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ dana jest względem baz $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in \mathbf{R}^2$ i $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 \in \mathbf{R}^3$. Znaleźć macierz przekształcenia $\mathbf{f}$ względem baz $\boldsymbol{\alpha}_1', \boldsymbol{\alpha}_2' \in \mathbf{R}^2$, $\mathbf{k}_1', \mathbf{k}_2', \mathbf{k}_3' \in \mathbf{R}^3$ o macierzy przejścia

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix} \quad (\text{z } \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \text{ do } \boldsymbol{\alpha}_1', \boldsymbol{\alpha}_2')$$

oraz

$$C=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix} \quad (\text{z } \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 \text{ do } \mathbf{k}_1', \mathbf{k}_2', \mathbf{k}_3').$$

10.17. Dane jest przekształcenie liniowe $\mathbf{L}\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ o macierzy A względem $(\boldsymbol{\alpha}_i)_{i=1}^n$ w $\mathbf{R}^n$ i $(\boldsymbol{\beta}_i)_{i=1}^m$ w $\mathbf{R}^m$. W $\mathbf{R}^n$ wprowadzono nową bazę $(\boldsymbol{\alpha}_i')_{i=1}^n$ o macierzy przejścia B i w $\mathbf{R}^m$ nową bazę $(\boldsymbol{\beta}_i')_{i=1}^n$ o macierzy przejścia C. Znaleźć macierz przekształcenia $\mathbf{L}$ względem nowych baz.

10.18. Dane jest odwzorowanie liniowe $\mathbf{L}\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ o macierzy A. Niech B będzie macierzą podobną do macierzy A (tzn. istnieje macierz nieosobliwa C taka, że $B=C^{-1}AC$). Znaleźć odwzorowanie liniowe $\mathbf{f}\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ odpowiadające macierzy B, jeżeli C jest macierzą przejścia od bazy $(\boldsymbol{\alpha}_i)_{i=1}^n$ w $\mathbf{R}^n$ do bazy $(\boldsymbol{\alpha}_i')_{i=1}^n$ w $\mathbf{R}^n$.

10.19. Znaleźć wersory własne przekształceń liniowych.

a) $Y=\begin{bmatrix}7 & -3\\ -3 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$; b) $Y=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$; c) $Y=\begin{bmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$.

10.20. Udowodnić, że wektory własne $\mathbf{x}_{\lambda_i}^i$ przekształcenia liniowego $\mathbf{f}\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ odpowiadające wartościom własnym λ_i, $i=1,2,\ldots,n$, gdzie $\lambda_j \neq \lambda_k$, $j \neq k$, są liniowo niezależne.

10.21. Niech $\mathbf{x}^1$ będzie wektorem własnym przekształcenia liniowego $\mathbf{f}\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ odpowiadającym wartości własnej λ_1 oraz niech $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ będzie wielomianem określonym wzorem $g(t)=a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\ldots+a_1t+a_0$, $a_n \neq 0$. Wykazać, że wektor $\mathbf{x}^1$ jest wektorem własnym przekształcenia liniowego $g\circ\mathbf{f}$ odpowiadającym wartości własnej $g(\lambda_1)$, tzn.

$$AX^1=\lambda_1X^1 \Rightarrow BX^1=g(\lambda_1)X^1,$$

gdzie A jest macierzą przekształcenia $\mathbf{f}$ oraz B jest macierzą przekształcenia $g\circ\mathbf{f}$ przy czym

$$g(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^{n} g(x_j)\,\mathbf{e}_j.$$

10.22. Wykazać, że dowolna macierz kwadratowa $A_{n\times n}$ mająca n różnych wartości własnych jest podobna do macierzy diagonalnej.

10.23. Wykazać, że macierz przekształcenia liniowego $\mathbf{f}$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ w bazie $(\boldsymbol{\alpha}_i)_{i=1}^n$ jest diagonalna wtedy i tylko wtedy, gdy baza $(\boldsymbol{\alpha}_i)_{i=1}^n$ składa się z wektorów własnych przekształcenia $\mathbf{f}$ oraz że elementy takiej macierzy diagonalnej są wartościami własnymi tej macierzy.

10.24. Zbadać, które z poniższych macierzy przekształceń liniowych można sprowadzić do postaci diagonalnej za pomocą zmiany bazy oraz znaleźć te bazy i macierze (jeżeli istnieją):

a) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$;

e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; g) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

10.25. W $\mathbf{R}^3$ dana jest baza $(\boldsymbol{\alpha}_i)_{i=1}^n$. Znaleźć macierz przekształcenia liniowego $\mathbf{f}$: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ określonego wzorem:

a) $Y=AX$, gdzie $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ względem nowej bazy o macierzy przejścia $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

b) $Y=AX$, gdzie $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ względem nowej bazy o macierzy przejścia $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

c) $Y=AX$, gdzie $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ względem nowej bazy $B=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

d) $Y=AX$, gdzie $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ względem nowej bazy $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

10.26. Wykazać, że formę kwadratową (3) można zawsze zapisać w postaci

$$f(\mathbf{x})=X^{\mathrm{T}}CX=X^{\mathrm{T}}AX, \quad \text{gdzie} \quad A=\tfrac{1}{2}(C+C^{\mathrm{T}}).$$

10.27. Zapisać za pomocą macierzy formy określone wzorami:

a) $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3+5x_2x_3$;

b) $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2-4x_2^2+3x_3^2$;

c) $f(x_1, x_2, x_3)=x_1x_3+4x_2x_3+5x_1x_2$;

d) $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+5x_2x_4+3x_3x_4$.

10.28. W $\mathbf{R}^n$ w bazie $(\boldsymbol{\alpha}_i)_{i=1}^n$ dana jest forma kwadratowa $f(\mathbf{x})=X^{\mathrm{T}}AX$. Sprawdzić, że w nowej bazie $(\boldsymbol{\alpha}_i')_{i=1}^n$ o macierzy przejścia $\boldsymbol{B}$ macierz formy ma postać $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ oraz że $(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$.

10.29. Wykazać, że forma kwadratowa $f(\mathbf{x})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz $\boldsymbol{B}$ taka, że $A=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\wedge \det \boldsymbol{B}\neq 0$.

10.30. Korzystając z T_4 zbadać określoność form:
a) $f(x_1, x_2, x_3)=2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$;
b) $f(x_1, x_2, x_3)=3x_1^2-2x_2^2+2x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-3x_1x_3-x_2x_3$;
c) $f(x_1, x_2, x_3)=-14x_1^2-14x_2^2-19x_3^2+2x_1x_2-28x_1x_3+12x_2x_3$.

10.31. Korzystając z T_5 przekształcić formy:
a) $11x^2+5y^2+2z^2+16xy+4xz-20yz$;
b) $x^2+y^2+5z^2-6xy-2xz+2yz$;
c) $8x^2-7y^2+8z^2+8xy-2xz+8yz$;
d) $x^2-5y^2+z^2+4xy+2xz+4yz$;
e) $8x^2+17y^2+20z^2-20xy-8xz+28yz$;
f) $x^2+2z^2-4xy+4xz$;
g) $17x^2+14y^2+14z^2-4xy-4xz-8yz$;
h) $8\sqrt{2}\,xy-16x^2-2y^2-18z^2$;
i) $2\sqrt{2}\,xy-2x^2-3y^2-z^2$
do postaci kanonicznych oraz zbadać określoność tych form.

10.32. Metodą Lagrange'a przekształcić formy:
a) $2x_1^2+3x_1x_2+4x_1x_3+x_2^2+x_3^2$;
b) $x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;
c) $2x_1^2+5x_2^2+10x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$;
d) $2x_1^2+5x_2^2-10x_3^2+8x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$;
e) $4x_1^2+3x_2^2+8x_4^2+8x_1x_2+4x_1x_4+2x_2x_4+4x_1x_3-8x_3x_4$;
f) $4x_2^2+8x_1x_2+4x_1x_4+8x_2x_4-4x_1x_3+4x_3x_4$;
g) $x_3^2-2x_2x_3-2x_2x_4-2x_2x_5+4x_3x_5+2x_3x_4+6x_4x_5$
do postaci kanonicznych.

Odpowiedzi

10.6. W $\mathbf{R}^3$ rzut ortogonalny wektora $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ na płaszczyznę Ox_1x_2.

10.8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. **10.9.** $\begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{bmatrix}_{n\times n}$.

10.12. $(\mathbf{f}_1\circ\mathbf{f}_2)((x_1, x_2))=(x_1+4x_2, x_1)\neq(\mathbf{f}_2\circ\mathbf{f}_1)((x_1, x_2))=(x_1+2x_2, 2x_1)$.
10.13. $\mathbf{f}_\alpha\circ\mathbf{f}_\beta=\mathbf{f}_\beta\circ\mathbf{f}_\alpha$, gdzie α i β są kątami obrotów.
10.14. Jeżeli $\mathbf{L}_1\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$, $\mathbf{L}_2\colon \mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^k$, gdzie $(\mathbf{y}=\mathbf{L}_1(\mathbf{x}))\Leftrightarrow(Y=AX)$, $(\mathbf{z}=\mathbf{L}_2(\mathbf{y}))\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(Z=\boldsymbol{B}Y)$, to macierz przekształcenia $\mathbf{L}_2\circ\mathbf{L}_1$: $C=\boldsymbol{BA}$.

10.15. $\mathbf{h}=\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$: $Z=\begin{bmatrix}3 & 3 & 0\\ 0 & 3 & 3\\ 1 & 5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$, $\mathbf{h}(P)=P'=(9, 18, 27)$, $\mathbf{h}^{-1}$ nie istnieje.

10.16. $D=C^{-1}AB=\begin{bmatrix}-5 & 5\\ 3 & 1\\ 9 & -12\end{bmatrix}$. **10.17.** $D=C^{-1}AB$. **10.18.** $\mathbf{f}=\mathbf{L}$.

10.19. a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

b) $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$;

c) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

10.20. Wsk. Przeprowadzić dowód indukcyjny.

10.24. a) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}$; b) nie można sprowadzić;

c) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$; d) nie można sprowadzić;

e) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$; f) nie można sprowadzić;

g) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

10.25. a) $C=B^{-1}AB=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 5 & 0 & 3\\ -2 & -1 & -2\end{bmatrix}$; b) $C=B^{-1}AB=\begin{bmatrix}-5 & -4 & -2\\ 8 & \frac{13}{2} & \frac{5}{2}\\ 13 & \frac{19}{2} & \frac{11}{2}\end{bmatrix}$;

c) $C=B^{-1}AB=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ \frac{15}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2}\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$; d) $C=B^{-1}AB=\begin{bmatrix}3 & -3 & -2\\ 6 & -3 & -1\\ -3 & 3 & 3\end{bmatrix}$.

10.27. a) $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & \frac{5}{2}\\ 3 & \frac{5}{2} & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$.

10.30. a) Dodatnio określona, b) nieokreślona: c) ujemnie określona.

10.31. a) $9x_1^2+18y_1^2-9z_1^2$, nieokreślona;
b) $3x_1^2+6y_1^2-2z_1^2$, nieokreślona; c) $9x_1^2+9y_1^2-9z_1^2$, nieokreślona; d) $3x_1^2-6y_1^2$, nieokreślona; e) $36x_1^2+9y_1^2$, dodatnio półokreślona; f) $x_1^2+4y_1^2-2z_1^2$; nieokreślona; g) $x_1^2+2y_1^2+2z_1^2$, dodatnio określona; h) $-18x_1^2-18z_1^2$, ujemnie półokreślona; i) $-x_1^2-y_1^2-4z_1^2$, ujemnie określona.

10.32. a) $-\frac{17}{2}y_1^2+y_2^2+y_3^2$, gdzie $y_1=x_1$, $y_2=\frac{3}{2}x_1+x_2$, $y_3=2x_1+x_3$;
b) $y_1^2-\frac{7}{2}y_2^2+2y_3^2$, gdzie $y_1=x_1+2x_2+x_3$, $y_2=x_2$, $y_3=-\frac{1}{2}x_2+x_3$;
c) $2y_1^2+3y_2^2+\frac{49}{6}y_3^2$, gdzie $y_1=x_1+x_2+\frac{1}{2}x_3$, $y_2=x_2+\frac{2}{3}x_3$, $y_3=x_3$;
d) $2y_1^2-3y_2^2$, gdzie $y_1=x_1+2x_2+x_3$, $y_2=x_2+2x_3$;
e) $y_1^2-y_2^2+3y_3^2+5y_4^2$, gdzie $y_1=2x_1+2x_2+x_3+x_4$, $y_2=x_2+2x_3+x_4$, $y_3=x_3-x_4$, $y_4=x_4$;
f) $4y_1^2-y_2^2+y_3^2-12y_4^2$, gdzie $y_1=x_1+x_4$, $y_2=2x_1+x_3+x_4$, $y_3=x_3+3x_4$, $y_4=x_4$;
g) $-y_2^2+y_3^2-y_4^2-2y_5^2$, gdzie $y_2=x_2-x_5$, $y_3=-x_2+x_3+x_4+2x_5$, $y_4=-x_4+x_5$, $y_5=x_5$.

§ 11. HIPERPŁASZCZYZNY w $\mathbf{R}^n$. PROSTA NA $\mathbf{R}^2$

11.1. W paragrafie tym podamy pewne określenia i wzory, z których będziemy korzystali również w paragrafach 12 i 13. Zbiory izometryczne z $\mathbf{R}^k \subset \mathbf{R}^n$ nazywamy hiperpłaszczyznami k-wymiarowymi i oznaczamy H^k, $k=0,1,2,\dots,n$; w szczególności H^0 oznacza punkt. Jeżeli punkty

$$p_i(p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in}) \in \mathbf{R}^n, \quad i=0,1,2,\dots,k \quad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

są l.n., to zbiór końców promieni wodzących $\mathbf{r}$, gdzie

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\sum_{i=1}^{k} k_i \overline{p_0 p_i}, \quad k_i \in \mathbf{R}, \quad i=1,2,\dots,k, \tag{1}$$

$\mathbf{r}=\overline{Ox}$, $x(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{r}_0=\overline{Op_0}$ jest hiperpłaszczyzną H^k jednoznacznie określoną. Równanie (1) nazywamy *równaniem wektorowym* H^k. Z (1) otrzymujemy równania parametryczne

$$H^k: \ x_i=p_{0i}+\sum_{j=1}^{k} k_j(p_{ji}-p_{0i}), \quad i=1,2,\dots,n. \tag{2}$$

Uwaga. Z założenia l.n. punktów p_i wynika, że $\overline{p_0 p_i} \neq \mathbf{o}$, $i=1,2,\dots,k$.

W szczególności, jeżeli $k=1$, to otrzymujemy H^1, tzn. *prostą* (będziemy ją oznaczali: L, L_1 itp.):

(3) $$L:\ (\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+k_1\overline{pp_1}) \Leftrightarrow (x_i=p_{0i}+k_1(p_{1i}-p_{0i}),\ i=1,2,\ldots,n,\ k_1\in\mathbf{R}).$$

Jeżeli $k_1\in\langle 0,1\rangle$, to (3) jest *równaniem odcinka* $\overline{p_0p_1}$, jeżeli $k_1\in\mathbf{R}_+\cup\{0\}$, to (3) jest *równaniem półprostej* o początku p_0 równoległej do p_0p_1.

Zbiór punktów przestrzeni $\mathbf{R}^n$, których współrzędne spełniają równanie:

(4) $$\sum_{i=1}^{n} A_i x_i + A_0 = 0, \qquad \mathbf{u}=(A_1, A_2, \ldots, A_n)\neq\mathbf{o}$$

jest hiperpłaszczyzną H^{n-1}. Wektor $\mathbf{u}$ wyznacza jedyny kierunek prostopadły do H^{n-1}. Równanie hiperpłaszczyzny H^{n-1} przechodzącej przez punkt $a(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i prostopadłej do wektora $\mathbf{v}=(B_1, B_2, \ldots, B_n)\neq\mathbf{o}$ (istnieje jedyna taka hiperpłaszczyzna):

(5) $$\Big(\sum_{i=1}^{n} B_i(x_i-a_i)=0\Big) \Leftrightarrow (\mathbf{v}\bullet\overline{ox}=0).$$

Odległość punktu $p(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ od hiperpłaszczyzny (4):

(6) $$d(p, H^{n-1})=\frac{\Big|\sum_{i=1}^{n} A_i p_i + A_0\Big|}{|\mathbf{u}|}.$$

11.2. Mówimy, że *wektor* $\mathbf{u}\in\mathbf{R}^n$ jest *równoległy do hiperpłaszczyzny* H i piszemy $\mathbf{u}\|H$, jeżeli istnieje reprezentant wektora $\mathbf{u}$, którego początek i koniec należą do H.

Wektor $\mathbf{v}\in\mathbf{R}^n$ nazywamy *prostopadłym do hiperpłaszczyzny* H i piszemy $\mathbf{v}\perp H$, jeżeli $\mathbf{v}$ jest prostopadły do każdego wektora $\mathbf{u}\|H$.

Nie będziemy definiować kąta między hiperpłaszczyznami w przypadku ogólnym, a ograniczymy się tylko do pewnych przypadków szczególnych.

Nięch $\mathbf{v}_i\|H_i^1=L_i$, $\mathbf{u}_i\perp H_i^{n-1}=H_i$, $i=1,2$. *Kąt między prostymi* L_1 i L_2:

$$\alpha=\sphericalangle(L_1, L_2):=\sphericalangle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\in\langle 0, \tfrac{1}{2}\pi\rangle,$$

gdzie

(7) $$\cos\alpha=\frac{|\mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|};$$

(8) $$(L_1\|L_2)\Leftrightarrow(\mathbf{v}_1\|\mathbf{v}_2)\Leftrightarrow R\left(\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n}\end{bmatrix}\right)=1,$$

(9) $$(L_1\perp L_2)\Leftrightarrow(\mathbf{v}_1\perp\mathbf{v}_2)\Leftrightarrow\mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_2=0,$$

Kąt między hiperpłaszczyznami H_1 i H_2:

$$\varphi=\sphericalangle(H_1, H_2):=\sphericalangle(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\in\langle 0, \tfrac{1}{2}\pi\rangle.$$

gdzie

(10) $$\cos\varphi=\frac{|\mathbf{u}_1\bullet\mathbf{u}_2|}{|\mathbf{u}_1||\mathbf{u}_2|},$$

(11) $$H_1 \| H_2 \Leftrightarrow \mathbf{u}_1 \| \mathbf{u}_2 \Leftrightarrow R\left(\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \end{bmatrix}\right)=1,$$

(12) $$H_1 \perp H_2 \Leftrightarrow \mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2 \Leftrightarrow \mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_2 = 0.$$

Kąt między prostą L_1 *i* H^k:

$$\psi = \sphericalangle(L_1, H^k) := \sphericalangle(L_1, L_1'),$$

gdzie L_1' jest rzutem normalnym prostej L_1 na H^k (*rzutem normalnym zbioru A na hiperpłaszczyźnie* H^k nazywamy zbiór rzutów normalnych punktów zbioru A, por. § 13). W szczególności, jeżeli $k=n-1$, tzn. $H^k = H_1$, to

(13) $$\sin\psi = \frac{|\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{u}_1|}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{u}_1|};$$

(14) $$L_1 \| H_1 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 \perp \mathbf{u}_1 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{u}_1 = 0,$$

(15) $$L_1 \perp H_1 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 \| \mathbf{u}_1 \Leftrightarrow R\left(\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \end{bmatrix}\right)=1.$$

11.3. Uzupełnimy wiadomości teoretyczne dotyczące prostej na $\mathbf{R}^2$ częściowo znane z kursu szkolnego. Z (4) przy odpowiednio zmienionych oznaczeniach otrzymujemy:

(16) $$Ax+By+C=0, \quad \mathbf{u}=(A,B)\neq\mathbf{0}$$

– *prosta w postaci ogólnej*;

z (16) dla $B\neq 0$ mamy

(17) $$y=mx+n, \quad \text{gdzie} \quad m=-\frac{A}{B}=\operatorname{tg}\alpha$$

– *prosta w postaci kierunkowej*. Równanie (17) nie obejmuje prostych równoległych do osi Oy. Jeżeli w (16) $ABC\neq 0$, to

(18) $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \text{– \textit{postać odcinkowa prostej}}.$$

Równanie (18) nie obejmuje prostych równoległych do osi układu i prostych przechodzących przez punkt $O(0,0)$. Dla prostych w postaci (17) mamy

(19) $$L_1 \| L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2,$$

(20) $$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + 1 = 0,$$

(21) $$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|,$$

gdzie φ jest kątem między prostymi L_1 i L_2;

(22) $$y - y_0 = m(x - x_0), \quad x = x_0$$

– *pęk* $(L)_{P_0}$ *prostych przechodzących przez punkt* $P_0(x_0, y_0)$. Jeżeli $P_0(x_0, y_0)$ jest punktem przecięcia prostych $A_i x+B_i y+C_i=0$, $i=1,2$, to

(23) $(L)_{P_0}: \alpha(A_1 x+B_1 y+C_1)+\beta(A_2 x+B_2 y+C_2)=0, \quad \alpha,\beta\in\mathbf{R}\wedge\alpha^2+\beta^2>0.$

Prosta przechodząca przez dwa różne punkty $P_1(x_1, x_2)$, $P_2(x_2, y_2)$ *ma równanie*

(24)
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

(25)
$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1), \quad \text{gdy} \quad x_1\neq x_2.$$

Zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają nierówność:

(26)
$$Ax+By+C>0 \quad [Ax+By+C<0], \quad \mathbf{u}=(A, B)\neq\mathbf{o}$$

tworzy *półpłaszczyznę* leżącą po jednej stronie prostej L: $Ax+By+C=0$, nazywamy ją *półpłaszczyzną dodatnią* [*ujemną*].

Przykłady

11.1. Przez każdy z punktów $A(1,0)$, $B(3,0)$, $C(-1,1)$, $D(0,5)$ poprowadzić po jednej prostej w taki sposób, aby utworzyły one kwadrat.

Rozwiązanie. Oznaczmy poszukiwane proste przez L_1, L_2, L_3 i L_4, gdzie $A\in L_1$, $B\in L_2$, $C\in L_3$ i $D\in L_4$. Łatwo sprawdzić, że istnieją trzy możliwe kombinacje par boków równoległych, mianowicie:

α) $L_1 \| L_2 \wedge L_3 \| L_4$, gdzie $L_1 \perp L_3$,
β) $L_1 \| L_3 \wedge L_2 \| L_4$, gdzie $L_1 \perp L_2$,
γ) $L_1 \| L_4 \wedge L_2 \| L_3$, gdzie $L_1 \perp L_2$.

Piszemy równania pęków prostych przez punkty A, B, C i D, uwzględniając warunki przypadków α), β) i γ).

Otóż w przypadku α)(¹):

$$(L)_A: mx-y-m=0, \qquad (L)_B: mx-y-3m=0,$$
$$(L)_C: x+my+1-m=0, \qquad (L)_D: x+my-5m=0,$$

w przypadku β):

$$(L)_A: kx-y-k=0, \qquad (L)_C: kx-y+k+1=0,$$
$$(L)_B: x+ky-3=0, \qquad (L)_D: x+ky-5k=0,$$

w przypadku γ):

$$(L)_A: rx-y-r=0, \qquad (L)_D: rx-y+5=0,$$
$$(L)_B: x+ry-3=0, \qquad (L)_C: x+ry+1-r=0.$$

(¹) Nie uwzględnione w równaniach pęków proste prostopadłe do osi Ox nie spełniają warunków zadania.

Proste będą tworzyły kwadrat, jeżeli odległości par boków równoległych będą równe. Korzystając ze wzoru $d(L_1, L_2)=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (por. zad. 11.6), otrzymujemy:

w przypadku α):

$$(d(L_1, L_2)=d(L_3, L_4))\Leftrightarrow\left(\frac{|-m+3m|}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{|1-m+5m|}{\sqrt{1+m^2}}\right)\Leftrightarrow(m=-\tfrac{1}{2}\vee m=-\tfrac{1}{6}).$$

Mamy zatem dwa rozwiązania: $x+2y-1=0$, $x+2y-3=0$, $2x-y+3=0$, $2x-y+5=0$ oraz $x+6y-1=0$, $x+6y-3=0$, $6x-y+7=0$, $6x-y+5=0$;

w przypadku β):

$$(d(L_1, L_3)=d(L_2, L_4))\Leftrightarrow\left(\frac{|-k-k-1|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|-3+5k|}{\sqrt{1+k^2}}\right)\Leftrightarrow(k=\tfrac{2}{7}\vee k=\tfrac{4}{3}),$$

tzn. mamy również dwa rozwiązania: $2x-7y-2=0$, $2x-7y+9=0$, $7x+2y-21=0$, $7x+2y-10=0$ oraz $4x-3y-4=0$, $4x-3y+7=0$, $3x+4y-9=0$, $3x+4y-20=0$;

w przypadku γ):

$$(d(L_1, L_4)=d(L_2, L_3))\Leftrightarrow\left(\frac{|-r-5|}{\sqrt{1+r^2}}=\frac{|-3-1+r|}{\sqrt{1+r^2}}\right),$$

tzn. $r+5=r-4$ lub $r+5=4-r$. Pierwsze równanie jest sprzeczne, natomiast z drugiego otrzymujemy $r=-\frac{1}{2}$. Istnieje zatem jedno rozwiązanie:

$$x+2y-1=0, \quad x+2y-10=0, \quad 2x-y-6=0, \quad 2x-y+3=0.$$

11.2. Znaleźć środek okręgu wpisanego w trójkąt o danych równaniach boków:

$$L_1: x+y+12=0, \quad L_2: 7x+y=0 \quad \text{i} \quad L_3: 7x-y+28=0.$$

Rozwiązanie. Zadanie można rozwiązać różnymi metodami.

I. Oznaczając szukany punkt przez $D(x^*, y^*)$, jego odległości od prostych L_1, L_2, L_3 odpowiednio przez d_1, d_2, d_3 otrzymujemy: $d_1=d_2=d_3$, tzn. układ dwóch równań niezależnych

(a) $$d_1=d_2 \quad \text{i} \quad d_2=d_3.$$

Z kolei, uwzględniając wzór (6), otrzymujemy cztery układy równań w zależności od położenia punktu $D(x^*, y^*)$ względem prostych L_1, L_2, L_3 (por. wzór (26) oraz rys. 11.1). Z warunków zadania wynika, że punkt D ma być punktem wewnętrznym trójkąta, stąd

$$d_1=\frac{x^*+y^*+12}{\sqrt{2}}, \quad d_2=-\frac{7x^*+y^*}{\sqrt{50}}, \quad d_3=\frac{7x^*-y^*+28}{\sqrt{50}},$$

zatem z układu (a) mamy

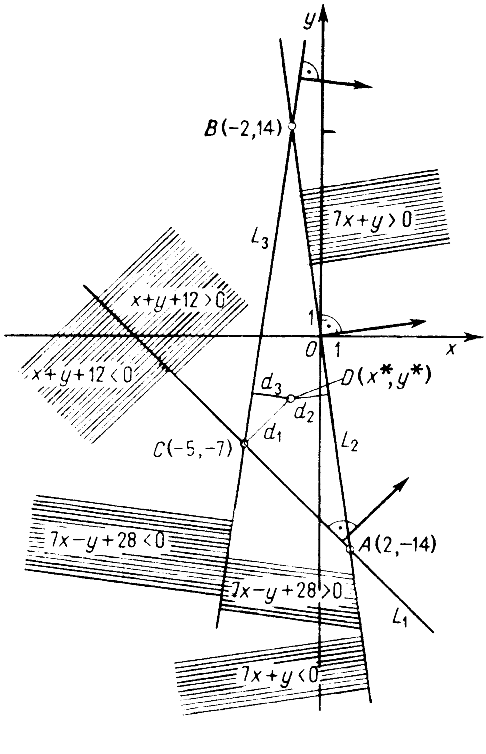
$$\frac{x^*+y^*+12}{\sqrt{2}}=-\frac{7x^*+y^*}{\sqrt{50}}, \quad -\frac{7x^*+y^*}{\sqrt{50}}=\frac{7x^*-y^*+28}{\sqrt{50}},$$

czyli

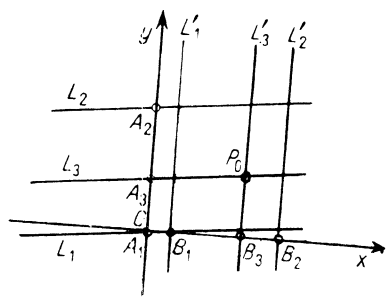
$$2x^* + y^* + 10 = 0, \qquad x^* = -2,$$

a więc $D(-2, -6)$.

II. Można znaleźć równania dwóch dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta ABC, a następnie ich punkt przecięcia.



Rys. 11.1



Rys. 11.2

11.3. Znaleźć warunek konieczny i dostateczny na to, żeby punkt $P_0(x_0, y_0)$ leżał między dwiema prostymi równoległymi

$$L_1: Ax + By + C = 0, \qquad L_2: Ax + By + D = 0 \qquad (C \neq D).$$

Rozwiązanie. Znajdujemy równanie prostej L_3 przechodzącej przez punkty $_0$ i równoległej do prostych L_1 i L_2 (rys. 11.2):

$$L_3: A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

oraz punkty $A_i(0, y_i) = L_i \cap Oy$ [1], $i = 1, 2, 3$, jeżeli $B \neq 0$, lub punkty $B_i(x_i, 0) = L_i \cap Ox$,

[1] Punkt A przecięcia prostych L_1 i L_2 oznaczać będziemy przez $L_1 \cap L_2 = A$.

$i=1,2,3$, gdy $B=0$ (rys. 11.2, gdzie np. $D>C$). Otrzymujemy

$$A_1\left(0,\frac{-C}{B}\right),\quad A_2\left(0,\frac{-D}{B}\right),\quad A_3\left(0,y_0+\frac{Ax_0}{B}\right);$$

$$B_1\left(\frac{-C}{A},0\right),\quad B_2\left(\frac{-D}{A},0\right),\quad B_3(x_0,0).$$

Warunek konieczny i dostateczny na to, by punkt P_0 leżał między prostymi L_1 i L_2 jest równoważny warunkowi, aby punkt A_3 względnie B_3, leżał między punktami A_1 i A_2 względnie między punktami B_1 i B_2. Z kolei, warunek ostatni zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy stosunek pojedynczego podziału (por. przykład 9.2)

$$k_1=(A_1A_2A_3)=\frac{A_1A_3}{A_2A_3},\quad \text{względnie}\quad k_2=(B_1B_2B_3)=\frac{B_1B_3}{B_2B_3}$$

jest ujemny. Otrzymujemy więc

$$\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}<0,\quad \text{względnie}\quad \frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}<0,$$

czyli

$$\frac{y_0+\dfrac{Ax_0}{B}+\dfrac{C}{B}}{y_0+\dfrac{Ax_0}{B}+\dfrac{D}{B}}<0,\quad \text{względnie}\quad \frac{x_0+\dfrac{C}{A}}{x_0+\dfrac{D}{A}}<0,$$

lub po uproszczeniu

$$\frac{Ax_0+By_0+C}{Ax_0+By_0+D}<0,\quad \text{względnie}\quad \frac{Ax_0+C}{Ax_0+D}<0.$$

Stąd ostatecznie otrzymujemy poszukiwany warunek

$$(Ax_0+By_0+C)(Ax_0+By_0+D)<0.$$

Zadania

11.4. Promień świetlny biegnący po prostej $3x+4y-12=0$ odbija się od osi Oy i biegnie w I ćwiartce układu Oxy. Znaleźć równanie prostej, na której leży promień odbity.

11.5. Wyprowadzić wzór (6) dla $n=2$.

11.6. Wyprowadzić wzór na odległość dwóch prostych równoległych: $A_ix+B_iy+C_i=0$, $i=1,2$.

11.7. Znaleźć równanie prostej przechodzącej przez punkt przecięcia prostych $2x+3y-1=0$ i $4x-3y-2=0$ oraz: a) punkt $A(2,1)$; b) równoległej do prostej $7x-y=3$; c) prostopadłej do prostej $x+4y-3=0$; d) tworzącej z prostą $y=2x-4$ kąt $\alpha=\frac{1}{4}\pi$; e) oddalonej od punktu $B(3,1)$ o 2.

11.8. Dla jakiej wartości parametru k proste $3kx-2y+3=0$ i $x+4y-3=0$ są prostopadłe?

11.9. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A(1, 2)$, $B(-1, 1)$ i $C(-2, 3)$. Znaleźć równania prostych, w których są zawarte: a) wysokości trójkąta; b) symetralne boków; c) środkowe; d) dwusieczne kątów wewnętrznych.

11.10. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A(1, 1)$, $B(2, 3)$ i $C(4, 1)$. Znaleźć obwód trójkąta, tangensy jego kątów wewnętrznych, pole trójkąta i promień okręgu opisanego.

11.11. Dany jest pęk prostych $\alpha(2x-7y+11)+\beta(5x+3y-1)=0$ (¹). Znaleźć prostą pęku: a) przechodzącą przez punkt $A(-2, 3)$; b) przechodzącą przez punkt $O(0, 0)$; c) równoległą do osi Ox; d) równoległą do osi Oy.

11.12. Dany jest pęk prostych $(2+3k)x-(4-7k)y+k=0$. Znaleźć równanie prostej pęku odległej od punktu $A(1, 1)$ o 1.

11.13. Znaleźć równanie prostej przechodzącej przez punkt $A(-2, 3)$ i tworzącej z osiami układu trójkąt o polu $S=5$.

11.14. Znaleźć równanie prostej równo odległej od punktów $A(2, 5)$ i $B(3, 1)$, takiej żeby jej odcinek zawarty między prostymi $x+y-3=0$ i $x+y-10=0$ miał długość 5.

11.15. Dane są proste $x-3y+10=0$, $2x+y-8=0$ i punkt $A(0, 1)$. Przez punkt A poprowadzić taką prostą, aby jej odcinek zawarty między danymi prostymi miał środek w punkcie A.

11.16. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $O(0, 0)$, $A(10, 0)$ i $C(6, 8)$. Znaleźć: współrzędne środka ciężkości, współrzędne punktu przecięcia wysokości i współrzędne środka okręgu opisanego oraz sprawdzić, że punkty te są współliniowe.

11.17. Dany jest trójkąt o wierzchołkach: $A(-2, 1)$, $B(3, 4)$, $C(7, -1)$. Znaleźć równania prostych, w których są zawarte: a) środkowa boku BC; b) wysokość z wierzchołka B; c) symetralna boku AB; d) dwusieczna kąta wewnętrznego przy wierzchołku C oraz znaleźć równania odcinka AB i równania półprostej wyznaczonej przez punkt C i wektor $\overline{CA}$.

11.18. Promień światła przechodzący przez punkt $A(2, 3)$ po odbiciu od prostej $x+y+1=0$ przechodzi przez punkt $B(1, 1)$. Znaleźć równanie promienia padającego i odbitego.

11.19. Znaleźć środek okręgu wpisanego w trójkąt o bokach zawartych w prostych $3x-4y=0$, $4x-3y=0$, $5x+12y-10=0$.

11.20. Znaleźć równanie prostej przechodzącej przez początek układu, wiedząc, że suma odległości punktów $A_1(1, 1)$ i $A_2(2, -3)$ od tej prostej jest równa $\frac{8}{5}\sqrt{5}$.

11.21. Dane są równania dwóch boków równoległoboku $8x+3y+1=0$ i $2x+y-1=0$ i równanie jednej z przekątnych $3x+2y+3=0$. Znaleźć współrzędne wierzchołków tego równoległoboku.

(¹) Zakładając, np. że $\alpha\neq 0$ z równania (23) otrzymujemy $A_1x+B_1y+C_1+k(A_2x+B_2y+C_2)=0$, gdzie $k=\beta/\alpha$ przebiega wszystkie liczby rzeczywiste. Otrzymane równanie jest równaniem pęku $(L)_{P_0}$ bez prostej $A_2x+B_2y+C_2=0$.

11.22. Znaleźć równania boków trójkąta o danych wierzchołkach $A(2, 1)$, $B(4, 9)$ i punkcie przecięcia wysokości $D(3, 4)$.

11.23. Znaleźć równania boków trójkąta, jeżeli punkt $A(2, 5)$ jest jego wierzchołkiem i proste $3x+4y-12=0$, $x-y-1=0$ są dwusiecznymi kątów wewnętrznych trójkąta.

11.24. Wykazać, że jeżeli różne proste $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{a_1}+\frac{y}{b_1}=1$ tworzą z osiami układu trójkąty o równych polach, to zachodzi związek $\frac{y'}{x'}=\frac{b-b_1}{a_1-a}$, gdzie (x', y') jest punktem przecięcia danych prostych (zakładamy, że a, b, a_1, b_1 są dodatnie).

11.25. Wykazać, że punkty $A_i(x_i, y_i)$, $i=1, 2, 3$, są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

11.26. Wykazać, że proste $A_ix+B_iy+C_i=0$, $i=1, 2,$; a) przecinają się; b) są równoległe, ale nie pokrywają się; c) pokrywają się, wtedy i tylko wtedy gdy: w przypadku a) $R(\boldsymbol{D})=2$; w przypadku b) $\mathrm{R}(\boldsymbol{D})=1$ i $\mathrm{R}(\boldsymbol{D}_u)=2$ oraz w przypadku c) $\mathrm{R}(\boldsymbol{D}_u)=1$, gdzie

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_u=\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}.$$

11.27. Wykazać, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, żeby trzy proste

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3=0,$$

przecinały się w jednym punkcie lub były równoległe jest równość

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0.$$

11.28. Znaleźć równanie prostej L w układzie biegunowym, przyjmując jako parametry: a) długość p odcinka OA prostopadłego do prostej L, gdzie $A \in L$ oraz kąt $\alpha=[Ox, \overline{OA}]$, przy czym Ox jest osią biegunową; b) kąt α jaki tworzy oś biegunowa z prostą L i miarę $a=OA$ wektora $\overline{OA}$, gdzie A jest punktem przecięcia prostej L z osią biegunową lub jej przedłużeniem (oś biegunową wraz z jej przedłużeniem traktujemy jako oś liczbową, względem której określamy miarę $a=OA$).

11.29. W układzie $Or\varphi$ znaleźć równania prostych określonych następująco:
a) prosta przechodzi przez biegun i tworzy z osią biegunową kąt $\alpha=\frac{1}{4}\pi$;
b) prosta przechodzi przez biegun i tworzy z osią biegunową kąt $\varphi=\varphi_0$;
c) prosta przechodzi przez punkt $A(3, \frac{1}{4}\pi)$ i jest prostopadła do osi biegunowej;
d) prosta przechodzi przez punkt $A(1, \frac{1}{2}\pi)$ i jest równoległa do osi biegunowej;
e) prosta przechodzi przez punkt $A(3, \frac{1}{12}\pi)$ i tworzy z osią biegunową kąt $\alpha=\frac{1}{4}\pi$.

11.30. Znaleźć w układzie $Oxy \sim Or\varphi$ równania prostych:
a) $r\cos\varphi=3$; b) $r\sin\varphi=\frac{1}{2}\sqrt{2}$; c) $r\sin(\frac{1}{4}\pi-\varphi)=1$;
d) $r\cos(\varphi-\frac{1}{3}\pi)=\frac{1}{3}$; e) $r(3\sin\varphi+5\cos\varphi)=15$.

11.31. Znaleźć w układzie $Or\varphi \sim Oxy$ równania prostych:
a) $y=3x$; b) $x=5$; c) $y+6=0$; d) $3x+2y=0$; e) $5x+7y-1=0$.

11.32. Znaleźć zbiór punktów równo oddalonych od prostych:
a) $x-y=0$ i $x+y=0$; b) $x+2y=0$ i $3x+4y=0$;
c) $3x-4y+2=0$ i $5x+12y-3=0$.

11.33. Dany jest punkt A i prosta L. Znaleźć zbiór punktów M dzielących odcinek AP w danym stosunku k, gdzie P oznacza zmienny punkt prostej L.

11.34. Wykazać, że jeżeli początek wektora $\mathbf{u}=(A, B)$ leży na prostej $Ax+By=0$, to jego koniec leży w półpłaszczyźnie dodatniej (por. (26)).

11.35. Narysować części płaszczyzny, których współrzędne punktów spełniają nierówności:
a) $x\geqslant 0$; b) $y>-1$; c) $x-y\geqslant 0$; d) $3x-y+1<0$;
e) $x\geqslant 2$ i $y\geqslant -2$; f) $-1\leqslant x\leqslant 3$ i $0\leqslant y\leqslant 2$;
g) $0\leqslant y\leqslant x$ i $x+y\leqslant\pi$; h) $2\leqslant 2x+y<8$ i $x\geqslant 0$ i $y\geqslant 0$;
i) $Ax+By+C_1>0$ i $Ax+By+C_2\leqslant 0$ i $A_1x+B_1y+D_1>0$ i $A_1x+B_1y+D_2\leqslant 0$, gdzie $B>0$, $B_1<0$, $C_2>C_1$, $D_1>D_2$;
j) $2x-y>0$ i $x-2y-2<0$ i $x+y-3>0$ i $5x+4y-20<0$.

11.36. Dane są proste równoległe L_i: $Ax+By+C_i=0$ $i=1, 2, 3$. Wykazać, że prosta L_2 leży między prostymi L_1 i L_3 wtedy i tylko wtedy, gdy $C_1<C_2<C_3$ lub $C_3<C_2<C_1$.

11.37. Dane są punkty i proste:
a) $A_1(-2, 1)$, $B_1(-3, 2)$, $L_1: 2x-y+1=0$, $L_1^*: x+y-2=0$;
b) $A_2(-4, -1)$, $B_2(0, 3)$, $L_2: x+y+1=0$, $L_2^*: 3x-y-1=0$;
c) $A_3(-1, 5)$, $B_3(1, -6)$, $L_3: x-y=0$, $L_3^*: x+4y=0$.
Nie posługując się rysunkiem sprawdzić, czy punkty A_i, B_i, $i=1, 2, 3$, leżą: w jednym obszarze kątowym, w dwóch przyległych obszarach kątowych, czy w dwóch obszarach kątów wierzchołkowych utworzonych przez proste L_i i L_i^*, $i=1, 2, 3$.

11.38. Nie posługując się rysunkiem zbadać położenia punktów:
a) $A_1(4, 5)$; b) $A_2(5, -\frac{5}{7})$; c) $A_3(2, 2)$
względem trójkąta o wierzchołkach $A(6, -1)$, $B(2, 4)$ i $C(-1, 1)$.

Odpowiedzi

11.4. $3x-4y+12=0$ dla $x\geqslant 0$, względnie $x=4t$, $y=3+t$ dla $t\geqslant 0$.

11.6. $d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

11.7. a) $2x-3y-1=0$; b) $14x-2y-7=0$; c) $4x-y-2=0$;
d) istnieją dwie proste $6x+2y-3=0$ i $2x-6y-1=0$; e) $y=\frac{2}{9}(5\mp 2\sqrt{13})\,(x-\frac{1}{2})$.

11.8. $k=\frac{8}{3}$.

11.9. a) $x-2y+3=0,\ 2x+y+1=0, 3x-y+4=0$;
b) $4x+2y-3=0,\ 3x-y+4=0,\ 2x-4y+11=0$;
c) $y=2,\ 3x-y+4=0,\ 3x+4y-6=0$;
d) $(1-\sqrt{2})\,x+(3+2\sqrt{2})\,y-3\sqrt{2}-7=0,\ 3x-y+4=0,$
$(2\sqrt{2}+1)\,x+(3+\sqrt{2})\,y-7+\sqrt{2}=0$.

11.10. Obwód $p=\sqrt{5}+\sqrt{8}+3$; $\operatorname{tg}\sphericalangle A=2$, $\operatorname{tg}\sphericalangle B=3$, $\operatorname{tg}\sphericalangle C=1$; $S_\Delta=3$; promień okręgu opisanego $R=\sqrt{\frac{5}{2}}$.

11.11. a) $33x+28y-18=0$; b) $57x+26y=0$; c) $41y-57=0$; d) $41x+26=0$.

11.12. Proste pęku dla $k=\dfrac{\pm 4}{3\sqrt{7}}$.

11.13. Wsk. Zastosować równanie (18).

$$3(-5-\sqrt{85})\,x+2(5-\sqrt{85})\,y=60 \quad \text{i} \quad 3(-5+\sqrt{85})\,x+2(5+\sqrt{85})\,y=60\,.$$

11.14. $4x-3y-1=0$ i $6x-8y+9=0$. **11.15.** $x+4y-4=0$.

11.16. Środek ciężkości $S(\frac{16}{3},\frac{8}{3})$; punkt przecięcia wysokości $S_1(6, 3)$; środek okręgu opisanego $S_2(5, \frac{5}{2})$.

11.17. a) $x-14y+16=0$; b) $9x-2y-19=0$; c) $5x+3y-10=0$;
d) $(5\sqrt{85}+2\sqrt{41})x+(4\sqrt{85}+9\sqrt{41})y-31\sqrt{85}-5\sqrt{41}=0$;
równania odcinka AB: $x=-2+5t,\ y=1+3t,\ t\in\langle 0, 1\rangle$;
równania półprostej: $x=7-9t,\ y=-1+2t,\ t\in\mathbf{R}_+\cup\{0\}$.

11.18. $5x-4y+2=0$ i $4x-5y+1=0$. **11.19.** $D(\frac{25}{49},\frac{25}{49})$.

11.20. Istnieją cztery proste $2x-y=0$, $22x-19y=0$, $4(\sqrt{21}-2)x+(\sqrt{21}+32)y=0$ i $4(\sqrt{21}+2)x-(32-\sqrt{21})y=0$.

11.21. $A(1,-3)$, $B(-2, 5)$, $C(5, -9)$ i $D(8, -17)$.

11.22. $4x-y-7=0,\ x+3y-31=0,\ x+5y-7=0$.

11.23. $3x-46y+28=0,\ 9x+2y-28=0,\ 46x-3y-77=0$.

11.27. Wsk. Por. T_6 § 6.

11.28. a) $r=\dfrac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}$; b) $r\sin(\alpha-\varphi)=a\sin\alpha$.

11.29. a) $\varphi=\frac{1}{4}\pi$ i $\varphi=\frac{5}{4}\pi$; b) $\varphi=\varphi_0$ i $\varphi=\varphi_0+\pi$; c) $r\cos\varphi=\frac{3}{2}\sqrt{2}$;

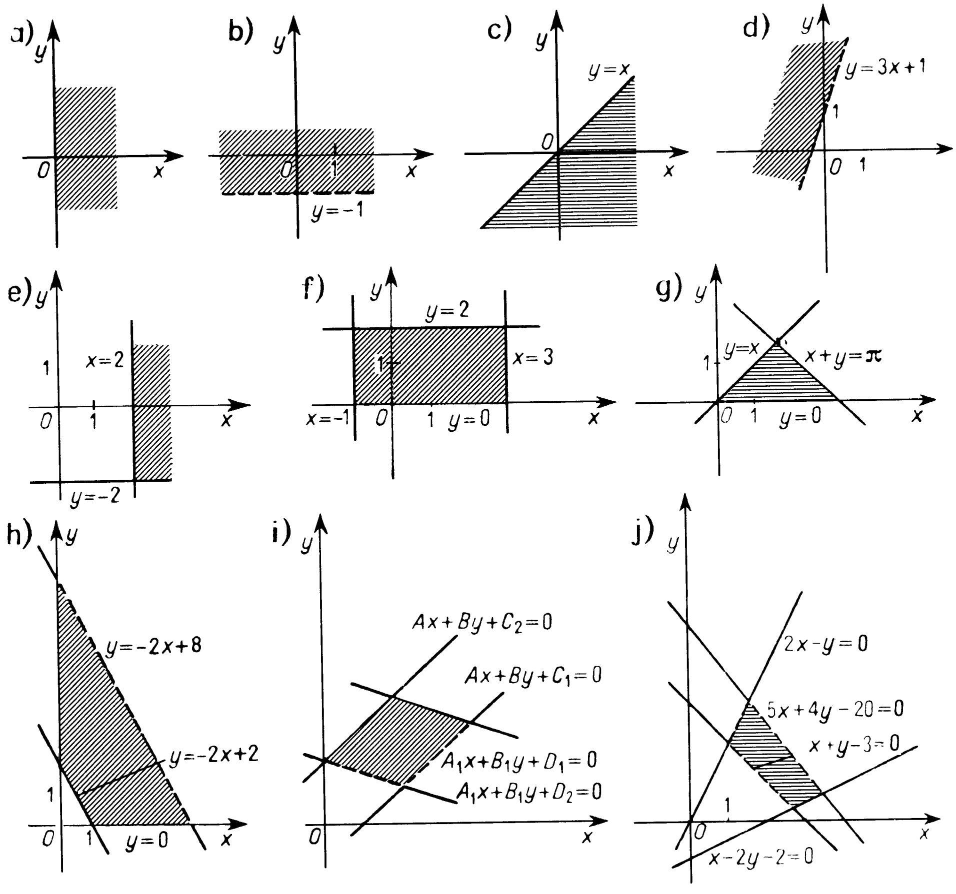
d) $r=\dfrac{1}{\sin\varphi}$, $0<\varphi<\pi$; e) $r\sin(\frac{1}{4}\pi-\varphi)=\frac{3}{4}$, $-\frac{3}{4}\pi<\varphi<\frac{1}{4}\pi$.

11.30. a) $x=3$; b) $y=\frac{1}{2}\sqrt{2}$; c) $x-y=\sqrt{2}$; d) $3x+3\sqrt{3}y-2=0$; e) $5x+3y-$ $-15=0$.

11.31. a) $\operatorname{tg}\varphi=3$; b) $r\cos\varphi=5$; c) $r\sin\varphi=-6$;
d) $r(3\cos\varphi+2\sin\varphi)=0$; e) $r(5\cos\varphi+7\sin\varphi)=1$.

11.32. a) $x=0$ i $y=0$; b) $(3\pm\sqrt{5})x+2(2\pm\sqrt{5})y=0$;
c) $64x+8y+11=0,\ 14x-112y+41=0$.

11.33. Linia prosta. **11.35.** Rys. 11.3.
11.36. Wsk. Por. przykład 11.3.
11.37. Wsk. Badać znak stosunku anharmonicznego $(A_iB_iC_iD_i)$, $i=1, 2, 3$, gdzie C_i i D_i są punktami przecięcia prostej $L_{A_iB_i}$, $i=1, 2, 3$, z prostymi L_i i L_i^*, $i=1, 2, 3$, oraz badać znaki stosunków pojedynczego podziału trójek punktów spośród punktów $A_iB_iC_iD_i$, $i=1, 2, 3$.
a) w jednym; b) w przyległych; c) w wierzchołkowych.



Rys. 11.3

11.38. Wsk. Znaleźć równania boków trójkąta i zbadać znaki lewych stron tych równań w obszarach, na które trzy proste przechodzące przez wierzchołki dzielą płaszczyznę.
a) A_1 leży zewnątrz trójkąta; b) A_2 leży na boku trójkąta;
c) A_3 leży wewnątrz trójkąta.

§ 12. PŁASZCZYZNA I PROSTA W $\mathbf{R}^3$

12.1. Z równań (1), (2) (4), (5) § 11 przy odpowiednio zmienionych oznaczeniach otrzymujemy *równanie płaszczyzny H*:

(1) $(\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{u}+k\mathbf{v})\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(x=x_0+u_x t+v_x k,\ y=y_0+u_y t+v_y k,\ z=z_0+u_z t+v_z k\ ,\ t,\ k\in\mathbf{R}),$$

gdzie $\mathbf{u}=(u_x, u_y, u_z)||H\wedge\mathbf{v}=(v_x, v_y, v_z)||H$ — *w postaci wektorowej i parametrycznej* (por. rys. 12.1);

(2) $$Ax+By+Cz+D=0,\quad \mathbf{u}=(A, B, C)\perp H$$

–*w postaci ogólnej*;

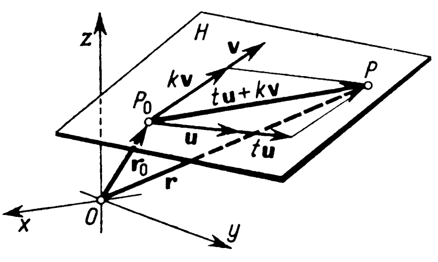
(3) $$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(x-z_0)=0$$

– *przechodzącej przez punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ i prostopadłej do* $\mathbf{u}=(A, B, C)$. Jeżeli $ABCD\neq 0$, to z (2) otrzymujemy

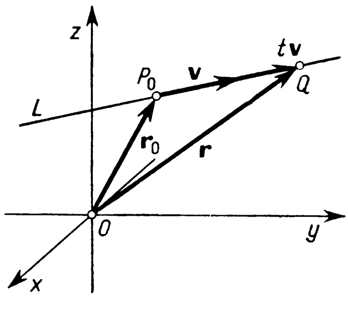
(4) $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

– *w postaci odcinkowej*, gdzie $P_1(a, 0, 0)\in Ox$, $P_2(0, b, 0)\in Oy$, $P_3(0, 0, c)\in Oz$. Warunki równoległości [prostopadłości] płaszczyzn oraz wektora do płaszczyzny określone są wzorami (11), (12), (14) i (15) § 11. Kąt między płaszczyznami, kąt wektora z płaszczyzną określone są wzoram (10) i (13) § 11. Ze wzoru (6) § 11 otrzymujemy wzór na odległość punktu $P_0(x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny H

(5) $$d(P_0, H)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$



Rys. 12.1



Rys. 12.2

12.2. Z (3) § 11 przy odpowiednio zmienionych oznaczeniach otrzymujemy

(6) $$L:\ (\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{v})\Leftrightarrow(x=x_0+v_x t,\ y=y_0+v_y t,\ z=z_0+v_z t,\ t\in\mathbf{R}),$$

gdzie $\mathbf{v}=(v_x, v_y, v_z)||L$ (por. rys. 12.2). Prostą (6) oznaczamy $L(P_0;\ \mathbf{v}_{||})$, prostą zaś wyznaczoną przez punkty P_1 i P_2 oznaczamy $L(P_1;\ P_2)=L(P_1;\ \overline{P_1P_2}_{||})$. Jeżeli $v_x v_y v_z\neq 0$, to z (6) otrzymujemy

(7) $$\frac{x-x_0}{v_x}=\frac{y-y_0}{v_y}=\frac{z-z_0}{v_z}$$

— *równania prostej* $L(P_0;\ \mathbf{v}_{||})$ *w postaci kierunkowej.*

Dwie nierównoległe płaszczyzny $H_i:\ A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0,\ i=1,2$ określają *prostą w postaci krawędziowej*:

(8) $$L:\ (A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0)\wedge(A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0),$$

przy czym czasami będziemy pisali:

$$L:\ \begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}\quad \text{względnie}\quad L=H_1\cap H_2.$$

Równanie pęku płaszczyzn $(H)_L$ wyznaczonego przez (8):

(9) $$(H)_L:\ p_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+p_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

gdzie $p_1, p_2\in\mathbf{R}\wedge p_1^2+p_2^2>0$.

Zakładając np. że $p_1\neq 0$, z (9) otrzymujemy

(10) $$(H)_L-\{H_2\}:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1+k(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

gdzie $k=\frac{p_2}{p_1}$.

Warunki równoległości i prostopadłości dwóch prostych oraz prostej i płaszczyzny w $\mathbf{R}^3$ określone są wzorami (8), (9), (14) i (15) § 11. Kąt między prostymi i kąt między prostą i płaszczyzną określone są wzorami (7) i (13) § 11. Korzystając z iloczynu wektorowego, można wyprowadzić wzory:

(11) $$d(P_0, L)=\frac{|\mathbf{v}\times\overline{P_0P_1}|}{|\mathbf{v}|},\quad \mathbf{v}\,||\,L\wedge P_1\in L,$$

(12) $$d(L_1, L_2)=\frac{|\mathbf{v}_3\bullet(\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2)|}{|\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2|},$$

$$\sim(L_1\,||\,L_2)\wedge P_1\in L_1\wedge P_2\in L_2\wedge\mathbf{v}_3=\overline{P_1P_2}.$$

Przykłady

12.1. Znaleźć równanie płaszczyzny H przechodzącej przez punkty $P_1(-1, 2, 4)$, $P_2(2, -1, 3)$ i $P_3(3, 3, -2)$ oraz znaleźć długości odcinków o jednym z końców w punkcie $O(0, 0, 0)$, jakie ta płaszczyzna odcina na osiach układu.

R o z w i ą z a n i e. W celu zastosowania np. wzoru (3) wystarczy znaleźć wektor $\mathbf{u}\perp H$, wówczas $H=H(P_1;\ \mathbf{u}_\perp)$. Ale $\mathbf{u}=\overline{P_1P_2}\times\overline{P_1P_3}$ (rys. 12.3), skąd $\overline{P_1P_2}=(3, -3, -1)$, $\overline{P_1P_3}=$ $=(4, 1, -6)$, $\mathbf{u}=(19, 14, 15)$, zatem (wzór (3))

$$H:\ 19(x+1)+14(y-2)+15(z-4)=0,$$

tzn.

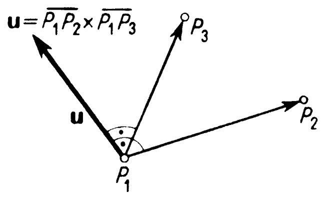
(a) $$H:\ 19x+14y+15z-69=0,$$

lub w postaci odcinkowej

(a₁) $$\frac{x}{\frac{69}{19}}+\frac{y}{\frac{69}{14}}+\frac{z}{\frac{69}{15}}=1.$$

Z postaci (a_1) otrzymujemy natychmiast punkty przebicia płaszczyzny H z osiami układu $A_1(\frac{69}{19}, 0, 0)$, $A_2(0, \frac{69}{14}, 0)$, $A_3(0, 0, \frac{69}{15})$. Zatem długości poszukiwanych odcinków są następujące:

$$d(O, A_1)=\left|\tfrac{69}{19}-0\right|=\tfrac{69}{19},\quad d(O, A_2)=\left|\tfrac{69}{14}-0\right|=\tfrac{69}{14},$$
$$d(O, A_3)=\left|\tfrac{69}{15}-0\right|=\tfrac{69}{15}.$$



Rys. 12.3

Równania płaszczyzny H w postaci wektorowej i parametrycznej są następujące:

(a_2) $$(\mathbf{r}=\overline{OP}=\overline{OP}_1+t\cdot\overline{P_1P_2}+k\cdot\overline{P_1P_3})\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x=-1+3t+4k,\ y=2-3t+k,\ z=4-t-6k,\ t, k\in\mathbf{R}).$$

Uwaga. Rugując parametry t i k z układu (a_2) otrzymujemy oczywiście równanie (a). Mając natomiast postać (a) możemy uzyskać postać parametryczną podstawiając np. $x=t$, $y=k$. Stąd $z=\frac{69}{15}-\frac{19}{15}t-\frac{14}{15}k$, zatem $x=0+1\cdot t+0\cdot k$, $y=0+0\cdot t+1\cdot k$, $z=\frac{69}{15}-\frac{19}{15}t-\frac{14}{15}k$. Tym razem ta sama płaszczyzna H jest określona przez punkt $P_4(0, 0, \frac{69}{15})$ i równoległe do niej wektory $\mathbf{u}_1=(1, 0, -\frac{19}{15})$, $\mathbf{u}_2=(0, 1, -\frac{14}{15})$.

12.2. Znaleźć równanie płaszczyzny H:

a) przechodzącej przez punkty $P_1(2, 1, 3)$, $P_2(-1, 2, 1)$ i równoległej do osi Oz;

b) przechodzącej przez punkt $P_1(1, 5, 1)$ i równoległej do wektorów $\mathbf{u}_1=(-2, 1, 3)$, $\mathbf{u}_2=(1, 4, -1)$;

c) przechodzącej przez punkt $P_1(-1, -2, 3)$ i prostopądłej do wektora $\mathbf{u}=(3, 1, 2)$;

d) przechodzącej przez punkt $P_1(2, 4, -1)$ i równoległej do płaszczyzny $2x-y-3z-1=0$;

e) przechodzącej przez punkt $P_1(3, 5, 7)$ i prostopadłej do płaszczyzn H_1: $x-y+2z-1=0$, H_2: $3x+y-z+2=0$.

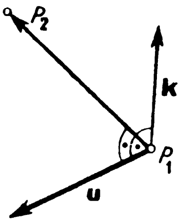
Rozwiązanie. We wszystkich przypadkach korzystamy ze wzoru (3), przy czym wystarczy tylko znaleźć wektor $\mathbf{u}=(A, B, C)$, gdyż punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ zawsze jest dany.

a) Warunek $H\|Oz$ jest równoważny warunkowi równoległości wersora $\mathbf{k}=(0, 0, 1)$ osi Oz do płaszczyzny H, zatem $H\perp\mathbf{u}=\mathbf{k}\times\overline{P_1P_2}$ (rys. 12.4) (¹). Stąd $\mathbf{u}=\mathbf{k}\times\overline{P_1P_2}=(-1, -3, 0)$, czyli $H=H(P_1;\ \mathbf{u}_\perp)$: $-1(x-2)-3(y-1)=0$, tzn. H: $x+3y-5=0$.

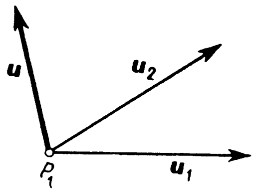
b) $H\perp\mathbf{u}=\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2$ (rys. 12.5), stąd $\mathbf{u}=(-13, 1, -9)$, więc

$$H:\ 13x-y+9z-17=0.$$

(¹) Wersor $\mathbf{k}$ traktujemy jako wektor swobodny, możemy więc jego początek przyjąć w punkcie P_1.



Rys. 12.4



Rys. 12.5

W celu znalezienia płaszczyzny H można również skorzystać z warunku komplanarności (współpłaszczyznowości) trzech wektorów (por. zadanie 8.76). Otóż jeżeli $P(x, y, z)$ jest punktem bieżącym płaszczyzny H, to wektory $\overline{P_1P}$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ są komplanarne, czyli

$$\overline{P_1 P} \bullet (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) = 0.$$

Stąd na mocy zad. 8.74 mamy

$$H: \left(\begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z-1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \right) \Leftrightarrow (13x - y + 9z - 17 = 0).$$

Uwaga. W przypadku danych punktu b) można stosować bezpośrednio wzory (1). Otóż

$$H = H(P_1\,;\, \mathbf{u}_{1\parallel}\,;\, \mathbf{u}_{2\parallel}): \quad \begin{aligned} x &= 1 - 2t + k, \\ y &= 5 + t + 4k, \\ z &= 1 + 3t - k. \end{aligned}$$

c) Korzystamy bezpośrednio ze wzoru (3),

$$H = H(P_1\,;\, \mathbf{u}_\perp): \; \big(3(x+1) + 1(y+2) + 2(z-3) = 0\big) \Leftrightarrow (3x + y + 2z - 1 = 0).$$

d) Wektor $\mathbf{u} \perp H$ będzie wektorem prostopadłym do danej płaszczyzny, a więc $\mathbf{u} = (2, -1, -3)$. Stąd

$$H = H(P_1\,;\, \mathbf{u}_\perp): \; \big(2(x-2) - (y-4) - 3(z+1) = 0\big) \Leftrightarrow (2x - y - 3z - 3 = 0).$$

e) Z warunku prostopadłości wynika, że wektor $\mathbf{u} \perp H$ spełnia warunki $\mathbf{u} \perp \mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u} \perp \mathbf{u}_2$, gdzie $\mathbf{u}_1 \perp H_1 \wedge \mathbf{u}_2 \perp H_2$. Stąd $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = (-1, 7, 4)$, czyli

$$H = H(P_1\,;\, \mathbf{u}_\perp): \; \big(-1(x-3) + 7(y-5) + 4(z-7) = 0\big) \Leftrightarrow (x - 7y - 4z + 60 = 0).$$

12.3. Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty $P_1(1, 2, -1)$, $P_2(2, 1, 1)$ i tworzącej z płaszczyzną H_1: $x - 4y + z - 1 = 0$ kąt $\varphi = \frac{1}{3}\pi$.

Rozwiązanie. Wektor $\mathbf{u} = (A, B, C)$ prostopadły do poszukiwanej płaszczyzny spełnia warunki:

α) $\mathbf{u} \perp \overline{P_1 P_2} \Leftrightarrow \mathbf{u} \bullet \overline{P_1 P_2} = 0$; β) $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$ (por. wzór (10) § 11), gdzie $\mathbf{v} = (1, -4, 1) \perp H_1$.

Stąd

$$A-B+2C=0,$$

$$\frac{1}{2}=\frac{|A-4B+C|}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

czyli

$$A-B+2C=0,$$

(a)
$$7A^2-23B^2+7C^2+16AB-4AC+16BC=0.$$

Ponieważ współrzędne A, B i C są określone z dokładnością do proporcjonalności, więc możemy przyjąć np., że $A=1$ (w przypadku $A=0$ z układu (a) wynika, że $B=C=0$, co jest niemożliwe). Stąd otrzymujemy układ równań

$$1-B+2C=0,$$

$$7-23B^2+7C^2+16B-4C+16BC=0,$$

który ma następujące rozwiązania: $C_1=0$, $B_1=1$ i $C_2=-\frac{41}{60}$, $B_2=-\frac{11}{30}$. Zatem $\mathbf{u}_1=(1,1,0)$, $\mathbf{u}_2=(60,-22,-41)$, czyli istnieją dwie płaszczyzny H_1 i H_2 spełniające warunki zadania:

$$H_1:\ x+y-3=0 \quad \text{i} \quad H_2:\ 60x-22y-41z-57=0.$$

12.4. Dana jest płaszczyzna

$$H:\ Ax+By+Cz+D=0$$

oraz dowolny punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)\notin H$.

Podać interpretację geometryczną nierówności

(a)
$$Ax_0+By_0+Cz_0+D>0 \quad [Ax_0+By_0+Cz_0+D<0].$$

Rozwiązanie. Jeżeli początkiem wektora $\mathbf{u}=(A, B, C)\perp H$ jest punkt $P_1(x_1, y_1, z_1)\in H$, to koniec wektora $\mathbf{u}$ leży w jednej i tylko jednej półprzestrzeni, na które płaszczyzna H dzieli przestrzeń. Jeżeli np. $C>0$, to wektor $\mathbf{u}$ tworzy kąt ostry ($\cos\alpha=C/|\mathbf{u}|>0$) z dodatnim kierunkiem osi Oz i możemy wówczas powiedzieć, że wektor $\mathbf{u}$ leży „powyżej”(¹) płaszczyzny H; jeżeli zaś $C<0$, to wektor $\mathbf{u}$ leży „poniżej” płaszczyzny H.

Weźmy wektor $\overline{P_1P_0}\perp H$, gdzie $P_1(x_1, y_1, z_1)\in H$. Z warunku $\overline{P_1P_0}\perp H$ wynika, że wektor $\overline{P_1P_0}=k\cdot\mathbf{u}$, gdzie $\mathbf{u}=(A, B, C)$. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by punkty $P_0(x_0, y_0, z_0)$ leżały w jednej z półprzestrzeni wyznaczonej płaszczyzną H jest to, by wektory równoległe $\overline{P_1P_0}\perp H$ i $\mathbf{u}=(A, B, C)$ miały zawsze ten sam zwrot lub zawsze przeciwny zwrot, tzn. aby zawsze

(a_1)
$$k>0$$

(¹) Słowo „powyżej” rozumiemy w ten sposób że półprzestrzeń, w której leży koniec wektora $\mathbf{u}$ zawiera dowolnie dalekie punkty dodatniej półosi Oz, tzn. dla każdej liczby $p>-D/C$, istnieje punkt $P(0,0,p)\in Oz$ leżący w tej półprzestrzeni.

lub zawsze

(a₂) $$k<0.$$

Z równości $\overline{P_1P_0}=k\mathbf{u}$ otrzymujemy

$$x_0-x_1=kA,$$
$$y_0-y_1=kB,$$
$$z_0-z_1=kC,$$

skąd po pomnożeniu pierwszego równania przez A, drugiego przez B, trzeciego przez C (zakładamy, że $A\cdot B\cdot C\neq 0$) i dodaniu stronami otrzymanych równości mamy

(a₃) $$Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)=k(A^2+B^2+C^2).$$

Z warunku $P_1\in H$ otrzymujemy $-(Ax_1+By_1+Cz_1)=D$, stąd na mocy (a_3)

(a₄) $$Ax_0+By_0+Cz_0+D=k(A^2+B^2+C^2).$$

Wyznaczając z równości (a_4) parametr k oraz uwzględniając (a_1) i (a_2), otrzymujemy

$$\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}>0 \quad [\ldots<0],$$

czyli

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D>0 \quad [\ldots<0].$$

Nierówności (a) określają więc warunek konieczny i wystarczający na to, by punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ leżał w jednej z półprzestrzeni wyznaczonych płaszczyzną H. Zbiór punktów, których współrzędne spełniają nierówność

$$Ax+By+Cz+D>0 \quad [Ax+By+Cz+D<0]$$

nazywamy *półprzestrzenią dodatnią* [*ujemną*] wyznaczoną płaszczyzną

$$H:\ Ax+By+Cz+D=0.$$

Z rozważań przeprowadzonych powyżej wynika, że koniec wektora $\mathbf{u}=(A, B, C)=\overline{P_1P}$, gdzie $P_1\in H$, leży w półprzestrzeni dodatniej wyznaczonej płaszczyzną H.

Łatwo sprawdzić, że wyprowadzony warunek jest również prawdziwy w przypadku, gdy $(A=0\vee B=0\vee C=0)\wedge A^2+B^2+C^2>0$.

12.5. Dana jest prosta L: $x=2-t$, $y=-1+2t$, $z=4+3t$ (¹). Znaleźć: a) wektor prostej; b) punkty prostej L dla wartości parametrów: $t=-2$, $t=0$, $t=1$, $t=3$; c) punkty przebicia prostej L z płaszczyznami układu $Oxyz$; d) punkty prostej L oddalone o 3 od punktu prostej L dla $t=-3$; e) równania prostej L w postaci kierunkowej; f) równania prostej L w postaci krawędziowej; g) równanie prostej L w postaci wektorowej.

(¹) Przy pisaniu równania prostej będziemy opuszczać $t\in\mathbf{R}$.

Rozwiązanie. a) Ze wzoru (6) otrzymujemy $v_x=-1$, $v_y=2$, $v_z=3$, czyli wektor $\mathbf{v}=(-1, 2, 3)\|L$.

b) Kolejno liczymy: jeżeli $t=-2$, to $x=2-(-2)=4$, $y=-1+2(-2)=-5$, $z=4+3(-2)=-2$, czyli $P_1(4, -5, -2)$; jeżeli $t=0$, to $x=2$, $y=-1$, $z=4$, czyli $P_2(2, -1, 4)$; jeżeli $t=1$, to $x=1$, $y=1$, $z=7$, czyli $P_3(1, 1, 7)$; jeżeli $t=3$, to $x=-1$, $y=5$, $z=13$, czyli $P_4(-1, 5, 13)$.

c) Każdy punkt leżący na płaszczyźnie Oyz musi być postaci $P(0, y, z)$. Stąd $2-t=0$, czyli $t=2$, więc $y=3$, $z=10$, czyli $L\cap Oyz=P_1(0, 3, 10)$. Analogicznie dla płaszczyzny Oxz mamy $-1+2t=0$, czyli $L\cap Oxz=P_2(\frac{3}{2}, 0, \frac{11}{2})$, a dla płaszczyzny Oxy mamy $4+3t=0$, czyli $L\cap Oxy=P_3(\frac{10}{3}, -\frac{11}{3}, 0)$.

d) Dla $t=-3$ mamy $P_1(5, -7, -5)\in L$. Należy znaleźć takie punkty $P(2-t\ -1+2t, 4+3t)\in L$, że $d(P_1, P)=3$. Stosując wzór na odległość dwóch punktów, otrzymujemy

$$\left(\sqrt{(2-t-5)^2+(-1+2t+7)^2+(4+3t+5)^2}=3\right)\Leftrightarrow(14t^2+84t+117=0),$$

stąd $t_{1,2}=\frac{3}{14}(-14\pm\sqrt{14})$. Istnieją więc dwa punkty $P_{2,3}(5\mp\frac{3}{14}\sqrt{14}, -7\pm\frac{6}{14}\sqrt{14}, -5\pm\frac{9}{14}\sqrt{14})$ spełniające warunek zadania.

e) Rugując parametr t z równań prostej L, otrzymujemy

$$L:\ \frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-4}{3},$$

tzn. postać kierunkową prostej L.

f) Korzystając z postaci kierunkowej otrzymujemy

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{2},\quad \frac{x-2}{-1}=\frac{z-4}{3},$$

czyli

$$L:\ \begin{array}{l} H_1:\ 2x+y-3=0,\\ H_2:\ 3x+z-10=0,\end{array}$$

a więc postać krawędziową prostej L.

g) Z równania prostej L mamy $P_0(2, -1, 4)\in L$ i $\mathbf{v}=(-1, 2, 3)\|L$, skąd

$$L:\ \mathbf{r}=\overline{OP}=\overline{OP}_0+t\mathbf{v},$$

czyli postać wektorową prostej L.

12.6. Przekształcić równania (8) (krawędziowe) do postaci (6) (parametrycznej).

Rozwiązanie. Weźmy równania (8). Z założenia $\sim(H_1\|H_2)$ wynika, że co najmniej jeden z wyznaczników stopnia drugiego macierzy $A=\begin{bmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{bmatrix}$ jest różny od zera, np.

$$w=\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\neq 0.$$

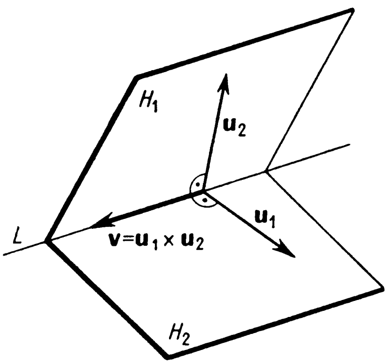
Stąd podstawiając $z=t$, otrzymujemy

$$x=\frac{1}{w}\begin{vmatrix}-D_1-C_1t & B_1\\ -D_2-C_2t & B_2\end{vmatrix}=x_0+v_xt,$$

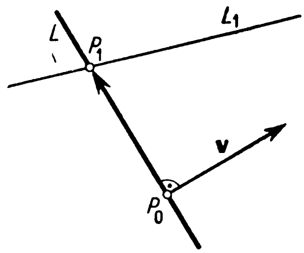
$$y=\frac{1}{w}\begin{vmatrix}A_1 & -D_1-C_1t\\ A_2 & -D_2-C_2t\end{vmatrix}=y_0+v_yt, \qquad z=0+1\cdot t,$$

tzn. postać parametryczną $(v_x^2+v_y^2+1^2>0)$.

Często postępujemy inaczej. Znajdujemy punkt $P_0\in L$ oraz wektor $\mathbf{v}||L$, przy czym $\mathbf{v}\perp\mathbf{u}_1=(A_1, B_1, C_1)$ i $\mathbf{v}\perp\mathbf{u}_2=(A_2, B_2, C_2)$, czyli $\mathbf{v}=\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2$ (rys. 12.6).



Rys. 12.6



Rys. 12.7

12.7. Znaleźć równania prostej L przechodzącej przez punkt $P_0(1, 1, 2)$, prostopadłej do wektora $\mathbf{v}=(-1, 3, 4)$ i przecinającej prostą $L_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+4}{-1}=\dfrac{z}{3}$.

Rozwiązanie. Z warunków zadania wynika, że należy znaleźć taki punkt $P_1\in L_1$, że $\overline{P_0P_1}\perp\mathbf{v}\Leftrightarrow\overline{P_0P_1}\bullet\mathbf{v}=0$. Wówczas $L=L(P_0; \overline{P_0P_1}_{||})$ (rys. 12.7). W tym celu przekształcamy równanie prostej L_1 do postaci parametrycznej

$$L_1: x=1+2t, \ y=-4-t, \ z=3t$$

oraz bierzemy zmienny punkt $P(1+2t, -4-t, 3t)\in L_1$. Zatem

$$\overline{P_0P_1}=(1+2t-1, -4-t-1, 3t-2)=(2t, -t-5, 3t-2),$$

czyli $\overline{P_0P_1}\bullet\mathbf{v}=0\Leftrightarrow -2t-3t-15+12t-8=0$. Stąd $t=\frac{23}{7}$, czyli $\overline{P_0P_1}=(\frac{46}{7}, -\frac{58}{7}, \frac{55}{7})=$ $=\frac{1}{7}(46, -58, 55)=\frac{1}{7}\mathbf{v}_1$, gdzie $\mathbf{v}_1||\overline{P_0P_1}$. A więc

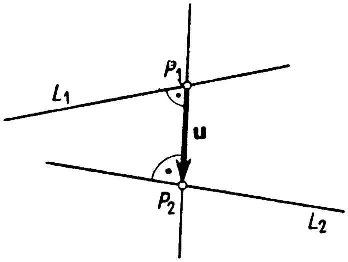
$$L: x=1+46t, \ y=1-58t, \ z=2+55t.$$

Uwaga. Zadanie można rozwiązać inaczej. Na przykład prosta L musi leżeć w płaszczyźnie $H=H(P_0; \mathbf{v}_\perp)$ i przechodzić przez punkt $B=L_1\cap H$.

12.8. Znaleźć równania prostej L przecinającej prostopadle proste:

$$L_1: x-y+z-1=0, \ 2x+y-z+2=0, \qquad L_2: x=2-3t, \ y=t, \ z=-1+2t.$$

Rozwiązanie. Znajdujemy najpierw wektor $\mathbf{u}$ zmiennej prostej $L(u,t)$ (rys. 12.8) przecinającej proste L_1 i L_2, a następnie korzystamy z warunku prostopadłości dwóch prostych. W tym celu przekształcamy równania prostej L_1 do postaci parametrycznej,



Rys. 12.8

$$L_1: \begin{matrix} 1x-1y+z-1=0, \\ 2x+1y-z+2=0, \end{matrix} \quad W=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3\neq 0,$$

skąd

$$z=u, \quad x=\tfrac{1}{3}\begin{vmatrix} 1-u & -1 \\ -2+u & 1 \end{vmatrix}=-\tfrac{1}{3},$$

$$y=x+z-1=-\tfrac{1}{3}+u-1=-\tfrac{4}{3}+u,$$

czyli L_1: $x=-\frac{1}{3}$, $y=-\frac{4}{3}+u$, $z=u$. A więc

$$\overline{P_1(u)P_2(t)}=\mathbf{u}=(\tfrac{7}{3}-3t,\, t+\tfrac{4}{3}-u,\, -1+2t-u)\|L(u,t),$$

gdzie $P_1\in L_1$, $P_2\in L_2$ oraz $\mathbf{v}_1=(0,1,1)\|L_1$, $\mathbf{v}_2=(-3,1,2)\|L_2$. Stąd

$$(\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}_1=0,\, \mathbf{u}\bullet\mathbf{v}_2=0)\Leftrightarrow(9t-6u+1=0,\, 42t-9u-23=0),$$

a więc $t=\frac{49}{57}$, $u=\frac{83}{57}$. Zatem

$$L=L(P_1,\mathbf{u}_{\|}):\; x=-\tfrac{1}{3}-\tfrac{24}{57}t,\; y=\tfrac{7}{57}+\tfrac{14}{19}t,\; z=\tfrac{83}{57}-\tfrac{14}{19}t.$$

12.9. Znaleźć równanie płaszczyzny H przechodzącej przez prostą

$$L_1:\; x-y+z-2=0,\, 2x+y-3z-1=0$$

i tworzącej z płaszczyzną H_1: $x+3y+z-4=0$ taki kąt α, że $\cos\alpha=\frac{1}{11}$.

Rozwiązanie. Poszukiwana płaszczyzna należy do pęku $(H)_{L_1}$ (por. (10))

(a) $$(H)_{L_1}:\; x-y+z-2+k(2x+y-3z-1)=0$$

(płaszczyzna $2x+y-3z-1=0$, której nie zawiera równanie (a) nie spełnia warunków zadania). W celu zastosowania wzoru (10) § 11 znajdujemy zmienny wektor $\mathbf{u}$ prostopadły do płaszczyzn pęku (a). Otóż $\mathbf{u}=(1+2k,\, -1+k,\, 1-3k)$, $\mathbf{u}_1=(1,3,1)\perp H_1$, zatem

$$\cos\alpha=\frac{1}{11}=\frac{|1+2k-3+3k+1-3k|}{\sqrt{1+9+1}\sqrt{(1+2k)^2+(-1+k)^2+(1-3k)^2}},$$

czyli

$$(30k^2-40k+8=0)\Rightarrow\left(k_{\frac{1}{2}}=\tfrac{2}{15}(5\mp\sqrt{10})\right).$$

Istnieją więc dwie płaszczyzny spełniające warunki zadania

$$x-y+z-2+\tfrac{2}{15}(5\mp\sqrt{10})(2x+y-3z-1)=0.$$

12.10. Dany jest czworościan o wierzchołkach $A(1,2,3)$, $B(-3,4,1)$, $C(1,-2,5)$ i $D(0,6,-1)$. Znaleźć równania prostych zawierających:

a) wysokość czworościanu z wierzchołka A; b) symetralną boku CD trójkąta BCD; c) rzut prostokątny na płaszczyźnie DBC wysokości z wierzchołka C trójkąta ABC; oraz obliczyć: d) długość wysokości z punktu a); e) odległość prostych $L(A, B)$ i $L(C, D)$.

Rozwiązanie. a) Szukana prosta L_1 przechodzi przez punkt A i jest prostopadła do płaszczyzny trójkąta BCD. Czyli $L_1=L(A, \mathbf{u}_{||})$, gdzie $\mathbf{u}\perp H(B; C; D)$. Stąd

$$\mathbf{u}=\overline{BC}\times\overline{BD}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 4 & -6 & 4\\ 3 & 2 & -2\end{vmatrix}=4\mathbf{i}+20\mathbf{j}+26\mathbf{k}=(4, 20, 26)||L_1,$$

więc $L_1:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{10}=\dfrac{z-3}{13}$.

b) Symetralna L_2 boku CD w trójkącie BCD jest krawędzią płaszczyzn $H_1(B; C; D)$ i $H_2(E; \overline{CD}_{\perp})$ gdzie E jest środkiem odcinka CD. Zatem $H_1=H(B, \mathbf{u}_1=(2, 10, 13)_{\perp})$ (por. punkt a)), czyli

$$H_1:\ 2x+10y+13z-47=0 \quad \text{oraz} \quad E(\tfrac{1}{2}, 2, 2), \quad \overline{CD}=(-1, 8, -6).$$

Zatem H_2: $2x-16y+12z+7=0$.

c) Szukana prosta $L_3=H_1\cap H_3$, przy czym $H_1=H(B; C; D)$ oraz $H_3\perp H_1 \wedge h_C\subset H_3$, gdzie h_C oznacza wysokość z wierzchołka C trójkąta ABC. Z kolei wysokość h_C leży na prostej $L_4=H_4(A; B; C)\cap H_5(C; \overline{AB}_{\perp})$ Zatem

$$\overline{AB}=(-4, 2, -2)=-2(2, -1, 1)=-2\mathbf{w}||\mathbf{w},$$

$$\overline{AC}=(0, -4, 2)=-2(0, 2, -1)=-2\mathbf{r}||\mathbf{r},$$

$$\mathbf{u}_2=\mathbf{w}\times\mathbf{r}=(-1, 2, 4)\perp H_4,$$

stąd

$$H_4:\ x-2y-4z+15=0, \quad H_5:\ 2x-y+z-9=0,$$

czyli L_4: $x-2y-4z+15=0$, $2x-y+z-9=0$, przy czym $L_4||\mathbf{v}_2=\mathbf{u}_2\times\mathbf{w}=(6, 9, -3)=$ $=3\cdot(2, 3, -1)=3\mathbf{v}_3$. Ale $\mathbf{u}_1=(2, 10, 13)\perp H_1$, stąd $H_3=H(C; \mathbf{u}_{3\perp})$, gdzie $\mathbf{u}_3=\mathbf{v}_2\times\mathbf{u}_1=$ $=(49, -28, 14)$. Zatem H_3: $7x-4y+2z-25=0$. A więc ostatecznie

$$L_3:\ 2x+10y+13z-47=0,\ 7x-4y+2z-25=0.$$

d) Poszukiwana długość wysokości h_A jest odległością punktu A od płaszczyzny $H(B; C; D)$. Ale $H(B; C; D)$: $2x+10y+13z-47=0$, stąd (por. wzór (6) § 11)

$$h_A=\frac{|2\cdot 1+10\cdot 2+13\cdot 3-47|}{\sqrt{4+100+169}}=\frac{14}{\sqrt{273}}.$$

e) Korzystamy ze wzoru (12) w którym $\mathbf{v}_1=-\tfrac{1}{2}\overline{AB}=(2, -1, 1)$, $\mathbf{v}_2=\overline{CD}=(-1, 8, -6)$, $\mathbf{v}_3=\overline{P_1P_2}=(0, -4, 2)$. Mamy $\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2=(-2, 11, 15)$, $\mathbf{v}_3\bullet(\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2)=-14$,

$$d(L(A, B), L(C, D))=\frac{|-14|}{\sqrt{350}}=\frac{1}{5}\sqrt{14}.$$

12.11. Znaleźć równania prostej przecinającej jednocześnie cztery dane proste:

$$L_1: x=t, y=0, z=0; \quad L_2: x=0, y=u, z=1;$$

$$L_3: \begin{matrix} H_1: & x-y=0, \\ H_2: & x-z-1=0; \end{matrix} \quad L_4: \begin{matrix} H_3: & x+z-2=0, \\ H_4: & 2x+y=0. \end{matrix}$$

Rozwiązanie. Nie będziemy przeprowadzać analizy istnienia rozwiązań (zauważmy tylko, że może istnieć nieskończenie wiele prostych, jeżeli np. proste L_i, $i=1,2,3,4$, przecinają się w jednym punkcie, lub może nie istnieć żadna prosta, jeżeli np. proste L_i, leżą parami w płaszczyznach równoległych i co najmniej jedna para leżąca w tej samej płaszczyźnie jest równoległa). Zresztą rachunek rozstrzygnie, ile istnieje rozwiązań. Otóż znajdujemy najpierw np. dwuparametrową rodzinę prostych $L(t, u)$ przecinających jednocześnie proste L_1 i L_2([1]) (ślizgających się po prostych L_1 i L_2)

(a) $\quad L(t,u): x=t-\alpha t, \quad y=\alpha u, z=\alpha \quad$ (α jest parametrem prostej).

Z kolei, znajdziemy podzbiór $L_1(t,u)\subset L(t,u)$ tworzący zbiór prostych przecinających prostą L_3, oraz podzbiór $L_2(t,u)\subset L(t,u)$ tworzący zbiór prostych przecinających prostą L_4. Proste wspólne zbiorów $L_1(t,u)$ i $L_2(t,u)$ będą poszukiwanymi prostymi. Podzbiór $L_1(t,u)$ otrzymujemy w sposób następujący; znajdujemy takie zbiory parametrów t i u, dla których prosta $L(t,u)$ przecina L_3, tzn. takie, aby punkty przecięcia prostej $L(t,u)$ z płaszczyznami H_1 i H_2 były identyczne. Zatem

$$t-\alpha t-\alpha u=0,$$

$$t-\alpha t-\alpha-1=0,$$

stąd

$$t=\frac{\alpha+1}{1-\alpha}, \quad u=\frac{1+\alpha}{\alpha} \quad (\alpha\neq 0, \alpha\neq 1),$$

czyli

$$L_1(t,u)=L\left(\frac{\alpha+1}{1-\alpha}, \frac{1+\alpha}{\alpha}\right)$$

(proste rodziny L_1 otrzymujemy w ten sposób, że dla każdej wartości α różnej od 0 i 1 otrzymujemy parametry t i u, zatem określoną prostą $L(t,u)$).

Analogicznie znajdujemy $L_2(t,u)$. Otóż

$$t-\alpha_1 t+\alpha_1-2=0,$$

$$2t-2\alpha_1 t+\alpha_1 u=0$$

(zamiast α piszemy teraz α_1, ponieważ w dalszych rozważaniach α i α_1 będą różnymi niewiadomymi), czyli

$$t=\frac{2-\alpha_1}{1-\alpha_1}, \quad u=\frac{-2(2-\alpha_1)}{\alpha_1} \quad (\alpha_1\neq 0 \text{ i } \alpha_1\neq 1).$$

([1]) W geometrii rzutowej zbiór takich prostych nazywamy *kongruencją algebraiczną* prostych rzędu pierwszego i klasy pierwszej.

zatem

$$L_2(t,u)=L\left(\frac{2-\alpha_1}{1-\alpha_1},\ \frac{-2(2-\alpha_1)}{\alpha_1}\right).$$

Proste wspólne rodzin

$$L_1\left(\frac{\alpha+1}{1-\alpha},\ \frac{1+\alpha}{\alpha}\right) \quad \text{i} \quad L_2\left(\frac{2-\alpha_1}{1-\alpha_1},\ \frac{-2(2-\alpha_1)}{\alpha_1}\right),$$

otrzymujemy wtedy, jeżeli będą istniały parametry α i α_1, takie, że

$$\frac{\alpha+1}{1-\alpha}=\frac{2-\alpha_1}{1-\alpha_1},\quad \frac{1+\alpha}{\alpha}=\frac{-2(2-\alpha_1)}{\alpha_1}$$

czyli

(a)
$$\begin{aligned}&2\alpha\alpha_1-3\alpha+1=0,\\&\alpha\alpha_1-4\alpha-\alpha_1=0.\end{aligned}$$

Stąd kolejno

$$\alpha_1=\frac{-1-5\alpha}{2},\quad 5\alpha^2+4\alpha-1=0,$$

$$\alpha_{(1)}=-1,\quad \alpha_{(2)}=\tfrac{1}{5},\quad \alpha_{1\,(1)}=2,\quad \alpha_{1\,(2)}=-1.$$

Obliczamy wartości parametrów t i u dla znalezionych pierwiastków układu (a). Dla $\alpha=-1$ i $\alpha_1=2$, $t=u=0$ oraz dla $\alpha=\frac{1}{5}$ i $\alpha_1=-1$, $t=\frac{3}{2}$, $u=6$. Istnieją więc dwie proste przecinające jednocześnie proste L_i, $i=1,2,3,4$, mianowicie

$$L_5: x=0,\ y=0,\ z=x \quad \text{i} \quad L_6: x=\tfrac{3}{2}-3\alpha,\ y=12\alpha,\ z=2\alpha,$$

gdzie α jest parametrem prostych L_5 i L_6.

Uwaga. Konstrukcję geometryczną prostych L_5 i L_6 łatwo otrzymać, korzystając z własności hiperboloidy jednopowłokowej lub paraboloidy hiperbolicznej (por. zadanie 16.55).

Zadania

12.12. Znaleźć wszystkie wektory prostopadłe do płaszczyzny $x-y+2z-3=0$.

12.13. Określić położenia względem osi układu następujących płaszczyzn:
a) $H: Ax+By+Cz+D=0$, gdzie $A\cdot B\cdot C\neq 0$:
b) $H: Ax+By+D=0$, gdzie $A\cdot B\neq 0$;
c) $H: Ax+Cz+D=0$, gdzie $A\cdot C\neq 0$;
d) $H: By+Cz+D=0$, gdzie $B\cdot C\neq 0$;
e) $H: Ax+D=0$;
f) $H: By+D=0$; g) $H: Cz+D=0$.

12.14. Narysować płaszczyzny o równaniach: a) $z=1$; b) $x=\pi$; c) $y=-2$; d) $x-y=0$; e) $2y+3z=6$; f) $3x-5z=15$; g) $x-2y-z-3=0$.

12.15. Znaleźć punkty przecięcia płaszczyzny $2x-y+7z-2=0$ z osiami układu.

12.16. Znaleźć równania płaszczyzn przechodzących przez punkt $A_1(-1,2,4)$ i równoległych do płaszczyzn układu współrzędnych.

12.17. Znaleźć równanie płaszczyzny, która przechodzi przez punkty $P_1(-1, 2, 4)$, $P_2(3, 1, 2)$ i jest równoległa do osi Oy.

12.18. W czworościan ograniczony płaszczyznami układu i płaszczyzną $2x-3y+4z+$ $+18=0$ wpisano sześcian w taki sposób, że jednym z jego wierzchołków jest początek układu, trzy krawędzie wychodzące z tego wierzchołka leżą na krawędziach czworościanu, a wierzchołek przeciwległy do początku układu leży w danej płaszczyźnie. Znaleźć długość krawędzi sześcianu.

12.19. Znaleźć równanie płaszczyzny:

a) przecinającej osie układu w punktach $A_1(2, 0, 0)$, $A_2(0, -3, 0)$, $A_3(0, 0, 4)$;

b) przechodzącej przez punkt $A_1(3, -1, 2)$ i prostopadłej do wektora $\mathbf{u}=(3, -1, 2)$;

c) przechodzącej przez punkt $A_1(1, 5, 1)$ i równoległej do dwóch wektorów $\mathbf{u}=(2, 1, 6)$ i $\mathbf{v}=(-3, 5, 6)$;

d) przechodzącej przez punkty $A_1(2, -1, 3)$, $P_2(1, 4, 2)$ i równoległej do wektora $\mathbf{u}=(3, 1, 5)$;

e) przechodzącej przez punkty $A_1(-1, 2, 4)$, $A_2(2, 1, 3)$ i $A_3(3, -1, 5)$;

f) przechodzącej przez punkt $A_1(0, 2, 1)$ i równoległej do płaszczyzny o równaniu $2x+y-z-2=0$.

12.20. Dane są równania trzech płaszczyzn $2x+3y+4z-12=0$, $x+3y-6=0$, $z-3=0$ zawierających trzy ściany równoległościanu i dany jest jeden z jego wierzchołków $P_1(6, -5, 1)$. Znaleźć równania płaszczyzn zawierających pozostałe ściany równoległościanu.

12.21. Obliczyć kosinusy wewnętrznych kątów dwuściennych jakie tworzy płaszczyzna $x+2y+3z=6$ z płaszczyznami układu.

12.22. Znaleźć kosinusy kątów między płaszczyznami

$$x-y+z-3=0 \quad \text{i} \quad 2x+y+2z-3=0.$$

12.23. Znaleźć równania płaszczyzn przechodzących przez dwa punkty $A_1(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1)$, $A_2(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ i tworzących z płaszczyzną $3x+2y+z+2=0$ kąt $\alpha=\frac{1}{4}\pi$.

12.24. Wyprowadzić wzór na odległość dwóch płaszczyzn równoległych

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \text{i} \quad Ax+By+Cz+E=0.$$

12.25. Obliczyć długości trzech wysokości równoległościanu określonego w zadaniu 12.20.

12.26. Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $A_1(3, 5, -7)$ i odcinającej na osiach układu wektory $\overline{OP}_1, \overline{OP}_2, \overline{OP}_3$ o równych długościach i zgodnie równoległych z osiami układu.

12.27. Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty $A_1(3, 5, 1)$, $A_2(7, 7, 8)$ i odcinającej na osiach Ox i Oy wektory $\overline{OP}_1$ i $\overline{OP}_2$ o równych długościach i zgodnie równoległych z tymi osiami.

12.28. Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $A(3, 1, 2)$ i odcinającej na osiach Ox i Oy odcinki (o jednym z końców w punkcie $O(0,0,0)$) cztery razy większe od odcinka (o jednym końcu w punkcie $O(0,0,0)$) odciętego przez płaszczyznę na osi Oz.

12.29. Wykazać, że równanie płaszczyzny przechodzącej przez różne punkty $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ i równoległej do wektora $\mathbf{v}=(v_x, v_y, v_z)\neq\mathbf{o}$ można napisać w postaci

$$\overline{P_1 Q}\bullet(\overline{P_1 P_2}\times\mathbf{v})=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}=0,$$

gdzie $Q(x, y, z)$ jest punktem bieżącym płaszczyzny.

12.30. Wykazać, że równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P_1(x_1, y_1, z_1)$ i prostopadłej do nierównoległych płaszczyzn

$$A_1 x+B_1 y+C_1 z+D_1=0 \quad \text{i} \quad A_2 x+B_2 y+C_2 z+D_2=0$$

można napisać w postaci

$$\overline{P_1 Q}\bullet(\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=0.$$

12.31. Wyprowadzić wzór (6) § 11 dla $n=3$, gdzie $\mathbf{u}=(A, B, C)$, $p=P_0(x_0, y_0, z_0)$.

12.32. Dla jakiej wartości parametru k płaszczyzny $2x-y+kz-2=0$ i $3kx+y+2z+1=0$ są prostopadłe?

12.33. Dla jakich wartości parametrów k i p płaszczyzny $x+ky-z-6=0$ i $px+y-kz+3=0$ są równoległe?

12.34. Znaleźć punkt przecięcia płaszczyzn $x-y+3z-6=0$, $2x+y-z-1=0$ i $6x-2y-2z=0$.

12.35. Dane są trzy płaszczyzny: $A_i x+B_i y+C_i z+D_i=0$, $i=1, 2, 3$. Podać warunki, przy których płaszczyzny te: a) nie mają punktu wspólnego; b) mają dokładnie jeden punkt wspólny; c) mają nieskończenie wiele punktów wspólnych zależnych od jednego parametru; d) pokrywają się.

12.36. Wykazać, że płaszczyzny $x+2y-z-1=0$, $2x+4y-2z-1=0$ i $x+3y-z-3=0$ nie mają punktu wspólnego.

12.37. Wykazać, że płaszczyzny $x+3y+2z=0$, $2x-y+z-1=0$ i $3x+2y+3z-1=0$ mają nieskończenie wiele punktów wspólnych zależnych od jednego parametru.

12.38. Dla jakich wartości parametrów a i b płaszczyzny $2x-y+3z-1=0$, $x+2y-z+b=0$ i $x+ay-6z+10=0$: a) nie mają punktu wspólnego; b) mają dokładnie jeden punkt wspólny; c) mają nieskończenie wiele punktów zależnych od jednego parametru; d) pokrywają się?

12.39. Określić położenia punktów $A_1(2,1,3)$, $A_2(1,2,1)$, $A_3(1,-1,1)$, $A_4(3,0,4)$, $A_5(-6,1,-1)$, $A_6(0,0,2)$ względem płaszczyzny H: $x+y-z+1=0$.

12.40. Narysować zbiory punktów, których współrzędne spełniają nierówności: a) $x>0$ i $y>0$ i $z>0$ i $x+2y+4z-8<0$; b) $y>0$ i $y<2$ i $z>0$ i $x>0$ i $2x+ +z-2<0$; c) $x<0$ i $y>0$ i $z>0$ i $10x-15y-12z+60>0$.

12.41. Znaleźć warunek konieczny i wystarczający na to, by punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ leżał między następującymi dwiema płaszczyznami równoległymi:

$$H_1: Ax+By+Cz+D=0,$$

$$H_2: Ax+By+Cz+E=0.$$

12.42. Znaleźć warunek konieczny i wystarczający na to, by płaszczyzna $Ax+By+Cz+ +D=0$ leżała między płaszczyznami równoległymi $Ax+By+Cz+E=0$ i $Ax+By+Cz+ +F=0$.

12.43. Dana jest prosta L: $x=3+2t$, $y=-2+t$, $z=2t$. Sprawdzić, czy punkty $P_1(7,-1,2)$, $P_2(13,3,10)$, $P_3(-2,0,1)$ i $P_4(-9,-8,-12)$ leżą na prostej L oraz znaleźć: a) wektor prostej L; b) punkty prostej L dla wartości parametrów $t=-2$, $t=-\frac{1}{2}$, $t=0$, $t=4$; c) punkty wspólne prostej L z płaszczyznami układu; d) punkty prostej L oddalone o 6 od punktu prostej L dla wartości parametru $t=1$; e) równania prostej L w postaci krawędziowej.

12.44. Dana jest prosta

$$L: \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-1}.$$

Sprawdzić, czy punkty $P_1(2,-1,4)$, $P_2(0,2,0)$, $P_3(4,-1,-2)$ i $P_4(7,0,-3)$ leżą na prostej oraz znaleźć: a) punkty przebicia prostej L z płaszczyznami układu; b) punkty przebicia prostej L z płaszczyznami $x=4$, $y=-3$, $z=2$; c) punkt symetryczny do punktu $A_1(10,1,-4)\in L$ względem punktu $A_2(-11,-6,3)\in L$; d) równania prostej L w postaci parametrycznej; e) równania prostej L w postaci krawędziowej.

12.45. Dana jest prosta L: $2x+3y-z-1=0$, $x-y+z-2=0$. Sprawdzić, czy punkty $P_1(\frac{17}{5}, -\frac{18}{5}, -5)$, $P_2(1,1,-2)$, $P_3(0,1,2)$, $P_4(2,2,2)$ leżą na prostej L oraz znaleźć: a) punkty przebicia prostej L z płaszczyznami układu; b) równania prostej L w postaci parametrycznej; c) równania prostej L w postaci kierunkowej.

12.46. Dana jest prosta L: $x=x_0+v_x t$, $y=y_0+v_y t$, $z=z_0+v_z t$. Sprawdzić, że punkt P_s dla wartości parametru $t=\dfrac{t_1+t_2}{2}$ jest środkiem odcinka o końcach $P_i\in L$ dla wartości parametrów t_i, $i=1,2$.

12.47. Znaleźć równania prostej przechodzącej przez punkt $P(2,3,1)$ oraz:
a) prostopadłej do płaszczyzny $5x-3y+2z-1=0$;

b) przechodzącej przez punkt przebicia prostej $x=1+t$, $y=-2t$, $z=1+3t$ z płaszczyzną $4x-y+3z+1=0$;

c) równoległej do płaszczyzn o równaniach $6x-y+z-2=0$ i $x+3y-2z+1=0$;

d) równoległej do płaszczyzny $x-y+7z-1=0$ i przecinającej prostą $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z}{2}$;

e) prostopadłej do prostych

$$L_1: x-y+z=1,\ x+2y+3z-2=0 \quad \text{i} \quad L_2: x=3t,\ y=-1+t,\ z=-t;$$

f) prostopadłej do prostej $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{-1}$ i przecinającej prostą $x=y=z$;

g) przecinającej proste o równaniach

$$L_1: x+y=0,\ x-y+z+4=0 \quad \text{i} \quad L_2: x+3y-1=0,\ y+z=0;$$

h) prostopadłej do prostej $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-2}{1}$ i tworzącej z płaszczyzną $2x+y+z-2=0$ kąt $\alpha=\pi/6$.

12.48. Na prostej $x-y+z-2=0$, $2x+y-z-1=0$ znaleźć punkt równo oddalony od punktów $A_1(1,-1,2)$ i $A_2(3,1,2)$.

12.49. Znaleźć równania prostej przecinającej prostopadle proste

$$L_1: x=1+t,\ y=-1-2t,\ z=3-t \quad \text{i} \quad L_2: \frac{x-2}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{2}.$$

12.50. Zbadać wzajemne położenia par prostych:

a) $L_1: x=1-t,\ y=3+t,\ z=-6t;\quad L_2: x=4+2t,\ y=-t,\ z=2t+1;$

b) $L_1: x+2y-z-3=0,\ 3x-y+z+1=0;\quad L_2: 2x+3y-2z-1=0,\ x+y-2=0;$

c) $L_1: x=2+4t,\ y=-6t,\ z=-1-8t;\quad L_2: x=7-6t,\ y=2+9t,\ z=12t;$

d) $L_1: x=1+2t,\ y=7+t,\ z=3+4t;\quad L_2: x=6+3t,\ y=-1-2t,\ z=-2+t;$

e) $L_1: x=9t,\ y=5t,\ z=-3+t;\quad L_2: 2x-3y-3z-9=0,\ x-2y+z+3=0;$

f) $L_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4};\quad L_2: x=3t+7,\ y=2t+2,\ z=-2t+1;$

g) $L_1: \frac{x-1}{9}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-3}{3};\quad L_2: x=7+6t,\ y=6+4t,\ z=5+2t.$

W przypadku gdy proste przecinają się lub są równoległe, znaleźć równanie płaszczyzny wyznaczonej przez nie i ich punkt przecięcia.

12.51. Wyprowadzić wzory (11) i (12).

12.52. Znaleźć odległość między prostymi:

a) $L_1: x=3+t,\ y=1-t,\ z=2+2t;\quad L_2: x=-t,\ y=2+3t,\ z=3t;$

b) $L_1: x+y-z+1=0,\quad L_2: x-2y+3z-6=0,$
$\qquad x+y=0;\qquad\qquad 2x-y+3z-6=0;$

c) $L_1: \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{2};\quad L_2: \dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-3}{2}.$

12.53. Znaleźć równanie płaszczyzny wyznaczonej: a) przez punkt $P(-3, 2, 1)$ i prostą

$$L_1: x-y+z-2=0,\ x+2y+3z+8=0;$$

b) przez dwie proste równoległe

$$L_1: \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2} \quad \text{i} \quad L_2: \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}.$$

12.54. Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez prostą $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{-1}$ i równoległej do prostej $2x-y+z-3=0,\ x+2y-z-5=0.$

12.55. Znaleźć równania prostej równoległej do płaszczyzn

$$H_1: 3x+12y-3z-5=0,\quad H_2: 3x-4y+9z+7=0$$

i przecinającej proste

$$L_1: \frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{3},\quad L_2: x=3-2t,\ y=-1+3t,\ z=2+4t.$$

12.56. Dany jest czworościan o wierzchołkach: $O(0,0,0)$, $A(1,2,3)$, $B(-1,4,1)$ i $C(2,5,-3)$. Znaleźć: a) odległość prostych, na których leżą krawędzie OA i BC; b) odległość środka ciężkości ściany OAB od krawędzi CB; c) odległość wierzchołka C od płaszczyzny $H(O; A; B)$; d) kąt między krawędziami OB i AC; e) kąt krawędzi OA z płaszczyzną $H(A; B; C)$; f) współrzędne punktu symetrycznego do punktu B względem: punktu C, prostej $L(O; A)$, płaszczyzny $H(O; A; C)$; g) równania prostej, na której leży rzut prostokątny krawędzi AB na płaszczyźnie $H(O; A; C)$; h) równania prostej, na której leży symetralna boku AB trójkąta ABC; i) równania prostej, na której leży dwusieczna kąta wewnętrznego przy wierzchołku B w trójkącie ABC.

12.57. Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez prostą $x+28y-2z+17=0$, $5x+8y-z+1=0$, której odległość od początku układu wynosi 1.

12.58. Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $A_1(5,2,0)$ i oddalonej od punktu $A_2(6,1,-1)$ o 1, a od punktu $A_3(0,5,4)$ o 3.

12.59. Dana jest płaszczyzna H: $x+y+z=1$ i punkty $A_1(2,2,0)$, $A_2(5,8,-3)$. Promień światła wychodzący z punktu A_1 po odbiciu od płaszczyzny H przechodzi przez punkt A_2. Znaleźć równania prostych, na których leżą promienie: padający i odbity.

12.60. Wykazać, że na to by proste nierównoległe

$$L_1: x=x_1+v_x t,\ y=y_1+v_y t,\ z=z_1+v_z t,$$

$$L_2: x=x_2+u_x k,\ y=y_2+u_y k,\ z=z_2+u_z k$$

miały dokładnie jeden punkt wspólny potrzeba i wystarcza, aby

$$W=\begin{vmatrix} v_x & u_x & x_2-x_1 \\ v_y & u_y & y_2-y_1 \\ v_z & u_z & z_2-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

12.61. Zbadać wzajemne położenie prostej i płaszczyzny:

a) $L: \dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$, $\quad H: 3x+5y-z-2=0$;

b) $L: x=13+8t,\ y=1+2t,\ z=4+3t$, $\quad H: x+2y-4z+1=0$;

c) $L: \begin{array}{l} 2x+3y+6z-10=0, \\ x+y+z+5=0, \end{array}$ $\quad H: y+4z+17=0$.

12.62. Dla jakiej wartości parametru m prosta $x=-1+3t$, $y=2+mt$, $z=-3-2t$ jest równoległa do płaszczyzny $x-3y+6z+7=0$?

12.63. Dla jakich wartości parametrów α i β prosta o równaniach $x=\alpha+\alpha t$, $y=$ $=1-3t$, $z=\beta+3t$ leży na płaszczyźnie $x+2y-3z+1=0$?

12.64. Wykazać, że równanie płaszczyzny przechodzącej przez prostą L: $x=x_0+kt$, $y=y_0+mt$, $z=z_0+nt$ i prostopadłej do płaszczyzny $Ax+By+Cz+D=0$ może być napisane w postaci (zakładamy, że L nie jest prostopadła do danej płaszczyzny)

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ k & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix}=0.$$

12.65. Wykazać, że równanie płaszczyzny przechodzącej przez prostą

$$L_1: \frac{x-x_1}{k_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

i równoległej do prostej L_2: $x=x_2+k_2t$, $y=y_2+m_2t$, $z=z_2+n_2t$ można napisać w postaci (zakładamy, że L_1 i L_2 nie są równoległe)

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ k_1 & m_1 & n_1 \\ k_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

12.66. Znaleźć prostą przecinającą cztery następujące proste

$$L_1: x=t,\ y=1,\ z=-t; \quad L_2: x=u,\ y=-1,\ z=u;$$

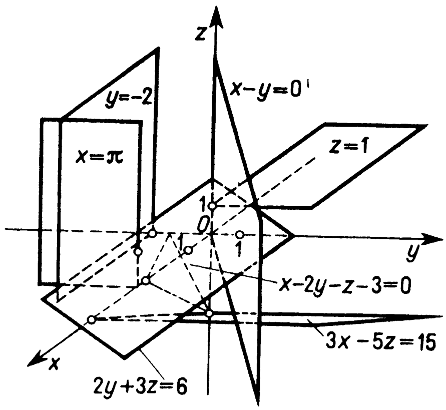
$$L_3: \begin{array}{l} x+y-z-1=0, \\ x-y+z-1=0; \end{array} \quad L_4: \begin{array}{l} x-y-z+1=0, \\ x+y+z+1=0. \end{array}$$

Odpowiedzi

12.12. $k\cdot\mathbf{u}=k(1,-1,2)$, $k\in\mathbf{R}\wedge k\neq 0$.

12.13. a) H nierównoległa do żadnej z osi; b) $H\|Oz$; c) $H\|Oy$; d) $H\|Ox$; e) $H\|Oy$ i $H\|Oz$; f) $H\|Ox$ i $H\|Oz$; g) $H\|Ox$ i $H\|Oy$.

12.14. Rys. 12.9 **12.15.** $A_1(1,0,0)$, $A_2(0,-2,0)$, $A_3(0,0,\frac{2}{7})$.



Rys. 12.9

12.16. $x=-1$, $y=2$, $z=4$. **12.17.** $x+2z-7=0$.

12.18. 2.

12.19. a) $6x-4y+3z-12=0$; b) $3x-y+2z-14=0$; c) $24x+30y-13z-161=0$; d) $13x+y-8z-1=0$; e) $4x+7y+5z-30=0$; f) $2x+y-z-1=0$.

12.20. $2x+3y+4z-1=0$, $x+3y+9=0$, $z-1=0$.

12.21. $\dfrac{1}{\sqrt{14}}, \dfrac{2}{\sqrt{14}}, \dfrac{3}{\sqrt{14}}$. **12.22.** $\cos\varphi_{1,2}=\mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

12.23. $13(x-\frac{1}{3})+(3\mp\sqrt{35})(y-\frac{1}{3})+(-3\mp\sqrt{35})z=0$.

12.24. $d=\dfrac{|D-E|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. **12.25.** $\dfrac{11}{\sqrt{29}}, \dfrac{15}{\sqrt{10}}, 2$.

12.26. $x+y+z-1=0$. **12.27.** $7x+7y-6z-50=0$.

12.28.
$$\begin{aligned} x+y+4z-12&=0, & x+y-4z-4&=0,\\ x-y+4z-10&=0, & x-y-4z-6&=0,\\ -x+y+4z-6&=0, & -x+y-4z-10&=0.\\ -x-y+4z-4&=0, \end{aligned}$$

12.32. $k=\frac{1}{8}$. **12.33.** $k=1$, $p=1$; $k=-1$, $p=-1$. **12.34.** $P(1,1,2)$.

12.35. Por. T_5, § 6; a) $\mathrm{R}(A)\neq\mathrm{R}(A_u)$; b) $\mathrm{R}(A)=3$; c) $\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(A_u)=2$;

d) $\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(A_u)=1$, gdzie

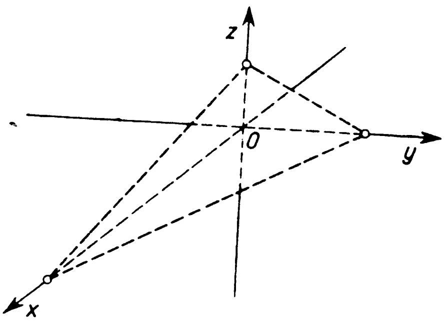
$$A=\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}, \qquad A_u=\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1-D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2-D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3-D_3 \end{bmatrix}.$$

12.37. $P(-\frac{5}{7}t+\frac{3}{7},\ -\frac{3}{7}t-\frac{1}{7},\ t)$, gdzie $t\in\mathbf{R}$.

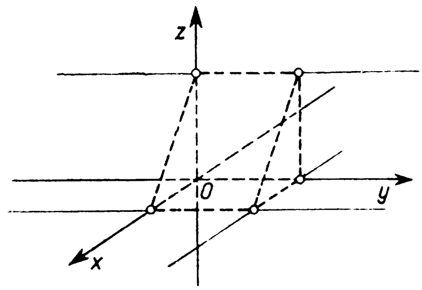
12.38. a) $a=7$ i $b\neq 3$; b) $a\neq 7$; c) $a=7$ i $b=3$; d) dla żadnych.

12.39. $A_3\in H$, $A_4\in H$; A_1 i A_2 leżą w dodatniej półprzestrzeni wyznaczonej przez płaszczyznę H (por. przykład 12.4), A_5 i A_6 leżą w ujemnej półprzestrzeni wyznaczonej przez płaszczyznę H.

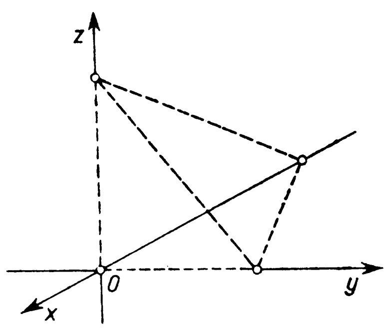
12.40. a) Rys. 12.10; b) rys. 12.11; c) rys. 12.12.



Rys. 12.10



Rys. 12.11



Rys. 12.12

12.41. $(Ax_0+By_0+Cz_0+D)(Ax_0+By_0+Cz_0+E)<0$.

12.42. Por. zadanie 12.41; $F<D<E$ lub $E<D<F$.

12.43. $P_1\notin L, P_2\in L, P_3\notin L, P_4\in L$; a) $\mathbf{u}=(2,1,2)$; b) $P_5(-1,-4,-4)$, $P_6(2,-\frac{5}{2},-1), P_7(3,-2,0), P_8(11,2,8)$; c) $A_1(0,-\frac{7}{2},-3), A_2(7,0,4)$, $A_3(3,-2,0)$; d) $B_1(1,-3,-2), B_2(9,1,6)$; e) $x-2y-7=0,\ 2y-z+4=0$.

12.44. $P_1 \notin L, P_2 \notin L, P_3 \in L, P_4 \in L$; a) $B_1(0, -\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}), B_2(7, 0, -3), B_3(-2, -3, 0)$; b) $C_1(4, -1, -2), C_2(-2, -3, 0), C_3(-8, -5, 2)$; c) $A_1'(-32, -13, 10)$; d) $x=1+3t, y=-2+t, z=-1-t$; e) $x-3y-7=0, y+z+3=0$.

12.45. $P_1 \in L, P_2 \notin L, P_3 \notin L, P_4 \notin L$; a) $A_1(0, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}), A_2(1, 0, 1), A_3(\frac{7}{5}, -\frac{3}{5}, 0)$;

b) $x=\frac{7}{5}+2t, y=-\frac{3}{5}-3t, z=-5t$; c) $\dfrac{x-\frac{7}{5}}{2}=\dfrac{y+\frac{3}{5}}{-3}=\dfrac{z}{-5}$.

12.47. a) $x=2+5t, y=3-3t, z=1+2t$; b) $x=2+23t, y=3+29t, z=1+24t$; c) $x=2-t, y=3+13t, z=1+19t$; d) $x=2+4t, y=3+32t, z=1+4t$; e) $5x+2y-3z-13=0, 3x+y-z-8=0$; f) $x=2+t, y=3, z=1+2t$; g) $x-9y+5z+20=0, 2x+y-5z-2=0$; h) $x=2+2t, y=3+(-6\mp\sqrt{66})t, z=1+(-10\mp\sqrt{66})t$.

12.48. $A_3(1, 1, 2)$.

12.49. $x=\frac{194}{55}-5t, y=-\frac{21}{55}-6t, z=-\frac{13}{55}+7t$.

12.50. a) Skośne; b) skośne; c) równoległe, $5x-22y+19z+9=0$; d) przecinają się w punkcie $P_1(-3, 5, -5)$, $9x+10y-7z-58=0$; e) pokrywają się; f) przecinają się w punkcie $P_2(1, -2, 5)$, $2x-16y-13z+31=0$; g) pokrywają się.

12.51. Skorzystać z 14° § 8. **12.52.** a) $\frac{9}{55}\sqrt{110}$; b) 0; c) 3.

12.53. a) $3x+5z+4=0$; b) $6x-20y-11z+1=0$.

12.54. $13x-14y+11z+51=0$. **12.55.** $x=8t-3, y=-3t-1, z=-4t+2$.

12.56. a) $\dfrac{58}{3\sqrt{35}}$; b) $\sqrt{\dfrac{1195}{234}}$; c) $\dfrac{29}{\sqrt{38}}$; d) $\cos\alpha=\dfrac{5}{6\sqrt{23}}$; e) $\sin\alpha=\dfrac{29}{2\sqrt{259}}$,

f) $B'(5, 6, -7), B''(\frac{17}{7}, -\frac{8}{7}, \frac{23}{7}), B'''(\frac{1913}{523}, \frac{1048}{523}, \frac{407}{523})$; g) $21x-9y-z=0, 5x+11y+6z-45=0$; h) $3x+7y+4z-29=0, x-y+z+1=0$; i) $x=-1+(\sqrt{26}+3\sqrt{3})t, y=4+(\sqrt{3}-\sqrt{26})t, z=1+(\sqrt{26}-4\sqrt{3})t$.

12.57. $3x-4y-5=0, 387x-164y-24z-421=0$.

12.58. $x+2y+2z-9=0, y-2=0$.

12.59. $x=2+3t, y=2, z=9t$; $x=5+15t, y=8+24t, z=-3-3t$.

12.61. a) $L\cap H=P(0, 0, -2)$; b) prosta leży na płaszczyźnie; c) $L\|H$.

12.62. $m=-3$. **12.63.** $\alpha=15$ i $\beta=6$.

12.66. Nieskończenie wiele prostych zależnych od jednego parametru

$$L(m):\ x=\frac{m^2+1}{2m}+\frac{1-m^2}{2m}t,\ y=t,\ z=\frac{m^2-1}{2m}-\frac{m^2+1}{2m}t,$$

gdzie t jest parametrem, a m przebiega wszystkie liczby rzeczywiste różne od 0, 1 i -1.

Uwaga. Proste L_i, $i=1, 2, 3, 4$, należą do tej samej rodziny tworzących prostoliniowych hiperboloidy jednopowłokowej o równaniu $x^2+y^2-z^2=1$ (por. zadanie 16.55).

§ 13. HIPERPŁASZCZYZNY W $\mathbf{R}^n$, $n>3$

Uzupełnimy wiadomości podane w § 11.

T_1. *Część wspólna m hiperpłaszczyzn*

$$A_{i1}x_1+A_{i2}x_2+\ldots+A_{in}x_n+A_{i0}=0, \qquad i=1,2,\ldots,m$$

jest:

α) *zbiorem pustym, jeżeli* $R(A)\neq R(A_u)$, *gdzie*

$$A=[A_{ij}]_{m\times n}, \qquad A_u=A+[A_{i0}]_{m\times 1},$$

β) *hiperpłaszczyzną* $(n-k)$*-wymiarową* $(1\leqslant k\leqslant n)$, jeżeli

$$R(A)=R(A_u)=k$$

(por. T_5 § 6).

Mówimy, że *hiperpłaszczyzna* H^* jest *normalna do hiperpłaszczyzny* H i piszemy $H^*\perp H$, jeżeli każdy kierunek równoległy do H^* jest prostopadły do H.

T_2. *Dana jest hiperpłaszczyzna* H^k, $1\leqslant k\leqslant n-1$ *i punkt* $p_0\in\mathbf{R}^n$. *Zbiór* H^* *punktów* $p\in\mathbf{R}^n$ *takich, że* $\overline{p_0p}\perp H$, *jest* $(n-k)$*-wymiarową hiperpłaszczyzną normalną do* H^k. *Każda hiperpłaszczyzna* $H^l\ni p_0\wedge H^l\perp H^k$ *zawiera się w* H^*. *Hiperpłaszczyzny* H^k *i* H^* *mają jako jedyny punkt wspólny punkt* p_0', *którego odległość od* p_0 *jest mniejsza niż odległość od* p_0 *każdego innego punktu* $p\in H^k$.

Punkt p_0' nazywamy *rzutem normalnym punktu* p_0 *na* H^k oraz przyjmujemy $d(p_0,p_0')=$ $=d(p_0,H^k)$. Mówimy, że hiperpłaszczyzna H^{**} jest *równoległa do hiperpłaszczyzny* H i piszemy $H^{**}\|H$, jeżeli każdy kierunek równoległy do H^{**} jest równoległy do H. Jeżeli $H^{**}\|H\wedge H\|H^{**}$, to mówimy, że H^{**} i H są *ściśle równoległe*.

Dwa punkty p i p' nazywamy *symetrycznymi względem hiperpłaszczyzny* H, jeżeli środek odcinka pp' należy do H i $\overline{pp'}\perp H$. Zbiór $A\subset\mathbf{R}^n$ nazywamy *symetryczny* względem hiperpłaszczyzny H^k, albo hiperpłaszczyznę H^k nazywamy *hiperpłaszczyzną symetrii* zbioru A, jeżeli dla każdego punktu $p\in A$ zbiór A zawiera również punkt p' symetryczny do p względem H^k.

Przykłady

13.1. Znaleźć równanie $(n-1)$-wymiarowej hiperpłaszczyzny wyznaczonej przez n punktów $p_i(p_{i1},p_{i2},\ldots,p_{in})$, $i=0,1,\ldots,n-1$, liniowo niezależnych.

Rozwiązanie. Podamy kilka metod rozwiązania.

α_1) Jeżeli $p(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ oznacza punkt bieżący szukanej hiperpłaszczyzny H, to korzystając ze wzorów (1) i (2) § 11 otrzymujemy równanie hiperpłaszczyzny H w postaci wektorowej

$$\overline{Op}=\mathbf{r}=\overline{Op_0}+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\overline{p_0p_i}, \tag{a}$$

względnie w postaci parametrycznej

$$(\mathrm{a}_1)\qquad x_i=p_{0i}+\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k(p_{ki}-p_{0i}),\quad i=1,2,\ldots,n.$$

α_2) Sprawdzimy, że równanie poszukiwanej hiperpłaszczyzny H ma postać

$$(\mathrm{a}_2)\qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & 1\\ p_{01} & p_{02} & \ldots & p_{0n} & 1\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ p_{n-1,1} & p_{n-1,2} & \ldots & p_{n-1,n} & 1\end{vmatrix}=0,$$

gdzie $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oznacza punkt bieżący hiperpłaszczyzny H. Istotnie, rozwijając wyznacznik lewej strony równania (a_2) według elementów pierwszego wiersza otrzymujemy

$$(\mathrm{a}_3)\qquad A_1x_1+A_2x_2+\ldots+A_nx_n+A_0=0,$$

gdzie współczynniki A_i, $i=0,1,2,\ldots,n$, są stałe oraz $\sum_{i=1}^{n} A_i^2\neq 0$.

Rzeczywiście, z założenia $A_i=0$, $i=1,2,\ldots,n$, wynikałoby, że rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} p_{01} & p_{02} & \ldots & p_{0n} & 1\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ p_{n-1,1} & p_{n-1,2} & \ldots & p_{n-1,n} & 1\end{bmatrix}$$

byłby mniejszy od n, co przeczy liniowej niezależności punktów p_i, $i=0,1,\ldots,n-1$. Zatem równanie (a_3) jest równaniem hiperpłaszczyzny $(n-1)$-wymiarowej (por. wzór (4) § 11), przy czym współrzędne każdego punktu p_i, $i=0,1,\ldots,n-1$, spełniają równanie (a_3) (wyznacznik lewej strony równania (a_2) ma dwa wiersze identyczne). Ponieważ punkty p_i, $i=0,1,\ldots,n-1$, wyznaczają jednoznacznie hiperpłaszczyznę $(n-1)$-wymiarową (por. § 11.1), więc (a_2) jest poszukiwanym równaniem hiperpłaszczyzny H.

α_3) Zastosujemy wzór (5) § 11. Należy więc znaleźć wektor $\mathbf{w}=(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ prostopadły do poszukiwanej hiperpłaszczyzny H. W tym celu skorzystamy z iloczynu wektorowego (por. punkt 8.4). Otóż, wektory $\mathbf{u}_i=\overline{p_0\,p_i}$, $i=1,2,\ldots,n-1$ należące do H są liniowo niezależne (na mocy tw. (punkty p_i, $i=0,1,\ldots,k$ są l.n.) $\Leftrightarrow$ (wektory $\mathbf{u}_i=\overline{p_0\,p_i}$, $i=1,2,\ldots,k$ są l.n.)), zatem ich iloczyn wektorowy $\mathbf{w}=\mathbf{w}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1})\neq\mathbf{o}$ oraz $\mathbf{u}_i\perp\mathbf{w}$, $i=1,2,\ldots,n-1$. Z ostatniego warunku wynika, że $\mathbf{w}\perp H$ (por. zadanie 13.8 b). Stąd (por. (5) § 11)

$$H:\ \sum_{i=1}^{n} w_i(x_i-p_{0i})=0,\qquad \mathbf{w}=(w_1, w_2, \ldots, w_n)\neq\mathbf{o}.$$

Przykłady 13.2, 13.3 i 13.4 będą dotyczyły tylko przestrzeni $\mathbf{R}^4$, przy czym analogicznie jak w $\mathbf{R}^3$ przyjmujemy pewne oznaczenia. Otóż przez L, L^*, L_i, $L(\ldots)$ będziemy oznaczali zawsze proste, np. $L(P_1; P_2)$ – oznacza prostą wyznaczoną przez punkty P_1 i P_2; przez M, M^*, M_i, $M(\ldots)$ – płaszczyzny, np. $M_1=M(P_0; L_1)$ oznacza płaszczyznę wyznaczoną przez punkt P_0 i prostą L_1, $M_2=M(P_0; \mathbf{u}_{1||}; \mathbf{u}_{2||})$ oznacza płaszczyznę przechodzącą przez punkt P_0 i równoległą do wektorów $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$; przez H, H^*, H_i, $H(\ldots)$ – przestrzenie, np. $H(P_0; M)$ oznacza przestrzeń wyznaczoną przez punkt P_0 i płaszczyznę M.

Część wspólną dwóch różnych przestrzeni H_1 i H_2, czyli płaszczyznę oznaczać będziemy przez $H_1 \cap H_2 = M$. Analogicznie punkty: $P = L \cap H$, $P_1 = M_1 \cap M_2$, itd.

13.2. Znaleźć równania prostej L przechodzącej przez punkt $P_0(-1, 1, 2, 0)$ i przecinającej jednocześnie prostą $L_1(P_1; P_2)$, gdzie $P_1(2, 0, -1, 1)$, $P_2(1, 3, 1, 2)$ i płaszczyznę

$$M: H_1: x_1 - 2x_2 + 1 = 0, \quad H_2: x_2 + 3x_3 - x_4 = 0.$$

Rozwiązanie. Prosta L musi leżeć w płaszczyźnie $M_1 = M(P_0; L_1) = M(P_0; \overline{P_0P_1}_{||}; \overline{P_0P_2}_{||})$ i przecinać płaszczyznę M, czyli przechodzić przez punkt wspólny płaszczyzn M_1 i M. Jeżeli płaszczyzna M_1 jest określona jednoznacznie i płaszczyzny M_1 i M przecinają się w dokładnie jednym punkcie $P_3 = M_1 \cap M$ różnym od P_0, to istnieje jednoznacznie określona prosta $L = L(P_0; P_3)$. Kolejno znajdujemy $\mathbf{u}_1 = \overline{P_0P_1} = (3, -1, -3, 1)$, $\mathbf{u}_2 = \overline{P_0P_2} = (2, 2, -1, 2)$, skąd (wzór (1) § 11)

$$M_1: \overline{OP} = \overline{OP}_0 + k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2,$$

czyli

$$\text{(a)} \qquad M_1: \begin{aligned} x_1 &= -1 + 3k_1 + 2k_2, \\ x_2 &= 1 - k_1 + 2k_2, \\ x_3 &= 2 - 3k_1 - k_2, \\ x_4 &= k_1 + 2k_2 \end{aligned}$$

(ponieważ $\mathbf{u}_1 \nparallel \mathbf{u}_2$, więc płaszczyzna M_1 określona jest jednoznacznie).

Punkt $P_3 = M_1 \cap M$ znajdziemy podobnie jak punkt przecięcia prostej z płaszczyzną w $\mathbf{R}^3$. Należy znaleźć takie parametry k_1 i k_2, aby współrzędne x_i, $i = 1, 2, 3, 4$, określone wzorami (a), spełniały równania płaszczyzny M, czyli równania przestrzeni H_1 i H_2. Stąd

$$-1 + 3k_1 + 2k_2 - 2 + 2k_1 - 4k_2 + 1 = 0,$$

$$1 - k_1 + 2k_2 + 6 - 9k_1 - 3k_2 - k_1 - 2k_2 = 0,$$

czyli $k_1 = \frac{20}{37}$, $k_2 = \frac{13}{37}$. Zatem $x_1 = -1 + 3\cdot\frac{20}{37} + 2\cdot\frac{13}{37} = \frac{49}{37}$, $x_2 = \frac{43}{37}$, $x_3 = \frac{1}{37}$, $x_4 = \frac{46}{37}$, czyli $P_3\left(\frac{49}{37}, \frac{43}{37}, \frac{1}{37}, \frac{46}{37}\right)$. Prosta L istnieje więc i jest jednoznacznie określona:

$$(L: \overline{OP} = \overline{OP}_0 + k\overline{P_0P_3}) \Leftrightarrow (L: x_1 = -1 + 86k,\ x_2 = 1 + 6k,\ x_3 = 2 - 73k,\ x_4 = 46k),$$

gdzie $k \in \mathbf{R}$.

13.3. Znaleźć odległość $d(L_1, M)$ prostej L_1 od płaszczyzny M, gdzie

$$L_1: \overline{OP} = \overline{OP}_0 + k\mathbf{u}, \ P_0(3, -1, 1, 2), \ \mathbf{u} = (1, 1, 0, 3);$$

$$M: 2x_1 + x_4 - 3 = 0, \ x_1 + x_2 - x_3 + 5 = 0$$

oraz równania prostej L przecinającej prostopadle prostą L_1 i płaszczyznę M.

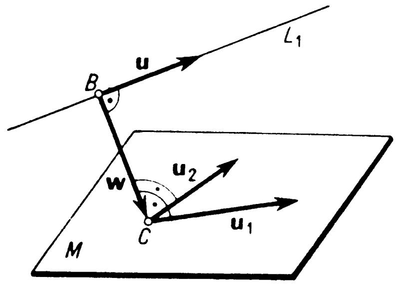
Rozwiązanie. Znajdziemy wektor $\mathbf{w}=\overleftarrow{CB}$ (rys. 13.1), gdzie $B\in L_1 \wedge C\in M$, spełniający warunki

(a) $$\mathbf{w}\perp\mathbf{u}\Leftrightarrow\mathbf{w}\bullet\mathbf{u}=0,\quad \mathbf{w}\perp\mathbf{u}_1\Leftrightarrow\mathbf{w}\bullet\mathbf{u}_1=0,\quad \mathbf{w}\perp\mathbf{u}_2\Leftrightarrow\mathbf{w}\bullet\mathbf{u}_2=0,$$

przy czym $\mathbf{u}||L_1$ oraz $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$ są dowolnymi wektorami liniowo niezależnymi równoległymi do płaszczyzny M. Łatwo wykazać, że wówczas $d(L_1, M)=|\mathbf{w}|$ oraz $L=(B; C)$.

W celu znalezienia wektorów $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$ przekształcamy np. równania płaszczyzny M do postaci parametrycznej. Otóż podstawiając $x_1=k_1$, $x_2=k_2$ otrzymujemy

$$M:\begin{array}{l} x_1=k_1,\\ x_2=k_2,\\ x_3=5+k_1+k_2,\\ x_4=3-2k_1,\end{array}$$



Rys. 13.1

stąd $\mathbf{u}_1=(1, 0, 1, -2)$, $\mathbf{u}_2=(0, 1, 1, 0)$. Punkt $B\in L_1$ zależy od jednego parametru i ma postać $B(3+k, -1+k, 1, 2+3k)$; punkt $C\in M$ zależy od dwóch parametrów i ma postać $C(k_1, k_2, 5+k_1+k_2, 3-2k_1)$. Zatem $\overline{BC}=\mathbf{w}=(k_1-k-3, k_2-k+1, k_1+k_2+4, -2k_1-3k+1)$. Korzystając z warunków (a), otrzymujemy

$$k_1-k-3+k_2-k+1-6k_1-9k+3=0,$$
$$k_1-k-3+k_1+k_2+4+4k_1+6k-2=0,$$
$$k_2-k+1+k_1+k_2+4=0,$$

a więc $k=-1$, $k_1=\frac{18}{11}$, $k_2=-\frac{42}{11}$. Stąd $\mathbf{w}=(-\frac{4}{11}, -\frac{20}{11}, \frac{20}{11}, \frac{8}{11})$ i $B(2, -2, 1, -1)$, zatem

$$d(L_1, M)=|\mathbf{w}|=\sqrt{(-\tfrac{4}{11})^2+(-\tfrac{20}{11})^2+(\tfrac{20}{11})^2+(\tfrac{8}{11})^2}=\tfrac{4}{11}\sqrt{55}$$

oraz L: $\overline{OP}=\overline{OB}+k\mathbf{w}$, gdzie k jest parametrem prostej L.

13.4. Znaleźć kąt między płaszczyznami

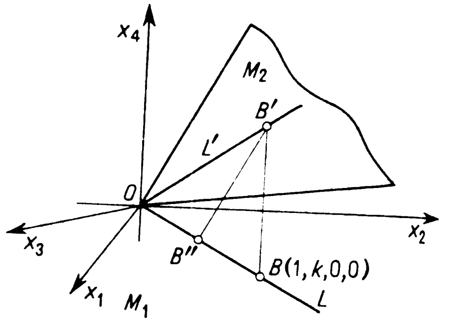
$$M_1:\begin{array}{l} H_1: x_3=0,\\ H_2: x_4=0,\end{array}\quad \text{i}\quad M_2:\begin{array}{ll} H_3: & x_1+x_3=0,\\ H_4: & x_2+2x_3-x_4=0.\end{array}$$

Rozwiązanie. Kąt między dwiema płaszczyznami M i M' przecinającymi się w dokładnie jednym punkcie A określamy następująco. Rozpatrujemy pęki półprostych $(L)_A$ i $(L)'_A$ o wierzchołku w punkcie A leżące odpowiednio w płaszczyznach M i M' oraz wszystkie płaszczyzny $M(L; L')$, gdzie L przebiega wszystkie półproste pęku $(L)_A$ i L' przebiega wszystkie półproste pęku $(L)'_A$. Przez kąt między płaszczyznami M i M' rozumiemy kąt między tymi półprostymi L i L', które wyznaczają płaszczyznę $M(L; L')$ jednocześnie prostopadłą (dokładnie półprostopadłą (por. zadanie 13.45)) do M i M'. Udowadnia się, że w przypadku ogólnym istnieją dwie takie płaszczyzny (ale np. gdy $M\perp M'$, wtedy istnieje nieskończenie wiele płaszczyzn $M(L; L')$ prostopadłych jednocześnie do M i M', przy czym zawsze $\sphericalangle(L, L') = \frac{1}{2}\pi$). Dane w zadaniu płaszczyzny M_1 i M_2 przecinają się w punkcie $O(0, 0, 0, 0)$, przy czym jest to jedyny ich punkt wspólny, ponieważ

$$W = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

W płaszczyźnie M_1, czyli w płaszczyźnie Ox_1x_2 (rys. 13.2) weźmy pęk półprostych o wierzchołku w punkcie $O(0, 0, 0, 0)$

$$\text{(a)} \qquad (L)_0: \begin{aligned} & x_2 = kx_1 \text{ [1]}, \\ & x_3 = 0, \\ & x_4 = 0 \end{aligned}$$



Rys. 13.2

oraz rzuty [2] półprostych $L \in (L)_O$ na płaszczyźnie M_2. Z kolei otrzymane rzuty L' rzutujemy z powrotem na płaszczyznę M_1, otrzymując półproste L''. Jeżeli półproste L i L'' pokryją się, to płaszczyzna $M(L; L')$ jest prostopadła do M_1 i M_2, zatem $\sphericalangle(L, L') = \varphi = \sphericalangle(M_1, M_2)$. Zamiast mówić o półprostej $L \in (L)_O$, wystarczy np. rozpatrywać tylko punkt $B(1, k, 0, 0) \in L$, gdzie k jest parametrem (rys. 13.2).

Znajdujemy najpierw rzut normalny B' punktu B na płaszczyźnie M_2 (wówczas półprosta $L' = L(O; B')$ będzie rzutem normalnym półprostej $L(PO; B)$ na płaszczyźnie M_2 oraz $L(B; B') \perp M_2$). W tym celu znajdujemy $M_B^* \perp M_2$ (por. T_2), gdzie $B \in M_D^*$. Otóż $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 1, 0) \perp H_3$, $\mathbf{u}_4 = (0, 1, 2, -1) \perp H_4$, stąd

$$M_B^*: \; x_1 = 1 + \alpha, \; x_2 = k + \beta, \; x_3 = \alpha + 2\beta, \; x_4 = -\beta$$

oraz punkt $B' = M_B^* \cap M_2$:

$$1 + \alpha + \alpha + 2\beta = 0,$$

$$k + \beta + 2\alpha + 4\beta + \beta = 0,$$

czyli

$$\alpha = \frac{k-3}{4}, \qquad \beta = \frac{1-k}{4}.$$

Zatem

$$B'\left(\frac{k+1}{4}, \frac{3k+1}{4}, -\frac{k+1}{4}, \frac{k-1}{4}\right).$$

---

[1] Łatwo sprawdzić, że oś Ox_2 nie objęta równaniem (a), a należąca do pęku $(L)_O$ może być pominięta w rozważaniach.

[2] Chodzi o rzuty prostokątne półprostych L leżących w przestrzeniach $H(L; M_2)$ na płaszczyźnie M_2.

Z kolei, rzut B'' punktu B' na płaszczyźnie M_1 jest następujący: $B''\left(\frac{k+1}{4}, \frac{3k+1}{4}, 0, 0\right)$. Aby więc półprosta $L(O; B)$ pokrywała się z półprostą $L(O; B'')$ musi być spełniony warunek

$$\frac{x_2}{x_1}=k, \quad \text{czyli} \quad \frac{(3k+1)/4}{(k+1)/4}=k,$$

a więc

$$k^2-2k-1=0. \tag{a$_1$}$$

Z (a$_1$) otrzymujemy $k_{1,2}=1\mp\sqrt{2}$. Istnieją zatem dwie pary półprostych $(L_i^*, L_i'^*)$, $i=1, 2$, wyznaczających płaszczyzny prostopadłe do płaszczyzn M_1 i M_2, a więc istnieją dwa kąty między płaszczyznami M_1 i M_2. Mianowicie: $\varphi_i=\sphericalangle(L_i^*, L_i'^*)$, $i=1, 2$, gdzie $L_i^*=$ $=L(O; B_i)$ i $L_i'^*=L(O; B_i')$, przy czym $B_i(1, k_i, 0, 0)$,

$$B_i'\left(\frac{k_i+1}{4}, \frac{3k_i+1}{4}, -\frac{k_i+1}{4}, \frac{k_i-1}{4}\right), \quad i=1,2$$

oraz $k_1=1-\sqrt{2}$ i $k_2=1+\sqrt{2}$. Korzystając ze wzoru

$$\cos\sphericalangle(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)=\frac{\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_1|\cdot|\mathbf{u}_2|}$$

i uwzględniając, że $\mathbf{u}_i=\overline{OB}_i=(1, k_i, 0, 0)$ i $4\overline{OB}_i'=\mathbf{u}_i'=(k_i+1, 3k_i+1, -k_i-1, k_i-1)$, otrzymujemy:

$$\cos\varphi_i=\frac{k_i+1+3k_i^2+k_i}{\sqrt{1+k_i^2}\sqrt{12k_i^2+8k_i+4}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3k_i^2+2k_i+1}{k_i^2+1}}.$$

Stąd $\cos\varphi_1\approx 0{,}39$, $\cos\varphi_2\approx 0{,}93$, czyli $\varphi_1=67°$ i $\varphi_2\approx 21°30'$.

Zadania

13.5. Udowodnić, wzór (6) § 11.

13.6. Znaleźć współrzędne środka odcinka o końcach $a(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b(b_1, b_2, \ldots$ $\ldots, b_n)$.

13.7. Znaleźć zbiór punktów $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ przestrzeni $\mathbf{R}^n$, których odległość od stałego punktu $a(a_1, a_2, \ldots, a_n)\in\mathbf{R}^n$ jest stała i równa r $(r>0)$.

13.8. Dane są wektory $\mathbf{u}_i\in\mathbf{R}^n$, $i=1, 2, \ldots, k$. Wykazać, że

a) $(\mathbf{u}_i \| H^l,\ l\leqslant n)\Rightarrow(\mathbf{u}=\sum_{i=1}^{k} t_i\mathbf{u}_i \| H^l,\ t_i\in\mathbf{R},\ i=1, 2, \ldots, k)$;

b) $(\mathbf{u}_i \perp H^l,\ l\leqslant n)\Rightarrow(\mathbf{u}=\sum_{i=1}^{k} t_i\mathbf{u}_i \perp H^l,\ t_i\in\mathbf{R},\ i=1, 2, \ldots, k)$.

13.9. Dana jest hiperpłaszczyzna $H: \sum_{i=1}^{n} A_i x_i + A_0 = 0$.

a) Wykazać, że współrzędne końca wektora $\mathbf{a} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$, którego początek należy do H spełniają warunek $\sum_{i=1}^{n} A_i x_i + A_0 \geqslant 0$;

b) wykazać, że obrazem hiperpłaszczyzny $H \subset \mathbf{R}^n$ przy przekształceniu afinicznym $\mathbf{R}^n$ na $\mathbf{R}^n$ jest hiperpłaszczyzna $(n-1)$-wymiarowa, przy czym obrazy hiperpłaszczyzn równoległych są hiperpłaszczyznami równoległymi.

Zadania 13.10 - 13.47 dotyczyć będą tylko przestrzeni $\mathbf{R}^4$.

13.10. Znaleźć równanie przestrzeni:

a) wyznaczonej przez punkty $P_1(0, 1, 2, 2)$, $P_2(2, 0, -1, 4)$, $P_3(-2, 1, 5, 1)$, $P_4(1, 1, 1, 3)$;

b) przechodzącej przez punkt $P_0(1, -1, 2, 4)$ i prostopadłej do wektora $\mathbf{u} = (-2, 1, 1, 3)$;

c) przechodzącej przez punkt $P_0(-1, 0, 2, 4)$ i równoległej do przestrzeni H: $3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 5 = 0$;

d) przechodzącej przez punkt $P_0(-1, 0, 0, 2)$ i prostopadłej do prostej

$$L: \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - 2 &= 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 5 &= 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 - 10 &= 0; \end{aligned}$$

e) przechodzącej przez punkt $P_0(1, 4, -1, 2)$ i równoległej do wektorów

$$\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0, 1), \quad \mathbf{u}_2 = (1, 3, 1, -2), \quad \mathbf{u}_3 = (4, 2, 1, -9).$$

13.11. Znaleźć równanie przestrzeni wyznaczonej przez dwie proste

$$L_1: x_1 = -k, \; x_2 = 1 + 2k, \; x_3 = 3 + 5k, \; x_4 = 2 + k \quad \text{i} \quad L_2(P_1; P_2),$$

gdzie $P_1(2, 0, -4, 3)$, $P_2(-1, 2, 7, -4)$.

13.12. Znaleźć równanie przestrzeni wyznaczonej przez płaszczyznę

$$M_1: \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 - 1 &= 0 \end{aligned} \quad \text{i punkt } P_0(4, 2, -1, 1).$$

13.13. Znaleźć równanie przestrzeni przechodzącej przez prostą

$$L: \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 1 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

i równoległej do wektorów $\mathbf{u}_1 = (2, 0, -1, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 1, 3, 0)$.

13.14. Sprawdzić, że następujący układ równań

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_4&=0,\\ x_2+x_3-x_4-1&=0,\\ 2x_1+3x_2-x_3+1&=0 \end{aligned}$$

określa prostą oraz znaleźć równanie przestrzeni prostopadłej do tej prostej i przechodzącej przez punkt $P_0(0, 2, 1, 3)$.

13.15. Wykazać, że płaszczyzny

$$M_1: \begin{array}{l} x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ x_1-x_2+x_3-x_4=0 \end{array} \quad \text{i} \quad M_2: \begin{array}{l} x_1+x_2+x_3+x_4+1=0,\\ x_1-x_2+x_3-x_4+2=0 \end{array}$$

są ściśle równoległe oraz znaleźć $H(M_1; M_2)$.

13.16. Wykazać, że płaszczyzny

$$M_1: \begin{array}{l} x_1=1+3k_1+k_2,\\ x_2=1-k_1-2k_2,\\ x_3=1-4k_2,\\ x_4=-2k_1-3k_2 \end{array} \quad \text{i} \quad M_2: \begin{array}{l} x_1=1+k_1-2k_2,\\ x_2=1-2k_1+k_2,\\ x_3=1-4k_1+4k_2,\\ x_4=-3k_1+5k_2 \end{array}$$

przecinają się w prostej oraz znaleźć $H(M_1; M_2)$.

13.17. Znaleźć równanie przestrzeni wyznaczonej przez płaszczyznę M_1 i prostą L_1:

$$M_1: \begin{array}{l} x_1-x_2+x_3-2x_4+1=0,\\ 2x_2-x_3+x_4+1=0, \end{array} \qquad L_1: \begin{array}{l} x_1=3+k,\\ x_2=3+2k,\\ x_3=1,\\ x_4=4+k. \end{array}$$

13.18. Znaleźć równania płaszczyzny:

a) wyznaczonej przez punkty $P_1(0, 0, 0, 2)$, $P_2(1, 1, 0, -1)$, $P_3(2, -1, -3, -4)$;

b) przechodzącej przez punkt $P_0(1, -1, 2, 1)$ i równoległej do prostych

$L_1: \overline{OP}=\overline{OP}_0+k\mathbf{u}$, gdzie $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $P_0(1, -2, 1, 5)$, $\mathbf{u}=(-3, 1, -2, 0)$,

$L_2: x_1=2+3k, x_2=2+3k, x_3=4+2k, x_4=3-4k$;

c) przechodzącej przez punkt $P_0(0, 1, 2, -1)$ i ściśle równoległej do płaszczyzny

$$M_1: \begin{array}{l} x_1-3x_2-3x_4+5=0,\\ 2x_2-x_3+2x_4-3=0. \end{array}$$

13.19. Znaleźć równania płaszczyzny wyznaczonej przez prostą L: $\overline{OP}=\overline{OP}_0+k\mathbf{u}$, gdzie $P_0(1, 2, 1, -3)$ oraz $\mathbf{u}=(-1, 1, 1, 2)$, i punkt przecięcia przestrzeni $3x_1-x_2+2x_3-7x_4-79=0$ z prostą L_1: $x_1=4+k$, $x_2=1+k$, $x_3=-1+2k$, $x_4=-10-2k$.

13.20. Znaleźć równania płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P_0(3, -1, 2, 1)$ i normalnej do płaszczyzny

$$M_1: \begin{array}{l} x_1-2x_2+4x_3-x_4-1=0,\\ 2x_1+x_2-x_3-2=0. \end{array}$$

13.21. W przestrzeni H: $x_1+x_2-2x_3+1=0$ dana jest płaszczyzna M: $x_1-x_2+x_3-x_4+1=0$, $2x_2-3x_3+x_4=0$. Znaleźć kierunek prostopadły do płaszczyzny M i zarazem równoległy do przestrzeni H.

13.22. Znaleźć równania rzutu prostokątnego płaszczyzny M: $x_1-x_2+x_3=0$, $2x_2-x_3+x_4-1=0$ na przestrzeni H: $x_1+x_2+2x_3-x_4-2=0$.

13.23. Dana jest prosta

$$L: \begin{aligned} x_1-x_2+1&=0,\\ 2x_1-x_3-3&=0,\\ 4x_1+x_4+1&=0 \end{aligned}$$

i przestrzeń H: $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. Wykazać, że $L \parallel H$ oraz znaleźć równania płaszczyzny przechodzącej przez prostą L i prostopadłej do H.

13.24. Znaleźć równania prostej:

a) przechodzącej przez punkty $P_1(1, 2, -1, 3)$, $P_2(3, 1, 2, 1)$;

b) przechodzącej przez punkt $P_0(3, 4, 1, 2)$ i prostopadłej do przestrzeni H: $x_1-x_2+x_3+x_4-2=0$;

c) przechodzącej przez punkt $P_0(-1, 0, 2, 1)$ i równoległej jednocześnie do trzech przestrzeni H_1: $x_1-x_2+3x_3-1=0$, H_2: $2x_1+x_2-x_4=0$, H_3: $x_2+4x_3+x_4-2=0$.

13.25. Znaleźć równania prostej przechodzącej przez punkt $P_0(0, 1, 0, 0)$ i przecinającej jednocześnie prostą

$$L: \begin{aligned} x_1-3x_2-1&=0,\\ 2x_2-x_3+2&=0,\\ 5x_2-x_4+1&=0 \end{aligned}$$

i płaszczyznę

$$M: \begin{aligned} 6x_1-3x_2-13x_4-1&=0,\\ 3x_2+6x_3-7x_4-1&=0. \end{aligned}$$

13.26. Znaleźć równania prostej przecinającej jednocześnie trzy dane proste

$$L_1: x_1=2-k,\ x_2=1+2k,\ x_3=k,\ x_4=-1-k,$$

$$L_2: x_1=9+4k,\ x_2=3,\ x_3=1-k,\ x_4=-4-2k,$$

$$L_3: \begin{aligned} 4x_1-3x_2-15&=0,\\ 2x_1-3x_4-12&=0,\\ x_3+3&=0. \end{aligned}$$

13.27. Znaleźć równania prostej przecinającej jednocześnie dane proste i dane płaszczyzny

$$\text{a) } L_1: \begin{aligned} x_2&=0,\\ x_3+x_4&=0,\\ x_1-2x_4&=0, \end{aligned} \qquad L_2: \begin{aligned} x_1+x_2-1&=0,\\ x_2-x_3&=0,\\ 2x_3-x_4&=0, \end{aligned}$$

$$M_1: \begin{array}{l} x_1+x_2-3x_4-2=0, \\ 2x_2+x_3-5x_4=0, \end{array} \quad M_2: \begin{array}{l} x_1+x_2+4x_3+1=0, \\ x_2-x_3-x_4=0; \end{array}$$

b) $L_1: x_1=1+v, x_2=-v, x_3=v, x_4=2v,$

$L_2: x_1=t, x_2=1+2t, x_3=-t, x_4=t.$

$$M_1: \begin{array}{l} H_1: x_1+8x_2+2x_3-15=0, \\ H_2: 3x_1-2x_2-2x_4+7=0, \end{array} \quad M_2: \begin{array}{l} H_3: \quad x_1+x_3-2=0, \\ H_4: x_2+x_3+4x_4+1=0. \end{array}$$

13.28. Dana jest prosta L_1: $x_1=x_2=x_3=x_4$ i przestrzeń H: $x_1-2x_2+x_3-x_4-2=0$. Znaleźć równania płaszczyzny przechodzącej przez prostą L_1 i prostopadłą do przestrzeni H oraz równania rzutu prostokątnego prostej L_1 na przestrzeni H.

13.29. Rzutem normalnym K^* prostej L na płaszczyźnie M nazywamy zbiór rzutów normalnych punktów prostej L na płaszczyźnie M. Wykazać, że zbiór K^* jest prostą.

13.30. Znaleźć równania rzutu normalnego prostej L: $x_1=2+k$, $x_2=2$, $x_3=1+2k$, $x_4=-4k$ na płaszczyźnie M: $x_1-x_2+x_3-1=0$, $2x_2-x_3+x_4=0$.

13.31. Dany jest punkt $P_0(2, 0, 3, -2)$ i przestrzeń H: $x_1-x_2+2x_3-x_4-2=0$. Znaleźć $d(P_0, H)$ oraz punkt P_0' symetryczny do punktu P_0 względem przestrzeni H.

13.32. Dany jest punkt $P_0(3, 0, 1, 3)$ i płaszczyzna M: $x_1+x_2=0$, $x_1-x_3+x_4-1=0$. Znaleźć: $d(P_0, M)$; punkt P_0' symetryczny do P_0 względem M oraz równania prostej przechodzącej przez punkt P_0 i przecinającej prostopadle płaszczyznę M.

13.33. Dany jest punkt $P_0(2, 3, 1, -3)$ i prosta L: $x_1=1-k$, $x_2=2+k$, $x_3=2k$, $x_4=-1+k$. Znaleźć: $d(P_0, L)$; punkt P_0' symetryczny do P_0 względem prostej L oraz równania prostej przechodzącej przez punkt P_0 i przecinającej prostopadle prostą L.

13.34. Dana jest prosta L: $x_1=2+2k$, $x_2=4-2k$, $x_3=-1-2k$, $x_4=1+k$ i płaszczyzna M: $x_1-x_2+x_3=0$, $2x_2-x_3+x_4-1=0$. Sprawdzić, że prosta L i płaszczyzna M nie mają punktów wspólnych oraz znaleźć:

α) $d(L, M)$;

β) równania prostej przecinającej prostopadle L i M;

γ) równania rzutu normalnego prostej L na płaszczyźnie M;

δ) zbiór wszystkich punktów symetrycznych do punktów prostej L względem płaszczyzny M.

13.35. Dany jest punkt $P_0(0, 1, 2, -1)$ i płaszczyzna M: $x_1+x_2-x_3-1=0$, $x_3+x_4+1=0$. Wykazać, że w przestrzeni $\mathbf{R}^4$ można obrócić punkt P_0 dookoła płaszczyzny M oraz znaleźć okrąg utworzony przez obrót tego punktu.

13.36. Znaleźć kąty jakie tworzy prosta

$$L: \begin{array}{r} 8x_1-x_2-x_3-x_4-4=0, \\ 2x_1-x_2+1=0, \\ 4x_1-x_3-5=0 \end{array}$$

z osiami układu współrzędnych.

13.37. Znaleźć kąt między prostymi

$$L_1: x_1=1-k,\ x_2=2k,\ x_3=3+k,\ x_4=4k,$$

$$L_2: \begin{array}{r} 5x_1-2x_2+3x_3+2x_4-3=0, \\ 3x_1-x_2+x_3-1=0, \\ x_3+x_4-1=0. \end{array}$$

13.38. Znaleźć kąt między przestrzeniami

$$H_1: x_1-2x_2+5x_3-x_4+2=0, \qquad H_2: 2x_1+x_2-x_3+x_4-1=0.$$

13.39. Znaleźć kąt między prostą L: $x_1=1+k$, $x_2=-1-2k$, $x_3=3k$, $x_4=2k$ i przestrzenią H: $2x_1-3x_2+x_4-2=0$.

14.40. Znaleźć kąty jakie tworzy prosta L: $x_1=k$, $x_2=3k$, $x_3=-k$, $x_4=k$ z płaszczyznami i przestrzeniami układu współrzędnych.

13.41. Znaleźć kąt prostej L: $x_1=-4+5k$, $x_2=1+k$, $x_3=-2+k$, $x_4=2-k$ z płaszczyzną M: $3x_1-x_2+x_3=0$, $3x_1+3x_2+x_3+2x_4-2=0$.

13.42. Wiedząc, że prosta L tworzy z osiami układu równe kąty, znaleźć je oraz znaleźć kąty, jakie tworzy ta prosta z płaszczyznami i przestrzeniami układu współrzędnych.

13.43. Znaleźć kąt między płaszczyzną M: $x_1-x_2+x_3-2x_4=0$, $2x_1-2x_2+x_3-5x_4-2=0$ i przestrzenią H: $x_1-x_3+2=0$.

13.44. Znaleźć kąt między płaszczyznami

$$M_1: x_1+x_2+2x_3=0,\ x_1+4x_3-x_4=0, \qquad M_2: x_1=0,\ x_2=0.$$

13.45. Mówimy, że płaszczyzna M_1 jest *półprostopadła* ($\frac{1}{2}\perp$) do płaszczyzny M_2, jeżeli istnieje dokładnie jeden kierunek niezerowy (tzn. zbiór wektorów postaci $k\mathbf{u}$, gdzie $|\mathbf{u}|k\neq 0$) równoległy do M_1 i zarazem prostopadły do M_2. Na przykład w $\mathbf{R}^3$ płaszczyzna M_1 prostopadła do płaszczyzny M_2 jest płaszczyzną półprostopadłą do M_2, przy czym również płaszczyzna M_2 jest półprostopadła do M_1, tzn. relacja prostopadłości dwóch płaszczyzn w $\mathbf{R}^3$ jest symetryczna.

Wykazać, że w przestrzeni $\mathbf{R}^4$ relacja półprostopadłości dwóch płaszczyzn jest symetryczna.

13.46. Sprawdzić, że płaszczyzny:

$$M_1: x_1+2x_2-x_4=0,\ 2x_1-x_3+x_4=0;$$

$$M_2: x_1+3x_3-7x_4+5=0,\ x_2+2x_3-3x_4-2=0$$

są prostopadłe oraz znaleźć kierunki: α) równoległy do M_1 i jednocześnie prostopadły do M_2; β) równoległy do M_2 i jednocześnie prostopadły do M_1.

13.47. Znaleźć równania płaszczyzny przechodzącej przez prostą L_1: $x_1=1-2k$, $x_2=-1+4k$, $x_3=2-2k$, $x_4=k$ oraz półprostopadłej do płaszczyzny M_1: $2x_1-x_2+x_4+1=0$, $x_1+3x_2-x_3=0$, przy czym takiej, aby kierunek do niej równoległy i zarazem prostopadły do M_1 był równoległy do przestrzeni H: $19x_1+x_2-3x_3+8x_4+8=0$ zawierającej płaszczyznę M_1.

Odpowiedzi

13.6. $s(\frac{1}{2}(a_1+b_1), \frac{1}{2}(a_2+b_2), \ldots, \frac{1}{2}(a_n+b_n))$.

13.7. $(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2=r^2$, sfera n-wymiarowa.

13.10. a) $2x_1-x_2+x_3-x_4+1=0$; b) $2x_1-x_2-x_3-3x_4+11=0$;
c) $3x_1-x_2+2x_3-x_4+3=0$; d) $x_1-2x_2+x_3+3x_4-5=0$;
e) $2x_1-x_2+3x_3+x_4+3=0$.

13.11. $3x_1-x_2+x_3-2=0$. **13.12.** $13x_1-19x_2+14x_3+9x_4-9=0$.

13.13. $55x_1-83x_2+46x_3-32x_4-43=0$. **13.14.** $2x_1-3x_2-5x_3-8x_4+35=0$.

13.15. $x_1+3x_2+x_3+3x_4=0$. **13.16.** $x_1+x_2-x_3+x_4-1=0$.

13.17. Wsk. Sprawdzić, że prosta L_1 przecina płaszczyznę M_1; $5x_1+x_2+2x_3-7x_4+8=0$.

13.18. a) $M: x_1-x_2+x_3=0, 2x_1+x_2-x_3+x_4-2=0$;
b) $M: x_1+x_2-x_3+x_4+1=0, 2x_2+x_3+2x_4-2=0$;
c) $M: x_1+x_2-2x_3+x_4+4=0, 2x_2-x_3+2x_4+2=0$.

13.19. $M: x_1-x_2+2x_3-1=0, 2x_1+x_2-x_3+x_4=0$.

13.20. $M: x_1-2x_2+5x_4-10=0, x_2+x_3+2x_4-3=0$.

13.21. $k\mathbf{u}=k(4, -2, 1, -3), k\in\mathbf{R}$.

13.22. Wsk. Rzutem prostokątnym punktu A na przestrzeni H (mówimy też rzutem punktu A na przestrzeń H) nazywamy punkt $A'=L_A\cap H$, gdzie $L_A\perp H$ i $A\in L$. Można wykazać, że punkt A' zawsze istnieje i jest jednoznacznie określony; M': $x_1+x_2+2x_3-x_4-2=0$, $x_1+3x_2-x_3+2x_4-2=0$.

13.23. $7x_1-x_2-5x_3-x_4-15=0, x_1-x_2+1=0$.

13.24. a) $x_1=1+2k$, $x_2=2-k$, $x_3=-1+3k$, $x_4=3-2k$;
b) $x_1=3+k$, $x_2=4-k$, $x_3=1+k$, $x_4=2+k$;
c) $x_1=-1-5k$, $x_2=k$, $x_3=2+2k$, $x_4=1-9k$.

13.25. $x_1=k$, $x_2=1-k$, $x_3=2k$, $x_4=k$.

13.26. $x_1=2-k$, $x_2=1+2k$, $x_3=3k$, $x_4=-1+k$.

Uwaga. W przestrzeni $\mathbf{R}^3$ istnieje nieskończenie wiele prostych przecinających trzy dane proste; mianowicie, rodzina tworzących prostoliniowych powierzchni prostokreślnej stopnia drugiego.

13.27. Istnieją dwie proste:
a) $x_1=1+12k, x_2=-12k, x_3=-\frac{1}{2}-11k, x_4=\frac{1}{2}-25k$; $x_1=k, x_2=0, x_3=0, x_4=0$;
b) $x_1=1-k$, $x_2=k$, $x_3=0$, $x_4=0$;
$x_1=\frac{27}{2}-187k$, $x_2=-\frac{25}{2}+112k$, $x_3=\frac{25}{2}-125k$, $x_4=25-325k$.

13.28. $M: x_1-2x_2-2x_3+3x_4=0$, $x_1-x_3=0$;
$L_1': x_1-x_3=0$, $5x_1-8x_2-6=0$, $3x_3-4x_4-2=0$.

13.30. $x_1=k$, $x_2=-1+2k$, $x_3=k$, $x_4=2-3k$.

13.31. $d(P_0, H)=\frac{8}{7}\sqrt{7}$, $P_0'(-\frac{2}{7}, \frac{16}{7}, -\frac{11}{7}, \frac{2}{7})$.

13.32. $d(P_0, H)=\sqrt{7}$; $P_0'(-1, -2, 3, 1)$; $L: x_1-2x_2-3=0$, $x_2+x_3-1=0$, $x_2-x_4+3=0$.

13.33. $d(P_0, L)=\sqrt{7}$; $P_0'(0, 1, -1, 1)$; $L_1: x_1=2+k$, $x_2=3+k$, $x_3=1+k$, $x_4=-3-2k$.

13.34. α) $d(L, M)=\sqrt{15}$; β) $L_1: x_1=1+k,\ x_2=1+3k,\ x_3=-k,\ x_4=-1+2k$; γ) $L': x_1=1+3k,\ x_2=1-5k,\ x_3=-8k,\ x_4=-1+2k$; δ) zbiór punktów symetrycznych tworzy prostą $L_2: x_1=0,\ x_2+4x_4+14=0,\ x_3+10x_4+29=0$.

13.35. Wsk. Część wspólna sfery $(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2+(x_4-a_4)^2=r^2$ i płaszczyzny M: $A_1x_1+B_1x_2+C_1x_3+D_1x_4+E_1=0,\ A_2x_1+B_2x_2+C_2x_3+D_2x_4+E_2=0$ jest okręgiem. Okrąg: $(x_1-\frac{2}{5})^2+(x_2-\frac{7}{5})^2+(x_3-\frac{4}{5})^2+(x_4+\frac{9}{5})^2=\frac{12}{5},\ x_1-x_2+1=0,\ x_1+x_3-x_4-3=0$.

13.36. $\cos\varphi_1=\frac{1}{5},\ \cos\varphi_2=\frac{2}{5},\ \cos\varphi_3=\frac{4}{5},\ \cos\varphi_4=\frac{2}{5}$.

13.37. $\cos\varphi=6/\sqrt{154}$. **13.38.** $\cos\varphi=6/\sqrt{217}$. **13.39.** $\sin\varphi=10/3\sqrt{26}$.

13.40. $\sin\varphi_1=\sin\varphi_3=\sin\varphi_4=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$; $\varphi_2=\frac{1}{3}\pi$; $\cos\varphi_{12}=\cos\varphi_{23}=\cos\varphi_{24}=\dfrac{5}{\sqrt{30}}$,

$\cos\varphi_{13}=\cos\varphi_{14}=\cos\varphi_{34}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, gdzie φ_i oznaczają kąty prostej z przestrzeniami $x_i=0$, $i=1, 2, 3, 4$, a φ_{ij}, $i, j=1, 2, 3, 4$ ($i\neq j$ oraz $\cos\varphi_{ij}=\cos\varphi_{ji}$) oznaczają kąty prostej z płaszczyznami Ox_ix_j.

13.41. $\cos\varphi=58/\sqrt{20706}$.

13.42. Z osiami układu $\varphi_1=\frac{1}{3}\pi$; z płaszczyznami układu $\varphi_2=\frac{1}{4}\pi$; z przestrzeniami układu $\varphi_3=\frac{1}{6}\pi$.

13.43. Przez *kąt między płaszczyzną i przestrzenią* rozumiemy kąt, jaki tworzy ta płaszczyzna ze swoim rzutem prostokątnym na tej przestrzeni; $\varphi\approx 58°45'$.

13.44. $\varphi_1\approx 23°$, $\varphi_2\approx 78°$.

13.46. Por. zadanie 13.45. α) $k\mathbf{u}=k\cdot(5, -8, -1, -11)$, $k\in\mathbf{R}$; β) $kv=k\cdot(3, 2, -1, 0)$, $k\in\mathbf{R}$.

13.47. $19x_1-11x_3+16x_4+3=0,\ 52x_1+11x_2+60x_4-41=0$.

§ 14. KRZYWE STOŻKOWE

14.1. Na płaszczyźnie H dana jest prosta L (*kierownica*) i punkt $F\notin L$ (*ognisko*). *Stożkową* nazywamy zbiór punktów $K\subset H$ spełniających warunek

$$P\in K \Leftrightarrow \frac{d(P, F)}{d(P, L)}=e \wedge e\in\mathbf{R}_+, \tag{1}$$

przy czym K nazywamy: *elipsą*, jeżeli $e<1$; *parabolą*, jeżeli $e=1$; *hiperbolą*, jeżeli $e>1$.

Uwaga. Do stożkowych zaliczamy również okrąg.

Przyjmując na H w odpowiedni sposób układ Oxy, otrzymujemy z (1) równania stożkowych w postaciach kanonicznych:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{2}$$

– *elipsa*, jeżeli $a \neq b$, okrąg jeżeli $a=b$, przy czym (por. rys. 14.1):

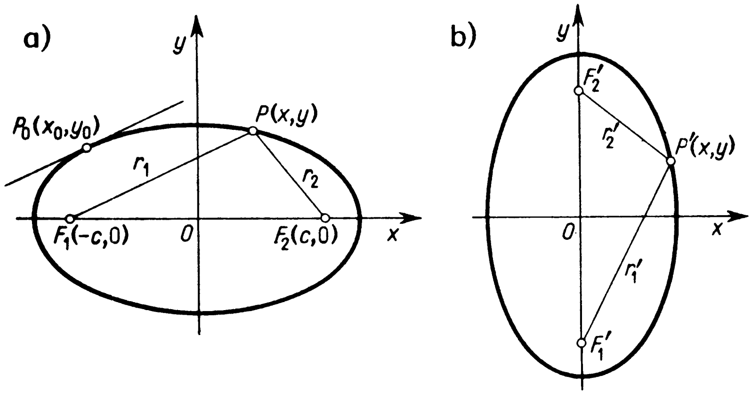
$$F_{1,2}(\mp c, 0), \quad \text{gdzie} \quad c=\sqrt{a^2-b^2} \ (a>b),$$

$$F'_{1,2}(0, \mp c), \quad \text{gdzie} \quad c=\sqrt{b^2-a^2} \ (a<b)$$

– *ogniska elipsy*;

$$x=\mp\frac{a^2}{c} \ (a>b), \quad y=\mp\frac{b^2}{c} \ (a<b)$$

– *równania kierownic elipsy*;



Rys. 14.1

$$e=\frac{c}{a}<1 \ (a>b), \quad e=\frac{c}{b} \ (a<b)$$

– *mimośród elipsy*;

$$r_{1,2}=a \pm ex \ (a>b), \quad r'_{1,2}=b \pm ey \ (a<b)$$

– *promienie wodzące elipsy.*

Uwaga. W zadaniach z okręgiem oprócz postaci kanonicznej (2) używamy często postaci nie kanonicznych.

(3) $$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

okrąg, gdzie $G(a, b)$ – *środek okręgu*, r – *promień*,

(4) $$Ax^2+Ay^2+2Bx+2Cy+D=0, \quad A \neq 0 \wedge B^2+C^2-AD>0,$$

przy czym wprowadzamy określenia:

(5) $$K(x_0, y_0)=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2$$

– *potęga punktu* $P_0(x_0, y_0)$ *względem okręgu* (3),

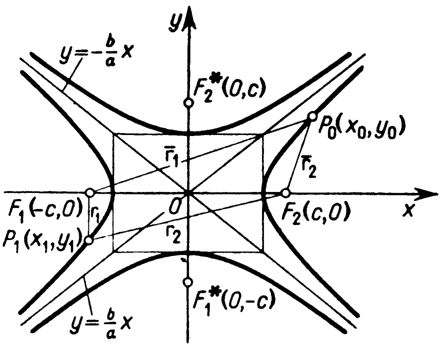
(6) $$\alpha K_1(x, y)+\beta K_2(x, y)=0, \quad \alpha, \beta \in R \wedge \alpha^2+\beta^2>0,$$

(gdzie $K_i(x, y)=(x-a_i)^2+(y-b_i)^2-r_i^2$, $i=1, 2$) — *pęk okręgów wyznaczony przez okręgi* K_1 i K_2(¹).

Zauważmy, że jeżeli $K(x_0, y_0)<0$ [$K(x_0, y_0)>0$], to punkt $P_0(x_0, y_0)$ leży wewnątrz [zewnątrz] okręgu K.

(7) $$y^2=2px, \quad p\neq 0$$

— *parabola*, przy czym: $F(\frac{1}{2}p, 0)$ — *ognisko*, $x=-\frac{1}{2}p$ — *równanie kierownicy*, oś Ox — *oś paraboli*, $O(0, 0)$ — *wierzchołek paraboli*, tzn. punkt przecięcia paraboli z jej osią;



Rys. 14.2

(8) $$x^2=2py, \quad p\neq 0$$

— *parabola*, przy czym: $F(0, \frac{1}{2}p)$ — *ognisko*, $y=-\frac{1}{2}p$ — *kierownica*, oś Oy — *oś paraboli*, $O(0, 0)$ — *wierzchołek paraboli.*

(9) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \left[\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\right]$$

— *hiperbola* $\left[\textit{hiperbola sprzężona} \text{ (rys. 14.2) z hiperbolą } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\right]$, przy czym (por. rys. 14.2): $F_{1,2}(\mp c, 0)$ $[F_{1,2}^*(0, \mp c)]$, $c=\sqrt{a^2+b^2}$ — *ogniska*, $e=\dfrac{c}{a}>1$ $\left[e^*=\dfrac{c}{b}>1\right]$ — *mimośrody*, $x=\mp\dfrac{a^2}{c}$ $\left[y=\mp\dfrac{b^2}{c}\right]$ — *równania kierownic*, $r_{1,2}=\mp a-ex_1$ — *promienie wodzące punktu* $P_1(x_1, y_1)$ *lewej gałęzi* ($x\leqslant -a$), $\bar{r}_{1,2}=\pm a+ex_0$ = *promienie wodzące punktu* $P_0(x_0, y_0)$ *prawej gałęzi* ($x\geqslant a$), [$r_{1,2}^*=\mp b-e^*y_1$ — *promienie wodzące punktu* $P_1^*(x_1, y_1)$ *dolnej gałęzi* ($y\leqslant -b$), $\bar{r}_{1,2}^*=\pm b+e^*y_0$ — *promienie wodzące punktu* $P_0^*(x_0, y_0)$ *górnej gałęzi* ($y\geqslant b$)], $y=\mp\dfrac{b}{a}x$ — *równania asymptot* $\left[y=\mp\dfrac{b}{a}x \text{ — równania asymptot}\right]$.

(¹) Równanie (6) dla pewnych wartości parametrów: α, β, a_i, b_i, r_i może nie przedstawiać okręgu. Por. przykład 14.1.

Równanie

(10) $$\alpha x_0 x+\beta y_0 y=1, \quad \text{gdzie} \quad \alpha x_0^2+\beta y_0^2=1,$$

przedstawia *równanie stycznej* w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ do: elipsy, jeżeli $\alpha=\frac{1}{a^2}\wedge\beta=\frac{1}{b^2}$; hiperboli, jeżeli $\alpha=\frac{1}{a^2}\wedge\beta=-\frac{1}{b^2}$ $\left[\alpha=-\frac{1}{a^2}\wedge\beta=\frac{1}{b^2}\right.$ – hiperboli sprzężonej$\left.\right]$.

Równania stycznych do parabol (7) i (8) w punkcie $P_0(x_0, y_0)$:

(11) $$y_0 y=p(x+x_0), \quad \text{gdzie} \quad y_0^2=2px_0,$$

(12) $$x_0 x=p(y+y_0), \quad \text{gdzie} \quad x_0^2=2py_0.$$

Przykłady

14.1. Wykazać, że równanie (6) (zakładamy, że środki okręgów $K_1(x, y)=0$ i $K_2(x, y)=0$ są różne) dla $\alpha=1$ i $\beta=-1$ przedstawia prostą zwaną *linią potęgową* okręgów $K_1(x, y)=0$ i $K_2(x, y)=0$, przy czym prosta ta przechodzi przez punkty przecięcia tych okręgów (jeżeli istnieją) i potęgi każdego punktu tej prostej względem obu okręgów są równe.

Rozwiązanie. Ze wzoru (6) dla $\alpha=1$, $\beta=-1$ otrzymujemy

(a) $$\left((x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2-(x-a_2)^2-(y-b_2)^2+r_2^2=0\right)\Leftrightarrow(Ax+By+C=0),$$

przy czym co najmniej jedna z liczb $A=2(a_2-a_1)$, $B=2(b_2-b_1)$ jest różna od zera (środki okręgów $K_1(x, y)=0$ i $K_2(x, y)=0$ są różne). Zatem równanie (a) przedstawia istotnie prostą. Jeżeli teraz punkt $A(x_1, y_1)\in(K_1(x, y)=0)$ i $A(x_1, y_1)\in(K_2(x, y)=0)$, to $K_1(x_1, y_1)-K_2(x_1, y_1)=0$, zatem punkt A leży na prostej (a). Weźmy teraz dowolny punkt $P_0(x_0, y_0)$ leżący na prostej (a), tzn. $K_1(x_0, y_0)-K_2(x_0, y_0)=0$. Stąd $K_1(x_0, y_0)=K_2(x_0, y_0)$, czyli potęgi punktu P_0 względem okręgów $K_1(x, y)=0$ i $K_2(x, y)=0$ są równe.

14.2. Znaleźć równanie okręgu stycznego do prostych

$$L_1: x+y-2=0, \quad L_2: x-y+4=0, \quad L_3: x-7y=0.$$

Rozwiązanie. Proste L_i, $i=1, 2, 3$, dzielą płaszczyznę na siedem części (rys. 14.3), przy czym łatwo zauważyć, że w częściach III, V i VII nie istnieją okręgi spełniające warunki zadania. Przyjmując oznaczenia jak na rys. 14.3 (por. też przykład 11.2) oraz oznaczając promień szukanego okręgu przez r, otrzymujemy

(a) $$(d_1=d_2=d_3=r)\Leftrightarrow\left(\frac{|x^*+y^*-2|}{\sqrt{2}}=\frac{|x^*-y^*+4|}{\sqrt{2}}=\frac{|x^*-7y^*|}{\sqrt{50}}=r\right).$$

Z układu (a) otrzymujemy cztery układy dwóch równań niezależnych w zależności od położenia punktu $D(x^*, y^*)$ względem części I, II, IV i VI. Mianowicie:

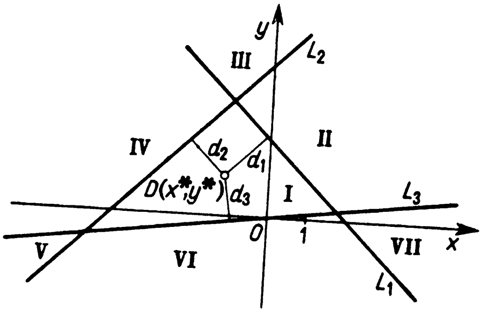
α) $D(x^*, y^*)\in$ I części; współrzędne punktów części I spełniają nierówności (rys. 14.3):

$$x+y-2<0 \quad \text{i} \quad x-y+4>0 \quad \text{i} \quad x-7y<0,$$

skąd

$$-\frac{x^*+y^*-2}{\sqrt{2}}=\frac{x^*-y^*+4}{\sqrt{2}}=r, \quad -\frac{x^*+y^*-2}{\sqrt{2}}=-\frac{x^*-7y^*}{\sqrt{50}}=r,$$

czyli $D(-1,\frac{7}{6})$, $r=\frac{11}{12}\sqrt{2}$; zatem $(x+1)^2+(y-\frac{7}{6})^2=\frac{121}{72}$;



Rys. 14.3

β) analogicznie dla części II

$$x+y-2>0 \quad \text{i} \quad x-7y<0 \quad \text{i} \quad x-y+4>0,$$

skąd kolejno

$$\frac{x^*+y^*-2}{\sqrt{2}}=\frac{x^*-y^*+4}{\sqrt{2}}=r, \quad \frac{x^*+y^*-2}{\sqrt{2}}=-\frac{x^*-7y^*}{\sqrt{50}}=r,$$

$$D(\tfrac{8}{3},3), \quad r=\tfrac{11}{6}\sqrt{2}, \quad (x-\tfrac{8}{3})^2+(y-3)^2=\tfrac{121}{18};$$

γ) w części IV,

$$x+y-2<0 \quad \text{i} \quad x-y+4<0 \quad \text{i} \quad x-7y<0,$$

skąd

$$-\frac{x^*+y^*-2}{\sqrt{2}}=-\frac{x^*-y^*+4}{\sqrt{2}}=r, \quad -\frac{x^*+y^*-2}{\sqrt{2}}=-\frac{x^*-7y^*}{\sqrt{50}}=r,$$

$$D(-\tfrac{13}{2},3), \quad r=\tfrac{11}{4}\sqrt{2}, \quad (x+\tfrac{13}{2})^2+(y-3)^2=\tfrac{121}{8};$$

δ) w części VI,

$$x+y-2<0 \quad \text{i} \quad x-y+4>0 \quad \text{i} \quad x-7y>0,$$

skąd

$$-\frac{x^*+y^*-2}{\sqrt{2}}=\frac{x^*-y^*+4}{\sqrt{2}}=r, \quad -\frac{x^*+y^*-2}{\sqrt{2}}=\frac{x^*-7y^*}{\sqrt{50}}=r,$$

$$D(-1,-8), \quad r=\tfrac{11}{2}\sqrt{2}, \quad (x+1)^2+(y+8)^2=\tfrac{121}{2}.$$

14.3. Znaleźć równanie okręgu K, którego środek leży na prostej L: $x-y+$ i który jest ortogonalny do okręgów

$$K_1: x^2+y^2-4x=0 \quad \text{i} \quad K_2: x^2+y^2+6y=0.$$

Rozwiązanie. Mówimy, że dwa przecinające się okręgi są *ortogonalne*, jeżeli styczne do nich w ich punktach przecięcia są prostopadłe. Można udowodnić (por. zadanie 14.17) że okręgi

$$K_1: (x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2 \quad \text{i} \quad K_2: (x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$$

są ortogonalne wtedy i tylko wtedy, gdy

(a) $$(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2=r_1^2+r_2^2.$$

Niech okrąg K ma równanie

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Ponieważ $S(a, b) \in L$, więc

(a_1) $$a-b+1=0.$$

Z kolei, wykorzystujemy warunki ortogonalności okręgu K z okręgami K_1 i K_2 (wzór (a))

(a_2) $$\begin{aligned}&(a-2)^2+b^2=r^2+4,\\ &a^2+(b+3)^2=r^2+9.\end{aligned}$$

Z układu trzech równań (a_1), (a_2) znajdujemy niewiadome a, b i r. Otóż

$$a=-\tfrac{3}{5}, \quad b=\tfrac{2}{5}, \quad r=\tfrac{1}{5}\sqrt{73}, \quad \text{skąd} \quad K: (x+\tfrac{3}{5})^2+(y-\tfrac{2}{5})^2=\tfrac{73}{25}.$$

14.4. Narysować części płaszczyzny, których współrzędne punktów spełniają nierówności

(a) $$9 \leqslant (x-3)^2+(y-1)^2 \leqslant 25;$$

(b) $$(x+4)^2+y^2 \geqslant 16 \quad \text{i} \quad x^2+(y-3)^2 \leqslant 25;$$

(c) $$x^2+y^2<4 \quad \text{i} \quad |y| \geqslant x.$$

Rozwiązanie. Będziemy korzystali z własności potęgi punktu względem okręgu (por. wzór (5)), oraz w punkcie c) ze wzoru (26) § 11.

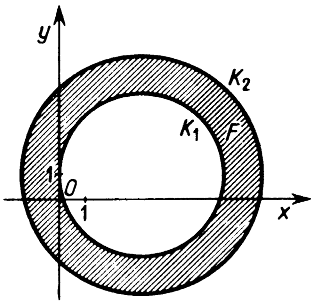
Nierówności (a) przepisać możemy w postaci

$$(x-3)^2+(y-1)^2-9 \geqslant 0 \wedge (x-3)^2+(y-1)^2-25 \leqslant 0.$$

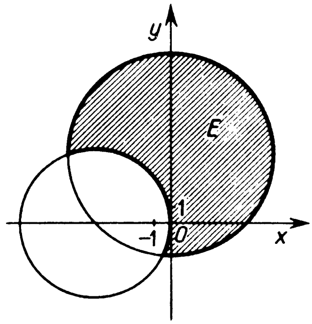
Punkty, których współrzędne spełniają pierwszą nierówność mają nieujemne potęgi względem okręgu K_1: $(x-3)^2+(y-1)^2=9$, a więc leżą na zewnątrz lub na okręgu K_1 (rys. 14.4), analogicznie punkty, których współrzędne spełniają drugą nierówność leżą wewnątrz lub na okręgu K_2: $(x-3)^2+(y-1)^2=25$ (rys. 14.4). Zatem poszukiwany zbiór tworzy pierścień F (rys. 14.4).

W przypadku nierówności (b) postępując analogicznie jak w nierówności (a), otrzymujemy figurę E (rys. 14.5).

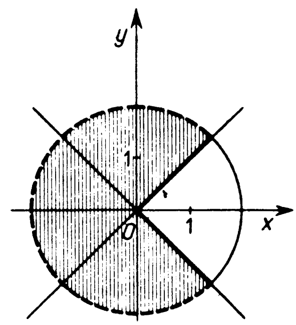
Dla nierówności (c) zbiór punktów, których współrzędne spełniają nierówność $x^2+y^2<$ <4, tworzy wnętrze okręgu K: $x^2+y^2=4$ (rys. 14.6). W celu znalezienia punktów, których współrzędne spełniają nierówność $|y| \geqslant x$, korzystamy z definicji wartości bezwzględnej.



Rys. 14.4



Rys. 14.5



Rys. 14.6

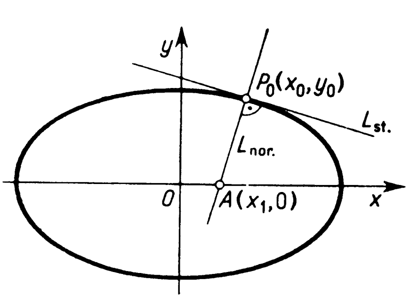
Otóż (rys. 14.6):

α) dla $y<0$ będzie $|y|\geqslant x \Leftrightarrow y\leqslant -x$;

β) dla $y\geqslant 0$ będzie $|y|\geqslant x \Leftrightarrow y\geqslant x$.

14.5. Znaleźć równanie elipsy w postaci kanonicznej, wiedząc, że długość odcinka normalnej do elipsy w punkcie $P(1,\frac{1}{2})$ równa się $\frac{1}{4}\sqrt{13}$.

Rozwiązanie. Przez odcinek normalnej do elipsy $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ w punkcie $P_0(x_0,y_0)$, rozumiemy odcinek o końcach w punktach $P_0(x_0,y_0)$ i $A(x_1,0)$, gdzie A jest punktem przecięcia normalnej w punkcie P_0 z osią Ox (rys. 14.7). Z równania (10) otrzymujemy



Rys. 14.7

$$m_{st.}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0},\quad \text{skąd}\quad m_{nor.}=\frac{-1}{m_{st.}}=\frac{a^2y_0}{b^2x_0},$$

zatem

$$\text{(a)}\qquad L_{nor.}:\ y-y_0=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0).$$

Z równania (a) znajdujemy x_1;

$$-y_0=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x_1-x_0),\quad \text{czyli}\quad x_1=x_0-\frac{b^2x_0}{a^2},$$

skąd

$$d(P_0,A)=\sqrt{\left(x_0-x_0+\frac{b^2x_0}{a^2}\right)^2+y_0^2}=\frac{1}{a^2}\sqrt{b^4x_0^2+a^4y_0^2}.$$

W przypadku danych zadania otrzymujemy

$$A\left(1-\frac{b^2}{a^2},0\right)\quad \text{oraz}\quad \frac{1}{4}\sqrt{13}=\sqrt{\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2+\frac{1}{4}},\quad \text{tzn.}\quad 4b^2=3a^2,$$

czyli jedno równanie z niewiadomymi a i b. Drugie równanie otrzymujemy z warunku, że punkt styczności $P(1,\frac{1}{2})$ leży na elipsie. Zatem $4b^2+a^2-4a^2b^2=0$. Rozwiązując otrzymany układ, mamy $a^2=\frac{4}{3}$, $b^2=1$, skąd równanie elipsy jest $3x^2+4y^2=4$.

14.6. Znaleźć równania stycznych do elipsy

(a) $$3x^2+8y^2=45,$$

których odległość od środka elipsy równa się 3.

Rozwiązanie. Piszemy równanie wszystkich stycznych do elipsy (a)

$$3x_0x+8y_0y=45,$$

a następnie stosujemy wzór na odległość punktu od prostej

$$3=\frac{|3x_0\cdot 0+8y_0\cdot 0-45|}{\sqrt{9x_0^2+64y_0^2}}.$$

Stąd $9x_0^2+64y_0^2=225$. Ale punkt $P_0(x_0, y_0)$ leży na elipsie (a), czyli $3x_0^2+8y_0^2=45$. Rozwiązując otrzymany układ, mamy $P_1(3, \frac{3}{2})$, $P_2(-3, \frac{3}{2})$, $P_3(-3, -\frac{3}{2})$, $P_4(3, -\frac{3}{2})$, czyli istnieją cztery styczne: $3x+4y-15=0$, $-3x+4y-15=0$, $-3x-4y-15=0$, $3x-4y-15=$ $=0$.

14.7. Znaleźć równania wspólnych stycznych do elips

(a) $$\frac{x^2}{2}+y^2=1$$

i

(a_1) $$x^2+\frac{y^2}{2}=1.$$

Rozwiązanie. Piszemy równanie wszystkich stycznych do elipsy (a) oraz równanie wszystkich stycznych do elipsy (a_1)

(a_2) $$x_0x+2y_0y-2=0,$$

(a_3) $$2x_0^*x+y_0^*y-2=0.$$

Z warunku zadania wynika, że prosta postaci (a_2) musi być identyczna z prostą postaci (a_3), tzn.

(a_4) $$x_0=2x_0^* \quad \text{i} \quad 2y_0=y_0^*,$$

przy czym

(a_5) $$x_0^2+2y_0^2-2=0 \quad \text{i} \quad 2x_0^{*2}+y_0^{*2}-2=0.$$

Otrzymaliśmy układ czterech równań (a_4) i (a_5) z czterema niewiadomymi x_0, y_0, x_0^*, y_0^*, mający rozwiązania: $\mp\frac{2}{3}\sqrt{3}$, $\mp\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\mp\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\mp\frac{2}{3}\sqrt{3}$. Skąd np. punkty styczności do elipsy (a): $A_1(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3})$, $A_2(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3})$, $A_3(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{3})$, $A_4(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{3})$. Istnieją więc cztery wspólne styczne: L_1: $x+y-\sqrt{3}=0$, L_2: $-x+y-\sqrt{3}=0$, L_3: $-x-y-\sqrt{3}=0$, L_4: $x-y-\sqrt{3}=0$.

14.8. Wykazać, że suma odwrotności długości odcinków, na które ognisko paraboli dzieli dowolną cięciwę przechodzącą przez ognisko jest stała.

Rozwiązanie. Weźmy parabolę

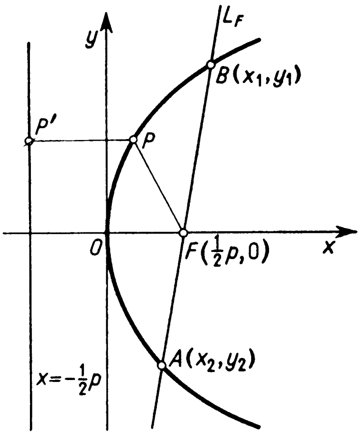
(a) $$y^2=2px$$

(rys. 14.8). Należy wykazać, że wyrażenie

$$\frac{1}{d(F,B)}+\frac{1}{d(F,A)}=\frac{d(F,A)+d(F,B)}{d(F,B)\cdot d(F,A)}$$

jest stałe dla każdej prostej L_F przechodzącej przez punkt F ($L_F \neq Ox$). Niech prosta L_F przecina parabolę (a) w punktach $A(x_2, y_2)$ i $B(x_1, y_1)$. Z definicji paraboli wynika, że

$$d(F,P)=d(P,P')=\left|x+\tfrac{1}{2}p\right| \quad (^1)$$



Rys. 14.8

(rys. 14.8), skąd

$$\frac{1}{d(F,B)}+\frac{1}{d(F,A)}=\frac{\left|\frac{1}{2}p+x_1\right|+\left|\frac{1}{2}p+x_2\right|}{\left|\frac{1}{2}p+x_1\right|\cdot\left|\frac{1}{2}p+x_2\right|}=$$

$$=\varepsilon\frac{\frac{1}{2}p+x_1+\frac{1}{2}p+x_2}{\frac{1}{4}p^2+x_1x_2+\frac{1}{2}p(x_1+x_2)}=$$

$$=\varepsilon\frac{p+(x_1+x_2)}{\frac{1}{4}p^2+x_1x_2+\frac{1}{2}p(x_1+x_2)},$$

gdzie $\varepsilon=\operatorname{sgn} p$. Wystarczy więc znaleźć sumę i iloczyn pierwiastków x_1 i x_2 układu równań

$$y^2=2px,$$
$$L_F\colon\ y=m(x-\tfrac{1}{2}p).$$

Kolejno otrzymujemy $m^2x^2-m^2px+m^2\frac{1}{4}p^2-2px=0$, $m^2x^2-p(m^2+2)x+m^2\frac{1}{4}p^2=0$; stąd

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-p(m^2+2)}{m^2}=\frac{p(m^2+2)}{m^2}, \qquad x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{m^2\frac{1}{4}p^2}{m^2}=\frac{1}{4}p^2,$$

zatem

$$\frac{1}{d(F,B)}+\frac{1}{d(F,A)}=\varepsilon\frac{p+p\dfrac{m^2+2}{m^2}}{\dfrac{p^2}{4}+\dfrac{p^2}{4}+\dfrac{p^2}{2}\cdot\dfrac{m^2+2}{m^2}}=\frac{2\varepsilon}{p}\,\frac{p+p\dfrac{m^2+2}{m^2}}{p+p\dfrac{m^2+2}{m^2}}=\frac{2\varepsilon}{p}=\frac{2}{|p|}=\text{const}. \quad \square$$

14.9. Znaleźć równania stycznych do hiperboli

(a) $$x^2-y^2=16$$

przechodzących przez punkt $A(-1, -7)$.

---

(1) Jeżeli $p>0$, to $x>0$ i $d(F,P)=\frac{1}{2}p+x$, jeżeli zaś $p<0$, to $x<0$ i $d(F,P)=-(\frac{1}{2}p+x)$.

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzoru (10):

$$(\mathrm{a}_1) \qquad x_0 x - y_0 y = 16,$$

gdzie

$$(\mathrm{a}_2) \qquad x_0^2 - y_0^2 = 16.$$

Ponieważ punkt A ma leżeć na stycznej, więc

$$(\mathrm{a}_3) \qquad -x_0 + 7y_0 = 16.$$

Rozwiązując układ równań (a_2), (a_3) otrzymujemy $x_{0,1} = -\frac{13}{3}$, $y_{0,1} = \frac{5}{3}$, $x_{0,2} = 5$, $y_{0,2} = 3$. Stąd, powracając do wzoru (a_1), piszemy równania poszukiwanych stycznych

$$13x + 5y + 48 = 0, \qquad 5x - 3y - 16 = 0.$$

14.10. Punkt $P(x, y)$ będziemy nazywali *punktem wewnętrznym* hiperboli, jeżeli dowolna prosta przechodząca przez punkt P i nierównoległa do żadnej z asymptot tej hiperboli, przecina ją w dwóch różnych punktach.

Znaleźć warunek konieczny i dostateczny na to, by punkt $P_0(x_0, y_0)$ był punktem wewnętrznym hiperboli

$$(\mathrm{a}) \qquad b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Rozwiązanie. Weźmy dowolny punkt $P_0(x_0, y_0)$. Z definicji punktu wewnętrznego hiperboli wynika natychmiast, że punkt P_0 nie może leżeć na hiperboli, ponieważ styczna w tym punkcie, (która zawsze istnieje) przecinałaby hiperbolę w dwóch pokrywających się punktach. Również $|x_0| > a$, tzn. $x_0^2 - a^2 > 0$, gdyż np. proste o równaniu $x = x_0$ dla $|x_0| < a$ nie przecinają hiperboli.

Weźmy pęk $(L)_{P_0}$

$$(\mathrm{a}_1) \qquad (L)_{P_0}\colon\ y - y_0 = m(x - x_0),$$

przy czym na razie wykluczamy z rozważań proste $x = x_0$. Warunek, aby proste pęku $(L)_{P_0}$ nie były równoległe do żadnej asymptoty jest równoważny warunkowi

$$(\mathrm{a}_2) \qquad b^2 - a^2m^2 \neq 0.$$

Punkt P_0 wtedy i tylko wtedy będzie *punktem wewnętrznym* hiperboli (a), gdy układ równań (a), (a_1) ma dla każdej wartości m spełniającej warunek (a_2), dwa różne rozwiązania. Czyli wyróżnik równania stopnia drugiego otrzymanego z układu (a), (a_1) po wyrugowaniu jednej ze zmiennych (x lub y) będzie większy od zera dla każdej wartości m spełniającej warunek (a_2). Rugujemy np. zmienną y. Otóż $y = mx - mx_0 + y_0$, stąd

$$(\mathrm{a}_3) \qquad (b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2(my_0 - m^2x_0)x + 2mx_0y_0a^2 - a^2m^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0,$$

przy czym z warunku (a_2) wynika, że równanie (a_3) jest istotnie stopnia drugiego. Znajdujemy wyróżnik równania (a_3) (dokładnie $\frac{1}{4}\Delta$)

$$\tfrac{1}{4}\Delta = a^4(my_0 - m^2x_0)^2 - (b^2 - a^2m^2)(2mx_0y_0a^2 - a^2m^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2) =$$
$$= a^2b^2[(x_0^2 - a^2)m^2 - 2x_0y_0m + y_0^2 + b^2].$$

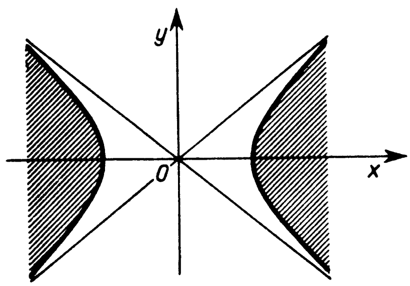
Ale $a^2b^2>0$ i $x_0^2-a^2>0$, skąd $\frac{1}{4}\Delta>0 \Leftrightarrow x_0^2y_0^2-(x_0^2-a^2)(y_0^2+b^2)<0$, czyli

$$-x_0^2b^2+a^2y_0^2+a^2b^2<0, \quad \text{tzn.} \quad \frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}>1.$$

Ponieważ proste $x=x_0$ dla $|x_0|>a$ (pominięte w równaniu (a_1)) zawsze przecinają hiperbolę (a) w dwóch różnych punktach, więc punkt $P_0(x_0, y_0)$ jest wtedy i tylko wtedy punktem wewnętrznym, gdy

$$(a_4) \qquad \frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}>1.$$

Na rysunku 14.9 punkty wewnętrzne hiperboli (a) znajdują się w obszarze zakreskowanym.



Rys. 14.9

Uwaga. Z przeprowadzonych rachunków wynika, że pozostałe punkty płaszczyzny różne od punktów hiperboli (a) spełniają warunek

$$(a_5) \qquad \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}<1.$$

Nazywamy je *punktami zewnętrznymi* hiperboli (a).

Zadania

14.11. Określić położenia punktów $A(-2, 3)$, $B(2, -2)$, $C(5, 6)$, $D(0, -1+\sqrt{21})$, $E(3, -2)$ względem okręgu $x^2+y^2-4x+2y-20=0$.

14.12. Dane są pary okręgów:

a) $x^2+y^2=4$ i $(x-3)^2+(y-2)^2=5$;

b) $(x-4)^2+(y+1)^2=16$ i $(x-1)^2+(y-2)^2=10$.

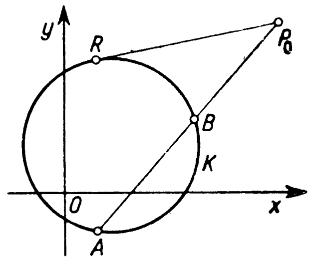
Znaleźć równania ich linii potęgowych i ich punkty przecięcia.

14.13. Dany jest okrąg K: $K(x, y)\equiv(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$ i punkt zewnętrzny $P_0(x_0, y_0)$ tego okręgu. Wykazać, że $K(x_0, y_0)=d(P_0, A)\cdot d(P_0, B)=d^2(P_0, R)$ (rys. 14.10) niezależnie od położenia siecznej PA (P_0R oznacza odcinek stycznej).

14.14. Z punktu $P(4, 5)$ poprowadzono styczną do okręgu $(x+2)^2+(y+3)^2=1$. Znaleźć długość odcinka PE, gdzie E oznacza punkt styczności.

14.15. Wykazać, że linia potęgowa dwóch okręgów jest prostopadła do prostej łączącej środki tych okręgów.

14.16. Dane są trzy okręgi K_i, $i=1,2,3$, o różnych środkach. Wykazać, że linie potęgowe trzech par okręgów: K_1, K_2; K_1, K_3 i K_2, K_3 przecinają się w jednym punkcie, jeżeli środki okręgów nie są współliniowe lub że są równoległe, jeżeli środki okręgów są współliniowe.



Rys. 14.10

14.17. Wykazać prawdziwość warunku ortogonalności dwóch okręgów.

14.18. Znaleźć równanie okręgu o środku w punkcie $S(0,2)$ ortogonalnego do okręgu

$$x^2+y^2-6x+8y-11=0.$$

14.19. Znaleźć równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A(-1,10)$, $B(-7,8)$ i ortogonalnego do okręgu $x^2+y^2=25$.

14.20. Znaleźć równanie okręgu ortogonalnego do okręgów

$$x^2+y^2+x+2y=0, \quad x^2+y^2+2x+2y-3=0, \quad x^2+y^2+3x+y-1=0.$$

14.21. Narysować części płaszczyzny, których współrzędne punktów spełniają nierówności:

a) $x^2+y^2\leqslant 3$; b) $x^2+y^2<9$ i $y\leqslant x$; c) $1\leqslant(x+1)^2+(y-2)^2\leqslant 4$;

d) $x^2+(y-3)^2\leqslant 25$ i $2x-y+8>0$; e) $x^2+y^2\geqslant 4$ i $x^2+y^2+8x\leqslant 0$.

14.22. Na elipsie $9x^2+25y^2=225$ znaleźć punkty, dla których odległości od ogniska $F_2(c,0)$ $(c>0)$ są cztery razy większe od odległości od drugiego ogniska.

14.23. Dana jest elipsa $16x^2+25y^2=400$. Znaleźć równanie prostej, na której leży cięciwa elipsy o środku w punkcie $S(2,1)$.

14.24. Dana jest elipsa $4x^2+25y^2=100$. Znaleźć równanie stycznej i normalnej do niej w punkcie o odciętej $x_0=4$ $(y_0>0)$ oraz znaleźć długość odcinka stycznej, odcinka normalnej, podstyczną i podnormalną w tym punkcie.

14.25. Znaleźć równanie elipsy w postaci kanonicznej, jeżeli: a) przechodzi ona przez punkt $A(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ i jest styczna do prostej $x+2y+3=0$; b) jest styczna do prostych $x-8y-4=0$, $\sqrt{\frac{2}{3}}x+y-2=0$.

14.26. Znaleźć równania stycznych: a) do elipsy $x^2+4y^2=8$ przechodzących przez punkt $A(-2,3)$; b) do elipsy $x^2+4y^2=20$ prostopadłych do prostej $2x-2y-13=0$.

14.27. Na elipsie $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ znaleźć punkt najbliżej oddalony od prostej $2x-3y+25=0$ oraz znaleźć odległość tego punktu od tej prostej.

14.28. Znaleźć równania stycznych do elipsy $x^2+2y^2=2$ tworzących z prostą $6x-2y=1$ kąt $\alpha=\frac{1}{4}\pi$.

14.29. Przeprowadzić dyskusję położenia prostej $x-2y+k=0$ względem elipsy $9x^2+$ $+4y^2=36$ w zależności od parametru k.

14.30. Znaleźć równania wspólnych stycznych do elips

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1 \quad \text{i} \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1.$$

14.31. Wykazać, że iloczyn odległości ognisk elipsy od dowolnej stycznej jest stały równy b^2.

14.32. Znaleźć zbiór punktów, z których elipsę $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ widać pod kątem prostym.

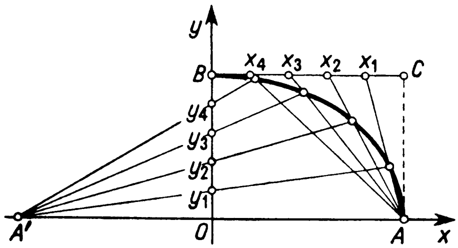
14.33. Koniec A odcinka AB o długości $a+b$ (a i b stałe) porusza się po osi Oy, a koniec B – po osi Ox. Wykazać, że punkt C odcinka AB taki, że $d(A, C)=a$ i $d(C, B)=b$ opisuje elipsę $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.

14.34. Na elipsie $x^2+5y^2=20$ znaleźć punkt, którego promienie wodzące są prostopadłe.

14.35. Wykazać, że suma kwadratów odwrotności prostopadłych promieni wodzących elipsy jest stała.

14.36. Wykazać, że dowolny promień światła wychodzący z jednego ogniska elipsy po odbiciu od elipsy przechodzi przez drugie ognisko.

14.37. Niech będzie dany prostokąt $OACB$ o bokach równych półosiom elipsy $d(0, A)=$ $=a$ i $d(0, B)=b$ (rys. 14.11). Podzielmy boki CB i OB na n równych części odpowiednio punktami o odciętych $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ i rzędnych $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ ($n=5$ na rys. 14.11). Wykazać, że punkty przecięcia prostych Ax_k i $A'y_k$, $k=1, 2, \ldots, n-1$, leżą na elipsie $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.



Rys. 14.11

14.38. Znaleźć obraz okręgu $x^2+y^2+2x=0$ przy przekształceniu rzutowym

$$x'=\frac{x}{x-2}, \quad y'=\frac{y}{x-2}.$$

14.39. Dla jakich wartości parametru k przy przekształceniu rzutowym

$$x' = \frac{x}{x-k}, \quad y' = \frac{y}{x-k}$$

obrazem okręgu $x^2+y^2=1$ jest: a) parabola; b) elipsa?

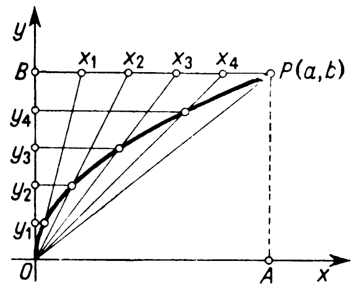
14.40. Dana jest parabola $y^2=12x$. Znaleźć równania stycznych do tej paraboli:
a) w punktach o odciętej $x_0=3$;
b) prostopadłych do prostej $2x+y-7=0$;
c) tworzących z prostą $4x-2y+9=0$ kąt $\alpha=\frac{1}{4}\pi$.

14.41. Znaleźć równanie paraboli w postaci $y^2=2px$ wiedząc, że jest ona styczna do prostej $x-8y+8=0$.

14.42. Znaleźć odległość prostej $4x+3y+46=0$ od stycznej do paraboli $y^2=64x$ równoległej do tej prostej.

14.43. Dana jest parabola $y^2=4x$. Dla jakich wartości parametru k prosta $y=kx+2$: a) nie przecina paraboli; b) jest styczna do paraboli; c) przecina parabolę w jednym punkcie ([1]), ale nie jest styczna; d) przecina parabolę w dwóch różnych punktach?

14.44. Znaleźć zbiór punktów, z których parabolę $y^2=2px$ widać pod kątem prostym.



Rys. 14.12

14.45. Dana jest oś (np. Ox), wierzchołek i jeden punkt $P(a, b)$ paraboli (rys. 14.12). Rysujemy prostokąt $OAPB$ i dzielimy bok BP punktami o odciętych $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ oraz bok OB punktami o rzędnych $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ na n równych części ($n=5$ na rys. 14.12). Wykazać, że punkty przecięcia prostych Ox i $y=y_k$ dla $k=1, 2, \ldots, n-1$ leżą na paraboli.

14.46. Wykazać, że promień światła równoległy do osi paraboli, po odbiciu od paraboli przechodzi przez ognisko paraboli.

14.47. W układzie Oxy dana jest parabola $y^2=8x$. Znaleźć równanie tej paraboli w układzie biegunowym, którego biegun znajduje się w punkcie $(2, 0)$, a oś biegunowa zawiera ujemną półoś Ox.

14.48. Znaleźć równanie stycznej i normalnej do paraboli $y^2=8x$ w punkcie o rzędnej $y_0=2$ oraz znaleźć pole trójkąta utworzonego przez tę styczną, normalną i oś Ox.

14.49. Wykazać, że rzut na oś Ox odcinka normalnej do paraboli $y^2=2px$ w punkcie $P_0(x_0, y_0)$, o końcach: P_0 i punkcie przecięcia normalnej z osią Ox, ma stałą długość dla dowolnej normalnej.

([1]) W punkcie właściwym.

14.50. Znaleźć równanie zbioru środków okręgów przechodzących przez punkt $A(0,1)$ i stycznych do prostej $y=2$.

14.51. Znaleźć cięciwę paraboli $y^2=4x$ równoległą do prostej $y=2x$ i mającą długość 5.

14.52. Wykazać, że zbiór środków cięciw równoległych paraboli leży na prostej równoległej do osi paraboli.

14.53. Znaleźć zbiór punktów przecięcia stycznych do paraboli $y^2=2px$ z prostymi prostopadłymi do nich i przechodzącymi przez ognisko.

14.54. Znaleźć zbiór punktów przecięcia prostych przechodzących przez ognisko paraboli $y^2=2px$ i prostopadłych do normalnych do tej paraboli.

14.55. O jaki kąt należy obrócić płaszczyznę Oxy dookoła punktu $O(0,0)$, żeby obrazem paraboli $y^2=2px$ była parabola $x'^2=2py'$?

14.56. Wykazać, że przy przekształceniu rzutowym $x'=\dfrac{x-1}{y}$, $y'=\dfrac{y+1}{y}$ obrazem paraboli G: $(x-1)^2=-y$ jest parabola oraz obrazem okręgu K: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ jest również parabola.

14.57. Dana jest hiperbola $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$. Znaleźć: a) wierzchołki i ogniska; b) mimośród; c) równania kierownic i asymptot; d) promienie wodzące punktu $(3,0)$; e) równanie hiperboli sprzężonej, jej mimośród, równania kierownic i asymptot.

14.58. W układzie Oxy znaleźć współrzędne ognisk oraz równania osi symetrii, asymptot i kierownic hiperboli $5x^2-6y^2-10x+12y-31=0$.

14.59. Znaleźć pole trójkąta utworzonego przez asymptoty hiperboli $9x^2-4y^2=36$ i prostą $9x+2y-24=0$.

14.60. Na hiperboli $9x^2-16y^2=144$ znaleźć punkty, dla których: a) promienie wodzące są prostopadłe; b) odległość od prawego ogniska jest trzykrotnie większa niż od lewego.

14.61. Znaleźć równania stycznych do hiperboli $4x^2-y^2=4$ przechodzących przez punkt $A(1,4)$.

14.62. Znaleźć równania stycznych:

a) do hiperboli $x^2-y^2=4$ prostopadłych do prostej $2x+5y+1=0$;

b) do hiperboli $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{36}=1$ prostopadłych do prostej $2x+5y+11=0$.

14.63. Znaleźć równanie stycznej i normalnej do hiperboli $16x^2-7y^2=112$ w punkcie $P(4,y_1)$ $(y_1>0)$ oraz obliczyć długość odcinka stycznej, odcinka normalnej, podstyczną i podnormalną.

14.64. Zbadać położenie prostej $y=\frac{5}{2}x+n$ względem hiperboli $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{36}=1$ w zależności od parametru n.

14.65. Znaleźć warunek konieczny i dostateczny na to, aby prosta $y=mx+n$ była styczna do hiperboli $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$.

14.66. Znaleźć równanie hiperboli w postaci kanonicznej przechodzącej przez punkt $A(\sqrt{6}, 3)$ i stycznej do prostej $9x+2y-15=0$.

14.67. Znaleźć zbiór punktów, dla których iloczyn odległości od prostych $y=\pm mx$ jest stały i równy a^2.

14.68. Znaleźć zbiór środków okręgów stycznych do danego okręgu i przechodzących przez dany punkt leżący zewnątrz okręgu.

14.69. Znaleźć zbiór punktów, z których hiperbolę

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2 \quad (a>b)$$

widać pod kątem prostym.

14.70. Znaleźć zbiór punktów, z których parabolę $y^2=2x$ widać pod kątem $\frac{1}{4}\pi$.

14.71. Punkty $A_{1,2}(\mp a, 0)$ są końcami podstawy trójkąta, przy czym jeden z kątów przy podstawie jest dwa razy większy od drugiego kąta przy podstawie. Znaleźć zbiór utworzony przez trzeci wierzchołek trójkąta.

14.72. Znaleźć równanie prostej, na której leży cięciwa hiperboli $4x^2-9y^2=36$ o środku w punkcie $S(5, 1)$.

14.73. Udowodnić, że dowolna prosta przecinająca hiperbolę w punktach A_1 i A_2 przecina jej asymptoty w takich punktach B_1 i B_2, że $d(A_1, B_1)=d(A_2, B_2)$ (rys. 14.13).

14.74. Udowodnić, że pole trójkąta utworzonego przez asymptoty hiperboli i dowolną styczną do tej hiperboli jest stałe.

14.75. Wykazać, że styczna do hiperboli w punkcie P jest dwusieczną kąta między promieniami wodzącymi punktu P.

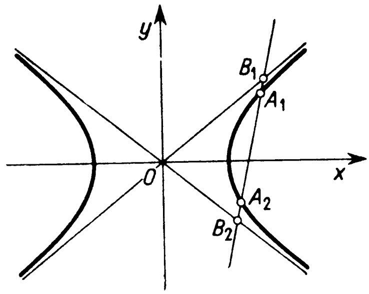
14.76. Dany jest prostokąt $CDD'C'$, którego długości boków są długościami osi $2a$ i $2b$ hiperboli. Odcinek OB dzielimy punktami o rzędnych $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, a odcinek $C'B'$ punktami o odciętych $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ na n równych części (rys. 14.14). Wykazać, że punkty przecięcia prostych Ax_k i $A'y_k$ dla $k=1, 2, \ldots, n-1$ leżą na hiperboli b^2x^2- $-a^2y^2=a^2b^2$.

14.77. Znaleźć kąt przecięcia krzywych $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{225}=1$ i $y^2=24x$.

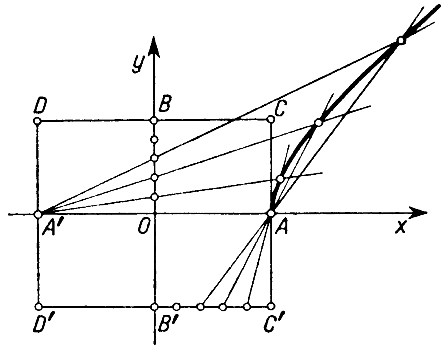
14.78. Udowodnić, że elipsa i hiperbola mające wspólne ogniska przecinają się pod kątem prostym.

14.79. Udowodnić, że wszystkie punkty stycznych do hiperboli z wyjątkiem punktów styczności są punktami zewnętrznymi hiperboli.

14.80. Punkt P nazywamy *punktem wewnętrznym* paraboli, jeżeli każda prosta przechodząca przez punkt P i nie równoległa do osi paraboli przecina tę parabolę w dwóch różnych punktach. Pozostałe punkty płaszczyzny różne od punktów paraboli nazywamy



Rys. 14.13



Rys. 14.14

punktami zewnętrznymi paraboli. Znaleźć warunek konieczny i dostateczny na to, aby punkt $P(x^*, y^*)$ był punktem wewnętrznym [zewnętrznym] paraboli $y^2=2px$.

14.81. Udowodnić, że jeżeli prosta nie przecina paraboli, to wszystkie jej punkty są punktami zewnętrznymi tej paraboli.

14.82. Punkt P nazywamy *punktem wewnętrznym* elipsy, jeżeli każda prosta przechodząca przez punkt P przecina elipsę w dwóch różnych punktach. Pozostałe punkty płaszczyzny różne od punktów elipsy nazywamy *punktami zewnętrznymi* elipsy.

Znaleźć warunek konieczny i dostateczny na to, aby punkt $P(x^*, y^*)$ był punktem wewnętrznym [zewnętrznym] elipsy $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.

Zadanie rozwiązać dwiema metodami: α) analogicznie jak zadanie 14.10; β) korzystając z własności, że elipsa jest obrazem okręgu przy powinowactwie osiowym prostokątnym oraz z własności potęgi punktu względem okręgu.

14.83. Narysować części płaszczyzny, których współrzędne punktów spełniają nierówności:

a) $y^2 \leqslant x$ i $y \geqslant x$; b) $y^2 \leqslant 2px$ i $x^2 < 2py$; c) $y^2 < x$ i $y^2 \geqslant \frac{4}{3}(x-1)$;

d) $x^2-y^2>a^2$ i $x^2<4a^2$; e) $x^2-y^2>1$ i $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}<1$;

f) $2x<y^2+4y$ i $x^2+y^2+4x+4y<0$;

g) $\dfrac{1}{x}<y<\sqrt{x}$ i $x<2$; h) $y<x^2$ i $y>\frac{1}{4}x^2$ i $y<4$;

i) $(x-a)^2+y^2>a^2$ i $y^2<2ax$ $(a>0)$ i $x<2a$ i $y>0$;

j) $y<-x^2+4$ i $y^2>9x$ i $y \geqslant 0$;

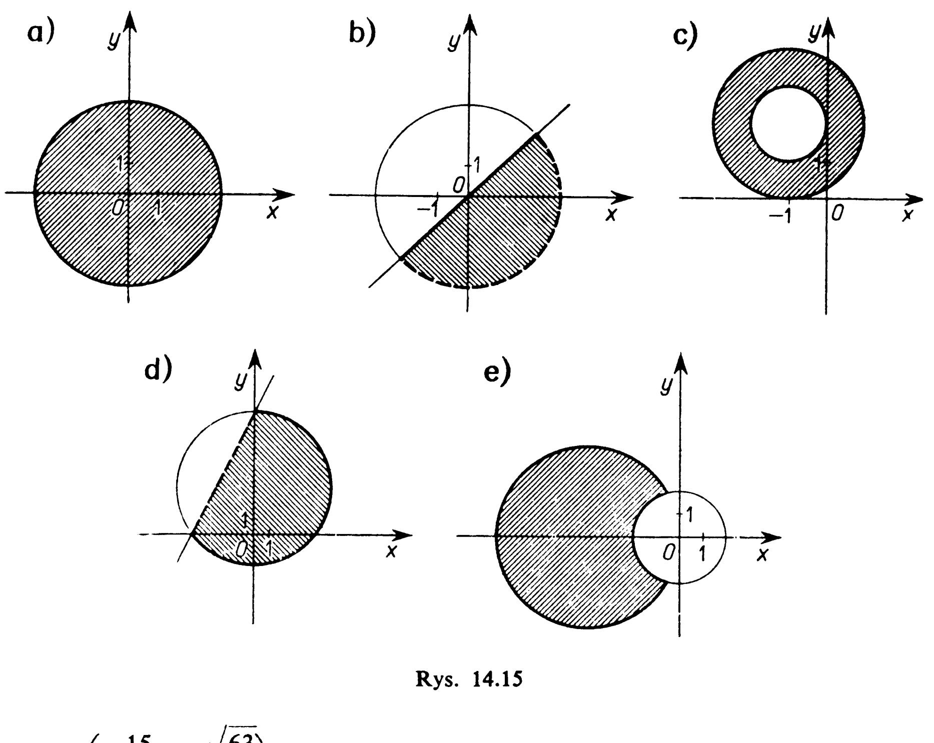
k) $y^2>px$ i $y^2<qx$ i $x^2<ay$ i $x^2>by$, gdzie $0<p<q$, $0<a<b$.

14.84. Wykazać, że hiperbola $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ jest obrazem hiperboli $xy=\dfrac{a^2}{2}$ przy kolejnych przekształceniach: obrocie dookoła początku układu i powinowactwie osiowym prostokątnym.

14.85. Znaleźć obrazy paraboli $y^2=x$ i okręgu $x^2+y^2=9$ przy przekształceniu rzutowym $x'=\dfrac{x}{x-2}$, $y'=\dfrac{y}{x-2}$.

Odpowiedzi

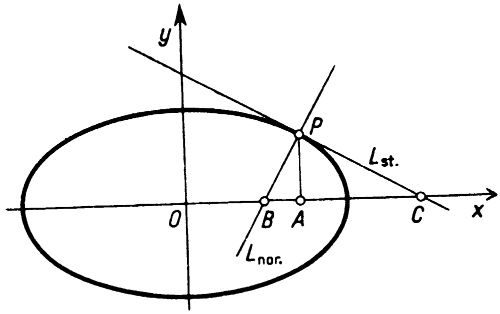
14.11. A i C leżą zewnątrz okręgu, B i E leżą wewnątrz okręgu, D leży na okręgu.
14.12. a) $3x+2y-6=0$, $(2, 0)$ i $(\frac{10}{13}, \frac{24}{13})$; b) $y=x-1$, $(0, -1)$ i $(4, 3)$.
14.14. $d(P, E)=\sqrt{99}$.
14.17. Wsk. Por. przykład 14.3. **14.18.** $x^2+(y-2)^2=9$.
14.19. $(x+3)^2+(y-6)^2=20$. **14.20.** $(x-3)^2+(y-5)^2=47$.
14.21. a) Rys. 14.15a; b) rys. 14.15b; c) rys. 14.15c; d) rys. 14.15d; e) rys. 14.15e.



Rys. 14.15

14.22. $A_{1,2}\left(\dfrac{-15}{4}, \mp\dfrac{\sqrt{63}}{4}\right)$. **14.23.** $32x+25y-89=0$.

14.24. Wsk. Dla elipsy (rys. 14.16) mamy: długość odcinka stycznej $d(P, C)$, długość odcinka normalnej $d(P, B)$, podstyczną $d(A, C)$, podnormalną $d(B, A)$. $L_{\text{st.}}$: $8x+15y-50=0$, $L_{\text{nor.}}$: $75x-40y-252=0$, $\frac{51}{20}$, $\frac{34}{25}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{16}{25}$.



Rys. 14.16

14.25. a) $x^2+2y^2=3$ lub $x^2+8y^2=6$; b) $\frac{25}{144}x^2+\frac{25}{4}y^2=1$.

14.26. a) $x+2y-4=0$ i $7x-2y+20=0$; b) $x+y\mp5=0$.

14.27. $P(-3,2), d=\sqrt{13}$. **14.28.** $y=\frac{1}{2}x\mp\sqrt{\frac{3}{2}}, y=-2x\mp3$.

14.29. Dla $|k|>2\sqrt{10}$ prosta nie przecina elipsy, dla $k=\pm2\sqrt{10}$ jest styczna, i dla $|k|<$ $<2\sqrt{10}$ przecina elipsę w dwóch różnych punktach.

14.30. $x+y\mp3=0$ i $x-y\mp3=0$.

14.32. Wsk. Przez kąt widzenia elipsy z danego punktu, rozumiemy kąt między stycznymi do elipsy przechodzącymi przez ten punkt; $x^2+y^2=a^2+b^2$ (tzw. *okrąg Monge'a*).

14.34. $A_{1,2}(\sqrt{15}, \mp1), A_{3,4}(-\sqrt{15}, \mp1)$.

14.36. Wsk. Wykazać, że normalna do elipsy w punkcie P jest dwusieczną kąta między promieniami wodzącymi punktu P.

14.38. $16(x'-\frac{1}{4})^2+8y'^2=1$.

14.39. a) $k=\mp1$; b) $|k|>1$.

Uwaga. W przypadku a) dla $k=1$ obrazem punktu $(1,0)$ jest punkt niewłaściwy, dla $k=-1$ obrazem punktu $(-1,0)$ jest punkt niewłaściwy.

14.40. a) $x+y+3=0$ i $x-y+3=0$; b) $x-2y+12=0$; c) $3x+y+1=0$ i $x-3y+27=0$.

14.41. $y^2=\frac{1}{2}x$. **14.42.** $d=2$.

14.43. a) $k>\frac{1}{2}$; b) $k=\frac{1}{2}$; c) $k=0$; d) $k<\frac{1}{2}$ i $k\neq0$.

14.44. Kierownica $x=-\frac{1}{2}p$. **14.45.** $y^2=\dfrac{b^2}{a}x$.

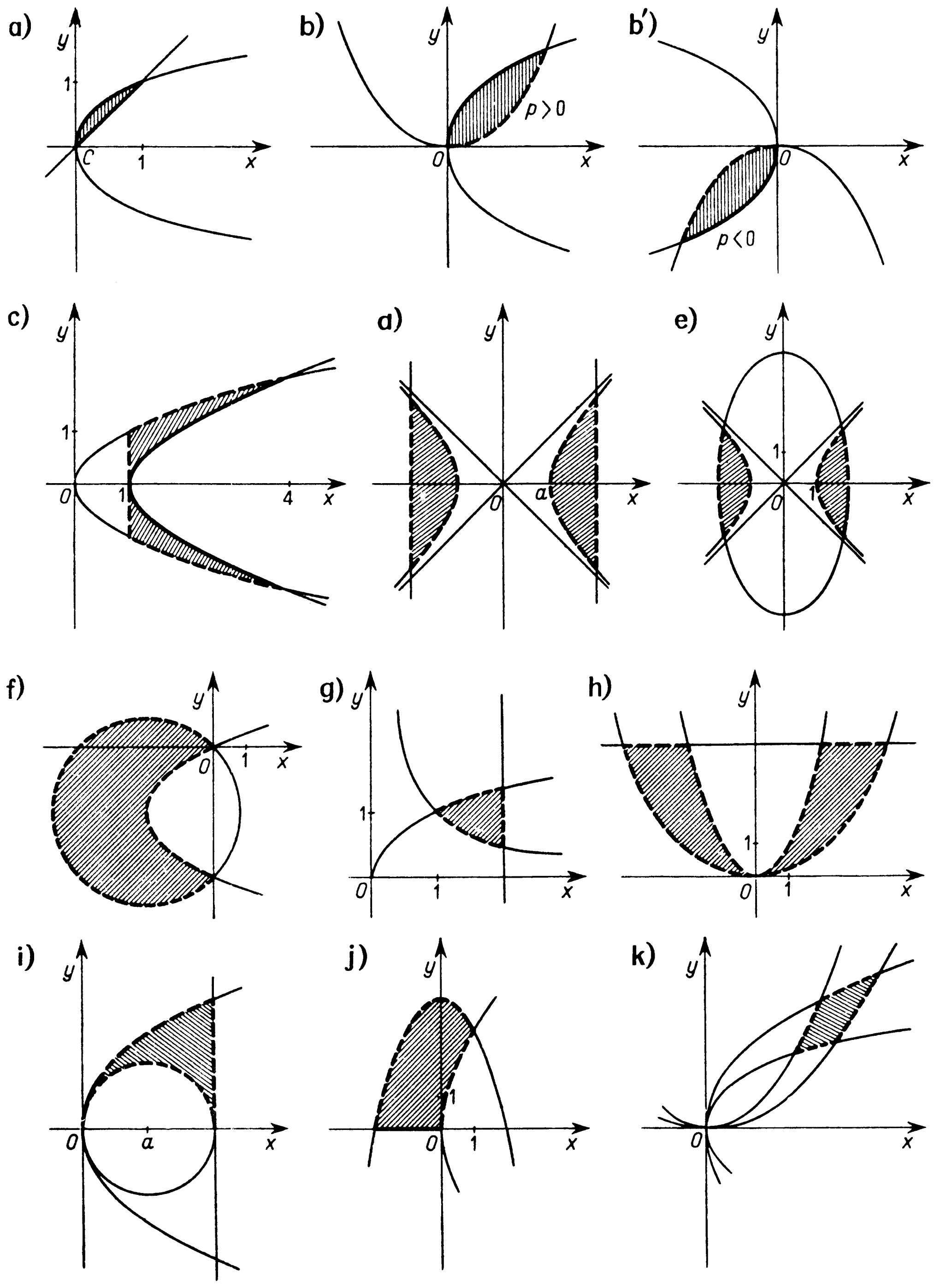
14.46. Wsk. Udowodnić najpierw, że styczna do paraboli jest dwusieczną kąta między promieniem wodzącym punktu styczności i prostą równoległą do osi paraboli.

14.47. $r=\dfrac{4}{1+\cos\varphi}$

14.48. $L_{st.}: 2x-y+1=0$, $L_{nor.}: 2x+4y-9=0$, $S=5$.

14.50. $x^2=-2y+3$. **14.51.** Cięciwa leży na prostej $y=2x-2$.

14.53. $x=0$.


a)
y
1
C
1
x
b)
y
p > 0
0
x
b′)
y
0
x
p < 0
c)
y
1
0
1
4
x
d)
y
0
a
x
e)
y
1
0
1
x
f)
y
0
1
x
g)
y
1
0
1
x
h)
y
1
0
1
x
i)
y
0
a
x
j)
y
1
0
1
x
k)
y
0
x

Rys. 14.17

14.54. Parabola $y^2=\frac{1}{2}p(x-\frac{1}{2}p)$. **14.55.** $\alpha=\frac{3}{2}\pi$.

14.56. $G': x'^2=-(y'+1)$, $K': x'^2=2(y'-\frac{3}{2})$.

14.57. a) $A_{1,2}(\mp 3, 0)$, $F_{1,2}(\mp 5, 0)$; b) $e=\frac{5}{3}$; c) $x=\mp\frac{9}{5}$, $y=\mp\frac{4}{3}x$;

d) $r_1=8$, $r_2=2$; e) $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$, $e=\dfrac{5}{4}$, $y=\mp\dfrac{16}{5}$, $y=\mp\dfrac{4}{3}x$.

14.58. $F_1(\sqrt{11}+1, 1)$, $F_2(-\sqrt{11}+1, 1)$; równania osi symetrii: $x=1, y=1$; równania asymptot: $y-1=\mp\sqrt{\frac{5}{6}}(x-1)$; równania kierownic $x=\mp\frac{6}{11}\sqrt{11}+1$.

14.59. $S=12$.

14.60. a) $A_{1,2}(\frac{4}{5}\sqrt{34}, \mp\frac{9}{5})$, $A_{3,4}(-\frac{4}{5}\sqrt{34}, \mp\frac{9}{5})$; b) $B_{1,2}(-\frac{32}{5}, \mp\frac{3}{5}\sqrt{39})$.

14.61. $x=1$ i $5x-2y+3=0$. **14.62.** a) $y=\frac{5}{2}x\mp\sqrt{21}$; b) $5x-2y\mp 9=0$.

14.63. Wsk. Por. określenia podane w zadaniu 14.24, które odnoszą się również do hiperboli; $L_{\text{st.}}$: $16\sqrt{7}x-21y-28\sqrt{7}=0$, $L_{\text{nor.}}$: $21x+16\sqrt{7}y-276=0$, $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{319}{7}}$, $\frac{4}{7}\sqrt{319}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{64}{7}$.

14.64. Dla $|n|<\frac{9}{2}$ prosta nie przecina hiperboli, dla $n=\pm\frac{9}{2}$ istnieje jeden punkt wspólny i prosta jest styczna do hiperboli, dla $|n|>\frac{9}{2}$ prosta przecina hiperbolę w dwóch różnych punktach.

14.65. $m^2a^2-b^2=n^2$. **14.66.** $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{45}=1$, $\dfrac{3x^2}{10}-\dfrac{4y^2}{45}=1$.

14.67. Hiperbole sprzężone $y^2-m^2x^2=\mp(1+m^2)a^2$.

14.68. Hiperbola. **14.69.** $x^2+y^2=a^2-b^2$.

14.70. Lewa gałąź hiperboli $\frac{1}{2}(x+\frac{3}{2})^2-\dfrac{y^2}{2}=1$.

14.71. $\dfrac{9}{4a^2}\left(x+\dfrac{a}{3}\right)^2-\dfrac{3y^2}{4a^2}=1$. **14.72.** $20x-9y-91=0$.

14.73. Wsk. Wykazać, że odcinki A_1A_2 i B_1B_2 mają wspólny środek.

14.77. $\operatorname{tg}\varphi=\mp\frac{51}{85}$.

14.78. Wsk. Równanie $\dfrac{x^2}{a^2-k}+\dfrac{y^2}{b^2-k}=1$ $(a>b>0)$ przedstawia elipsę, gdy $k<b^2$ i hiperbolę, gdy $b^2<k<a^2$.

14.79. Wsk. Por. przykł. 14.10.

14.80. Wsk. Por. przykł. 14.10, $y^{*2}<2px^*$ $[y^{*2}>2px^*]$.

14.81. Wsk. Por. zadanie 14.80.

14.82. $b^2x^{*2}+a^2y^{*2}<a^2b^2$ $[b^2x^{*2}+a^2y^{*2}>a^2b^2]$.

14.83. a) Rys. 14.17a – k) rys. 14.17k.

14.85. $4(x'-\frac{1}{2})^2-8y'^2=1$, $\frac{25}{36}(x'-\frac{9}{5})^2-\frac{5}{9}y'^2=1$.

§ 15. KRZYWE STOPNIA DRUGIEGO

15.1. *Krzywą stopnia drugiego* nazywamy zbiór

(1) $$K=\{(x, y): a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,\quad a_{ij}\in\mathbf{R}\wedge(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2>0)\}.$$

Równanie

(2) $(a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0) \Leftrightarrow (X^T AX+2A_1X+a_{33}=0)$,

gdzie $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$, $A_1=[a_{13} \;\; a_{23}]$, nazywamy *równaniem krzywej K*.

Liczby $w=\det A$, $W=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\mathrm{tr} A=a_{11}+a_{22}=p$ (por. § 6) są *niezmiennikami przesunięcia i obrotu układu Oxy*. Jeżeli $w=0 \wedge W=0$, to liczba

$$q=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

też jest niezmiennikiem przesunięcia i obrotu układu Oxy.

Równanie charakterystyczne macierzy A

(3) $$\det[A-\lambda I]=0 \Leftrightarrow \lambda^2-p\lambda+w=0$$

nazywamy *równaniem charakterystycznym* krzywej K; wartości własne λ_1, λ_2 macierzy A są liczbami rzeczywistymi. Krzywe stożkowe (por. § 14)

1° $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ — *elipsa* (lub *okrąg*, gdy $a=b$),
2° $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ — *hiperbola*,
3° $y^2=2px$, $x^2=2py$ — *parabole*,

są krzywymi stopnia drugiego. Również równania ($ab\neq 0$):

4° $b^2x^2+a^2y^2=-a^2b^2$ — *zbiór pusty* (*eliptyczny*),
5° $b^2x^2+a^2y^2=0$ — *punkt*,
6° $b^2x^2-a^2y^2=0$ — *dwie proste nierównoległe*,
7° $y^2=a^2$ — *dwie proste równoległe*,
8° $y^2=-a^2$ — *zbiór pusty* (*paraboliczny*),
9° $y^2=0$ — *prosta podwójna*,

określają krzywe stopnia drugiego. Krzywe: 1° - 3° nazywamy *stożkowymi niezdegenerowanymi*, 4° - 9° — *stożkowymi zdegenerowanymi*, 1° - 9° — *krzywymi stożkowymi w postaciach kanonicznych*.

T₁ (twierdzenie podstawowe o krzywych stopnia drugiego). *Każda krzywa stopnia drugiego jest stożkową i na odwrót, przy czym zachodzą następujące związki między niezmiennikami charakteryzujące krzywe* 1° - 9°:

$$\left.\begin{array}{ll} w>0 \wedge pW<0, & \text{to krzywa } 1^\circ \\ w>0 \wedge pW>0, & \text{to krzywa } 4^\circ \\ w>0 \wedge W=0, & \text{to krzywa } 5^\circ \end{array}\right\} \text{ typ eliptyczny},$$

$$\left.\begin{array}{ll} w<0 \wedge W\neq 0, & \text{to krzywa } 2^\circ \\ w<0 \wedge W=0, & \text{to krzywa } 6^\circ \end{array}\right\} \text{ typ hiperboliczny},$$

$$\left.\begin{array}{ll} w=0 \wedge W\neq 0, & \text{to krzywa } 3^\circ \\ w=0 \wedge W=0 \wedge q<0, & \text{to krzywa } 7^\circ \\ w=0 \wedge W=0 \wedge q>0, & \text{to krzywa } 8^\circ \\ w=0 \wedge W=0 \wedge q=0, & \text{to krzywa } 9^\circ \end{array}\right\} \text{ typ paraboliczny}.$$

Środkiem krzywej (1) nazywamy taki punkt S, że każda prosta przechodząca przez S i przecinająca krzywą (1) w punkcie P przecina ją również w punkcie P' symetrycznym do P względem S. Krzywa (1) ma jednoznacznie określony środek wtedy i tylko wtedy, gdy $w \neq 0$, nie ma środka gdy $w=0 \wedge W \neq 0$, ma nieskończenie wiele środków tworzących prostą o równaniu $a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0$, gdy $w=0 \wedge W=0$.

Jeżeli $w \neq 0$, to współrzędne środka x_0, y_0 są pierwiastkami układu Cramera

$$\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}&=0, \\ a_{12}x+a_{22}y+a_{23}&=0. \end{aligned} \tag{4}$$

Z dowodu twierdzenia T_1 wynika, że zawsze istnieje układ współrzędnych $O''x''y''$ otrzymany z Oxy za pomocą przesunięcia i obrotu, w którym krzywa (1) ma jedną z postaci kanonicznych 1° - 9°.

W przypadku $w \neq 0$, równanie (2) ma postać

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \frac{W}{w} = 0, \tag{5}$$

gdzie nowy początek układu O'' jest środkiem $S(x_0, y_0)$ krzywej, kąt $\varphi = \sphericalangle [Ox, O''x'']$, w przypadku $a_{12} \neq 0$, znajdujemy ze wzoru

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} \tag{6}$$

(λ_1 jest współczynnikiem przy x''^2 w (5)). Związki między współrzędnymi tego samego punktu w układach $Oxy \xrightarrow[(x_0, y_0), \varphi]{} O''x''y''$ są postaci

$$\begin{aligned} x &= x'' \cos \varphi - y'' \sin \varphi + x_0, \\ y &= x'' \sin \varphi + y'' \cos \varphi + y_0. \end{aligned} \tag{7}$$

Sprowadzenie równania (2) do postaci kanonicznej w przypadku typu parabolicznego ($w=0$) przeprowadzamy następująco:

Dokonujemy najpierw obrotu układu Oxy (jeżeli $a_{12} \neq 0$), stosując wzory

$$\begin{aligned} x &= x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha, \\ y &= x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha, \end{aligned} \tag{8}$$

gdzie

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a_{11}}{a_{12}}. \tag{9}$$

W układzie $Ox''y''$ równanie (2) przyjmuje wtedy jedną z dwóch postaci

$$\begin{aligned} a''_{11} x''^2 + 2a''_{13} x'' + 2a''_{23} y'' + a_{33} &= 0, \quad \text{gdy} \quad a''_{11} \neq 0, \\ a''_{22} y''^2 + 2a''_{13} x'' + 2a''_{23} y'' + a_{33} &= 0, \quad \text{gdy} \quad a''_{22} \neq 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Z kolei stosujemy wzory na przesunięcie układu

$$\begin{aligned} x'' &= x' + a, \\ y'' &= y' + b, \end{aligned} \tag{11}$$

otrzymując w układzie $O'x'y'$ równanie kanoniczne typu parabolicznego.

W przypadku paraboli kierunek osi paraboli wyznaczony jest wzorem (9), gdzie α oznacza kąt, jaki tworzy oś paraboli z dodatnim kierunkiem osi Ox.

Jeżeli $a_{12}=0$, to z warunku $w=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$ wynika, że $a_{11}a_{22}=0$, czyli równanie (2) ma od razu jedną z postaci (10).

Uwaga. Równania (2) można sprowadzać do postaci kanonicznej, korzystając z twierdzeń o formach kwadratowych.

15.2. Styczna do krzywej (2) w punkcie $P_0(x_0, y_0) \in K$ ma równanie

$$a_{11}x_0x+a_{12}(x_0y+y_0x)+a_{22}y_0y+a_{13}(x+x_0)+a_{23}(y+y_0)+a_{33}=0. \tag{12}$$

Jeżeli krzywa K jest hiperbolą ($w<0 \wedge W\neq 0$), to współczynniki kierunkowe jej asymptot są pierwiastkami równania

$$a_{22}m^2+2a_{12}m+a_{11}=0 \quad ([1]). \tag{13}$$

Niech dane będą stożkowe $K_i: f_i(x, y)=0$, $i=1, 2$, gdzie $f_i(x, y)$ oznaczają lewe strony równań stożkowych K_i napisanych w postaci (2). *Pękiem stożkowych* wyznaczonym przez stożkowe K_1 i K_2 nazywamy zbiór stożkowych określonych równaniem

$$k_1f_1(x, y)+k_2f_2(x, y)=0, \tag{14}$$

gdzie $k_1, k_2 \in \mathbf{R} \wedge k_1^2+k_2^2>0$. Łatwo zauważyć, że każda krzywa (14) przechodzi przez punkty przesunięcia stożkowych K_1 i K_2. Jeżeli np. $k_1\neq 0$, to (14) można napisać w postaci

$$f_1(x, y)+kf_2(x, y)=0, \qquad \text{gdzie} \quad k=\frac{k_2}{k_1}. \tag{15}$$

Uwaga. Równanie (15) nie zawiera równania stożkowej K_2.

Przykłady

15.1. Sklasyfikować krzywe

a) $8x^2-12xy+17y^2+16x-12y+3=0$; b) $x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$;
c) $2x^2+2y^2+2x-y-6=0$; d) $x^2-2xy+y^2+6x-14y+29=0$;
e) $4x^2-12xy+9y^2+20x-30y-11=0$.

Rozwiązanie. Zagadnienie klasyfikacji polega na ustaleniu typu krzywej (postacie 1°-9°) bez sprowadzania jej równania do postaci kanonicznej. W każdym z przypadków a)-e) będziemy korzystali z twierdzenia T_1.

a) $w=\begin{vmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 17 \end{vmatrix}=100>0$, typ eliptyczny; $W=\begin{vmatrix} 8 & -6 & 8 \\ -6 & 17 & -6 \\ 8 & -6 & 3 \end{vmatrix}=-500$, $pW=$
$=(8+17)(-500)<0$; a więc równanie 1°, czyli elipsa.

[1] Jeżeli jedna z asymptot jest prostopadła do osi Ox, to równanie (13) jest równaniem stopnia pierwszego i przyjmuje postać $2a_{12}m+a_{11}=0$.

b) $w=\begin{vmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 4 \end{vmatrix}=-\frac{9}{4}<0$, typ hiperboliczny; $W=\begin{vmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$, czyli dwie proste przecinające się.

c) $w=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4>0$, typ eliptyczny; $W=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -6 \end{vmatrix}=-\frac{53}{2}$, $pW=(2+2)(-\frac{53}{2})<0$ oraz $a_{11}=a_{22}\wedge a_{12}=0$, czyli okrąg.

d) $w=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0$, typ paraboliczny; $W=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -7 \\ 3 & -7 & 29 \end{vmatrix}=-16$, czyli parabola.

e) $w=\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{vmatrix}=0$, typ paraboliczny; $W=\begin{vmatrix} 4 & -6 & 10 \\ -6 & 9 & -15 \\ 10 & -15 & -11 \end{vmatrix}=0$, $q=\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 10 & -11 \end{vmatrix}+$ $+\begin{vmatrix} 9 & -15 \\ -15 & -11 \end{vmatrix}=-468$, a więc dwie proste równoległe.

15.2. Następujące równania sprowadzić do postaci kanonicznej:

(a) $$5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0\,;$$

(b) $$7x^2-24xy-38x+24y+175=0\,;$$

(c) $$9x^2+24xy+16y^2-40x+30y=0\,.$$

Rozwiązanie. Będziemy korzystali ze wzorów (5) i (7) w przypadku $w\neq 0$ (typ eliptyczny lub hiperboliczny,) względnie ze wzorów (9), (8) i (10), jeżeli $w=0$ (typ paraboliczny).

Dla równania (a) $w=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}=36>0$, typ eliptyczny; $p=13$, $W=-1296$,

$$(\lambda^2-13\lambda+36=0)\Leftrightarrow(\lambda=4\vee\lambda=9),\qquad \frac{W}{w}=-36,$$

skąd $4x''^2+9y''^2=36$ (elipsa).

Dla równania (b) $w=\begin{vmatrix} 7 & -12 \\ -12 & 0 \end{vmatrix}=-144<0$, typ hiperboliczny;

$$p=7,\qquad W=-(144)^2,$$

$$(\lambda^2-7\lambda-144=0)\Leftrightarrow(\lambda=-9\vee\lambda=16),\qquad \frac{W}{w}=144,$$

skąd $16x''^2-9y''^2+144=0$, tzn. hiperbola.

Dla równania (c) $w=\begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{vmatrix}=0$, typ paraboliczny;

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{a_{11}}{a_{12}}=-\frac{3}{4},\qquad \sin\alpha=\frac{3}{5},\qquad \cos\alpha=-\frac{4}{5},$$

skąd (wzory (8))

(c$_1$) $$x=-\tfrac{4}{5}x''-\tfrac{3}{5}y''=-\tfrac{1}{5}(4x''+3y''),\quad y=\tfrac{3}{5}x''-\tfrac{4}{5}y''=\tfrac{1}{5}(3x''-4y'')$$

Podstawiając zmienne x i y ze wzorów (c_1) do równania (c), otrzymujemy

$$9\cdot\tfrac{1}{25}(16x''^2+24x''y''+9y''^2)+24(-\tfrac{1}{25})(12x''^2-7x''y''-12y''^2)+$$
$$+16\cdot\tfrac{1}{25}(9x''^2-24x''y''+16y''^2)-40(-\tfrac{1}{5})(4x''+3y'')+30\cdot\tfrac{1}{5}(3x''-4y'')=0,$$

czyli $y''^2=-2x''$, tzn. parabolę.

15.3. Dana jest krzywa

(a) $$5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0.$$

Znaleźć współrzędne wierzchołków i ognisk, równania osi i kierownic oraz narysować krzywą (a) w układzie Oxy.

Rozwiązanie. Korzystając z przykładu 15.2 możemy (a) przedstawić w postaci kanonicznej

(a_1) $$\frac{x''^2}{9}+\frac{y''^2}{4}=1.$$

Z kolei stosujemy wzory (4), (6) i (7):

$$5x+2y-16=0,$$
$$2x+8y-28=0,$$

stąd środek $S(2, 3)$,

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}=\frac{4-5}{2}=-\frac{1}{2},\quad \sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \cos\varphi=-\frac{2}{\sqrt{5}},$$

zatem

(a_2) $$x=-\frac{2}{\sqrt{5}}x''-\frac{1}{\sqrt{5}}y''+2,\qquad y=\frac{1}{\sqrt{5}}x''-\frac{2}{\sqrt{5}}y''+3$$

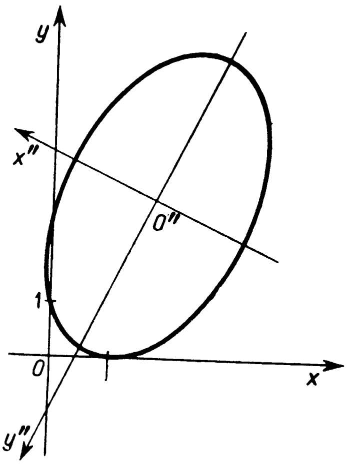
lub po rozwiązaniu równań (a_2) względem zmiennych x'' i y''

(a_3) $$x''=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x+y+1),\qquad y''=-\frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y-8).$$

W układzie $O''x''y''$ mamy: współrzędne wierzchołków $D''_{1,2}(\mp 3, 0)$, $E''_{1,2}(0, \mp 2)$; współrzędne ognisk $F''_{1,2}(\mp\sqrt{5}, 0)$; równanie osi dużej (dokładnie prostej, na której leży oś duża) $y''=0$, osi małej $x''=0$; równania kierownic $x''=\mp\frac{a''^2}{c''}=\mp\frac{9}{\sqrt{5}}$. Stosując wzory ($a_2$) (w przypadku punktów) oraz wzory (a_3) (w przypadku równań), kolejno otrzymujemy poszukiwane elementy w układzie Oxy:

$$D_{1,2}\left(\mp\frac{6}{\sqrt{5}}+2,\ \frac{\pm 3}{\sqrt{5}}+3\right),$$

$$E_{1,2}\left(\mp\frac{2}{\sqrt{5}}+2,\ \mp\frac{4}{\sqrt{5}}+3\right),\ F_1(4,2),\ F_2(0,4),$$



Rys. 15.1

równanie osi dużej (wzory (a_3))

$$x+2y-8=0\,,$$

równanie osi małej

$$2x-y-1=0\,,$$

równania kierownic

$$2x-y-10=0 \quad \text{i} \quad 2x-y+8=0\,.$$

W celu narysowania krzywej (a) w układzie Oxy, zauważmy, że $O''(2, 3)$, $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{1}{2}$, gdzie $\varphi=\sphericalangle[Ox, Ox'']$. Zatem w układzie $O''x''y''$ rysujemy elipsę o równaniu kanonicznym (a_1) (rys. 15.1).

15.4. Nie korzystając ze wzoru (5) sprowadzić do postaci kanonicznej równania:

(a) $$2x^2-4y^2+4x-y+1=0\,;$$

(b) $$3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0\,.$$

Rozwiązanie. Zakładamy tylko znajomość wzorów na przesunięcie i obrót układu współrzędnych. W przypadku gdy w równaniu (2) $a_{12}=0$, łatwo zauważyć, że wystarczy tylko stosować wzory na przesunięcie, jeżeli zaś $a_{12}\neq 0$, stosujemy również wzory na obrót układu.

Dla równania (a) jest $a_{12}=0$, zatem stosujemy wzory

$$x=x'+x_0\,,$$

$$v=y'+y_0\,,$$

przy czym będziemy chcieli tak dobrać nowy początek układu $O'(x_0, y_0)$, aby współczynniki przy zmiennych x' i y' były zerami. Otóż

$$2(x'^2+2x'x_0+x_0^2)-4(y'^2+2y'y_0+y_0^2)+4(x'+x_0)-y_0-y'+1=0\,,$$

skąd

$$2x_0+2=0, \qquad -8y_0-1=0\,,$$

zatem $x_0=-1$, $y_0=-\frac{1}{8}$. W układzie $O'x'y'$, gdzie $O'(-1, -\frac{1}{8})$, równanie (a) przyjmuje postać

$$2x'^2-4y'^2-\tfrac{15}{16}=0,$$

tzn. jest równaniem hiperboli

$$\tfrac{32}{15}x'^2-\tfrac{64}{15}y'^2=1.$$

Uwaga. Można postąpić inaczej. Mianowicie

$$2(x^2+2x)-4(y^2+\tfrac{1}{4})+1=0,$$

$$2[(x+1)^2-1]-4[(y+\tfrac{1}{8})^2-\tfrac{1}{64}]+1=0,$$

$$2(x+1)^2-4(y+\tfrac{1}{8})^2=\tfrac{15}{16},\quad \tfrac{32}{15}(x+1)^2-\tfrac{64}{15}(y+\tfrac{1}{8})^2=1,$$

a następnie stosujemy wzory na przesunięcie

$$\begin{matrix} x+1=x' \\ y+\tfrac{1}{8}=y' \end{matrix} \quad \text{lub równoważne im} \quad \begin{matrix} x=x'-1 \\ y=y'-\tfrac{1}{8}. \end{matrix}$$

Stąd

$$\tfrac{32}{15}x'^2-\tfrac{64}{15}y'^2=1.$$

W przypadku równania (b) postępujemy analogicznie jak w pierwszej metodzie przykładu (a). Zbadamy czy istnieją takie liczby x_0, y_0 występujące we wzorach

$$(\mathrm{b}_1)\qquad \begin{aligned} x&=x'+x_0, \\ y&=y'+y_0, \end{aligned}$$

żeby w układzie $O'x'y'$ współczynniki przy x' i y' były zerami i w przypadku istnienia znajdziemy je. Kolejno otrzymujemy

$$3(x'^2+2x'x_0+x_0^2)+10(x'y'+x'y_0+x_0y'+x_0y_0)+$$
$$+3(y'^2+2y'y_0+y_0^2)-2x'-2x_0-14y'-14y_0-13=0,$$

$$3x'^2+10x'y'+3y'^2+2(3x_0+5y_0-1)x'+2(5x_0+3y_0-7)y'+$$
$$+3x_0^2+10x_0y_0+3y_0^2-2x_0-14y_0-13=0.$$

Stąd

$$(\mathrm{b}_2)\qquad \begin{aligned} 3x_0+5y_0-1&=0, \\ 5x_0+3y_0-7&=0. \end{aligned}$$

Układ (b_2) ma dokładnie jedno rozwiązanie ([1]), ponieważ $w=-16\neq 0$. Mianowicie $x_0=2$, $y_0=-1$. W układzie $O'x'y'$ równanie (b) przyjmuje więc prostszą postać

$$(\mathrm{b}_3)\qquad 3x'^2+10x'y'+3y'^2-8=0,$$

przy czym

$$(\mathrm{b}_4)\qquad x=x'+2,\quad y=y'-1.$$

---

[1] Jeżeli układ (b_2) byłby sprzeczny lub miał nieskończenie wiele rozwiązań, wówczas stosowalibyśmy najpierw wzory na obrót układu Oxy.

Z kolei stosujemy wzory

(b$_5$)
$$x'=x''\cos\alpha-y''\sin\alpha,$$
$$y'=x''\sin\alpha+y''\cos\alpha$$

na obrót układu $O'x'y'$ dookoła punktu O', przy czym zbadamy czy istnieje taki kąt α (i w przypadku istnienia znajdziemy go), aby w układzie $Ox''y''$ współczynnik przy $x''y''$ był równy zeru. Kolejno otrzymujemy

$$3(\cos^2\alpha\, x''^2-2\cos\alpha\sin\alpha\, x''y''+\sin^2\alpha\, y''^2)+$$
$$+10(\cos\alpha\sin\alpha\, x''^2+\cos^2\alpha\, x''y''-\sin^2\alpha\, x''y''-\sin\alpha\cos\alpha\, y''^2)+$$
$$+3(\sin^2\alpha\, x''^2+2\sin\alpha\cos\alpha\, x''y''+\cos^2\alpha\, y''^2)-8=0,$$
$$(3+10\cos\alpha\sin\alpha)x''^2-10\cos 2\alpha\, x''y''+(3-10\sin\alpha\cos\alpha)y''^2-8=0.$$

Stąd $\cos 2\alpha=0$, więc np. $\alpha=\frac{1}{4}\pi$ (lub $\alpha=\frac{3}{4}\pi$). Wzory (b$_5$) przyjmują zatem postać

(b$_6$)
$$x'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x''-y''),\qquad y'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x''+y'')$$

oraz równanie (b) w układzie $O'x''y''$ jest następujące:

$$8x''^2-2y''^2-8=0,$$

tzn. jest równaniem hiperboli w postaci kanonicznej.

Mając w układzie $O'x''y''$ równanie (b) w postaci kanonicznej oraz wzory (b$_4$) i (b$_6$), możemy rozwiązać zadanie analogiczne do przykładu 15.3 podaną tam metodą.

15.5. Wykazać, że równanie (2) określa okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy

(a)
$$p^2=4w\wedge pW<0.$$

R o z w i ą z a n i e. Warunek k o n i e c z n y. Niech równanie (2) przedstawia okrąg, tzn. jest typu eliptycznego, czyli $pW<0$ oraz $\lambda_1=\lambda_2$ (wzór (5)). Wynika stąd, że równanie

(a$_1$)
$$\lambda^2-p\lambda+w=0,$$

ma pierwiastek podwójny, zatem $\Delta=p^2-4w=0$, tzn. pierwsza część warunku (a). □

Warunek w y s t a r c z a j ą c y. Przypuśćmy, że zachodzi (a); kolejno otrzymujemy

$$(a_{11}+a_{22})^2=4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2),\qquad a_{11}^2-2a_{11}a_{22}+a_{22}^2+4a_{12}^2=0,$$
$$(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2=0,$$

skąd wynika, że $a_{11}=a_{22}$ i $a_{12}=0$ $(a_{11}\neq 0)$. Z drugiej części warunku (a) otrzymujemy

$$pW=2a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{11} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}<0,$$

czyli

$$a_{11}^2a_{33}-a_{13}^2a_{11}-a_{23}^2a_{11}<0,$$

skąd

(a$_1$) $$a_{13}^2+a_{23}^2-a_{11}a_{33}>0.$$

Otrzymaliśmy więc z równania (2) równanie:

$$x^2+y^2+\frac{2a_{13}}{a_{11}}x+\frac{2a_{23}}{a_{11}}y+\frac{a_{33}}{a_{11}}=0,$$

którego współczynniki spełniają warunek (a_1). Jest to równanie typu (4) § 14, tzn. równanie okręgu. □

15.6. Znaleźć równanie stycznej do krzywej

(a) $$4x^2+2xy-y^2-4x-8y-11=0$$

prostopadłej do prostej L: $x-3y-3=0$.

Rozwiązanie. Piszemy równanie wszystkich stycznych do krzywej (a) (wzór (12))

$$4x_0x+x_0y+y_0x-y_0y-2(x+x_0)-4(y+y_0)-11=0,$$

czyli

(a$_1$) $$(4x_0+y_0-2)x+(x_0-y_0-4)y+(-2x_0-4y_0-11)=0.$$

Z warunku zadania mamy

$$m_{st.}=\frac{-1}{m_L}=-3=\frac{4x_0+y_0-2}{-x_0+y_0+4},$$

skąd

(a$_2$) $$x_0+4y_0+10=0.$$

Punkt styczności (x_0, y_0) leży na krzywej (a), zatem

(a$_3$) $$4x_0^2+2x_0y_0-y_0^2-4x_0-8y_0-11=0.$$

Rozwiązując układ równań (a$_2$), (a$_3$) otrzymujemy $x_{0,1}=2$, $y_{0,1}=-3$; $x_{0,2}=\frac{2}{5}$, $y_{0,2}=-\frac{13}{5}$. Stąd podstawiając otrzymane pierwiastki do równania (a$_1$), otrzymujemy poszukiwane styczne:

$$L_1: 3x+y-3=0 \quad \text{i} \quad L_2: 15x+5y+7=0.$$

15.7. Znaleźć asymptoty hiperbol:

a) $17x^2-8xy-7y^2+34x-18y+7=0$;

b) $x^2+6xy+2x-y-1=0$.

Rozwiązanie. Asymptoty hiperboli przechodzą przez środek hiperboli i mają współczynniki kierunkowe będące pierwiastkami równania (13).

a) Znajdujemy współrzędne środka $S(x_0, y_0)$ (wzory (4))

$$17x-4y+17=0,$$

$$-4x-7y-\ 9=0,$$

czyli $x_0=-\frac{31}{27}$, $y_0=-\frac{17}{27}$. Współczynniki kierunkowe asymptot znajdujemy z równania

$$-7m^2-8m+17=0.$$

Otóż $m_{1,2}=\frac{1}{7}(-4\mp 3\sqrt{15})$, skąd równania asymptot

$$y+\tfrac{17}{27}=\tfrac{1}{7}(-4\mp 3\sqrt{15})(x+\tfrac{31}{27}).$$

b) Współrzędne środka

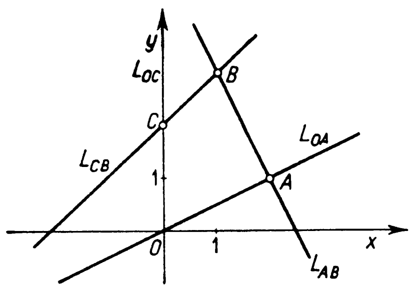
$$O_1(x_0,y_0):\ \begin{array}{c} x+3y+1=0 \\ 3x-\frac{1}{2}=0, \end{array}\quad \text{czyli}\quad O_1(\tfrac{1}{6},-\tfrac{7}{18});$$

równanie (13): $6m+1=0$. Ponieważ otrzymaliśmy równanie stopnia pierwszego, więc jedna z asymptot jest prostopadła do osi Ox (por. notkę([1]) na stronicy 235). a druga ma współczynnik $m=-\frac{1}{6}$. Stąd równania asymptot

$$L_1:\ x=\tfrac{1}{6},\qquad L_2:\ y+\tfrac{7}{18}=-\tfrac{1}{6}(x-\tfrac{1}{6}).$$

15.8. Znaleźć równanie krzywej stopnia drugiego przechodzącej przez punkty $O(0,0)$, $A(2,1)$, $B(1,3)$, $C(0,2)$, $D(4,4)$.

Rozwiązanie. W równaniu (2) występuje sześć współczynników, przy czym z uwagi na warunek $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2>0$ jeden z nich można przyjąć dowolnie. Wynika stąd,



Rys. 15.2

że krzywa stopnia drugiego jest jednoznacznie określona przez pięć punktów oraz że jeżeli żadne trzy z nich nie leżą na jednej linii prostej, to krzywa jest stożkową niezdegenerowaną, tzn. elipsą, hiperbolą lub parabolą. Zadanie można by więc sprowadzić do rozwiązania układu pięciu równań liniowych niejednorodnych z pięcioma niewiadomymi.

Można jednak postąpić inaczej korzystając z równania pęku stożkowych (wzór (14)). W tym celu jako stożkowe K_1 i K_2 weźmiemy stożkowe zdegenerowane utworzone przez pary prostych (rys.15.2)

$$K_1:\ L_{OC}\ \text{i}\ L_{AB};\qquad K_2:\ L_{OA}\ \text{i}\ L_{CB},$$

a następnie z warunku należenia piątego punktu D do krzywej znajdziemy niewiadomy parametr k (w równaniu (15)). Kolejno otrzymujemy L_{OC}: $x=0$; L_{AB}: $2x+y-5=0$;

L_{OA}: $x-2y=0$; L_{CB}: $x-y+2=0$; $f_1(x, y)=x(2x+y-5)$, $f_2(x, y)=(x-2y)\times$ $\times(x-y+2)$. Stąd równanie pęku (wzór (15))

$$\text{(a)} \qquad x(2x+y-5)+k(x-2y)(x-y+2)=0.$$

Punkt $D(4, 4)$ ma leżeć na krzywej (a), więc

$$4(2\cdot 4+4-5)+k(4-2\cdot 4)(4-4+2)=0,$$

czyli $k=\frac{7}{2}$. Poszukiwana krzywa stopnia drugiego ma więc równanie

$$\left(x(2x+y-5)+\tfrac{7}{2}(x-2y)(x-y+2)=0\right)\Leftrightarrow(11x^2-19xy+14y^2+4x-28y=0).$$

15.9. Znaleźć równanie stożkowej mając jej ogniska $F_1(1, 1)$, $F_2(-2, -2)$ i jedną z kierownic L_1: $x+y-1=0$.

Rozwiązanie. Poszukiwana krzywa jest elipsą lub hiperbolą, przy czym jeżeli kierownica leży między ogniskami, to hiperbolą, w przeciwnym przypadku elipsą. Środek S krzywej będzie środkiem odcinka F_1F_2, czyli $S(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, ogniskowa $2c=d(F_1, F_2)=$ $=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$, skąd $c=\frac{3}{2}\sqrt{2}$, odległość kierownicy L_1 od środka

$$\frac{a^2}{c}=\frac{\left|-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1\right|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}<c=\tfrac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Zatem poszukiwana krzywa jest hiperbolą, przy czym $a^2=3$, $b^2=c^2-a^2=\frac{3}{2}$. Istnieje więc układ $O''x''y''$, w którym krzywa ma równanie

$$\text{(a)} \qquad x''^2-2y''^2=3,$$

gdzie nowy początek układu O'', będący środkiem krzywej, ma w układzie Oxy współrzędne $O''(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ oraz $\varphi=\sphericalangle\,[Ox'', Ox]=\frac{1}{4}\pi$ (jako zwrot osi Ox'' możemy przyjąć zwrot wektora $\overline{F_2F_1}$). Stąd otrzymujemy związki między współrzędnymi tego samego punktu w układach Oxy i $Ox''y''$:

$$\text{(a}_1) \qquad \begin{aligned} x''&=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y+1),\\ y''&=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y). \end{aligned}$$

Podstawiając do równania (a) zmienne x'', y'' określone wzorami (a_1), otrzymujemy równanie poszukiwanej krzywej w układzie Oxy

$$\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+1+2xy+2x+2y)-2\cdot\tfrac{1}{2}(x^2-2xy+y^2)=3,$$

czyli

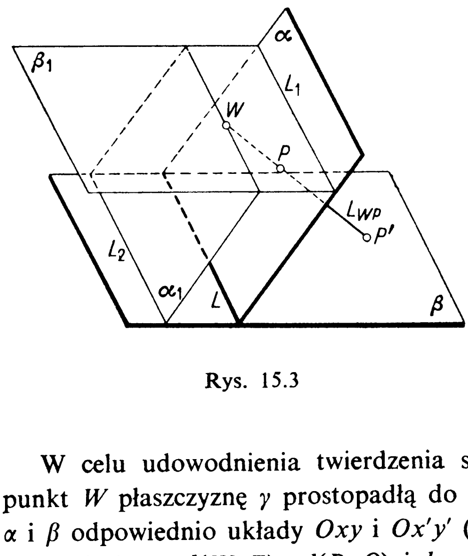
$$x^2-6xy+y^2-2x-2y+5=0.$$

15.10. Wykazać, że obrazem stożkowej (2) w rzucie środkowym jest stożkowa.

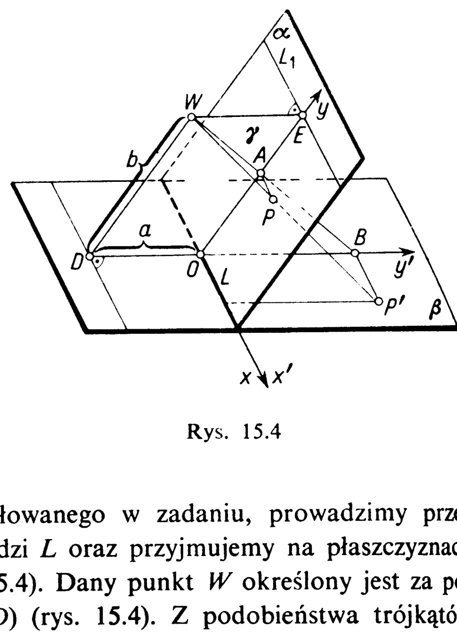
Rozwiązanie. Weźmy dwie nierównoległe płaszczyzny α i β o krawędzi $L=\alpha\cap\beta$ i punkt W nie leżący na żadnej z nich (rys. 15.3). Przyjmujemy oznaczenia: $\alpha_1\|\alpha$ i $W\in\alpha_1$, $\beta_1\|\beta$ i $W\in\beta_1$, $L_1=\alpha\cap\beta_1$, $L_2=\beta\cap\alpha_1$ oraz weźmy dowolny punkt $P\in\alpha$. Punkt $P'=$

$=L_{WP} \cap \beta$ nazywamy *rzutem środkowym* (o środku rzutowania W) punktu P na płaszczyźnie β. Łatwo zauważyć, że wszystkie punkty płaszczyzny α różne od punktów prostej L_1 mają jednoznacznie określone rzuty środkowe oraz że każdy punkt płaszczyzny β różny od punktów prostej L_2 jest rzutem środkowym dokładnie jednego punktu płaszczyzny α. Rzut środkowy jest zatem pewnym odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym zbiorów punktów płaszczyzn α i β z wyłączeniem punktów prostych L_1 i L_2.

W celu uzyskania wzajemnie jednoznacznego odwzorowania wszystkich punktów płaszczyzn α i β wprowadza się pojęcie tzw. punktu niewłaściwego. Otóż przyjmuje się, że punkty prostej L_1 rzutują się na tzw. *punkty niewłaściwe płaszczyzny* β, które możemy utożsamiać z kierunkami wyznaczonymi przez zbiory prostych równoległych płaszczyzny β. Analogicznie, punkty prostej L_2 są rzutami punktów niewłaściwych płaszczyzny α. Łatwo zauważyć, że rzuty punktów płaszczyzny α leżących blisko prostej L_1 leżą daleko. W tym sensie mówić można o punktach niewłaściwych jako o punktach położonych „nieskończenie daleko” lub „w nieskończoności”, lub jako o punktach wspólnych prostych równoległych.



Rys. 15.3



Rys. 15.4

W celu udowodnienia twierdzenia sformułowanego w zadaniu, prowadzimy przez punkt W płaszczyznę γ prostopadłą do krawędzi L oraz przyjmujemy na płaszczyznach α i β odpowiednio układy Oxy i $Ox'y'$ (rys. 15.4). Dany punkt W określony jest za pomocą liczb $a=d(W,E)=d(D,O)$ i $b=d(W,D)$ (rys. 15.4). Z podobieństwa trójkątów OBA i DBW otrzymujemy $\dfrac{y}{y'}=\dfrac{b}{a+y'}$, skąd $y=b\,\dfrac{y'}{y'+a}$. Analogicznie z podobieństwa trójkątów APW i $BP'W$ mamy $\dfrac{x}{x'}=\dfrac{AW}{BW}$. Ale $\dfrac{AW}{BW}=\dfrac{a}{y'+a}$, czyli $x=a\,\dfrac{x'}{y'+a}$. Otrzymaliśmy więc następujące związki między współrzędnymi punktów $P(x,y)\in\alpha$ i $P'(x',y')\in\beta$ w rzucie środkowym

(a) $$x=a\,\frac{x'}{y'+a},\qquad y=b\,\frac{y'}{y'+a}$$

lub równoważne im

$$(\mathrm{a}_1) \qquad x' = b\,\frac{x}{b-y}, \qquad y' = a\,\frac{y}{b-y}.$$

Wzory (a_1) określają przekształcenie rzutowe płaszczyzny α na płaszczyznę β, wzory (a) przekształcenie odwrotne do przekształcenia (a_1) (por. wzory (8) § 9). Zauważmy, że punkty prostej L_2: $y' = -a$ płaszczyzny β są rzutami punktów niewłaściwych płaszczyzny α oraz że punkty prostej L_1: $y = b$ rzutują się na punkty niewłaściwe płaszczyzny β. Jeżeli teraz na płaszczyźnie α dana jest stożkowa K o równaniu (2), to korzystając ze wzorów (a), otrzymujemy jej obraz K' na płaszczyźnie β:

$$a_{11}a^2\frac{x'^2}{(a+y')^2} + 2a_{12}ab\frac{x'y'}{(a+y')^2} + a_{22}b^2\frac{y'^2}{(a+y')^2} + 2a_{13}a\frac{x'}{a+y'} +$$

$$+2a_{23}b\frac{y'}{a+y'} + a_{33} = 0,$$

to znaczy

$$a_{11}a^2x'^2 + 2a(ba_{12}+a_{13})x'y' + (a_{22}b^2 + 2a_{23}b + a_{33})y'^2 + 2a_{13}a^2x' +$$

$$+2a(a_{23}b + a_{33})y' + a_{33}a^2 = 0,$$

a więc również krzywą stopnia drugiego. □

Zadania

15.11. Sklasyfikować krzywe:
a) $3x^2+3y^2-x+2y-5=0$; b) $x^2+2y^2+4x-4y=0$;
c) $4x^2-y^2-8x-6y-4=0$; d) $6x^2+8y^2+3x-4y+1=0$;
e) $3x^2-2y^2+6x-4y+1=0$; f) $2x^2+6x+3y+6=0$;
g) $y^2+6y+10=0$; h) $2x^2+3xy+4y^2-5x+2y-1=0$;
i) $4x^2-4xy+y^2-8x+6y-2=0$; j) $x^2+2xy+y^2+6y+9=0$;
k) $2xy-4y^2+6x+6y+1=0$; l) $x^2+4xy+3y^2-6x-12y+9=0$;
ł) $50x^2-8xy+35y^2+100x-8y+67=0$; m) $9x^2+12xy+4y^2-24x-16y+3=0$;
n) $16x^2-24xy+9y^2-160x+120y+425=0$; o) $4x^2+12xy+9y^2-4x-6y+1=0$.

15.12. Następujące równania sprowadzić do postaci kanonicznej:
a) $41x^2+24xy+9y^2+24x+18y-36=0$; b) $41x^2+24xy+34y^2+34x-112y+129=0$;
c) $50x^2-8xy+35y^2+100x-8y+67=0$; d) $x^2-6xy-7y^2+10x-30y+23=0$;
e) $7x^2+60xy+32y^2-14x-60y+7=0$; f) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$;
g) $4x^2+12xy+9y^2-4x-6y+1=0$; h) $x^2-2xy+y^2-6x+6y+7=0$.

15.13. Następujące równania sprowadzić do postaci kanonicznej (w układzie $O''x''y''$) oraz znaleźć związki między współrzędnymi tego samego punktu w układach Oxy i $O''x''y''$:
a) $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0$;
b) $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$; c) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$;

d) $y=\frac{1}{x-1}$; e) $y=\frac{x-2}{x+1}$; f) $7x^2-2y^2-12xy-14x+12y+7=0$;

g) $19x^2-6xy+11y^2-12x+44y+54=0$; h) $4x^2+4xy+y^2+12x+6y-11=0$.

15.14. W układzie Oxy znaleźć równania osi krzywych:
a) $8x^2+4xy+5y^2+16x+4y-28=0$;
b) $2xy-4x+2y-3=0$; c) $2x^2+3xy-2y^2+5y-2=0$.

15.15. Sprawdzić, że krzywa $6xy+8y^2-12x-26y+11=0$ jest hiperbolą oraz w układzie Oxy znaleźć jej: a) wierzchołki; b) ogniska; c) równania osi; d) równania kierownic; e) równania asymptot.

15.16. Sprawdzić, że krzywa $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$ jest elipsą oraz w układzie Oxy znaleźć jej: a) wierzchołki; b) ogniska; c) równania osi; d) równania kierownic.

15.17. Sprawdzić, że krzywa $x^2-4xy+4y^2-2x-y+2=0$ jest parabolą oraz w układzie Oxy znaleźć jej: a) wierzchołek; b) ognisko; c) równanie osi; d) równanie kierownicy.

15.18. Nie posługując się wzorem (5) sprowadzić następujące równania do postaci kanonicznej (w układzie $O''x''y''$) oraz podać związki między współrzędnymi tego samego punktu w układach Oxy i $O''x''y''$:
a) $x^2-4y^2+4x-2y-1=0$; b) $2x^2-4y+6x-3=0$;
c) $x^2+4y^2+6x-y+1=0$; d) $4x^2+4y^2-4x+24y+33=0$;
e) $y^2+6y+7=0$; f) $x^2-2x+3=0$;
g) $x^2+6x+9=0$; h) $x^2+y^2+2x+1=0$;
i) $2x^2-y^2+4x+4y-2=0$; j) $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0$;
k) $8x^2+24xy+15y^2-6y-5=0$; l) $x^2+2xy+y^2-4\sqrt{2}x+12\sqrt{2}y-6=0$.

15.19. Nie posługując się wzorem (5) sprawdzić, że krzywa $16x^2+25y^2-32x-384=0$ jest elipsą oraz w układzie Oxy znaleźć jej: a) środek; b) ogniska; c) równania osi; d) równania kierownic.

15.20. Nie posługując się wzorem (5) sprawdzić, że krzywa $x^2+2x+2y-5=0$ jest parabolą oraz w układzie Oxy znaleźć jej: a) wierzchołek; b) ognisko; c) równanie osi; d) równanie kierownicy.

15.21. Dla jakich wartości parametru k krzywa $x^2+6xy+y^2+6x+2y+k=0$ przedstawia dwie proste nierównoległe?

15.22. Dla jakich wartości parametru k krzywa $3x^2-2xy+3y^2-2x+2y+k=0$ przedstawia punkt?

15.23. Dla jakich wartości parametrów k i r krzywa $2x^2+kxy+2y^2-7x+ry+3=0$ przedstawia dwie proste równoległe?

15.24. Wykazać, że równanie (2) typu parabolicznego ($w=0$) można zawsze przedstawić w postaci $(k_1x+k_2y)^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$.

15.25. Wykazać, że równanie $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c\neq 0$ i $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$ przedstawia zawsze hiperbolę.

15.26. Wykazać, że równanie

$$(a_1 x+b_1 y+c_1)^2+(a_2 x+b_2 y+c_2)^2=1,$$

gdzie $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=1$ i $a_1 a_2+b_1 b_2=0$ określa elipsę. Znaleźć jej równanie kanoniczne i równania osi.

15.27. Dla jakich krzywych stopnia drugiego spełnione są warunki $p=a_{11}+a_{22}=0$ i $W\neq 0$?

15.28. Wykazać, że równanie paraboli

(a) $$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

($w=0$, $W\neq 0$) można zawsze przedstawić w postaci

$$(a_{11}+a_{22})x''^2=\pm 2\sqrt{\frac{-W}{a_{11}+a_{22}}}\,y'',$$

gdzie $O''x''y''$ jest nowym układem współrzędnych.

15.29. Znaleźć styczne do krzywej $x^2-y^2-5x+4y+6=0$ w jej punktach przecięcia z osią Ox.

15.30. Dana jest krzywa

(a) $$x^2+4xy+2y^2+x-7y+11=0.$$

Znaleźć równania stycznych do krzywej (a) w punktach krzywej o rzędnej $y_0=1$.

15.31. Znaleźć równania stycznych do krzywej $x^2-xy-y^2-2x+2y+1=0$ równoległych do prostej $2x+2y-1=0$.

15.32. Znaleźć równania stycznych do krzywej $2x^2-4xy+y^2-2x+6y-3=0$ przechodzących przez punkt $A(3,4)$.

15.33. W punktach przecięcia krzywej $x^2-2xy+y^2+2x-6y=0$ z prostą $3x-y+6=0$ znaleźć równania stycznych do tej krzywej oraz ich punkt przecięcia.

15.34. Znaleźć równania asymptot hiperbol: a) $y=\dfrac{x+1}{2x-3}$; b) $xy-x^2-1=0$; c) $3x^2+7xy+4y^2+5x+2y-6=0$; d) $x^2-xy-2y^2+2y-1=0$.

15.35. Wykazać, że jeżeli krzywa stopnia drugiego $f(x,y)=0$, gdzie $f(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}$ jest hiperbolą, to równania jej asymptot można napisać w postaci $f(x,y)-f(x_0,y_0)=0$, gdzie liczby x_0 i y_0 są współrzędnymi środka hiperboli.

15.36. Znaleźć równania stożkowych przechodzących przez punkty:
a) $A(0,2)$, $B(5,0)$, $C(6,3)$, $D(1,5)$, $O(0,0)$;
b) $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,0)$, $C(2,-5)$, $D(-5,2)$;

15.37. Znaleźć równanie krzywej stopnia drugiego przechodzącej przez punkty: $A(2,1)$, $B(4,3)$, $C(3,5)$, $D(1,4)$ i stycznej do prostej L: $y=-x$.

15.38. Znaleźć równanie stożkowej przechodzącej przez punkty $A(-2,-1)$, $B(0,-2)$ i mającej następujące osie symetrii $x+y+1=0$, $x-y+1=0$.

15.39. Znaleźć równanie elipsy mając jej środek $O_1(2,1)$ i końce dwóch średnic sprzężonych $A(5,1)$ i $B(0,3)$.

15.40. Znaleźć równanie paraboli o wierzchołku w punkcie $O(0,0)$ i ognisku $F(1,1)$.

15.41. Znaleźć równanie hiperboli o środku w punkcie $O_1(1,2)$ i przechodzącej przez punkt $O(0,0)$, wiedząc, że jedna z jej asymptot ma równanie $x-2y+3=0$.

15.42. Znaleźć równanie hiperboli mając dane jedno jej ognisko $F_1(-2,2)$ i równania asymptot $2x-y+1=0$, $x+2y-7=0$.

15.43. Wykazać, że obrazem stożkowej przy przekształceniu afinicznym płaszczyzny jest stożkowa, przy czym typ krzywej nie ulega zmianie.

15.44. Wykazać, że styczna do stożkowej jest niezmiennikiem przekształcenia afinicznego (tzn. prosta będąca obrazem stycznej do stożkowej K jest styczną do obrazu K' tej stożkowej).

15.45. Wykazać, że typ krzywej stopnia drugiego (czyli znak małego wyróżnika) na ogół ulega zmianie w rzucie środkowym.

15.46. Korzystając z przykładu 15.10 wykazać, że jeżeli krzywa stopnia drugiego: α_1) nie przecina prostej $y=b$ (por. wzór (a_1) przykład 15.10); α_2) jest styczna do prostej $y=b$; α_3) przecina prostą $y=b$ w dwóch różnych punktach, to jej obrazem jest krzywa stopnia drugiego typu: eliptycznego w przypadku α_1); parabolicznego w przypadku α_2) i hiperbolicznego w przypadku α_3).

Odpowiedzi

15.11. a) Okrąg; b) elipsa; c) hiperbola; d) zbiór pusty eliptyczny; e) dwie proste nierównoległe; f) parabola; g) zbiór pusty paraboliczny; h) elipsa; i) parabola; j) parabola; k) hiperbola; l) dwie proste nierównoległe; ł) zbiór pusty eliptyczny; m) dwie proste równoległe; n) zbiór pusty paraboliczny; o) prosta podwójna.

15.12. a) $x''^2+9y''^2=9$; b) $x''^2+2y''^2=0$; c) $2x''^2+3y''^2=-1$; d) $x''^2-4y''^2=1$; e) $x''^2-4y''^2=0$; f) $y''^2=4\sqrt{2}x''$; g) $y''^2=0$; h) $y''^2=1$.

15.13. a) $x''^2+4y''^2=16$, $x''=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)$, $y''=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x-y+2)$;

b) $9x''^2-4y''^2=36$, $x''=\frac{1}{\sqrt{13}}(3x+2y-5)$, $y''=\frac{1}{\sqrt{13}}(-2x+3y-1)$;

c) $y''^2=4\sqrt{2}\,x''$, $x''=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y-3)$, $y''=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y+1)$;

d) $x''^2-y''^2=2$, $x''=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y-1)$, $y''=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y+1)$;

e) $y''^2-x''^2=6$, $x''=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$, $y''=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y-2)$;

f) $x''^2-2y''^2=0$, $x''=\frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y-1)$, $y''=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x+y+2)$;

g) $x''^2+2y''^2=-1$, $x''=\frac{1}{\sqrt{10}}(x+3y+6)$, $y''=\frac{1}{\sqrt{10}}(-3x+y+2)$;

h) $x''^2=4$, $x''=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x+y+3)$, $y''=\frac{1}{\sqrt{5}}(-x+2y-4)$.

15.14. a) $x-2y+1=0$, $2x+y+2=0$;

b) $x+y-1=0$, $x-y+3=0$; c) $3x+y+1=0$, $x-3y+3=0$.

15.15. a) $A_{1,2}\left(\frac{\mp 1}{\sqrt{10}}-1,\ \frac{\mp 3}{\sqrt{10}}+2\right)$; b) $F_1(0,\ 5)$, $F_2(-2,\ -1)$;

c) $3x-y+5=0$, $x+3y-5=0$; d) $x+3y-6=0$, $x+3y-4=0$;

e) $3x+4y-5=0$, $y-2=0$.

15.16. a) $A_{1,2}\left(1\mp\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $B_{1,2}\left(1\mp\frac{3}{\sqrt{2}},\ 1\pm\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$;

b) $F_1(-1,3)$, $F_2(3,-1)$; c) $x+y-2=0$, $x-y=0$; d) $2x-2y\mp 9=0$.

15.17. a) $O_1(\frac{4}{5},\frac{2}{5})$; b) $F(\frac{9}{10},\frac{9}{20})$; c) $x-2y=0$; d) $8x+4y-7=0$.

15.18. a) $\frac{4}{19}x''^2-\frac{16}{19}y''^2=1$, $x=x''-2$, $y=y''-\frac{1}{4}$;

b) $x''^2=2y''$, $x=x''-\frac{3}{2}$, $y=y''-\frac{15}{8}$; c) $\frac{16}{129}x''^2+\frac{64}{129}y''^2=1$, $x=x''-3$, $y=y''+\frac{1}{8}$;

d) $x''^2+y''^2=1$, $x=x''+\frac{1}{2}$, $y=y''-3$; e) $y''^2=2$, $x=x''$, $y=y''-3$;

f) $x''^2=-2$, $x=x''+1$, $y=y''$; g) $x''^2=0$, $x=x''-3$, $y=y''$;

h) $x''^2+y''^2=0$, $x=x''-1$, $y=y''$; i) $2x''^2-y''^2=0$, $x=x''-1$, $y=y''+2$;

j) $x''^2+4y''^2=16$, $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x''-y''+\sqrt{2})$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x''+y''+\sqrt{2})$;

k) $24x''^2-y''^2=2$, $x=\frac{1}{10}(6x''-8y''+15)$, $y=\frac{1}{5}(4x''+3y''-5)$;

l) $x''^2=-8y''$, $x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x''-y''-\frac{23}{8}\right)$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x''+y''-\frac{9}{8}\right)$.

15.19. a) $O_1(1,0)$; b) $F_1(-2,0)$ $F_2(4,0)$; c) $x=1, y=0$; d) $x=1\mp\frac{25}{3}$.
15.20. a) $O_1(-1,3)$; b) $F(-1,\frac{5}{2})$; c) $x+1=0$; d) $2y-7=0$.
15.21. $k=1$. **15.22.** $k=\frac{1}{2}$. **15.23.** $k=4\wedge r=-7 \vee k=-4\wedge r=7$.
15.26. $(a_1^2+b_1^2)x''^2+(a_2^2+b_2^2)y''^2=1$, $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$.
15.27. Hiperbol równoosiowych.
15.29. $x-4y-2=0$, $x+4y-3=0$.
15.30. Styczne $x-11y+13=0$, $x+15y-12=0$.
15.31. $x+y+2=0$, $5x+5y-6=0$. **15.32.** $x-3=0$, $7x-2y-13=0$.
15.33. $x+y+2=0$, $5x-3y+18=0$, $P(-3, 1)$.
15.34. a) $2x-3=0$, $2y-1=0$; b) $x=0$, $x-y=0$;
c) $3x+4y+14=0$, $x+y-3=0$; d) $3x+3y-2=0$, $3x-6y+2=0$.
15.35. Wsk. Rozpatrzyć najpierw krzywą w postaci kanonicznej, a następnie skorzystać ze wzorów na przesunięcie i obrót.
15.36. a) $5x^2-2xy+2y^2-25x-4y=0$; b) $5x^2+16xy+5y^2-5x-5y=0$.
15.37. $(3x+y-7)(2x+y-1)+\frac{15}{289}(81\mp 56\sqrt{2})(x-y-1)(x-2y+7)=0$.
15.38. $x^2+xy+y^2+2x+y-2=0$.
15.39. Wsk. Por. zadanie 14.65. $4x^2+8xy+13y^2-24x-42y+9=0$.
15.40. $x^2-2xy+y^2-8x-8y=0$. **15.41.** $11x^2-20xy-4y^2+18x+36y=0$.
15.42. $4x^2+6xy-4y^2-26x+18y-39=0$.
15.45. Wsk. Por. przykład 15.10.

16. POWIERZCHNIE STOPNIA DRUGIEGO. POWIERZCHNIE OBROTOWE

Ograniczymy się do zadań z powierzchni stopnia drugiego mających zastosowania przede wszystkim w całkach wielokrotnych.

16.1. *Powierzchnią* [1] *stopnia drugiego* nazywamy zbiór punktów w $\mathbf{R}^3$, których współrzędne spełniają równanie

$$(1)\qquad a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0,$$

gdzie $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}^2>0$. Równanie (1) nazywamy *równaniem powierzchni.* Czasem będziemy mówili „powierzchnia (1)", zamiast „powierzchnia o równaniu (1)". Przy rysowaniu powierzchni stopnia drugiego będziemy korzystali ze wzorów:

$$(2)\qquad x=x'+a,\quad y=y'+b,\quad z=z'+c$$

---

[1] Ogólna definicja powierzchni podana będzie w § 39.

określających związki między współrzędnymi tego samego punktu w układach $Oxyz$ i $O'x'y'z'$, gdzie układ $O'x'y'z'$ powstaje z $Oxyz$ przez przesunięcie o wektor $\mathbf{u}=(a, b, c)$ (rys. 16.1).

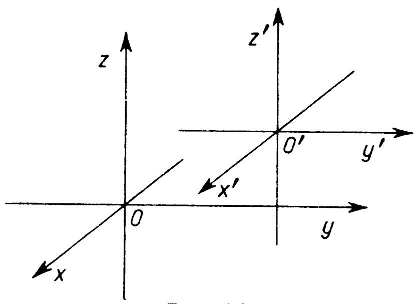
Równanie sfery o środku w punkcie $S(a, b, c)$ i promieniu r:

(3) $$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 .$$

Równanie

(4) $$f(x, y)=0,$$

gdzie $f(x, y)=0$ jest równaniem stożkowej $K\subset\mathbf{R}^2$ (por. wzór (2), §15), określa powierzchnię walcową stopnia drugiego o kierownicy K i tworzących równoległych do osi Oz.



Rys. 16.1

Równania kanoniczne powierzchni:

(5) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad - \text{ elipsoidy trójosiowej},$$

(6) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad - \text{ hiperboloidy jednopowłokowej},$$

(7) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad - \text{ hiperboloidy dwupowłokowej},$$

(8) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz \quad - \text{ paraboloidy eliptycznej},$$

(9) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz \quad - \text{ paraboloidy hiperbolicznej},$$

(10) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2} \quad - \text{ stożka eliptycznego}.$$

Dla powierzchni (5), (6), (7) i (10) początek układu $O(0, 0, 0)$ jest *środkiem powierzchni* (tzn. *środkiem symetrii* powierzchni); dla paraboloidy eliptycznej (8) początek układu jest tzw. *wierzchołkiem*, a dla paraboloidy hiperbolicznej (9) — tzw. *punktem siodłowym*.

Uwaga. Każda z powierzchni (3)-(10) jest powierzchnią typu (1), tzn. stopnia drugiego. Można udowodnić, że i na odwrót (por. T_1, § 15); każda powierzchnia stopnia drugiego jest jedną z powierzchni (3)-(10) (do których dołączyć należy jeszcze pewne powierzchnie stopnia drugiego zdegenerowane).

16.2. Każda z powierzchni o równaniach (3), (4)([1]), (5), (6), (7), (8) i (10) dzieli przestrzeń (z wyłączeniem punktów danej powierzchni) na dwa rozłączne zbiory punktów. Jeden z nich ma tę własność, że każda prosta, przechodząca przez każdy punkt tego zbioru przecina powierzchnię co najmniej w jednym punkcie lub jest równoległa do prostej leżącej całkowicie na powierzchni. Zbiór ten nazywamy *wnętrzem powierzchni*, a jego punkty punktami *wewnętrznymi powierzchni*. Pozostały zbiór nazywamy *zewnętrzem powierzchni*, a jego punkty *punktami zewnętrznymi powierzchni*. Analitycznie zbiory te określone są następująco.

(11) $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2<r^2$ $[>r^2]$ wnętrze [zewnętrze] sfery (3),

(12)
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<1 \quad [\ldots>1] & \text{wnętrze [zewnętrze] walca eliptycznego o równaniu } \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,; \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}>1 \quad [\ldots<1] & \text{wnętrze [zewnętrze] walca hiperbolicznego o równaniu } \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,; \\ y^2<2px \quad [y^2>2px] & \text{wnętrze [zewnętrze] walca parabolicznego} \\ x^2<2py \quad [x^2>2py] & \text{o równaniu } y^2=2px \text{ względnie } x^2=2py; \end{cases}$$

(13) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}<1$ $[\ldots>1]$ wnętrze [zewnętrze] elipsoidy (5);

(14) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}>1$ $[\ldots<1]$ wnętrze [zewnętrze] hiperboloidy jednopowłokowej (6);

(15) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}>1$ $[\ldots<1]$ wnętrze [zewnętrze] hiperboloidy dwupowłokowej (7);

(16) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<2pz$ $[\ldots>2pz]$ wnętrze [zewnętrze] paraboloidy eliptycznej (8);

(17) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<\dfrac{z^2}{c^2}$ $\left[\ldots>\dfrac{z^2}{c^2}\right]$ wnętrze [zewnętrze] stożka eliptycznego (10).

Paraboloida hiperboliczna o równaniu (9) również dzieli przestrzeń (z wyłączeniem punktów paraboloidy) na dwa rozłączne zbiory, które analitycznie określone są następująco:

(18) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}<2pz$ $[\ldots>2pz]$ zbiór W_1 [zbiór W_2].

([1]) Rozpatrujemy tylko stożkowe niezdegenerowane.

W przypadku gdy $p>0$ $[p<0]$ punkty zbioru W_1 leżą powyżej [poniżej] powierzchni paraboloidy, a punkty zbioru W_2 leżą poniżej [powyżej] powierzchni paraboloidy.

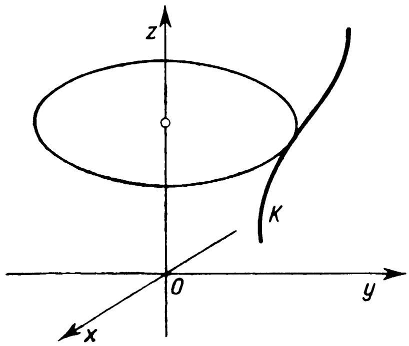
16.3. Zbiór punktów

(19) $$K=\{(x, y, z)\in\mathbf{R}^3:\ F(x, y, z)=0\wedge G(x, y, z)=0\},$$

gdzie $F(x, y, z)=0$ i $G(x, y, z)=0$ są równaniami powierzchni stopnia drugiego ([1]), nazywamy *krzywą* ([2]) (*linią przenikania* powierzchni $F(x, y, z)=0$ i $G(x, y, z)=0$). Rugując z układu $F(x, y, z)=0$, $G(x, y, z)=0$ np. zmienną z otrzymujemy równanie

(20) $$f(x, y)=0$$

określające rzut krzywej (19) na płaszczyźnie Oxy. Analogicznie rugując zmienną y lub x otrzymujemy równanie rzutu krzywej (19) na płaszczyźnie Oxz lub Oyz.



Rys. 16.2

Niech będzie dana krzywa K oraz prosta L. Zbiór okręgów otrzymanych przez obrót każdego punktu $P\in K$ dookoła prostej L nazywamy powierzchnią obrotową o osi obrotu L.

W przypadku gdy krzywa K jest stożkową (rys. 16.2)

(21) $$F(y, z)=0\wedge x=0,$$

a prosta L osią Oz, równanie powierzchni obrotowej jest następujące:

(22) $$F(\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0.$$

16.4. Powierzchnię utworzoną przez wszystkie punkty prostej poruszającej się w sposób ciągły po pewnej krzywej nazywamy *powierzchnią prostokreślną*.

Ważnymi klasami powierzchni prostokreślnych są:

1° *Powierzchnie stożkowe*, utworzone przez wszystkie punkty prostych przechodzących przez stały punkt $W(a, b, c)$ zwany *wierzchołkiem* i przez dowolny punkt krzywej (19) zwanej *kierownicą*.

2° *Powierzchnie walcowe*, utworzone przez wszystkie punkty prostych równoległych do stałego wektora $\mathbf{u}=(\alpha, \beta, \gamma)$ (kierunek tworzących) i przechodzących przez każdy punkt krzywej (19) zwanej *kierownicą*.

3° *Powierzchnie hiperboloidy jednopowłokowej i paraboloidy hiperbolicznej.*

([1]) W § 16 ograniczamy się tylko do powierzchni stopnia drugiego.

([2]) Dokładnie *krzywą przestrzenną algebraiczną stopnia czwartego*. Zbiór K może być w szczególności zbiorem pustym.

Na hiperboloidzie jednopowłokowej (6) i paraboloidzie hiperbolicznej (9), leżą po dwie rodziny R_1 i R_2 prostych (tworzących prostoliniowych) o równaniach

$$(23)\qquad R_1:\ \begin{aligned}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=\beta\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=\alpha\left(1-\frac{y}{b}\right),\end{aligned}\qquad R_2:\ \begin{aligned}\alpha_1\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=\beta_1\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ \beta_1\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=\alpha_1\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{aligned}$$

dla hiperboloidy (6) oraz o równaniach

$$(24)\qquad R_1:\ \begin{aligned}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)&=\beta z,\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)&=2p\alpha;\end{aligned}\qquad R_2:\ \begin{aligned}\alpha_1\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)&=2p\beta_1,\\ \beta_1\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)&=\alpha_1 z\end{aligned}$$

dla paraboloidy (9), gdzie parametry α, β, α_1 i β_1 przebiegają niezależnie wszystkie liczby rzeczywiste, przy czym $\alpha^2+\beta^2>0$ i $\alpha_1^2+\beta_1^2>0$.

Przez każdy punkt hiperboloidy jednopowłokowej i paraboloidy hiperbolicznej przechodzą dokładnie dwie tworzące należące do różnych rodzin.

Przykłady

16.1. W układzie $Oxyz$ narysować powierzchnie:

(a) $$x^2+2z-8=0;$$

(b) $$9x^2+36y^2+16z^2-18x-72y-32z-83=0;$$

(c) $$\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}-\frac{x^2}{16}=1;$$

(d) $$36y^2-4x^2-9z^2-144y+108=0;$$

(e) $$y^2+4z^2-8x-16=0;$$

(f) $$x^2-2y^2-2z-2=0$$

oraz dla powierzchni (f) znaleźć punkty przecięcia jej z osiami układu i krzywe przecięcia z płaszczyznami układu.

Rozwiązanie. Powierzchnie (a) - (f) narysujemy w układzie $Oxyz$, korzystając np. z ich postaci kanonicznych w układzie przesuniętym $O'x'y'z'$.

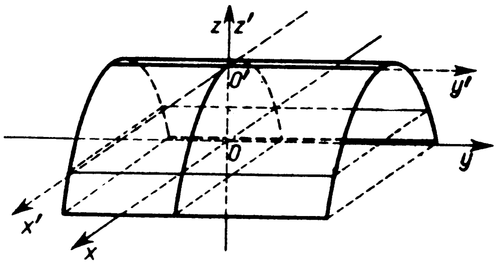
Przekształcając równanie (a) do postaci

$$x^2=-2(z-4),$$

a następnie podstawiając $x'=x$, $y'=y$, $z'=z-4$, otrzymujemy w układzie przesuniętym $O'x'y'z'$ równanie

(a_1) $$x'^2=-2z',$$

tzn. równanie walca parabolicznego w postaci kanonicznej o tworzących równoległych do osi $Oy' \| Oy$ i kierownicy $x'^2 = -2z' \wedge y' = 0$ będącej parabolą w płaszczyźnie $Ox'z'$ (rys. 16.3).



Rys. 16.3

Przekształcając równanie (b) do postaci

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{9} = 1,$$

a następnie podstawiając $x' = x-1$; $y' = y-1$, $z' = z-1$, otrzymujemy w układzie $O'x'y'z'$ równanie

$$\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{4} + \frac{z'^2}{9} = 1,$$

tzn. równanie elipsoidy trójosiowej w postaci kanonicznej. W celu narysowania elipsoidy zauważmy, że przecięcia jej płaszczyznami $x' = a$, $y' = b$ i $z' = c$ są elipsami dla $|a| \leqslant 4$, $|b| \leqslant 2$ i $|c| \leqslant 3$ (¹) oraz zbiorami pustymi dla $|a| > 4$, $|b| > 2$ i $|c| > 3$. W szczególności dla $x' = 0$ mamy elipsę $\frac{y'^2}{4} + \frac{z'^2}{9} = 1$, dla $y' = 0$ – elipsę $\frac{x'^2}{16} + \frac{z'^2}{9} = 1$ i dla $z' = 0$ – elipsę $\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{4} = 1$. Korzystając z otrzymanych przecięć rysujemy elipsoidę (rys. 16.4).

Równanie (c) określa hiperboloidę jednopowłokową w postaci kanonicznej. Przecinając ją płaszczyznami $y = a$, $z = b$, $a, b \in \mathbf{R}$, otrzymujemy hiperbole:

$$\frac{z^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1 - \frac{a^2}{9} \wedge y = a \quad \text{oraz} \quad \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1 - \frac{b^2}{4} \wedge z = b,$$

natomiast przecinając hiperboloidę płaszczyznami $x = k$, $k \in \mathbf{R}$ otrzymujemy elipsy

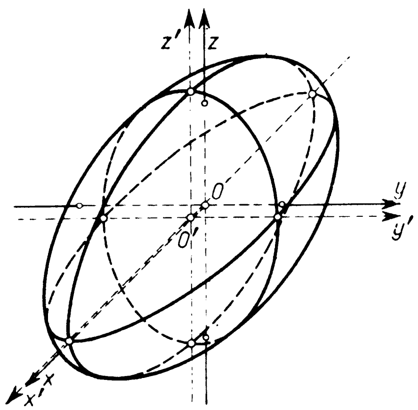
$$\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 + \frac{k^2}{16} \wedge x = k.$$

Korzystając z otrzymanych przecięć rysujemy hiperboloidę (rys. 16.5).

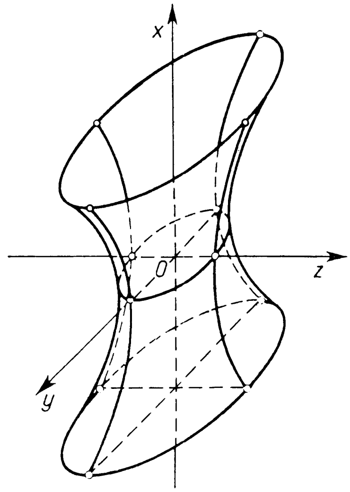
Przekształcając równanie (d) do postaci

$$\frac{(y-2)^2}{1} - \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1,$$

(¹) Dla $a = \mp 4$, $b = \mp 2$ i $c = \mp 3$ elipsy degenerują się do punktów.



Rys. 16.4



Rys. 16.5

a następnie podstawiając $x'=x$, $y'=y-2$, $z'=z$, otrzymujemy w układzie $O'x'y'z'$

$$\text{(d}_1\text{)} \qquad \frac{y'^2}{1}-\frac{x'^2}{9}-\frac{z'^2}{4}=1.$$

tzn. równanie hiperboloidy dwupowłokowej w postaci kanonicznej. Przecięcia powierzchni (d_1) płaszczyznami $x'=a$ i $z'=b$, $a, b \in \mathbf{R}$ są hiperbolami o równaniach

$$\frac{y'^2}{1}-\frac{z'^2}{4}=1+\frac{a^2}{9} \wedge x'=a \quad \text{oraz} \quad \frac{y'^2}{1}-\frac{x'^2}{9}=1+\frac{b^2}{4} \wedge z'=b,$$

natomiast przecięcia płaszczyznami $y'=c$, $c \in \mathbf{R}$ są elipsami

$$\frac{x'^2}{9}+\frac{z'^2}{4}=c^2-1 \wedge y'=c,$$

jeżeli $|c|>1$, punktami dla $|c|=1$ oraz zbiorami pustymi, jeżeli $|c|<1$. Korzystając z otrzymanych przecięć rysujemy hiperboloidę (rys. 16.6).

Przekształcając równanie (e) do postaci

$$\text{(e}_1\text{)} \qquad y^2+4z^2=8(x+2),$$

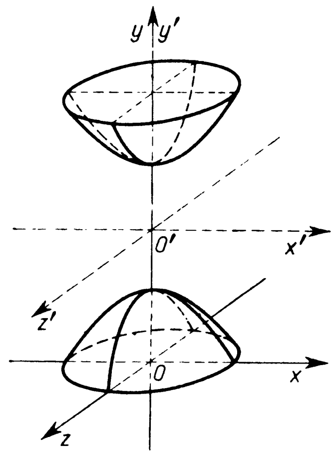
a następnie podstawiając $x'=x+2$, $y'=y$, $z'=z$, otrzymujemy w układzie $O'x'y'z'$ równanie

$$\text{(e}_2\text{)} \qquad y'^2+4z'^2=8x',$$

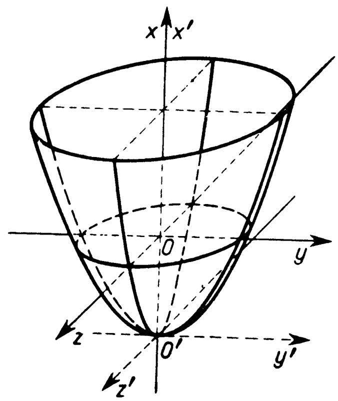
tzn. równanie paraboloidy eliptycznej w postaci kanonicznej, której osią symetrii jest oś Ox' (rys. 16.7).

Przekształcając równanie (f) do postaci

$$x^2-2y^2=2(z+1)$$



Rys. 16.6



Rys. 16.7

oraz podstawiając $x'=x$, $y'=y$, $z'=z+1$, otrzymujemy w układzie $O'x'y'z'$ równanie

$$(\mathrm{f}_1) \qquad x'^2-2y'^2=2z',$$

tzn. równanie paraboloidy hiperbolicznej w postaci kanonicznej. W celu narysowania powierzchni (f_1) weźmy następujące jej przekroje: płaszczyznami $x'=k$, $k\in\mathbf{R}$:

$$y'^2=-\left(z'-\frac{k^2}{2}\right)\wedge x'=k, \quad \text{tzn. parabole},$$

płaszczyznami $z'=k, k\in\mathbf{R}$:

$$x'^2-2y'^2=2k\wedge z'=k, \quad \text{tzn. hiperbole}$$

o osiach rzeczywistych równoległych do osi Ox', jeżeli $k>0$, i o osiach rzeczywistych równoległych do osi Oy', jeżeli $k<0$; dla $k=0$ krzywą przecięcia są dwie przecinające się proste

$$x'^2-2y'^2=0\wedge z'=0;$$

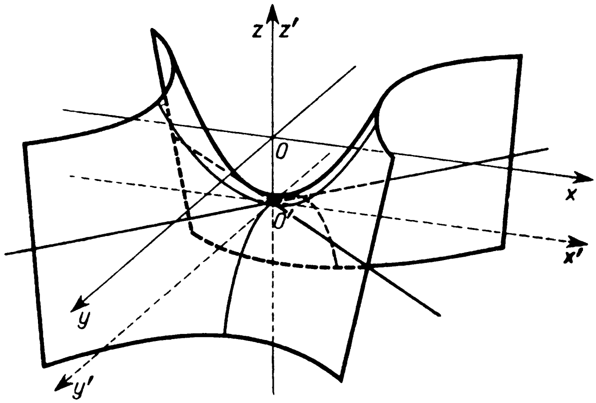
płaszczyznami $y'=k$, $k\in\mathbf{R}$:

$$x'^2=2(z'+k^2)\wedge y'=k, \quad \text{tzn. parabole}.$$

Korzystając z otrzymanych przekrojów rysujemy paraboloidę (f_1) (rys. 16.8 (¹)). Przecięcia z osiami i płaszczyznami układu:

z Ox: $P_{1,2}(\mp\sqrt{2}, 0, 0)$;
z Oy: $y^2=-1$, tzn. zbiór pusty;
z Oz: $P_3(0, 0, -1)$;
z Oxy: $x^2-2y^2=2\wedge z=0$, tzn. hiperbola;

(¹) Rysunek podany jest w układzie lewoskrętnym.



Rys. 16.8

z Oxz: $x^2=2(z+1)\wedge y=0$, tzn. parabola;
z Oyz: $y^2=-(z+1)\wedge x=0$, tzn. parabola.

16.2. Znaleźć równania rzutów następujących krzywych

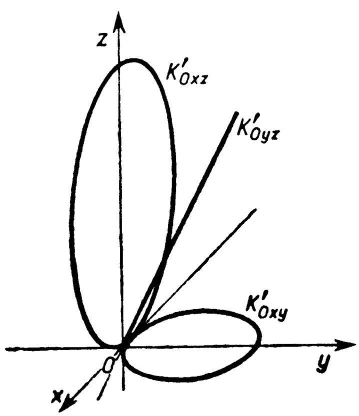
(a) $$K=\{(x,y,z):\ x^2+y^2=z\wedge z=2y\};$$

(b) $$K=\{(x,y,z):\ z=6-x^2-y^2\wedge z=\sqrt{x^2+y^2}\};$$

(c) $$K=\{(x,y,z):\ x^2-y^2=z\wedge z=y^2\}$$

na płaszczyzny układu.

Rozwiązanie. Oznaczamy rzuty krzywej K na płaszczyzny układu przez K'_{Oxy}, K'_{Oxz}, K'_{Oyz} oraz korzystamy z punktu 16.3, a więc rugujemy z układu równań określającego krzywą kolejno zmienne x, y i z.

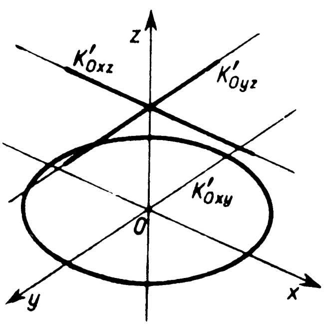


Rys. 16.9

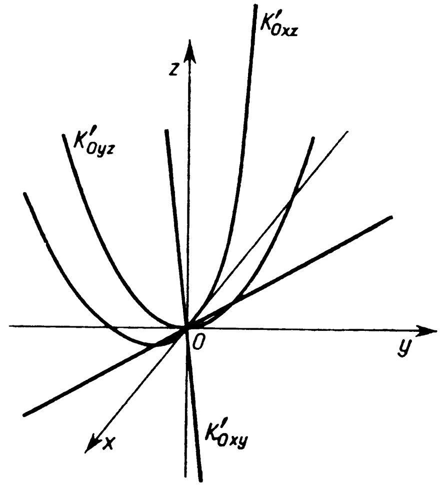
Dla równania (a) mamy K'_{Oxy}: $x^2+(y-1)^2=1$, a więc okrąg; K'_{Oxz}: $4x^2+(z-2)^2=4$, czyli elipsę; K'_{Oyz}: $z=2y$, tzn. prostą (rys. 16.9).

Dla równania (b) mamy K'_{Oxy}: $\sqrt{x^2+y^2}=6-(x^2+y^2)$. Podstawiając $u=x^2+y^2$ mamy $\sqrt{u}=6-u$, $u=36-12u+u^2$, $u^2-13u+36=0$, $(u-9)(u-4)=0$, czyli $(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-4)=0$, to znaczy dwa okręgi $x^2+y^2=9$ i $x^2+y^2=4$. Z równości $\sqrt{x^2+y^2}=6-(x^2+y^2)$ wynika, że K'_{Oxy}: $x^2+y^2=4$; K'_{Oxz}: $z=6-x^2-z^2+x^2$, tzn. dwie proste $z=-3$ i $z=2$. Ponieważ $z=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0$, więc K'_{Oxz}: $z=2\wedge|x|\leqslant 2$, a więc rzut K'_{Oxz} jest odcinkiem; K'_{Oyz}: $z=6-z^2-y^2+y^2$, czyli również odcinek $z=2\wedge|y|\leqslant 2$ (rys. 16.10).

Dla równania (c) mamy K'_{Oxy}: $x^2-2y^2=0$, a więc dwie proste przecinające się; K'_{Oxz}: $x^2=2z$, czyli parabolę; K'_{Oyz}: $z=y^2$, czyli parabolę (rys. 16.11).



Rys. 16.10



Rys. 16.11

16.3. Zapisać za pomocą nierówności, w których występują zmienne x, y i z, zbiór (ograniczony) punktów W ograniczony powierzchniami:

a) $y=\sqrt{4-z}, \quad x^2+y^2=4, \quad z=0, \quad y=0;$

b) $\sqrt{4R^2-x^2-y^2}=z, \quad x^2+y^2=-4R(z-R);$

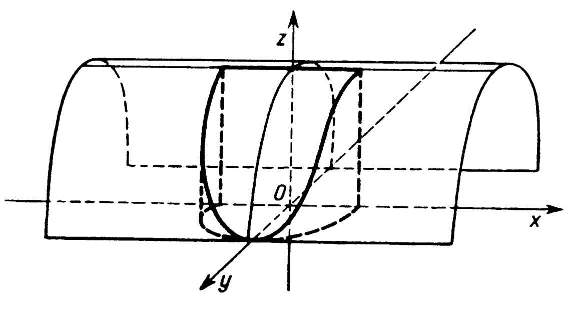
c) $\sqrt{x^2+y^2}=z, \quad \sqrt{x^2+y^2}=2z, \quad x^2+y^2=-z+1.$

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzorów (11) - (19).

a) $W=\{(x,y,z):\ (y>0)\wedge(0<z<4-y^2)\wedge(x^2+y^2<4)\}=$

$=\{(x,y,z):\ (0<y<\sqrt{4-x^2})\wedge(-2<x<2)\wedge(0<z<4-y^2)\}$ (rys. 16.12);

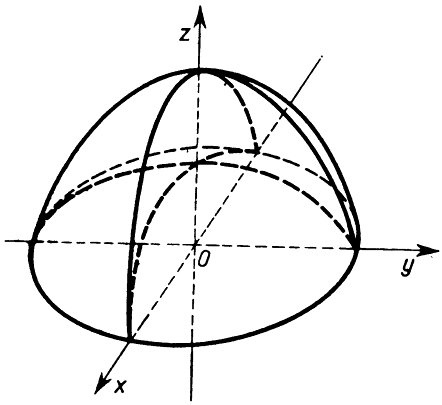
b) $W=\left\{(x,y,z):\ \left(R-\frac{1}{4R}(x^2+y^2)<z<\sqrt{4R^2-x^2-y^2}\right)\wedge(x^2+y^2<4R^2)\right\}=$



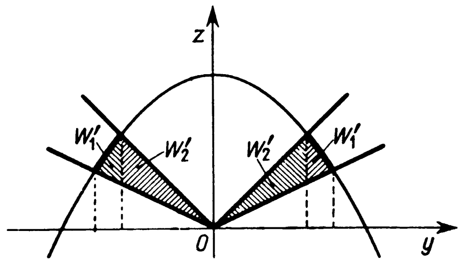
Rys. 16.12

$$=\left\{(x,y,z):\ (-2R<x<2R)\wedge(-\sqrt{4R^2-x^2}<y<\sqrt{4R^2-x^2})\wedge\right.$$

$$\left.\wedge\left(R-\frac{1}{4R}(x^2+y^2)<z<\sqrt{4R^2-x^2-y^2}\right)\right\}\quad \text{(rys. 16.13);}$$



Rys. 16.13



Rys. 16.14

c) Zbiór $W=W_1\cup W_2$, przy czym przekroje zbiorów W_1 i W_2 płaszczyzną $x=0$ oznaczamy przez W_1' i W_2' (rys. 16.14). Znajdujemy najpierw rzuty na płaszczyźnie Oxy linii przenikania danych stożków z daną paraboloidą, tzn. rugujemy zmienną z z układów

$$\text{I}\quad \begin{aligned} z&=\sqrt{x^2+y^2},\\ x^2+y^2&=-z+1\end{aligned}\qquad \text{i}\quad \text{II}\quad \begin{aligned} 2z&=\sqrt{x^2+y^2},\\ x^2+y^2&=-z+1.\end{aligned}$$

Kolejno otrzymujemy $x^2+y^2=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ dla układu I i $x^2+y^2=\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}$ dla układu II.

Stąd

$$W_1=\left\{(x,y,z):\ \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}<x^2+y^2<\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right)\wedge\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}<z<1-x^2-y^2\right)\right\},$$

$$W_2=\left\{(x,y,z):\ \left(x^2+y^2<\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\wedge\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}<z<\sqrt{x^2+y^2}\right)\right\}.$$

16.4. Znaleźć równanie powierzchni powstałej przez obrót okręgu

$$z^2+(y-a)^2=r^2\wedge x=0\qquad (a>r)$$

dookoła osi Oz.

R o z w i ą z a n i e. Korzystamy ze wzoru (22). Otóż

$$F(y,z)=z^2+(y-a)^2-r^2,$$

stąd

$$z^2+(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2=r^2,$$

czyli

$$(x^2+y^2+z^2+a^2-r^2)^2=4a^2(x^2+y^2).$$

Otrzymana powierzchnia nazywa się *torusem*.

16.5. Znaleźć równanie powierzchni powstałej przez obrót prostej

$$L:\ x=t+1,\ y=2t-1,\ z=3t$$

dookoła osi Oy.

Rozwiązanie. Poszukiwana powierzchnia utworzona jest przez okręgi K_P, gdzie P przebiega wszystkie punkty prostej L (rys. 16.15). Równanie okręgu K_P:

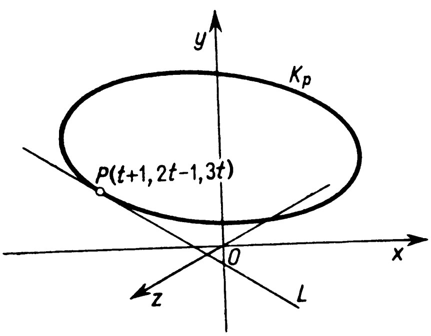
$$x^2+z^2=(t+1)^2+(3t)^2 \wedge y=2t-1.$$

Rugując parametr t z równań okręgu K_P, otrzymujemy równanie szukanej powierzchni

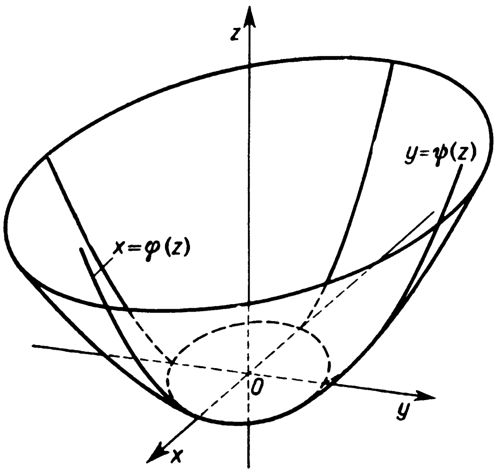
$$x^2+z^2=\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{2}+1\right)^2+9\left(\frac{y+1}{2}\right)^2,$$

tzn. równanie hiperboloidy jednopowłokowej

$$2x^2+2z^2-5(y+\tfrac{6}{5})^2=\tfrac{9}{5}.$$



Rys. 16.1



Rys. 16.16

16.6. Zagadnienie widowni stadionu. Dane są dwie krzywe

$$K_1:\ x=\varphi(z)\wedge y=0,\ 0\leqslant z\leqslant \alpha, \qquad K_2:\ y=\psi(z)\wedge x=0,\ 0\leqslant z\leqslant \alpha,$$

gdzie φ i ψ są funkcjami ciągłymi (o funkcjach mówić będziemy w rozdziale III). Znaleźć równanie powierzchni utworzonej przez elipsy leżące w płaszczyznach $z=z_0$ $(0\leqslant z_0\leqslant \alpha)$, których środki leżą na osi Oz, osie symetrii są równoległe do osi Ox i Oy oraz długości półosi są równe $|\varphi(z_0)|$ (na osi równoległej do Ox) i $|\psi(z_0)|$ (na osi równoległej do Oy) dla $0 \leqslant z_0 \leqslant \alpha$.

Rozwiązanie. Z określenia powierzchni (rys. 16.16) wynika, że jej równanie otrzymujemy, rugując parametr z_0 z układu równań

$$\frac{x^2}{\varphi^2(z_0)}+\frac{y^2}{\psi^2(z_0)}=1, \qquad z=z_0;$$

mianowicie

(a) $$\frac{x^2}{\varphi^2(z)}+\frac{y^2}{\psi^2(z)}=1.$$

Otrzymana powierzchnia na ogół (por. zadanie 16.40) nie jest powierzchnią stopnia drugiego, ma jednak np. tę samą własność co paraboloida eliptyczna. Otóż każdy jej przekrój poziomy (czyli płaszczyzną równoległą do płaszczyzny $z=0$) jest elipsą.

Dowolność wyboru krzywych K_1 i K_2 [1] umożliwia znalezienie powierzchni (kształtu widowni), która gwarantuje pewną optymalną widoczność z każdego miejsca.

16.7. Znaleźć równanie powierzchni walcowej o kierownicy

$$K: \; x^2+y^2=z \wedge x+y+2z=3$$

i tworzących równoległych do wektora $\mathbf{u}=(1, 1, 2)$.

Rozwiązanie. Powierzchnia utworzona jest przez zmienną prostą $L(P_0, \mathbf{u}_{||})$, gdzie $P_0(x_0, y_0, z_0)$ przebiega wszystkie punkty krzywej K. Stąd

(a) $$L(P_0, \mathbf{u}_{||}): \; \frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{1}=\frac{z-z_0}{2},$$

gdzie $Q(x, y, z)$ jest punktem bieżącym powierzchni, a $P_0(x_0, y_0, z_0) \in K$, tzn.

(a₁) $$x_0^2+y_0^2=z_0, \qquad x_0+y_0+2z_0=3.$$

Z układu (a), (a_1) należy wyrugować parametry x_0, y_0 i z_0. Otóż $y_0=y-x+x_0$, $z_0=z-2x+2x_0$, a więc

$$x_0=\tfrac{1}{6}(5x-y-2z+3), \quad y_0=\tfrac{1}{6}(-x+5y-2z+3), \quad z_0=\tfrac{1}{3}(-x-y+z+3),$$

skąd

$$(5x-y-2z+3)^2+(-x+5y-2z+3)^2=12(-x-y+z+3),$$

czyli poszukiwana powierzchnia walcowa jest powierzchnią stopnia drugiego.

---

[1] Na Stadionie Dziesięciolecia w Warszawie krzywe K_1 i K_2 dające optymalną widoczność są parabolami.

16.8. Znaleźć równania tworzących prostoliniowych hiperboloidy jednopowłokowej

(a) $$x^2+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{2}=1$$

przechodzących przez punkt $P_1(2, 1, \sqrt{\frac{13}{2}})$.

Rozwiązanie. W celu zastosowania wzorów (23) przekształcamy równanie (a):

$$\left(x+\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)=\left(1+\frac{y}{2}\right)\left(1-\frac{y}{2}\right),$$

zatem

(a₁) $$R_1: \quad \begin{aligned} &\alpha\left(x+\frac{z}{\sqrt{2}}\right)=\beta\left(1+\frac{y}{2}\right), \\ &\beta\left(x-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)=\alpha\left(1-\frac{y}{2}\right), \end{aligned}$$

(a₂) $$R_2: \quad \begin{aligned} &\alpha_1\left(x+\frac{z}{\sqrt{2}}\right)=\beta_1\left(1-\frac{y}{2}\right), \\ &\beta_1\left(x-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)=\alpha_1\left(1+\frac{y}{2}\right). \end{aligned}$$

Korzystając z warunku leżenia punktu P_1 na tworzącej, otrzymujemy

$$(2+\tfrac{1}{2}\sqrt{13})\alpha-\tfrac{3}{2}\beta=0 \quad \text{oraz} \quad (2+\tfrac{1}{2}\sqrt{13})\alpha_1-\tfrac{1}{2}\beta_1=0,$$

skąd

$$\alpha=\frac{3}{4+\sqrt{13}}\beta, \quad \alpha_1=\frac{1}{4+\sqrt{13}}\beta_1 \quad (^1).$$

Podstawiając znalezione wartości parametrów α i α_1 do równań (a₁) i (a₂), otrzymujemy

$$L_1: \quad \begin{aligned} &\frac{3}{4+\sqrt{13}}\beta\left(x+\frac{z}{\sqrt{2}}\right)=\beta\left(1+\frac{y}{2}\right), \\ &\beta\left(x-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3}{4+\sqrt{13}}\beta\left(1-\frac{y}{2}\right), \end{aligned}$$

$$L_2: \quad \begin{aligned} &\frac{1}{4+\sqrt{13}}\beta_1\left(x+\frac{z}{\sqrt{2}}\right)=\beta_1\left(1-\frac{y}{2}\right), \\ &\beta_1\left(x-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{4+\sqrt{13}}\beta_1\left(1+\frac{y}{2}\right), \end{aligned}$$

---

[1] Podstawiając współrzędne punktu P_1 do drugiego z równań (a₁) względnie (a₂), otrzymujemy te same rozwiązania.

tzn. (po podzieleniu równań prostej L_1 przez β i podzieleniu równań prostej L_2 przez β_1, gdzie $\beta \neq 0 \wedge \beta_1 \neq 0$, w przeciwnym bowiem przypadku $\alpha=0$ i $\alpha_1=0$, co przeczy warunkom $\alpha^2+\beta^2>0 \wedge \alpha_1^2+\beta_1^2>0$) poszukiwane tworzące są następujące:

$$L_1: \quad \frac{3}{4+\sqrt{13}}\left(x+\frac{z}{\sqrt{2}}\right)=1+\frac{y}{2}, \qquad x-\frac{z}{\sqrt{2}}=\frac{3}{4+\sqrt{13}}\left(1-\frac{y}{2}\right),$$

$$L_2: \quad \frac{1}{4+\sqrt{13}}\left(x+\frac{z}{\sqrt{2}}\right)=1-\frac{y}{2}, \qquad x-\frac{z}{\sqrt{2}}=\frac{1}{4+\sqrt{13}}\left(1+\frac{y}{2}\right).$$

16.9. Zagadnienie dachu. Dane są dwie proste

$$L_1: x=0,\ y=t,\ z=t; \qquad L_2: x=1,\ y=1+u,\ z=-u.$$

Znaleźć zbiór punktów prostych równoległych do płaszczyzny Oxz i przecinających jednocześnie proste L_1 i L_2.

Rozwiązanie. Znajdujemy najpierw dwuparametrową rodzinę prostych $L(u, t)$ przecinających proste L_1 i L_2. Otóż $P_1(0, t, t) \in L_1$, $P_2(1, 1+u, -u) \in L_2$, skąd

(a) $$L(u,t): x=k,\ y=t+(1+u-t)k,\ z=t-(u+t)k,$$

gdzie k jest parametrem zmiennej prostej $L(u, t)$. Z warunku $L(u, t) \| Oxz$ otrzymujemy,

(a₁) $$(\mathbf{j} \bullet \overline{P_1P_2}=0) \Leftrightarrow (1+u-t=0).$$

Równanie szukanej powierzchni otrzymujemy, rugując parametry t, u i k z układu czterech równań (a), (a₁). Kolejno otrzymujemy: $k=x$, $t=y$, $u=y-1$, skąd $z=y-(2y-1)x$, czyli

(a₂) $$2xy-x-y+z=0,$$

a więc powierzchnię stopnia drugiego. Stosując do równania (a₂) wzory $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x''+y'')$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x''+y'')$, $z=z''$ (por. zadanie 16.23), mamy

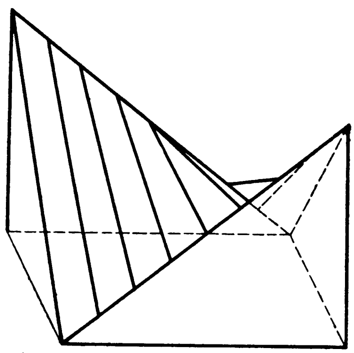
(a₃) $$\left(2\cdot\frac{1}{2}(y''^2-x''^2)-\frac{1}{\sqrt{2}}(x''+y'')-\frac{1}{\sqrt{2}}(-x''+y'')+z''=0\right) \Leftrightarrow (y'^2-x'^2=-z'),$$

gdzie

$$x'=x'', \quad y'=y''-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad z'=z''-\tfrac{1}{2},$$

tzn. paraboloidę hiperboliczną.

Uwaga. Weźmy na prostych L_1 i L_2 równe odcinki, np. A_1A_2 i B_1B_2, gdzie $A_1(0,0,0)\in L_1$, $A_2(0,1,1)\in L_1$, $B_1(1,0,1)\in L_2$, $B_2(1,1,0)\in L_2$ oraz podzielmy je punktami $A_i^*\in L_1$ i $B_i^*\in L_2$, $i=2,3,\ldots,n$, na n równych części rozpoczynając np. od punktów A_1 i B_1. Z kolei weźmy odcinki $A_i^*B_i^*$, $i=1,2,3,\ldots,n,n+1$, przy czym $A_1^*=A_1$, $B_1^*=B_1$, $A_{n+1}^*=A_2$, $B_{n+1}^*=B_2$. Ponieważ odcinek $A_i^*B_i^*\|Oxz$, więc otrzymany zbiór odcinków (pewna figura geometryczna przestrzenna) leży na paraboloidzie hiperbolicznej (a_3) (rys. 16.17). Powyższa konstrukcja geometryczna ma zastosowanie przy budowie dachów (np. dachu przystanku PKP przy stacji Warszawa – Ochota).



Rys. 16.17

16.10. Znaleźć zbiór punktów prostych przecinających parabole

$$K_1:\ y^2=2x\wedge z=0,\qquad K_2:\ z^2=-2x\wedge y=0,$$

i równoległych do płaszczyzny $y-z=0$.

Rozwiązanie. Znajdujemy zbiór prostych $L(y_0,z_0)$ przecinających parabole K_1 i K_2. Otóż $P_1(\frac{1}{2}y_0^2,\,y_0,\,0)\in K_1$, $P_2(-\frac{1}{2}z_0^2,\,0,\,z_0)\in K_2$, skąd

$$\text{(a)}\qquad L(y_0,z_0):\ x=-\tfrac{1}{2}z_0^2+\tfrac{1}{2}t(y_0^2+z_0^2),\ \ y=ty_0,\ \ z=z_0-tz_0,\ \ t\in\mathbf{R}.$$

Z warunku równoległości prostych $L(y_0,z_0)$ do płaszczyzny $y-z=0$ mamy

$$\text{(a}_1\text{)}\qquad y_0+z_0=0.$$

Równanie poszukiwanej powierzchni otrzymujemy rugując parametry y_0, z_0 i t z układu czterech równań (a), (a_1). Kolejno otrzymujemy: $y_0=-z_0$, $y=-tz_0$, $z=z_0+y$, $z_0=z-y$, skąd

$$\left(x=-\frac{1}{2}(z-y)^2+\frac{y}{-(z-y)}(z-y)^2\right)\Leftrightarrow(y^2-z^2=2x),$$

a więc równanie paraboloidy hiperbolicznej.

Zadania

16.11. Znaleźć warunki, przy których równanie

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$

jest równaniem sfery.

16.12. Znaleźć współrzędne środków i promienie sfer:
a) $x^2+y^2+z^2+2x-y-1=0$;
b) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$.

16.13. Wykazać, że następujące równania nie określają sfer:
a) $x^2+y^2+z^2-2x+y+11=0$;
b) $x^2+y^2+z^2+x+y+z+3=0$.

16.14. Znaleźć równanie sfery przechodzącej przez punkty $O(0, 0, 0)$, $P_1(2, 0, 0)$, $P_2(0, 5, 0)$ i $P_3(0, 0, 3)$.

16.15. Znaleźć przecięcia sfery $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+2=0$ z osiami i płaszczyznami układu.

16.16. Znaleźć równania płaszczyzn stycznych do sfery $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$ w punktach przecięcia jej z osią Oz.

16.17. Znaleźć równanie sfery o środku w punkcie $S(1, 4, -7)$ stycznej do płaszczyzny $6x+6y-7z+42=0$.

16.18. Znaleźć równania płaszczyzn stycznych do powierzchni sfery $(x-4)^2+y^2+(z-2)^2=225$ i równoległych do płaszczyzny $10x-11y-2z+3=0$.

16.19. Znaleźć warunek konieczny i dostateczny na to, by płaszczyzna $Ax+By+Cz+D=0$ była styczna do powierzchni sfery $x^2+y^2+z^2=R^2$.

16.20. Określić położenia płaszczyzn: a) $2x+3y-z+1=0$; b) $2y+\sqrt{21}z-23-3\sqrt{21}=0$; c) $x+2y+z+37=0$; względem sfery $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25$.

16.21. Znaleźć środek i promień okręgu

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=30 \wedge x+2y+5z-28=0.$$

16.22. Sprowadzić następujące równania do postaci kanonicznej:
a) $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z-1=0$; b) $x^2+2y^2+4z^2-4z=0$;
c) $4x^2-y^2-2z^2-16x+15=0$; d) $x^2+4y^2-z^2-10x-16y+6z+16=0$;
e) $2x^2-4y^2-6x+8y-z+1=0$; f) $x^2+2y^2-3z^2+2x+4y-6z=0$;
g) $x^2-4y^2=-2z+6$; h) $x^2+2y^2=2z+5$;
i) $z^2+4y^2-2z-3=0$; j) $z^2=2y+3+z$
oraz: α) znaleźć ich punkty przecięcia z osiami układu; β) znaleźć krzywe przecięcia z płaszczyznami układu.

16.23. Znaleźć równanie powierzchni $z=x^2-y^2$ w układzie $O'x'y'z'$, gdzie

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y'), \quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x'+y'), \quad z=z' \tag{a}$$

oraz podać interpretację geometryczną wzorów (a).

16.24. Znaleźć równania rzutów na płaszczyznach układu następujących krzywych:

a) $\begin{matrix} x^2+y^2=z^2, \\ x^2+y^2=4z; \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} x^2+y^2=z^2, \\ (x-3)^2+y^2=1; \end{matrix}$

c) $\begin{matrix} x^2+y^2=z, \\ x^2+y^2=(z-1)^2; \end{matrix}$ d) $\begin{matrix} x^2+y^2=a^2, \\ x^2+z^2=a^2; \end{matrix}$

e) $\begin{aligned} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x^2+y^2=a^2, \end{aligned}$ $(a<R)$; f) $\begin{aligned} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ \left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2=\frac{R^2}{4}; \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} y=\sqrt{x}, \\ x+z=4; \end{aligned}$ h) $\begin{aligned} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x^2+y^2=R(R-2z); \end{aligned}$ i) $\begin{aligned} x^2+y^2=z^2, \\ x^2+y^2=a^2. \end{aligned}$

16.25. Dane są powierzchnie o równaniach:

α_1) $z=x^2+y^2$, α_2) $x^2+y^2=x$, α_3) $x^2+y^2=2x$, α_4) $z=0$.

Znaleźć równania rzutów krzywych przenikania wszystkich par tych powierzchni na płaszczyznach układu.

16.26. Wykazać, że linią przenikania elipsoidy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ i sfery $x^2+y^2+z^2=b^2$ $(a<b<c)$ jest para okręgów.

16.27. Określić położenia punktów względem powierzchni:
a) $P_1(1, 5, 3)$, $P_2(4, -1, 2)$; $x^2-2y^2=2$;
b) $P_1(7, 1, 5)$, $P_2(-1, 6, 3)$; $z=2x^2$;
c) $P_1(3, 0, 4)$, $P_2(3, 5, 0)$, $P_3(3, 4, 4)$; $x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-45=0$;
d) $P_1(1, 1, 2)$, $P_2(-\frac{1}{4}, 1, 3)$, $P_3(0, 1, -\frac{3}{2}\sqrt{2})$; $x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{9}=1$;
e) $P_1(1, 1, -5)$, $P_2(3, 2, 1)$, $P_3(1, 3, -3)$; $x^2+y^2-z^2=1$;
f) $P_1(1, 1, 6)$, $P_2(-6, 1, 1)$; $2x^2+y^2=4z$;
g) $P_1(1, 1, 3)$, $P_2(-1, 2, -6)$, $P_3(2, 0, 2)$; $\frac{x^2}{2}-y^2=z$;
h) $P_1(3, 1, 5)$, $P_2(1, 2, -1)$; $x^2-y^2=-4z$.

16.28. Zapisać za pomocą nierówności, w których występują zmienne x, y i z zbiór punktów ograniczony czterema powierzchniami danymi w zadaniu 16.25.

16.29. Zapisać za pomocą nierówności, w których występują zmienne x, y i z zbiory (ograniczone) punktów ograniczone powierzchniami:
a) $x=0$, $x=1$, $y=-2$, $y=1$, $z=-3$, $z=4$;
b) $x=0$, $x=4$, $y=0$, $y=4$, $z=0$, $z=x^2+y^2+1$;
c) płaszczyznami układu współrzędnych i płaszczyzną $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $a>0$, $b>0$, $c>0$;
d) $z=x^2+y^2$, $z=0$, $y=1$, $y=2x$, $y=6-x$;
e) $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $z=0$, $x+z=6$;
f) $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=y^2$, $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=-2y$.

16.30. Znaleźć punkty przecięcia prostych z powierzchniami:

a) $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-4}{-6}=\dfrac{z+2}{4}$, $\quad \dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{9}=1$;

b) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{-2}$, $\quad \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{3}=z$;

c) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$, $\quad \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=z$.

16.31. Znaleźć zbiór punktów równo oddalonych od osi Ox i od osi Oy.

16.32. Znaleźć zbiór punktów równo oddalonych od punktu $F(0, 0, a)$ i od płaszczyzny $z=2a$.

16.33. Znaleźć zbiór punktów, dla których stosunek odległości od punktu $F(0, -6a, 0)$ do odległości od płaszczyzny $y=2a$ jest równy 2, $a\neq 0$.

16.34. Znaleźć zbiór punktów, dla których stosunek odległości od punktu $F(2, 0, 0)$ do odległości od płaszczyzny $x=-6$ jest równy $\frac{1}{2}$.

15.35. Znaleźć równanie powierzchni powstałej przez obrót dookoła osi Oz krzywej

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \wedge y=0.$$

16.36. Znaleźć równanie powierzchni powstałej przez obrót dookoła osi Oz prostej

$$L:\ x=t+1,\ y=2t,\ z=3t.$$

16.37. Znaleźć równanie powierzchni powstałej przez obrót dookoła osi Oy krzywej

$$y^2-\frac{z^2}{4}=1 \wedge x=0.$$

16.38. Znaleźć równanie powierzchni powstałej przez obrót dookoła osi Ox prostej

$$L:\ x=t-1,\ y=2t+3,\ z=3t-2.$$

16.39. Znaleźć równanie powierzchni powstałej przez obrót dookoła osi Oy prostej

$$L: 2x-y=0,\ x+z-1=0.$$

16.40. Znaleźć równanie powierzchni (a) (por. przykład 16.6), jeżeli:

a) $K_1:\ \begin{matrix} x=az+b, \\ y=0, \end{matrix} \quad K_2:\ \begin{matrix} y=az+b, \\ x=0, \end{matrix} \quad a\neq 0;$

b) $K_1:\ \begin{matrix} z=x^2, \\ y=0, \end{matrix} \quad K_2:\ \begin{matrix} z=y^2, \\ x=0; \end{matrix}$

c) $K_1: \begin{matrix} z=2px^2, \\ y=0, \end{matrix}$ $K_2: \begin{matrix} z=2qy^2 \\ x=0 \end{matrix}$ $(pq>0)$;

d) $K_1: \begin{matrix} z=ax^2+b, \\ y=0, \end{matrix}$ $K_2: \begin{matrix} z=a_1y^2+b \\ x=0 \end{matrix}$ $(a>0, a_1>0, b>0)$;

e) $K_1: \begin{matrix} ax^2-z^2=1, \\ y=0, \end{matrix}$ $K_2: \begin{matrix} by^2-z^2=1 \\ x=0 \end{matrix}$ $(a>0, b>0)$.

16.41. Znaleźć równanie powierzchni stożkowej:

a) o kierownicy

$$x^2+y^2+(z-5)^2=9 \wedge z=4$$

i wierzchołku $O(0, 0, 0)$;

b) kierownicy

$$3x^2+6y^2-z=0 \wedge x+y+z=1$$

i wierzchołku $W(-3, 0, 0)$.

16.42. Znałeźć zbiór punktów prostych tworzących z płaszczyzną Oxy kąt $\alpha=\frac{1}{4}\pi$ i przechodzących przez punkt $A(1, 0, 0)$.

16.43. Znaleźć równanie stożka obrotowego o wierzchołku $W(1, 2, 3)$, którego oś jest równoległa do wektora $\mathbf{u}=(2, 2, -1)$ i którego tworzące tworzą z tą osią kąt $\alpha=\frac{1}{6}\pi$.

16.44. Znaleźć równanie stożka o wierzchołku $W(5, 0, 0)$ opisanego na sferze x^2+y^2+ $+z^2=1$.

16.45. Znaleźć równanie powierzchni stożkowej o wierzchołku w punkcie $W(a, b, c)$ opisanej na sferze

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=r^2 \tag{a}$$

(punkt W jest punktem zewnętrznym sfery, czyli $(a-a_1)^2+(b-b_1)^2+(c-c_1)^2>r^2$).

16.46. Znaleźć równanie stożka opisanego na sferach $(x-10)^2+y^2+z^2=36$ i $(x+5)^2+$ $+y^2+z^2=9$.

16.47. Znaleźć równania powierzchni walcowych:

a) o kierownicy

$$x^2+y^2=25 \wedge z=0$$

i tworzących równoległych do wektora $\mathbf{u}=(5, 2, 3)$;

b) o kierownicy

$$y^2+z^2=x \wedge z=2x$$

i tworzących równoległych do wektora $\mathbf{u}=(1, 0, -2)$.

16.48. Znaleźć równanie powierzchni walca obrotowego opisanego na sferach

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=36 \quad \text{i} \quad x^2+y^2+z^2=36.$$

16.49. Znaleźć równanie powierzchni walca obrotowego mając dane trzy jego tworzące:

$$L_1: x=y=z, \quad L_2: x+1=y=z-1, \quad L_3: x-1=y+1=z-2.$$

16.50. Znaleźć równania tworzących prostoliniowych:

a) powierzchni $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$, przechodzących przez punkt $A(6, 2, 8)$;

b) powierzchni $x^2-4y^2=z$, przechodzących przez punkt $B(1, 3, -35)$;

c) powierzchni $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$, równoległych do płaszczyzny $3x+2y-4z=0$;

d) powierzchni $x^2-4y^2=2z$, prostopadłych do wektora $\mathbf{u}=(1, 2, 4)$.

16.51. Dana jest hiperboloida jednopowłokowa $x^2+y^2-z^2=1$. Znaleźć: a) wszystkie pary prostych prostopadłych rodziny R_1 (wzory (23)); b) wszystkie pary prostych prostopadłych hiperboloidy, przy czym jedna prosta pary należy do jednej rodziny, a druga do drugiej; c) proste rodziny R_1 prostopadłe do prostej tej samej rodziny przechodzącej przez punkt $P_1(1, 3, 3)$; d) proste rodziny R_1 prostopadłe do prostej rodziny R_2 przechodzącej przez punkt $P_1(1, 3, 3)$.

16.52. Na paraboloidzie $x^2-y^2=2z$ znaleźć zbiór punktów przecięcia par prostopadłych tworzących.

16.53. Znaleźć równanie powierzchni powstałej przez ślizganie prostej po prostych: L_1: $x-y-z=0$, $y-z-1=0$; L_2: $x+y+z=0$, $y-z+1=0$; L_3: $2x+y+z=0$, $2y-2z+1=0$, równoległych do jednej płaszczyzny.

16.54. Znaleźć równanie powierzchni powstałej przez ślizganie prostej po prostych:

$$L_1: x=\tfrac{1}{2}, y=t, z=t; \quad L_2: x=\tfrac{1}{2}t, y=-1, z=t; \quad L: x=-\tfrac{1}{2}t, y=1, z=t,$$

nierównoległych do jednej płaszczyzny.

16.55. Znaleźć zbiór punktów prostych L ślizgających się po trzech danych prostych parami skośnych:

$$L_1: \begin{matrix} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0, \end{matrix} \qquad L_2: \begin{matrix} a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0, \\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0, \end{matrix}$$

$$L_3: \mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{u}, \quad t\in\mathbf{R}.$$

16.56. Dane są parabole

$$K_1: \begin{matrix} x^2=z-1, \\ y=0, \end{matrix} \qquad K_2: \begin{matrix} y^2=-z+1, \\ x=0. \end{matrix}$$

Znaleźć równanie powierzchni utworzonej przez parabolę K_2, poruszającą się w taki sposób, że jej wierzchołek porusza się po paraboli K_1, jej oś jest zawsze równoległa do osi Oz oraz płaszczyzna, na której leży, jest zawsze równoległa do płaszczyzny Oyz.

16.57. Dane są dwie proste: L_1: $x=1$, $y=1-t$, $z=t$; L_2: $x=-1$, $y=u$, $z=u$. Znaleźć zbiór punktów prostych równoległych do płaszczyzny Oxz i przecinających jednocześnie proste L_1 i L_2.

16.58. Znaleźć zbiór punktów równo oddalonych od prostych L_1: $x=1$, $y=t$, $z=-t$ i L_2: $x=-1$, $y=u$, $z=u$.

16.59. Znaleźć zbiór punktów równo oddalonych od płaszczyzny H: $Ax+By+Cz+D=0$ i od prostej L: $x=x_0+\alpha t$, $y=y_0+\beta t$, $z=z_0+\gamma t$ nie leżącej na płaszczyźnie H.

16.60. Znaleźć zbiór punktów równo oddalonych od płaszczyzny $z=0$ i od prostej L: $x=1$, $y=0$, $z=t$.

Odpowiedzi

16.11. $A^2+B^2+C^2-4D>0$.

16.12. a) $S(-1, \frac{1}{2}, 0)$, $r=\frac{3}{2}$; b) $S(1, -2, 3)$, $r=4$.

16.14. $(x-1)^2+(y-\frac{5}{2})^2+(z-\frac{3}{2})^2=\frac{19}{2}$.

16.15. Z Ox: zbiór pusty; z Oy: zbiór pusty; z Oz: $P_{1,2}(0, 0, 2\mp\sqrt{2})$; z Oxy: punkt $P_3(1, -1, 0)$; z Oxz: okrąg $(x-1)^2+(z-2)^2=3, y=0$; z Oyz: okrąg $(y+1)^2+(z-2)^2=3$, $x=0$.

16.16. $x-2y+2z+2=0$, $x-2y-2z+6=0$. **16.17.** $(x-1)^2+(y-4)^2+(z+7)^2=121$.

16.18. $10x-11y-2z+189=0$, $10x-11y-2z-261=0$.

16.19. $R\sqrt{A^2+B^2+C^2}=|D|$.

16.20. a) Przecina; b) jest styczna; c) nie przecina.

16.21. $S(\frac{3}{2}, 2, \frac{9}{2})$, $r=3\sqrt{\frac{5}{2}}$.

16.22. a) $x'^2+y'^2+z'^2=15$, gdzie $x'=x-2$, $y'=y+1$, $z'=z-3$; $P_{1,2}(2\mp\sqrt{5}, 0, 0)$, $P_{3,4}(0, -1\mp\sqrt{2}, 0)$, $P_{5,6}(0, 0, 3\mp\sqrt{10})$; $(x-2)^2+(y+1)^2=6$, $(x-2)^2+(z-3)^2=14$, $(y+1)^2+(z-3)^2=11$;

b) $x'^2+2y'^2+4z'^2=1$, gdzie $x'=x, y'=y, z'=z-\frac{1}{2}$; $O(0, 0, 0)$, $P(0, 0, 1)$; z Oxy: punkt $O(0,0,0)$; $x^2+4(z-\frac{1}{2})^2=1$; $2y^2+4(z-\frac{1}{2})^2=1$;

c) $4x'^2-y'^2-2z'^2=1$, gdzie $x'=x-2$, $y'=y$, $z'=z$; $P_1(\frac{3}{2}, 0, 0)$, $P_2(\frac{5}{2}, 0, 0)$, $P_{3,4}(0, \mp\sqrt{15}, 0)$, $P_{5,6}(0, 0, \mp\frac{1}{2}\sqrt{15})$; $4(x-2)^2-y^2=1$, $4(x-2)^2-2z^2=1$, $y^2+2z^2=15$;

d) $\frac{1}{16}x'^2+\frac{1}{4}y'^2-\frac{1}{16}z'^2=1$, gdzie $x'=x-5$, $y'=y-2$, $z'=z-3$; $P_1(2, 0, 0)$, $P_2(8, 0, 0)$, $P_3(0, 2, 0)$, $P_4(0, 0, -2)$, $P_5(0, 0, 8)$; $(x-5)^2+4(y-2)^2=25$; $(x-5)^2-(z-3)^2=0$, $4(y-2)^2-(z-3)^2=-9$;

e) $z'=2x'^2-4y'^2$, gdzie $x'=x-\frac{3}{2}, y'=y-1, z'=z-\frac{1}{2}$; $P_{1,2}(\frac{3}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{7}, 0, 0)$, $P_{3,4}(0, 1\mp\frac{1}{2}\sqrt{5}, 0)$, $P_5(0, 0, 1)$; $2(x-\frac{3}{2})^2-4(y-1)^2=-\frac{1}{2}$, $2(x-\frac{3}{2})^2=z+\frac{7}{2}$, $(y-1)^2=-\frac{1}{4}z+\frac{5}{4}$;

f) $x'^2+2y'^2-3z'^2=0$, gdzie $x'=x+1, y'=y+1, z'=z+1$; $O(0, 0, 0)$, $P_1(-2, 0, 0)$, $P_2(0, -2, 0)$, $P_3(0, 0, -2)$; $(x+1)^2+2(y+1)^2=3$; $(x+1)^2-3(z+1)^2=-2$, $2(y+1)^2-3(z+1)^2=-1$;

g) $x'^2-4y'^2=-2z'$, gdzie $x'=x$, $y'=y$, $z'=z-3$; $P_{1,2}(\mp\sqrt{6}, 0, 0)$, $P_3(0, 0, 3)$; $x^2-4y^2=6$, $x^2=-2z+6$, $y^2=\frac{1}{2}z-\frac{3}{2}$;

h) $x'^2+2y'^2=2z'$, gdzie $x'=x$, $y'=y$, $z'=z+\frac{5}{2}$; $P_{1,2}(\mp\sqrt{5}, 0, 0)$, $P_{3,4}(0, \mp\sqrt{\frac{5}{2}}, 0)$, $P_5(0, 0, -\frac{5}{2})$; $x^2+2y^2=5$, $x^2=2z+5$, $y^2=z+\frac{5}{2}$;

i) $z'^2+4y'^2=4$, gdzie $x'=x$, $y'=y$, $z'=z-1$; $P_{1,2}(0, \mp\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0)$, $P_3(0, 0, -1)$, $P_4(0, 0, 3)$; $y=\mp\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $z=0$; $z=-1$, $y=0$; $z=3$, $y=0$; $z^2+4y^2-2z-3=0$;

j) $z'^2=2y'$, gdzie $x'=x$, $y'=y+\frac{13}{8}$, $z'=z-\frac{1}{2}$; $P_1(0,\,-\frac{3}{2},\,0)$, $P_{2,3}\left(0,\,0,\,\frac{1}{2}(1\mp\sqrt{13})\right)$; $y=-\frac{3}{2}$, $z=0$, $z=\frac{1}{2}(1\mp\sqrt{13})$, $y=0$, $(z-\frac{1}{2})^2=2(y+\frac{13}{8})$.

16.23. $z'=2x'y'$; wzory (a) wyrażają związki między współrzędnymi tego samego punktu w układzie $Oxyz$ i w układzie $Ox'y'z'$ otrzymanym z układu $Oxyz$ przez obrót osi Ox i Oy dookoła osi Oz o kąt $-\frac{1}{4}\pi$.

16.24. a) $(x^2+y^2)(16-x^2-y^2)=0$, tzn. punkt $O(0,0,0)$ i okrąg $x^2+y^2=16$, $z(z-4)=0$ dla $|x|\leqslant 2$, $z(z-4)=0$ dla $|y|\leqslant 2$;

b) $(x-3)^2+y^2=1$, $z^2=6(x-\frac{4}{3})$ dla $2\leqslant x\leqslant 4$, $y^2=z^2-\frac{1}{36}(z^2+8)^2$ (krzywa płaska stopnia czwartego);

c) $[x^2+y^2-(\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1))^2]\,[x^2+y^2-(\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1))^2]=0$, tzn. dwa okręgi; $z=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$ dla $-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ i $z=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$ dla $-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$; $z=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$ dla $-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ i $z=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$ dla $-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$;

d) $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$, $y=\mp z$ dla $|z|\leqslant a$;

e) $x^2+y^2=a^2$, $z=\mp\sqrt{R^2-a^2}$ dla $|x|\leqslant a$, $z=\mp\sqrt{R^2-a^2}$ dla $|y|\leqslant a$;

f) $(x-\frac{1}{2}R)^2+y^2=\frac{1}{4}R^2$, $z^2=-R(x-R)$ dla $0\leqslant x\leqslant R$, $R^2(\frac{1}{4}R^2-y^2)=(\frac{1}{2}R^2-z^2)^2$ (krzywa płaska stopnia czwartego);

g) $y=\sqrt{x}$; $x+z=4$, $y=\sqrt{4-z}$;

h) $x^2+y^2=R^2$, $z=0$ dla $|x|\leqslant R$, $z=0$ dla $|y|\leqslant R$;

i) $x^2+y^2=a^2$, $z=a$ dla $|x|\leqslant a$, $z=a$ dla $|y|\leqslant a$.

16.25. Rzuty krzywych przenikania:

α_1) z α_2) $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$, $x=z$ dla $0\leqslant x\leqslant 1$, $y^2+(z-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$;

α_1) z α_3) $(x-1)^2+y^2=1$, $z=2x$ dla $0\leqslant x\leqslant 2$, $\frac{1}{4}(z-2)^2+y^2=1$;

α_1) z α_4) punkt $O(0,0)$; α_2) z α_3) $O(0,0)$, $x=0$ i z dowolne, $y=0$ i z dowolne;

α_2) z α_4) $x^2+y^2=x$, $z=0$ dla $0\leqslant x\leqslant 1$, $z=0$ dla $|y|\leqslant\frac{1}{2}$;

α_3) z α_4) $x^2+y^2=2x$, $z=0$ dla $0\leqslant x\leqslant 2$, $z=0$ dla $|y|\leqslant 1$.

16.26. Wsk. Znaleźć równanie rzutu krzywej przenikania na płaszczyznę Oxz.

16.27. a) P_1 — zewnętrzny, P_2 — wewnętrzny;

b) P_1 — zewnętrzny, P_2 — wewnętrzny;

c) P_2 — zewnętrzny, P_1 i P_3 — wewnętrzne;

d) P_1 i P_2 — zewnętrzne, P_3 — leży na powierzchni;

e) P_2 — wewnętrzny, P_1 — zewnętrzny, P_3 — leży na powierzchni;

f) P_1 — wewnętrzny, P_2 — zewnętrzny;

g) P_1 leży powyżej powierzchni, P_2 leży poniżej powierzchni, P_3 leży na powierzchni;

h) P_2 leży poniżej powierzchni, P_1 leży powyżej powierzchni.

16.28. $\sqrt{x-x^2}<y<\sqrt{2x-x^2}$ albo $-\sqrt{2x-x^2}<y<-\sqrt{x-x^2}$ dla $0<x<1$ oraz $0<z<x^2+y^2$; $-\sqrt{2x-x^2}<y<\sqrt{2x-x^2}$ dla $1<x<2$ oraz $0<z<x^2+y^2$.

16.29. a) $0<x<1$, $-2<y<1$, $-3<z<4$;

b) $0<x<4$, $0<y<4$, $0<z<x^2+y^2+1$;

c) $0<x<a$, $0<y<b\left(1-\dfrac{x}{a}\right)$, $0<z<c\left(1-\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)$;

d) $1<y<4$, $\frac{1}{2}y<x<6-y$, $0<z<x^2+y^2$;

e) $0<x<6,\ \sqrt{x}<y<2\sqrt{x},\ 0<z<6-x$;

f) $-4<x<4,\ -\frac{3}{2}\sqrt{16-x^2}<z<\frac{3}{2}\sqrt{16-x^2},\ -\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}}<y<-\frac{x^2}{8}-\frac{z^2}{18}$.

16.30. a) $P_1(3,4,-2)$, $P_2(6,-2,2)$; b) nie istnieją; c) prosta leży na powierzchni.

16.31. $x\pm y=0$.

16.32. Paraboloida obrotowa $x^2+y^2=-2a(z-\frac{3}{2}a)$.

16.33. Hiperboloida dwupowłokowa $3(y-\frac{14}{3}a)^2-x^2-z^2=\frac{256}{3}a^2$.

16.34. Elipsoida obrotowa $3(x-\frac{14}{3})^2+4y^2+4z^2=\frac{256}{3}$.

16.35. $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

16.36. $\frac{5}{4}x^2+\frac{5}{4}y^2-\frac{25}{36}(z+\frac{5}{3})^2=1$.

16.37. $y^2-\frac{1}{4}(x^2+z^2)=1$.

16.38. $y^2+z^2-13(x+1)^2=13$.

16.39. $2x^2-y^2+2z^2+2y-2=0$.

16.40. a) Stożek obrotowy $x^2+y^2=(az+b)^2$;
b) paraboloida obrotowa $x^2+y^2=z$;
c) paraboloida eliptyczna $2px^2+2qy^2=z$;
d) paraboloida eliptyczna $ax^2+a_1y^2=z-b$;
e) hiperboloida jednopowłokowa $ax^2+by^2-z^2=1$.

16.41. a) $2x^2+2y^2-z^2=0$;
b) $3x^2+123y^2+23z^2-18xy-22xz+50yz+18x-54y-66z+27=0$.

16.42. Stożek $(x-1)^2+y^2=z^2$.

16.43. $27[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2]=4(2x+2y-z-3)^2$.

16.44. $24(y^2+z^2)=(x-5)^2$.

16.45. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\frac{1}{d^2}[(a_1-a)(x-a)+(b_1-b)(y-b)+(c_1-c)(z-c)]^2$.

16.46. $24(y^2+z^2)=(x+20)^2$ i $16(y^2+z^2)=9x^2$.

16.47. a) $(x-\frac{5}{3}z)^2+(y-\frac{2}{3}z)^2=25$; b) $(2x+z)^2+4y^2=z+2x$.

16.48. $(8x-2y+2z)^2+(-2x+5y+4z)^2+(2x+4y+5z)^2=2916$.

16.49. $(5x-5y-3)^2+(5x-5z+5)^2+(5y-5z+8)^2=98$.

16.50. a) L_1: $x=3t,\ y=2,\ z=4t$; L_2: $x=6+9t,\ y=2+8t,\ z=8+20t$;
b) L_1: $7x-14y-z=0,\ x+2y-7=0$; L_2: $x-2y+5=0,\ 5x+10y+z=0$;
c) L_1: $\frac{1}{2}(x-2)=-(y-1)=z$; L_2: $\frac{1}{2}(x-4)=y+2=\frac{1}{2}z$;
d) L_1: $x+2y+4z=0,\ 2x-4y+1=0$; L_2: $z=0,\ x+2y=0$.

16.51. a) Pary $[(L_1), (L_2)]$, gdzie

$$(L_1):\ \begin{matrix}\alpha(x+z)=\beta(1+y),\\ \beta(x-z)=\alpha(1-y),\end{matrix}\qquad (L_2):\ \begin{matrix}\alpha_1(x+z)=\beta_1(1+y),\\ \beta_1(x-z)=\alpha_1(1-y),\end{matrix}$$

przy czym α, β, α_1, β_1 $(\alpha^2+\beta^2>0,\ \alpha_1^2+\beta_1^2>0)$ spełniają warunek $\alpha\alpha_1=-\beta\beta_1$;
b) pary $[(L_1), (L_2)]$, gdzie

$$(L_1):\ \begin{matrix}\alpha(x+z)=\beta(1+y)\\ \beta(x-z)=\alpha(1-y),\end{matrix}\qquad (L_2):\ \begin{matrix}\alpha_1(x+z)=\beta_1(1-y),\\ \beta_1(x-z)=\alpha_1(1+y),\end{matrix}$$

przy czym α, β, α_1, β_1 $(\alpha^2+\beta^2>0,\ \alpha_1^2+\beta_1^2>0)$ spełniają warunek $\alpha\alpha_1=\beta\beta_1$;

c) $\begin{matrix} x+y+z+1=0, \\ x-y-z+1=0; \end{matrix}$ d) $\begin{matrix} 2x+y+2z+1=0, \\ x-2y-z+2=0. \end{matrix}$

16.52. Por. zadanie 16.51. Dwie proste L_1: $x-y=0$, $z=0$ i L_2: $x+y=0$, $z=0$.

16.53. Paraboloida hiperboliczna $y^2-z^2-x=0$.

16.54. Hiperboloida jednopowłokowa $4x^2+4y^2-z^2-1=0$.

16.55. $((\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{u})H_1-(\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u})H_2)\cdot(H_3((\mathbf{u}_4 \bullet \mathbf{r}_0)+d_4)-H_4((\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{r}_0)+d_3))-((\mathbf{u}_4 \bullet \mathbf{u})H_3-$ $-(\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{u})H_4)\cdot(H_1((\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{u}_0)+d_2)-H_2((\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{r}_0)+d_1))=0$, gdzie $H_i \equiv a_i x+b_i y+c_i z+d_i$, H_i^*: $H_i=0$, $\mathbf{u}_i=(a_i, b_i, c_i) \perp H_i^*$, $i=1,2,3,4$.

Uwaga 1. Można wykazać, że otrzymane równanie określa hiperboloidę jednopowłokową, jeżeli proste L_i, $i=1,2,3$, nie są równoległe do tej samej płaszczyzny oraz paraboloidę hiperboliczną w przypadku przeciwnym.

Uwaga 2. Korzystając z wyniku zadania 16.55 można podać konstrukcję prostych przecinających jednocześnie cztery dane proste L_i, $i=1,2,3,4$ (por. przykład 12.11). Otóż trzy z danych prostych L_i wyznaczają powierzchnię prostokreślną F stopnia drugiego, przy czym proste L_i, $i=1,2,3$, należą do jednej z rodzin tworzących prostoliniowych powierzchni F, np. do R_1. Czwarta prosta L_4 przecina powierzchnię F w przypadku ogólnym w dwóch punktach P_1 i P_2. Proste rodziny R_2 przechodzące przez punkty P_1 i P_2 przecinają proste L_i, $i=1,2,3,4$. Jeżeli prosta L_4 należy do rodziny R_1, to istnieje nieskończenie wiele prostych przecinających proste L_i, $i=1,2,3,4$; mianowicie cała rodzina R_2 (por. zadanie 12.66).

16.56. $x^2-y^2=z-1$.

16.57. $x'^2-y'^2=2z'$, gdzie $x'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)+\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $y'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $z'=z-\frac{1}{2}$.

16.58. $y'^2-z'^2=-4x'$, gdzie $x'=x$, $y'=\frac{1}{\sqrt{2}}(y-z)$, $z'=\frac{1}{\sqrt{2}}(y+z)$.

16.59. Powierzchnia stopnia drugiego $(\gamma y-\beta z+\beta z_0-\gamma y_0)^2+(\alpha z-\gamma x+\gamma x_0-\alpha z_0)^2+$ $+(\beta x-\alpha y+\alpha y_0-\beta x_0)^2=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{A^2+B^2+C^2}(Ax+By+Cz+D)^2$.

16.60. Stożek $(x-1)^2+y^2=z^2$.

SPIS RZECZY

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Wydanie jedenaste, dodruk
Arkuszy drukarskich 17,5
Druk ukończono w listopadzie 2001 r.
Druk i oprawa: Rzeszowskie Zakłady Graficzne SA
Rzeszów, ul. płk. L. Lisa-Kuli 19.
Zam. 3109/2001.