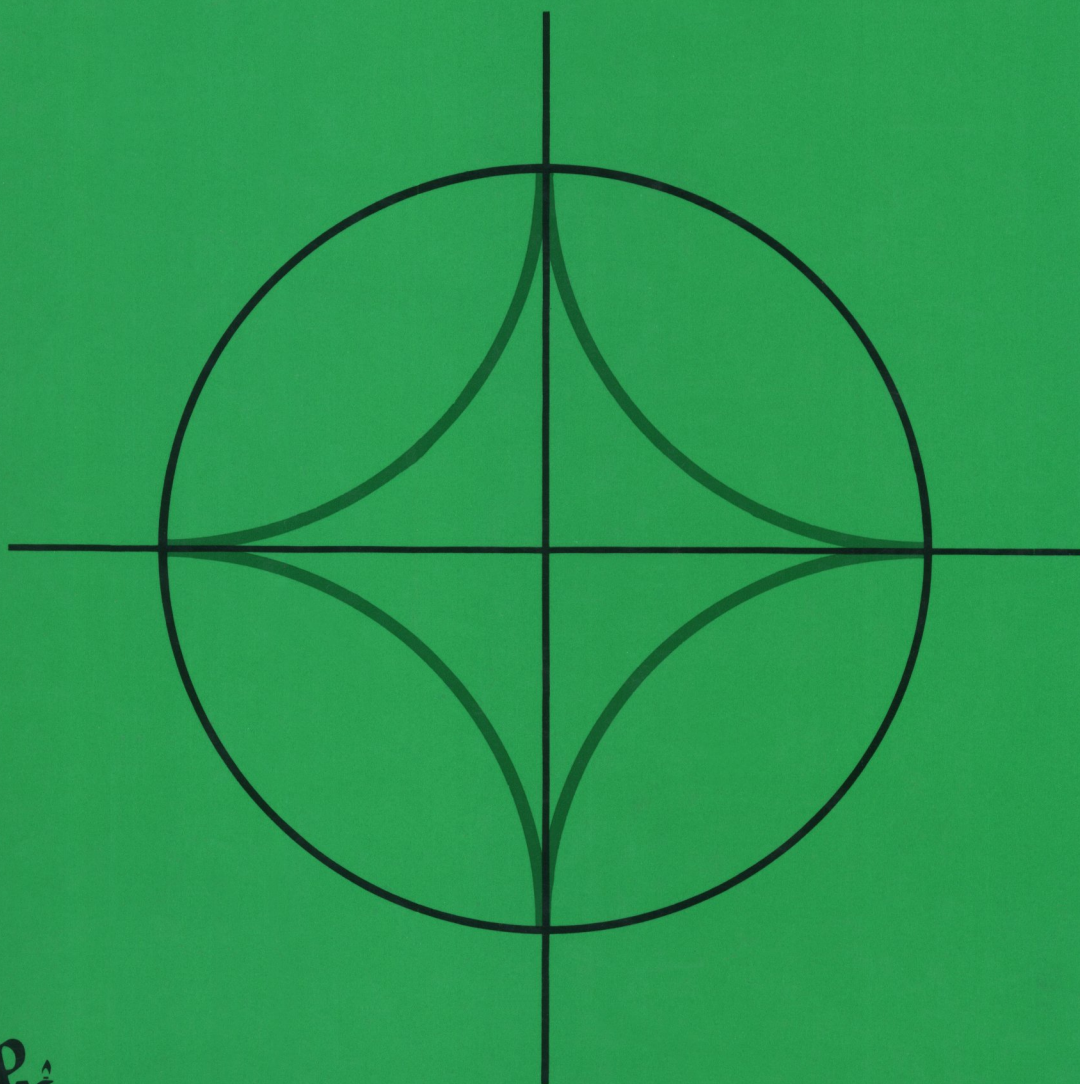


W. Stankiewicz
ZADANIA Z MATEMATYKI
DLA
WYŻSZYCH UCZELNI
TECHNICZNYCH

część B



ISBN 83-01-00660-9



9 788301 006600

**ZADANIA Z MATEMATYKI
DLA
WYŻSZYCH UCZELNI
TECHNICZNYCH**

część B

W. Stankiewicz
ZADANIA Z MATEMATYKI
DLA
WYŻSZYCH UCZELNI
TECHNICZNYCH **część B**

Wydanie jedenaste



WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 2001

Okladkę projektowała *Romana Freudenreich*

© Copyright by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1971, 1980

Copyright ©
by Wydawnictwo Naukowe PWN Sp. z o.o.
Warszawa 1995

Copyright © by
Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Warszawa 1998

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
ul. Miodowa 10, 00-251 Warszawa
Tel.: 69 54 321, e-mail: pwn@pwn.com.pl
www.pwn.com.pl

ISBN 83-01-00660-9

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Wydanie jedenaste, dodruk
Arkuszy drukarskich 29,25
Druk ukończono w listopadzie 2001 r.
Druk i oprawa: Rzeszowskie Zakłady Graficzne SA
Rzeszów, ul. płk. L. Lisa-Kuli 19.
Zam. 3109/2001.

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

§ 17. WSTĘPNE WIADOMOŚCI O FUNKCJACH

17.1. Niech $f: \mathbf{R} \supset X \rightarrow \mathbf{R}$. Przypominamy definicje:

1° wykresem funkcji f nazywamy zbiór $W = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset \mathbf{R}^2$ (W jest na ogół pewną krzywą na \mathbf{R}^2);

2° (f rosnąca [malejąca] na X) \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) [f(x_1) > f(x_2)]);$$

3° (f niemalejąca [nierosnąca] na X) \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) [f(x_1) \geq f(x_2)]);$$

4° (f ograniczona na X) $\Leftrightarrow \bigvee_{M \in \mathbf{R}} \bigwedge_{x \in X} (|f(x)| \leq M)$;

5° (f nieograniczona na X) $\Leftrightarrow \sim (f$ ograniczona na $X)$;

6° (f okresowa na X) $\Leftrightarrow \bigvee_{w \in \mathbf{R} - \{0\}} \bigwedge_{x \in X} ((x+w) \in X \wedge f(x+w) = f(x))$.

Wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a $W: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ spełniającym warunki $W(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, gdzie liczby $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ i y_0, y_1, \dots, y_n są dane, nazywamy wielomian określony wzorem

$$(1) \quad W(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots \\ \dots + y_{n-1} \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{n-2})(x-x_n)}{(x_{n-1}-x_0)\dots(x_{n-1}-x_{n-2})(x_{n-1}-x_n)} + y_n \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\dots(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})}.$$

T₁. Wielomian g_m określony wzorem

$$g_m(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j, \quad x \in \mathbf{R}$$

można zawsze przedstawić w postaci

$$(2) \quad g_m(x) = b_m(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{w_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{w_s},$$

gdzie $k_i, w_j \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $x_i, p_j, q_j \in \mathbf{R}$, $\sum_{i=1}^r k_i + 2 \sum_{j=1}^s w_j = m$, $p_j^2 - 4q_j < 0$, $i=1, 2, \dots, r$, $j=1, 2, \dots, s$.

T₂. Każdą funkcję wymierną właściwą w określonej wzorem

$$w(x) = \frac{f_n(x)}{g_m(x)}, \quad n < m$$

(postać czynnikowa wielomianu g_m określona jest wzorem (2)) można przedstawić jednoznacznie w postaci sumy ułamków prostych:

$$(3) \quad w(x) = \frac{f_n(x)}{g_m(x)} = \frac{a_{11}}{(x-x_1)^{k_1}} + \dots + \frac{a_{1k_1}}{x-x_1} + \frac{a_{21}}{(x-x_2)^{k_2}} + \dots + \frac{a_{2k_2}}{x-x_2} + \dots + \frac{a_{r1}}{(x-x_r)^{k_r}} + \dots$$

$$\dots + \frac{a_{rk_r}}{x-x_r} + \frac{b_{11}x + c_{11}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{w_1}} + \dots + \frac{b_{1w_1}x + c_{1w_1}}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots$$

$$\dots + \frac{b_{s1}x + c_{s1}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{w_s}} + \dots + \frac{b_{sw_s}x + c_{sw_s}}{x^2 + p_sx + q_s}.$$

Uwaga. Współczynniki a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} jednoznacznie określone przez funkcję w znajdujemy metodą współczynników nieoznaczonych, którą wyjaśnimy w przykładzie 17.7.

17.2. Będziemy rozpatrywali odwzorowania (funkcje wektorowe) $T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, przy czym zamiast T będziemy czasem pisali f, g itd. Niech $(e_i)_{i=1}^n \subset \mathbf{R}^n$, $(k_j)_{j=1}^m \subset \mathbf{R}^m$ będą bazami standardowymi. Jeżeli $T: \mathbf{R}^n \supset E \rightarrow \mathbf{R}^m$, $\sum_{i=1}^n x_i e_i = \mathbf{x} \in E$, $\sum_{j=1}^m y_j k_j = \mathbf{y} = T(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^m$, to

$$(4) \quad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^m y_j k_j = \sum_{j=1}^m f_j(\mathbf{x}) k_j.$$

Funkcje $f_j: E \rightarrow \mathbf{R}$, $j=1, 2, \dots, m$ nazywamy *współrzędnymi (składowymi) odwzorowania* T . W szczególności, dla $m=1$ odwzorowanie $T: \mathbf{R}^n \supset E \rightarrow \mathbf{R}$ jest funkcją rzeczywistą n zmiennych rzeczywistych.

Wykresem funkcji $f: \mathbf{R}^n \supset E \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy zbiór

$$V = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in E\} \subset \mathbf{R}^{n+1},$$

w szczególności wykresem funkcji $g: \mathbf{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbf{R}$ jest zbiór

$$V_1 = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\} \subset \mathbf{R}^3$$

(V_1 jest na ogół pewną powierzchnią w \mathbf{R}^3).

Zbiór $A \subset \mathbf{R}^n$ nazywamy *wypukłym*, gdy

$$(5) \quad \bigwedge_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A} \bigwedge_{t \in \langle 0, 1 \rangle} (t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_2) \in A.$$

Funkcję $f: \mathbf{R}^n \supset A \rightarrow \mathbf{R}$, gdzie A jest zbiorem wypukłym nazywamy *wypukłą* na A , gdy

$$(6) \quad \bigwedge_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A} \bigwedge_{t \in \langle 0, 1 \rangle} (f(t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_2) \leq tf(\mathbf{x}_1) + (1-t)f(\mathbf{x}_2)).$$

Przykłady

17.1. Znaleźć dziedzinę funkcji określonej wzorem

$$f(x) = \frac{1}{[x]} + \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 8x}}{\log_2(\log_4|x^2 - 1|)}.$$

Rozwiązanie. Należy znaleźć zbiór $X \subset \mathbf{R}$, na którym wzór określający funkcję f ma sens liczbowy, tzn. $X = \{x: f(x) \in \mathbf{R}\}$.

Funkcję $[]: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definiujemy wzorem

$$[x] := \text{część całkowita liczby } x \text{ spełniająca nierówność } x - 1 < [x] \leq x$$

(por. zadanie 1.28); w szczególności $([x] = 0) \Leftrightarrow (x \in \langle 0, 1))$. Stąd

$$\begin{aligned} X &= \{x: ([x] \neq 0) \wedge (|x^2 - 1| \neq 0) \wedge (\log_4|x^2 - 1| > 0) \wedge \\ &\quad \wedge (\log_4|x^2 - 1| \neq 1) \wedge (x^3 - 6x^2 + 8x \geq 0)\} = \\ &= \{x: (x \in (-\infty, 0) \cup \langle 1, +\infty)) \wedge (x \neq -1 \wedge x \neq 1) \wedge (|x| > \sqrt{2}) \wedge \\ &\quad \wedge (x^2 \neq -3 \wedge x \neq -\sqrt{5} \wedge x \neq \sqrt{5}) \wedge (x \in \langle 0, 2 \rangle \cup \langle 4, +\infty))\} = \\ &= (\sqrt{2}, 2) \cup \langle 4, +\infty). \end{aligned}$$

17.2. Dany jest wykres funkcji $f: \mathbf{R} \supset X \rightarrow \mathbf{R}$ (rys. 17.1). Znaleźć wykresy funkcji f_i , $i=1, 2, \dots, 6$ określonych wzorami:

$$\alpha_1) f_1(x) = y = y_0 + f(x - x_0); \quad \alpha_2) f_2(x) = y = kf(rx);$$

$$\alpha_3) f_3(x) = y = f(-x); \quad \alpha_4) f_4(x) = y = -f(x);$$

$$\alpha_5) f_5(x) = y = -f(-x); \quad \alpha_6) f_6(x) = y = |f(x)|,$$

gdzie $x_0, y_0, k, r \in \mathbf{R} \wedge k \neq 0 \wedge r \neq 0$.

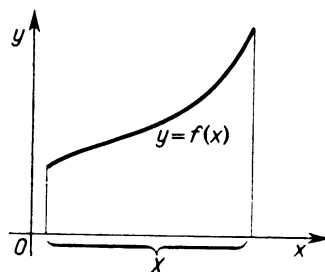
Rozwiązanie. $\alpha_1)$ Podstawiając

$$(a) \quad x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0,$$

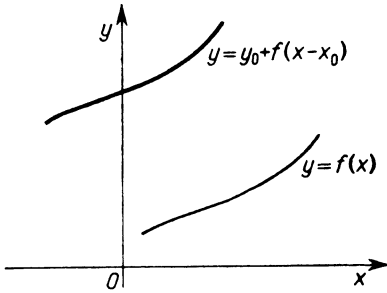
otrzymujemy $y' = f(x')$. Wzory (a) określają przesunięcie płaszczyzny \mathbf{R}^2 z układem Oxy na siebie (por. § 9). Mając więc wykres funkcji f , którego punkty mają współrzędne (x', y') w układzie Oxy , wykres funkcji f_1 znajdujemy, korzystając ze wzorów $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$, względnie dokonując przesunięcia układu współrzędnych $O'x'y' \xrightarrow{x_0, y_0} Oxy$ (por. rys.17.2).

$\alpha_2)$ Stosując podstawienia

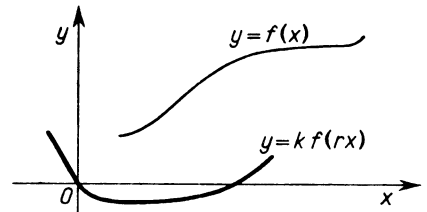
$$(b) \quad x' = rx, \quad y' = \frac{y}{k},$$



Rys. 17.1



Rys. 17.2



Rys. 17.3

otrzymujemy

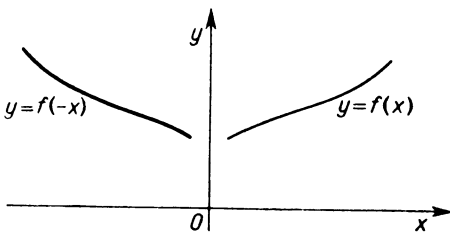
$$y' = f(x').$$

Wzory (b) określają powinowactwo płaszczyzny \mathbf{R}^2 z układem Oxy na siebie (por. § 9). Punkty wykresu funkcji f_2 otrzymujemy z punktów wykresu funkcji f , stosując wzory $x = \frac{x'}{r}$, $y = ky'$ (rys. 17.3).

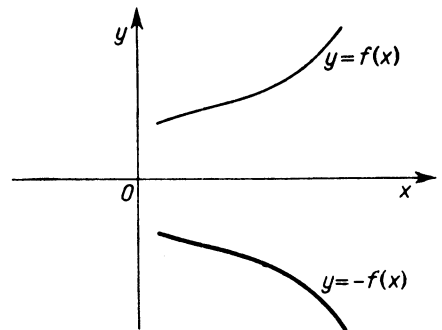
α_3) Przypadek szczególny funkcji f_2 dla $k=1$ i $r=-1$. Wzory (b) punktu α_2) przyjmują postać

$$x' = -x, \quad y' = y,$$

a więc określają symetrię względem osi Oy (por. § 9). Wykres funkcji f_3 jest zatem symetryczny do wykresu funkcji f względem osi Oy (rys. 17.4).



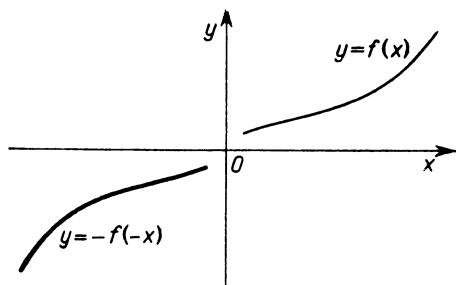
Rys. 17.4



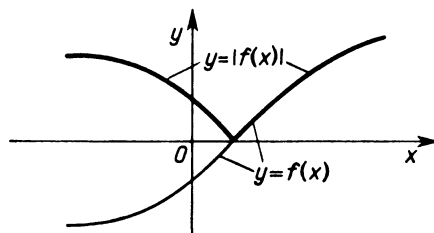
Rys. 17.5

α_4) Postępując analogicznie jak w punkcie α_3) stwierdzamy, że wykres funkcji f_4 jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi Ox (rys. 17.5).

α_5) Podstawiając $x' = -x$, $y' = -y$ otrzymujemy symetrię względem początku układu. Zatem wykres funkcji f_5 jest symetryczny do wykresu funkcji f względem początku układu (rys. 17.6).



Rys. 17.6



Rys. 17.7

α_6) Korzystając z definicji wartości bezwzględnej mamy

$$y = |f(x)| = \begin{cases} -f(x), & \text{jeżeli } f(x) < 0, \\ f(x), & \text{jeżeli } f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Stąd uwzględniając α_4), otrzymujemy wykres funkcji f_6 (rys. 17.7).

Uwaga. Z przypadku α_3) wynika, że wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi Oy , a z przypadku α_5) wynika, że wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem początku układu.

- 17.3. Rozwiązać graficznie równania: a) $\operatorname{tg} x - x = 0$, $x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi) \cup (\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$;
 b) $x \log x - 1 = 0$; c) $x^4 + 3x - 15 = 0$.

Rozwiązanie. Pierwiastki przybliżone równania typu $f(x) - g(x) = 0$ możemy otrzymać następująco. W tym samym układzie Oxy rysujemy wykresy funkcji f i g oraz znajdujemy wartości przybliżone odciętych punktów przecięcia tych wykresów. Z warunku $f(x) = g(x)$ wynika, że znalezione wartości odciętych będą przybliżonymi pierwiastkami równania $f(x) - g(x) = 0$.

a) Z wykresów funkcji tg i g : $\mathbf{R} \ni x \rightarrow x \in \mathbf{R}$ (rys. 17.8) otrzymujemy: $x_1 = 0$, $x_2 \approx 4,5$.

b) Ponieważ $x > 0$, więc $\log x = \frac{1}{x}$. Stąd z wykresów funkcji \log i h : $\mathbf{R} - \{0\} \ni x \rightarrow \frac{1}{x} \in \mathbf{R}$

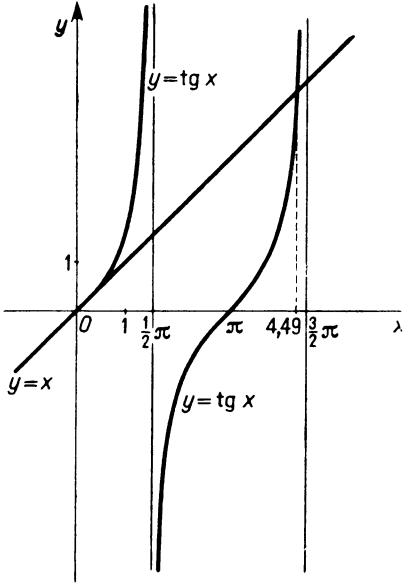
(rys. 17.9) otrzymujemy przybliżony pierwiastek $x_1 \approx 2,5$.

c) Z wykresów funkcji określonych wzorami $f(x) = \frac{1}{3}x^4$ i $g(x) = -x + 5$ (rys. 17.10) otrzymujemy $x_1 \approx -2,2$, $x_2 \approx 1,8$.

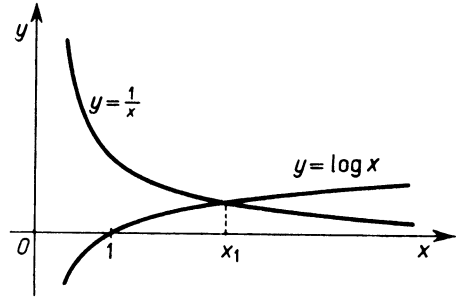
17.4. Dana jest elipsa K : $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Wyrzucić pole trójkąta utworzonego przez styczną do elipsy K i osie układu, jako funkcję odciętej punktu styczności.

Rozwiązanie. Z uwagi na symetrię elipsy K względem osi układu wystarczy rozpatrzyć punkty elipsy leżące w I ćwiartce układu, czyli $0 < x_0 < a$ (rys. 17.11).

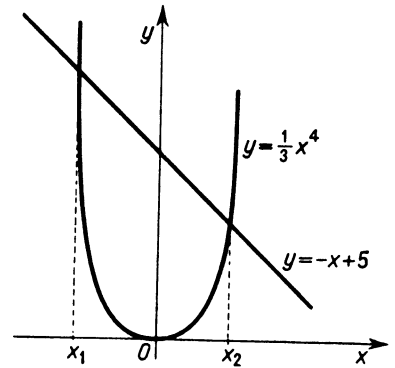
Pole $S = \frac{1}{2}d(O, A) \cdot d(O, B)$, gdzie A i B są punktami przecięcia stycznej L : $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$ do elipsy w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ z osiami Ox i Oy . Dla $y = 0$, mamy $b^2x_0x =$



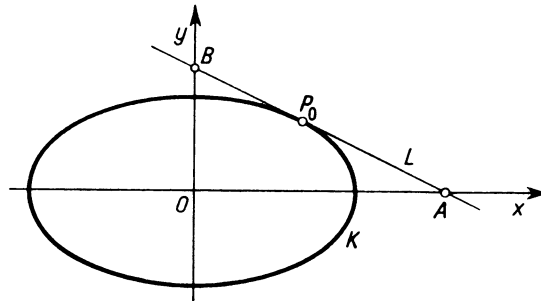
Rys. 17.8



Rys. 17.9



Rys. 17.10



Rys. 17.11

$= a^2 b^2$, czyli $A\left(\frac{a^2}{x_0}, 0\right)$ oraz dla $x=0$ $B\left(0, \frac{b^2}{y_0}\right)$. Ale $y_0 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2}$, skąd

$$S = S(x_0) = \frac{1}{2} \left| \frac{a^2}{x_0} - 0 \right| \cdot \left| \frac{b^2}{y_0} - 0 \right| = \frac{1}{2} a^2 b^2 \frac{1}{x_0 y_0} =$$

$$= \frac{a^2 b^2}{2} \frac{1}{x_0} \frac{a}{b \sqrt{a^2 - x_0^2}} = \frac{a^3 b}{2} \frac{1}{x_0 \sqrt{a^2 - x_0^2}}, \quad x_0 \in (0, a).$$

17.5. Wykazać, że jeżeli funkcja $f: \mathbf{R} \supset X \rightarrow \mathbf{R}$ jest niemalejąca [nierosnąca] i parzysta na X , to jest na tym zbiorze stała.

Rozwiązanie. Z założenia, że f jest niemalejąca wynika, że

$$(a) \quad \bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)).$$

W szczególności, dla $-x_1 > -x_2$ ($-x_1 \in X \wedge -x_2 \in X$, ponieważ f jest funkcją parzystą) otrzymujemy $f(-x_1) \geq f(-x_2)$, czyli na mocy parzystości funkcji f

$$(a_1) \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

Z (a) i (a₁) wynika, że $\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (f(x_1) = f(x_2))$, tzn. $f(x_1) = f(x_2) = f(x) = c$, gdzie c jest stałą. \square

Podobnie postępujemy w przypadku funkcji nierosnącej.

17.6. Podać zaprzeczenie definicji funkcji rosnącej i zaprzeczenie definicji funkcji nierosnącej.

Rozwiązanie. Korzystamy z 2° i 3°, z prawa De Morgana oraz z zaprzeczenia implikacji $p \Rightarrow q$:

$$\begin{aligned} (f \text{ nie jest funkcją rosnącą na } X) &\Leftrightarrow \sim \bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \bigvee_{x_1, x_2 \in X} (x_1 < x_2 \wedge \sim (f(x_1) < f(x_2))) \Leftrightarrow \bigvee_{x_1, x_2 \in X} (x_1 < x_2 \wedge f(x_1) \geq f(x_2)), \end{aligned}$$

czyli istnieje taka para liczb $x_1, x_2 \in X$, że $x_1 < x_2 \wedge f(x_1) \geq f(x_2)$.

Analogicznie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (f \text{ nie jest funkcją nierosnącą na } X) &\Leftrightarrow \sim \bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \bigvee_{x_1, x_2 \in X} (x_1 < x_2 \wedge \sim (f(x_1) \geq f(x_2))) \Leftrightarrow \bigvee_{x_1, x_2 \in X} (x_1 < x_2 \wedge f(x_1) < f(x_2)). \end{aligned}$$

17.7. Rozłóżć funkcje określone wzorami:

$$a) f(x) = \frac{x+2}{x^3-x^2-2x}; \quad b) g(x) = \frac{x-1}{x^5-3x^3-2x^2}; \quad c) k(x) = \frac{x}{x^3+1},$$

na ułamki proste.

Rozwiązanie. W każdym z przykładów a), b) i c) rozkładamy mianownik na czynniki (por. wzór (2)), a następnie stosujemy wzór (3).

a) $x^3 - x^2 - 2x = x(x+1)(x-2)$, skąd

$$(a) \quad f(x) = \frac{x+2}{(x+1)x(x-2)} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{x-2}.$$

Współczynniki a_1, a_2 i a_3 znajdujemy następująco. Obie strony równości (a) mnożymy przez wspólny mianownik, skąd

$$(a_1) \quad x+2 = a_1 x(x-2) + a_2(x+1)(x-2) + a_3(x+1)x.$$

Ale równość (a_1) wielomianów jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbb{R}$ (twierdzenie z algebry), w szczególności dla $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ i $x_3 = 2$. Z równania (a_1) otrzymujemy więc $-1 + 2 = a_1(-1)(-1-2)$, czyli $a_1 = \frac{1}{3}$ i podobnie $a_2 = -1$, $a_3 = \frac{2}{3}$. Stąd (wzór (a))

$$f(x) = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{x} + \frac{2}{3(x-2)}.$$

b) $x^5 - 3x^3 - 2x^2 = x^2(x+1)^2(x-2)$, skąd (wzór (3))

$$g(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2 x^2 (x-2)} = \frac{a_1}{(x+1)^2} + \frac{a_2}{x+1} + \frac{a_3}{x^2} + \frac{a_4}{x} + \frac{a_5}{x-2}.$$

Mnożąc otrzymaną równość przez wspólny mianownik, otrzymujemy równość tożsamościową wielomianów

$$(b) \quad x-1 \equiv a_1 x^2(x-2) + a_2(x+1)x^2(x-2) + a_3(x+1)^2(x-2) + a_4(x+1)^2 x(x-2) + a_5(x+1)^2 x^2.$$

Wstawiając kolejno do tożsamości (b) za x liczby -1 , 0 i 2 otrzymujemy $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_5 = \frac{1}{36}$. W celu znalezienia pozostałych niewiadomych a_2 i a_4 wstawiamy do (b) np. $x=1$, $x=-2$. Stąd uwzględniając, że $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_5 = \frac{1}{36}$, otrzymujemy

$$18a_2 + 36a_4 + 23 = 0,$$

$$72a_2 + 36a_4 - 43 = 0,$$

czyli $a_2 = \frac{11}{9}$, $a_4 = -\frac{5}{4}$. Zatem

$$g(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{11}{9} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{x-2}.$$

c) $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$; stąd

$$(c) \quad \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1},$$

zatem

$$x \equiv a(x^2 - x + 1) + (bx + c)(x + 1),$$

czyli

$$0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 0 \equiv (a+b)x^2 + (-a+b+c)x + (a+c).$$

Tym razem skorzystamy z twierdzenia: *dwa wielomiany są równe tożsamościowo wtedy i tylko wtedy, gdy ich współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej niezależnej są równe*. Otrzymujemy więc układ trzech równań

$$a + b = 0,$$

$$(a_1) \quad -a + b + c = 1,$$

$$a + c = 0.$$

Zatem $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{3}$, czyli

$$k(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x+1}{x^2-x+1}.$$

17.8. Znaleźć dziedziny funkcji:

a) $f: \mathbb{R}^2 \supset X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x, y) = \sqrt{y-x+2} + \log(x-y^2+4)$;

b) $g: \mathbb{R}^3 \supset X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem

$$g(x, y, z) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - R(R-2z)}};$$

c) $h: \mathbb{R}^n \supset X_3 \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 - (x_i - i)^2} + \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - i)^2}.$$

Rozwiązanie. a) $X_1 = \{(x, y) : (y-x+2 \geq 0) \wedge (x-y^2+4 > 0)\} =$

$$= \{(x, y) : (y \geq x-2) \wedge (y^2 < x+4)\} = \{(x, y) : (y \in (-2, 3)) \wedge (y^2 - 4 < x \leq y+2)\};$$

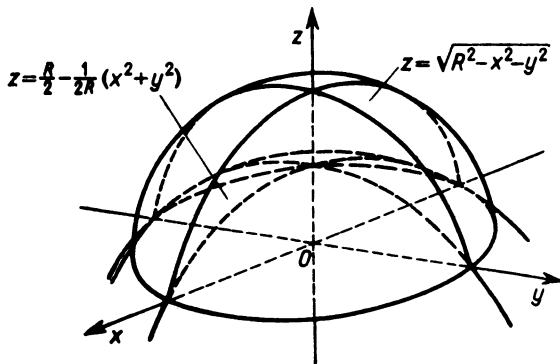
b) $X_2 = \{(x, y, z) : (R^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0) \wedge (x^2 + y^2 - R(R-2z) > 0)\} =$

$$= \left\{ (x, y, z) : (x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2) \wedge \left(z > \frac{1}{2}R - \frac{1}{2R}(x^2 + y^2) \right) \right\} =$$

$$= \{(x, y, z) : (-R \leq x \leq R) \wedge (-\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}) \wedge$$

$$\wedge \left(\frac{1}{2}R - \frac{1}{2R}(x^2 + y^2) < z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right)\}.$$

Zbiór X_2 jest częścią wnętrza sfery łącznie z punktami sfery i zewnętrza paraboloidy obrotowej (por. rys. 17.12).



Rys. 17.12

$$\text{c) } X_3 = \{x : (i-1 \leq x_i \leq i+1, i=1, 2, \dots, n) \wedge \\ \wedge (x_i \neq i, i=1, 2, \dots, n)\} = P - \{(1, 2, \dots, n)\},$$

gdzie P jest przedziałem w \mathbb{R}^n oraz punkt a $(1, 2, \dots, n)$ jest środkiem tego przedziału.

17.9. Dane są odwzorowania:

$$\text{a) } r : \langle 0, \pi \rangle \ni t \rightarrow (4 \cos t, 3, 4 \sin t + 2) \in \mathbb{R}^3;$$

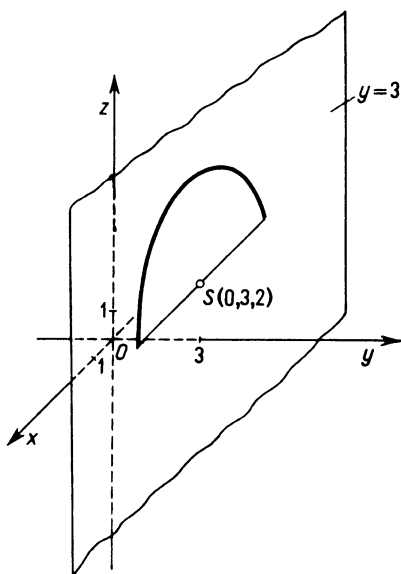
$$\text{b) } g : \mathbb{R}^2 \supset D \ni (u, v) \rightarrow (u \cos v, u^2, u \sin v) \in \mathbb{R}^2,$$

gdzie $D = \{(u, v) : (u \in \langle 0, +\infty \rangle) \wedge (v \in \langle 0, 2\pi \rangle)\}$;

$$\text{c) } h : \mathbb{R}^{n-1} \ni (t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) \rightarrow$$

$$\rightarrow (a_1 + \sum_{j=1}^{n-1} t_j w_{j1}, a_2 + \sum_{j=1}^{n-1} t_j w_{j2}, \dots, a_n + \sum_{j=1}^{n-1} t_j w_{jn}) \in \mathbb{R}^n,$$

gdzie wektory $w_j = (w_{j1}, w_{j2}, \dots, w_{jn})$, $j=1, 2, \dots, n-1$ są liniowo niezależne. Podać interpretacje geometryczne obrazów tych odwzorowań na danych dziedzinach.



Rys. 17.13

Rozwiązanie. a) Interpretując $r(t) \in \mathbb{R}^3$ jako promień wodzący punktu $x(x, y, z)$, możemy napisać:

$$(r(t) = \overline{Ox} = 4 \cos t \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + (4 \sin t + 2)\mathbf{k},$$

$$t \in \langle 0, \pi \rangle \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 4 \cos t, y = 3, z = 4 \sin t + 2, t \in \langle 0, \pi \rangle).$$

Wynika stąd, że obraz $r(\langle 0, \pi \rangle)$ jest półokręgiem leżącym w płaszczyźnie o równaniu $y = 3$ o środku w punkcie $S(0, 3, 2)$ i promieniu 4 (rys. 17.13).

Uwaga. Równanie po lewej stronie powyższej równoważności nazywamy *równaniem wektorowym półokręgu*, po prawej stronie – *równaniami parametrycznymi półokręgu*.

$$\text{b) } (g(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u^2 \mathbf{j} + u \sin v \mathbf{k}, (u, v) \in D) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = u \cos v, y = u^2, z = u \sin v, (u, v) \in D).$$

Rugując parametry u i v z równań parametrycznych obrazu $g(D)$, otrzymujemy

$$x^2 + z^2 = u^2 = y \Rightarrow y = x^2 + z^2,$$

tzn. równanie paraboloidy obrotowej o osi obrotu Oy (por. § 16).

$$\text{c) } h(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) = \sum_{i=1}^n (a_i + \sum_{j=1}^{n-1} t_j w_{ji}) \mathbf{e}_i.$$

Wynika stąd, że obraz $h(\mathbf{R}^{n-1})$ jest hiperpłaszczyzną $(n-1)$ -wymiarową w \mathbf{R}^n , przechodzącą przez punkt $a(a_1, a_2, \dots, a_n)$ i równoległą do wektorów $w_j = (w_{j1}, w_{j2}, \dots, w_{jn})$, $j = 1, 2, \dots, n-1$ (por. § 13).

17.10. Wykazać, że

(a) (zbiór $A \subset \mathbf{R}^n$ wypukły) \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{N \ni n \geq 2} \bigwedge_{x_1, x_2, \dots, x_n \in A} \bigwedge_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}} (\alpha_i \geq 0 \wedge \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in A).$$

Dowód \Leftarrow : Definicję (5) możemy napisać w postaci równoważnej:

$$(b) \bigwedge_{x_1, x_2 \in A} \bigwedge_{\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\}} (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \in A, \quad \text{gdzie} \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Biorąc w prawej stronie równoważności (a) $n=2$, otrzymujemy zgodnie z (b) definicję wypukłości zbioru A .

\Rightarrow : Dowód indukcyjny. Dla $n=2$ twierdzenie jest prawdziwe na mocy (b). Zakładając, że twierdzenie jest prawdziwe dla $k=n-1$, mamy

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j x_j + \alpha_n x_n = \alpha_0 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j}{\alpha_0} x_j + \alpha_n x_n,$$

$$\text{gdzie } \alpha_0 = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j, \text{ więc } \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j}{\alpha_0} = \frac{1}{\alpha_0} \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j = 1.$$

Niech $x_0 = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j}{\alpha_0} x_j$; na mocy założenia indukcyjnego, $x_0 \in A$. Stąd

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = (\alpha_0 x_0 + \alpha_n x_n) \in A,$$

ponieważ $\alpha_0 + \alpha_n = \alpha_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$. \square

17.11. Udowodnić, że forma kwadratowa dodatnio półokreślona, tzn. funkcja $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ określona wzorem (por. § 10.3)

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = [x_i]_{n \times 1},$$

jest funkcją wypukłą na \mathbf{R}^n .

Dowód. Korzystając z zapisu macierzowego formy, z działań na macierzach oraz ze wzoru

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n} (\mathbf{x}_2^T A \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1^T A \mathbf{x}_2),$$

dla każdego $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_2) - tf(\mathbf{x}_1) - (1-t)f(\mathbf{x}_2) &= \\ &= (t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_2)^T A (t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_2) - t\mathbf{x}_1^T A \mathbf{x}_1 - (1-t)\mathbf{x}_2^T A \mathbf{x}_2 = \\ &= t^2 \mathbf{x}_1^T A \mathbf{x}_1 + (1-t)^2 \mathbf{x}_2^T A \mathbf{x}_2 + 2t(1-t)\mathbf{x}_1^T A \mathbf{x}_2 - t\mathbf{x}_1^T A \mathbf{x}_1 - (1-t)\mathbf{x}_2^T A \mathbf{x}_2 = \\ &= (t^2 - t)\mathbf{x}_1^T A \mathbf{x}_1 + (1-t)((1-t)\mathbf{x}_2^T A \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2^T A \mathbf{x}_2) + 2t(1-t)\mathbf{x}_1^T A \mathbf{x}_2 = \\ &= t(t-1)\mathbf{x}_1^T A \mathbf{x}_1 + t(t-1)\mathbf{x}_2^T A \mathbf{x}_2 - 2t(t-1)\mathbf{x}_1^T A \mathbf{x}_2 = \\ &= t(t-1)(\mathbf{x}_1^T A \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2^T A \mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_1^T A \mathbf{x}_2) = t(t-1)((\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^T A (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)). \end{aligned}$$

Ale $\bigwedge_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0$, w szczególności $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^T A (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \geq 0$ oraz $\bigwedge_{t \in \langle 0, 1 \rangle} t(t-1) \leq 0$, stąd na mocy definicji (6) funkcja f jest wypukła na \mathbb{R}^n . \square

Zadania

17.12. Znaleźć:

a) $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$, jeżeli $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$;

b) $h(-1), h(-0,001), h(100)$, jeżeli $h(t) = \log t^2$;

c) $g(-2), g(-1), g(0), g(1), g(2)$, jeżeli

$$g(u) = \begin{cases} 1+u & \text{dla } -\infty < u \leq 0, \\ 2^u & \text{dla } 0 < u < +\infty; \end{cases}$$

d) $f(0), f(-z), f(z+1), f(z)+1, f\left(\frac{1}{z}\right), \frac{1}{f(z)}$, jeżeli $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$.

17.13. Czy równanie $x^2 + 4y^2 = 1$ określa jedną funkcję zmiennej niezależnej x ?

17.14. Znaleźć dziedziny funkcji określonych wzorami:

a) $h(z) = \frac{z}{|\sqrt[3]{z+2}|}$; b) $f(u) = \frac{\sqrt{u^2+u}}{\log(5-7u)}$; c) $p(t) = \sqrt{-t} - \log_3(2t+1)$;

d) $h(r) = \frac{1}{\sqrt{r-[r]}}$; e) $f(x) = \sqrt[6]{\frac{1}{x^2} - x^2} + \log(2+x-6x^2)$;

f) $f(x) = \sqrt{\cos x^2}$; g) $g(z) = \frac{\sqrt{z^2-1}}{\cos \pi z}$; h) $k(y) = \log[\cos(\log y)]$;

i) $p(t) = \frac{1}{\log_3(\log_2|t^2-1|)}$.

17.15. Znaleźć przeciwdziedzinę funkcji określonej wzorem

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ 1 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

17.16. Wykazać, że $|x| = x \operatorname{sgn} x$.

17.17. Na papierze milimetrowym narysować wykresy funkcji określonych wzorami:

- a) $y=x^2$, $x \in \langle -3, 3 \rangle$; b) $y=\frac{1}{x}$, $x \in \langle -4, 4 \rangle - \{0\}$;
 c) $y=t^3$, $t \in \langle -2, 2 \rangle$; d) $y=u^4$, $u \in \langle -2, 2 \rangle$;
 e) $y=\sin x$, $x \in \langle -\pi, 2\pi \rangle$; f) $y=\cos t$, $t \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$;
 g) $y=\operatorname{tg} x$, $x \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$; h) $y=\operatorname{ctg} t$, $t \in \langle -\pi, \pi \rangle - \{0\}$;
 i) $y=2^x$, $x \in \langle -4, 2 \rangle$; j) $y=\log_2 x$, $x \in \langle 0, 8 \rangle$.

Uwaga. Przy sporządzaniu wykresów ułożyć tabelki zawierające co najmniej dziesięć wartości zmiennej niezależnej.

17.18. Znaleźć dziedziny oraz naszkicować wykresy funkcji określonej wzorami:

- a) $f(x)=\frac{-1}{x}$; b) $g(t)=2^{-t}$; c) $G(u)=-\log_2(-u)$;
 d) $z=\frac{1}{|y|}$; e) $y=\frac{-1}{(\frac{1}{2})^t}$; f) $w(x)=|\operatorname{tg} x|$.

17.19. Rozwiązać graficznie równania:

- a) $x=2^{-x}$; b) $10^x=x^2$; c) $\log x=\frac{x}{10}$; d) $\cos x=x^2$.

17.20. Znaleźć dziedziny, przeciwdziedziny (tzn. zbiory wartości funkcji) oraz narysować wykresy funkcji określonych wzorami:

- a) $f(x)=|x-2|$; b) $g(x)=2 \sin x$; c) $h(u)=\operatorname{tg}(u+\frac{1}{8}\pi)$;
 d) $g(t)=|\operatorname{ctg} 3t|$; e) $p(z)=\sqrt{z^2-4}$; f) $f(x)=\sqrt{2-x^2}$;
 g) $k(v)=2^{v-1}$; h) $H(t)=2 \sin(3t-2)$; i) $h(x)=3 \cos 2x-1$;
 j) $r(t)=\sqrt{3t+1}$; k) $f(x)=\log_2(x-1)$; l) $t(u)=\frac{1}{2^{u-1}}+1$;

- m) $p(z)=\frac{1}{2} \cdot 3^{1-2z}$; n) $u(x)=x[x]$ (por. przykład 17.1); o) $R(t)=\frac{1}{[t]}$;

$$p) w(x)=\begin{cases} -2 & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ 1 & \text{dla } x > 0; \end{cases}$$

- r) $f(x)=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-1)^2}$; s) $b(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}+\sin x$.

Uwaga. W każdym z przykładów a)-s) zmienną zależną oznaczamy przez y .

17.21. Stosując dodawanie (względnie odejmowanie) graficzne narysować wykresy funkcji określonych wzorami:

- a) $f(x)=\sin x+\cos x$; b) $g(u)=2^u-\cos u$; c) $g(x)=\log_2 x+2^x$;
 d) $h(t)=\sqrt{t}+\frac{1}{t}$; e) $p(z)=z^3-\frac{1}{z^2}$; f) $m(x)=\operatorname{tg} x+x$.

17.22. Na wspólnym rysunku narysować wykresy funkcji określonych wzorami:

$$a) f(x)=3^x, \quad g(x)=3^{-x}, \quad h(x)=\frac{3^x+3^{-x}}{2}, \quad k(x)=\frac{3^x-3^{-x}}{2};$$

$$b) f(x)=(\frac{1}{2})^x, \quad g(x)=1, \quad h(x)=(1,5)^x, \quad m(x)=2^x, \quad n(x)=3^x;$$

$$c) f(x)=\sqrt[3]{x}, \quad g(x)=\sqrt{x}, \quad h(x)=x, \quad k(x)=x^2, \quad m(x)=x^3, \quad n(x)=x^4.$$

17.23. Za pomocą wykresów funkcji rozwiązać nierówności:

$$a) \frac{1}{x^2} < 36; \quad b) x^2 - 5x + 6 > 0; \quad c) 2^x(x^2 - \frac{1}{2}) > 0;$$

$$d) \frac{3x-2}{x^2-x-6} + 1 < 0; \quad e) \sqrt{3} \lg x < 1; \quad f) \sin^2 \frac{x}{2} \geq \frac{1}{2};$$

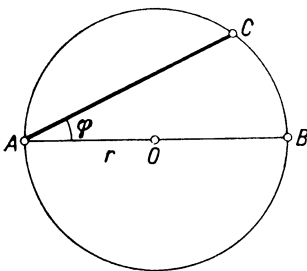
$$g) 2^x > \frac{1}{8}; \quad h) 2^{-2x} > 4; \quad i) \log_3 x > \frac{1}{9}; \quad j) \log_2 x < \frac{1}{4}.$$

17.24. Pewna funkcja f określona jest tabelarycznie (x – oznacza zmienną niezależną, y – zmienną zależną) następująco:

x	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	-1,5	-1	0	3,2	2,6	0	-1,8	-2,8	0	1,1	1,4	1,9	2,4

Wykonać jej wykres, kreśląc możliwie gładką krzywą przez punkty o współrzędnych podanych w tabelce i na podstawie wykresu uzupełnić tabelkę, wyznaczając przybliżenia wartości funkcji dla x równego: 2,5; 3,5; 4,5; 5,5; 6,5; 7,5; 8,5; 9,5.

17.25. W kole o promieniu r poprowadzono średnicę AB (rys. 17.14). Wyrazić długość cięciwy koła $d(A, C)$ w zależności od kąta φ , który tworzy ta cięciwa ze średnicą AB .



Rys. 17.14

17.26. Wyrazić pole trapezu równoramiennego o podstawach a i b ($a > b > 0$) jako funkcję kąta α przy podstawie trapezu.

17.27. Wyznaczyć objętość i pole powierzchni bocznej walca wpisanego w kulę o promieniu R jako funkcję jego wysokości h .

17.28. Przy napięciu $E=2,4$ V natężenie prądu $i=0,8$ A. Korzystając z prawa Ohma, wyrazić analitycznie zależność między napięciem E i natężeniem i .

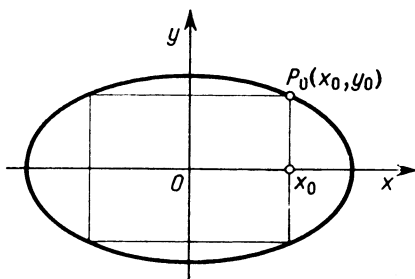
17.29. W mechanice relatywistycznej energię kinetyczną określa się wzorem $E=mc^2$, gdzie c oznacza prędkość światła, a masa $m=m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$ jest zmienna i zależy od prędkości, przy czym dla $v=0$, $m=m_0$ (tzw. masa spoczynkowa). Wyrazić energię w zależności od prędkości v .

17.30. Z trzech odcinków mających 1, 2 i 1 jednostek długości o ciężarach odpowiednio 2, 3 i 1 jednostek wagi wykonano pręt AB (rys. 17.15). Ciężar zmiennego odcinka AM o długości x jest funkcją x . Wyrazić tę funkcję analitycznie, znaleźć jej dziedzinę oraz narysować jej wykres.



Rys. 17.15

17.31. W elipsę $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ wpisano prostokąt (rys. 17.16). Wyrazić pole prostokąta jako funkcję odciętej x_0 punktu $P_0(x_0, y_0)$.



Rys. 17.16

17.32. Wykazać, że jeżeli dla funkcji określonej wzorem $f(x) = ax + b$ wartości argumentów $x = x_n$, $n = 1, 2, \dots$, tworzą ciąg arytmetyczny, to wartości funkcji $f(x_n) = y_n$ tworzą również ciąg arytmetyczny.

17.33. Wykazać, że jeżeli dla funkcji określonej wzorem $f(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) argumenty $x = x_n$, $n = 1, 2, \dots$, tworzą ciąg arytmetyczny, to wartości funkcji $f(x_n)$ tworzą ciąg geometryczny.

17.34. Niech $f(x) \cdot f(y) = f(z)$. Znaleźć z , jeżeli $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$.

17.35. Wykazać, że funkcja $f: \mathbf{R} \ni x \rightarrow x^4 \in \mathbf{R}$ spełnia warunek

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),$$

dla dowolnych liczb $x_1, x_2 \in \mathbf{R} \wedge x_1 \neq x_2$.

17.36. Znaleźć a , b i c jeżeli $f(x) = a + bc^x$ oraz $f(0) = 15$, $f(2) = 30$, $f(4) = 90$.

17.37. Zbadać monotoniczność funkcji określonych wzorami:

a) $f(x) = x^2 + 6x - 7$, $x \in \mathbf{R}$; b) $k(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $x \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$, $w = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$;

c) $g(t) = \frac{1}{t^2}$, $t \in \mathbf{R} - \{0\}$; d) $d(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$; e) $h(u) = \sqrt[3]{u}$, $u \in \mathbf{R}$.

17.38. Wykazać, że suma funkcji rosnących [malejących] jest funkcją rosnącą [malejącą].

17.39. Które z podanych niżej funkcji są parzyste, które nieparzyste oraz które nie są ani parzyste, ani nieparzyste:

a) $h(x) = x^4 - 2x^2 + 3$; b) $g(u) = u - u^2$; c) $f(x) = \log^3 x$;

d) $k(t) = 2^{-t^2}$; e) $p(z) = \sin^3 z$; f) $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$?

17.40. Wykazać, że jeżeli funkcja $f: \mathbf{R} \supset X \rightarrow \mathbf{R}$ jest rosnąca [malejąca], to funkcja $-f$ jest malejąca [rosnąca].

17.41. Dowieść, że: iloczyn dwóch funkcji parzystych jest funkcją parzystą, iloczyn dwóch funkcji nieparzystych jest funkcją parzystą oraz iloczyn funkcji parzystej i nieparzystej jest funkcją nieparzystą.

17.42. Udowodnić, że każdą funkcję określoną na przedziale symetrycznym $(-a, a)$ można przedstawić jako sumę funkcji parzystej i nieparzystej.

17.43. Przedstawić każdą z funkcji określonych w punktach a)-d) jako sumę funkcji parzystej i nieparzystej: a) $k(z) = 2z + 1$; b) $f(x) = 2^x$; c) $p(u) = 3u^2 - u + 2$; d) $g(t) = t^2 e^{-t}$.

17.44. Wykazać, że jeżeli funkcja $f: \mathbf{R} \supset X \rightarrow \mathbf{R}$ jest parzysta i zarazem dla $x > 0$ rosnąca [malejąca], to dla $x < 0$ funkcja f jest malejąca [rosnąca].

17.45. Podać zaprzeczenie definicji funkcji: a) różnowartościowej; b) malejącej; c) niemalejącej; d) parzystej; e) nieparzystej.

17.46. Wykazać, że: suma, różnica, iloczyn i iloraz funkcji okresowych o okresie w są funkcjami okresowymi o okresie w .

17.47. Wykazać, że jeżeli $f(x) = f(x+w)$, to $f(x+kw) = f(x)$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

17.48. Które z funkcji określonych wzorami:

a) $f(x) = \sin^2 x$; b) $g(x) = \sin x^2$; c) $h(t) = t \cos t$;
d) $f(z) = 4$; e) $p(x) = [x]$; f) $f(x) = x - [x]$, są okresowe?

17.49. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n funkcja określona wzorem $f(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx + \frac{1}{2}a_0$, gdzie a_n, b_n i a_0 oznaczają stałe, jest funkcją okresową o okresie $\frac{2\pi}{n}$.

17.50. Funkcję określoną wzorem

(a)
$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

gdzie A, ω i φ są stałymi, przy czym $A > 0$ i $\omega > 0$, nazywamy *harmoniką*; A — nazywamy *amplitudą*, ω — *częstotliwością*, φ — *fazą początkową*. Wykazać, że harmonika (a) jest funkcją okresową o okresie $\frac{2\pi}{\omega}$.

17.51. Znaleźć amplitudy, częstości, okresy i fazy początkowe harmonik określonych wzorami:

a) $y = \sin t$; b) $f(t) = \sin \frac{t}{\pi}$; c) $g(t) = 3 \sin 4\pi t$;

d) $h(t) = \frac{1}{2} \sin(3t + 2)$; e) $p(u) = \frac{1}{3} \sin 2\pi(\omega_1 u - \frac{1}{3})$.

17.52. Wykazać, że funkcje określone wzorami:

a) $f(x) = a \sin \omega x + b \cos \omega x$; b) $g(t) = 2 \cos 3t + 4 \sin 3t$;

c) $f(t) = \sqrt{3} \cos 2t - \sin 2t$ są harmonikami.

17.53. Wykazać, że funkcje określone wzorami:

a) $h(x) = 4 \sin(3x - 2)$; b) $g(t) = -2 \sin t + 3 \sin 4t$;

c) $f(x) = 3 \cos 2x + 5 \sin 3x$; d) $z(u) = \sin \frac{1}{3}\pi u + \cos \frac{1}{4}\pi u$;

e) $\varphi(x) = \sin(2\pi x + \frac{1}{4}\pi) + 3 \sin(4\pi x - \frac{1}{3}\pi) + \sin 6\pi x$,

są okresowe oraz znaleźć ich najmniejsze okresy dodatnie.

17.54. Wykazać, że jeżeli $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} f(x + \omega) = k f(x)$, gdzie stałe $k, \omega \in \mathbb{R}_+$, to $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} f(x) = a^x \varphi(x)$

gdzie stała $a \in \mathbb{R}_+$ i φ jest funkcją okresową o okresie ω .

17.55. Rozwiązać graficznie równania:

a) $x^3 + x - 4 = 0$; b) $x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$; c) $x^4 - 4x + 1 = 0$.

17.56. Rozwiązać graficznie układy równań:

a) $x + y^2 = 1$, b) $x^2 + y^2 = 100$,
 $16x^2 + y = 4$; $y = 10(x^2 - x - 2)$.

17.57. Rozwiązać nierówności:

a) $3x^3 - x^2 - 3x + 1 < 0$; b) $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 > 0$;

c) $x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 - 1 > 0$; d) $\frac{x^2 - 1}{x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 2x - 8} < 0$;

e) $\frac{20x^3 - 29x^2 + 29x - 18}{-3x^4 + 14x^3 - 29x^2 + 32x - 12} < 1$.

17.58. Wykazać, że wielomian, w którym występują tylko składniki stopni parzystych [nieparzystych] jest funkcją parzystą [nieparzystą].

Uwaga. Wyraz wolny wielomianu zaliczamy do składników stopnia parzystego.

17.59. Znaleźć:

a) a i b , jeżeli $f(x) = ax + b$ oraz $f(0) = -2$, $f(3) = 5$;

b) a, b i c , jeżeli $f(x) = ax^2 + bx + c$ oraz $f(-2) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = 5$;

c) a, b, c i d , jeżeli $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ oraz $f(-1) = 0$, $f(0) = 2$, $f(1) = -3$, $f(2) = 5$.

17.60. Znaleźć wielomiany interpolacyjne Lagrange'a spełniające warunki:

a) $W(-2) = 4$, $W(1) = 2$, $W(2) = -1$, $W(4) = 10$;

b) $W(-3) = 79$, $W(-1) = 1$, $W(0) = 1$, $W(1) = 3$, $W(3) = 85$;

c) $W(-2) = 21$, $W(-1) = 5$, $W(0) = 3$, $W(1) = 3$, $W(2) = 17$.

17.61. Obliczyć $f(-1)$, jeżeli wiadomo, że $f(-2)=4$, $f(1)=2$, $f(2)=-1$ i $f(4)=0$ oraz funkcja f ma być wielomianem co najwyżej stopnia trzeciego.

17.62. Niech $f(x)+f(y)=f(z)$. Znaleźć z , jeżeli:

a) $f(x)=ax$; b) $f(x)=\frac{1}{x}$.

17.63. Kwadrat jakiej liczby jest równy sumie tej liczby i jej odwrotności?

17.64. Rozłożyć funkcje wymierne określone wzorami:

a) $h(t)=\frac{t^2-3}{t^4+4t^3-t^2-4t}$; b) $f(x)=\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}$; c) $f(z)=\frac{z^2+2}{(z+1)^3(z-2)}$;
 d) $g(x)=\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x-1)}$; e) $k(x)=\frac{1}{x^4+1}$, na ułamki proste.

17.65. Narysować zbiory $X_i \subset \mathbf{R}^2$, $i=1, 2, \dots, 7$ oraz $X_j \subset \mathbf{R}^3$, $j=8, 9, 10, 11$:

- a) $X_1 = \{(x, y) : x \in \mathbf{R} \wedge y \in \langle 1, 3 \rangle\}$; b) $X_2 = \{(x, y) : x + y < 2\}$;
 c) $X_3 = \{(x, y) : |x| \leq y\}$; d) $X_4 = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$;
 e) $X_5 = \{(x, y) : 4 \leq (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 9\}$;
 f) $X_6 = \{(x, y) : xy < 1\}$; g) $X_7 = \{(x, y) : |xy| \leq 1\}$;
 h) $X_8 = \{(x, y, z) : (x > 0) \wedge (y > 0) \wedge (z > 0) \wedge (x + 2y + 4z - 8 < 0)\}$;
 i) $X_9 = \{(x, y, z) : (y > 0) \wedge (y < 2) \wedge (z > 0) \wedge (x > 0) \wedge (2x + z - 2 < 0)\}$;
 j) $X_{10} = \{(x, y, z) : (x < 0) \wedge (y > 0) \wedge (z > 0) \wedge (10x - 15y - 12z + 60 > 0)\}$;
 k) $X_{11} = \{(x, y, z) : (y^2 + z^2 \leq x^2) \wedge (y^2 + z^2 \leq 4 - x) \wedge (z \geq 0)\}$.

17.66. Znaleźć dziedziny funkcji określonych wzorami:

- a) $f : \mathbf{R}^2 \supset X_1 \rightarrow \mathbf{R}$, gdzie $f(x, y) = \sqrt{x-1} + \log(2y+3)$;
 b) $h : \mathbf{R}^2 \supset X_2 \rightarrow \mathbf{R}$, gdzie $h(u, v) = \sqrt{2u-v+1}$;
 c) $k : \mathbf{R}^2 \supset X_3 \rightarrow \mathbf{R}$, gdzie $k(x, y) = \sqrt{x^2+y^2-1} - \log_2(4-x^2-y^2)$;
 d) $p : \mathbf{R}^2 \supset X_4 \rightarrow \mathbf{R}$, gdzie $p(R, t) = \log \frac{R^2+t^2-4}{144-16R^2-9t^2}$;
 e) $r : \mathbf{R}^2 \supset X_5 \rightarrow \mathbf{R}$, gdzie $r(p, t) = \frac{1}{p\sqrt{t^2-2p}}$;
 f) $m : \mathbf{R}^3 \supset X_6 \rightarrow \mathbf{R}$, gdzie $m(x, y, z) = \sqrt{\frac{1-x^2-y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2-4}}$;
 g) $u : \mathbf{R}^3 \supset X_7 \rightarrow \mathbf{R}$, gdzie $u(x, y, z) = \log(z^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 1)$;
 h) $v : \mathbf{R}^n \supset X_8 \rightarrow \mathbf{R}$, gdzie $v(x) = \log(1 - \sum_{i=1}^n x_i^2)$;
 i) $z : \mathbf{R}^n \supset X_9 \rightarrow \mathbf{R}$, gdzie $z(x) = \sqrt{4 - \sum_{i=1}^n x_i^2} + \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i-1)^2}$.

17.67. Wyrazić objętość prostopadłościanu wpisanego w elipsoidę $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ jako funkcję długości dwóch jego krawędzi.

17.68. Wyrazić długość tworzącej stożka ściętego jako funkcję jego objętości V i promieni podstaw r i R .

17.69. Na płaszczyźnie Oxy dane są trzy proste: $x-1=0$, $x+y-1=0$ i $2x-y=3$. Wyrazić sumę kwadratów odległości zmiennego punktu $P(x^*, y^*)$ płaszczyzny Oxy od danych prostych jako funkcję zmiennych x^* i y^* .

17.70. Wyrazić pole trójkąta jako funkcję długości trzech jego boków.

17.71. Narysować wykresy funkcji określonych wzorami:

a) $f(x, y) = 2x - y + 3$; b) $g(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2 - 1}$; c) $k(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$.

17.72. Dane są odwzorowania

a) $r: \langle 0, 2\pi \rangle \ni t \rightarrow (2 + 3 \cos t, 3 + \sin t) \in \mathbf{R}^2$;

b) $g: \mathbf{R} \ni t \rightarrow (t, t^2, -2) \in \mathbf{R}^3$;

c) $h: \mathbf{R} \cup \{0\} \ni t \rightarrow (a \cos t, a \sin t, bt) \in \mathbf{R}^3, (a > 0 \wedge b > 0)$;

d) $k: \mathbf{R} \ni t \rightarrow (a_1 + w_1 t, a_2 + w_2 t, \dots, a_n + w_n t) \in \mathbf{R}^n$;

e) $p: \mathbf{R}^2 \supset D_1 \ni (u, v) \rightarrow (a \cos v \cos u, a \cos v \sin u, a \sin v) \in \mathbf{R}^3$,

gdzie $D_1 = \{(u, v) : u \in \langle 0, 2\pi \rangle \wedge v \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle\}$;

f) $m: \mathbf{R}^2 \supset D_2 \ni (\varphi, \theta) \rightarrow (a \cos \varphi \cos \theta, a \sin \varphi \cos \theta, a \sin \theta) \in \mathbf{R}^3$,

gdzie $D_2 = \{(\varphi, \theta) : \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \wedge \theta \in \langle \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \rangle\}$;

g) $s: \mathbf{R}^2 \supset D_3 \ni (u, v) \rightarrow (u \cos v, u \sin v, 4 - u^2) \in \mathbf{R}^3$,

gdzie $D_3 = \{(u, v) : u \in \langle 0, 2 \rangle \wedge v \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$;

h) $w: \mathbf{R}^2 \supset D_4 \ni (z, v) \rightarrow (4 \cos v, 4 \sin v, z) \in \mathbf{R}^3$,

gdzie $D_4 = \{(z, v) : z \in \mathbf{R} \wedge v \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$;

i) $a: \mathbf{R}^2 \supset D_5 \ni (u, v) \rightarrow (u \cos v, 2u, u \sin v) \in \mathbf{R}^3$,

gdzie $D_5 = \{(u, v) : u \in \langle 0, +\infty \rangle \wedge v \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$;

j) $b: \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow (x, y, x^2 - y^2) \in \mathbf{R}^3$.

Podać interpretacje geometryczne obrazów tych odwzorowań na danych dziedzinach.

17.73. Podać interpretację geometryczną zbioru wypukłego w \mathbf{R}^n .

17.74. Udowodnić, że zbiory:

a) $W = \{x \in \mathbf{R}^n : \mathbf{a}^T x \geq b, \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n - \{0\} \wedge b \in \mathbf{R}\}$ – półprzestrzeń w \mathbf{R}^n ;

b) $A = \{x \in \mathbf{R}^n : d(x, x_0) \leq r, x_0 \in \mathbf{R}^n \wedge r \in \mathbf{R}_+\}$ – kula domknięta w \mathbf{R}^n ;

c) $P = \{x \in \mathbf{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ – przedział domknięty;

d) $K = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax = b, A = [a_{ij}]_{m \times n} \wedge b = [b_i]_{m \times 1} \wedge x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$ są wypukłe.

17.75. Czy zbiór $X = \mathbf{R}^n - \{0\}$ jest wypukły?

17.76. Wykazać: $(A_i \subset \mathbf{R}^n, i = 1, 2, \dots, k \text{ wypukłe}) \Rightarrow (A = \bigcap_{i=1}^k A_i \text{ wypukły})$.

17.77. W punktach $x_i \in \mathbb{R}^n$ umieszczone są masy $m_i > 0$, $i=1, 2, \dots, k$. Środkiem ciężkości układu punktów x_i nazywamy punkt $x_s = \sum_{j=1}^k \frac{m_j}{m} x_j$, gdzie $m = \sum_{j=1}^k m_j$.

Wykazać, że jeżeli zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest wypukły, to dla dowolnego układu punktów należącego do A , gdzie każdy punkt ma odpowiednią masę, środek ciężkości tego układu należy do A .

17.78. Wykazać

$(f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ wypukła na $A \subset \mathbb{R}^n$ wypukłym) \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{N \ni n \geq 2} \bigwedge_{x_i \in A, i=1, 2, \dots, n} \bigwedge_{\alpha_i \in \mathbb{R} \wedge \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1} (f(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j) \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j f(x_j)).$$

17.79. Wykazać, że funkcja liniowa $f: \mathbb{R}^n \ni x \rightarrow (a^T x + b) \in \mathbb{R}$ jest jednocześnie wklęsła i wypukła na \mathbb{R}^n .

17.80. Dana jest funkcja $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $h(x) = q^T x + x^T A x$, gdzie $x^T A x$ jest formą kwadratową, punkt $q = [q_i]_{n \times 1}$ jest dany. Udowodnić, że h jest wklęsła na \mathbb{R}^n wtedy i tylko wtedy, gdy forma $x^T A x$ jest ujemnie półokreślona.

17.81. Wykazać:

$(f_i, i=1, 2, \dots, k$ wypukłe na zbiorze wypukłym $A \subset \mathbb{R}^n \wedge c_i \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (g = \sum_{j=1}^k c_j f_j \text{ wypukła na } A).$$

17.82. Niech $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ wypukła na $\mathbb{R}^n \wedge \alpha \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że zbiór $H_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \geq \alpha\}$ jest wypukły.

17.83. Wykazać:

$(f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ wklęsła na $\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow (\{(x, \alpha) : f(x) \geq \alpha \wedge \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ jest wypukły).

17.84. Wykazać, że jeżeli funkcje $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1, 2, \dots, m$ są wklęsłe na \mathbb{R}^n , to funkcja $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $h(x) = \min(f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ jest wklęsła na \mathbb{R}^n .

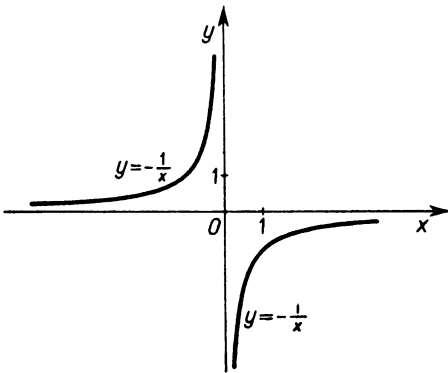
Odpowiedzi

17.12. a) $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = 0, f(4) = 24$; b) $h(-1) = 0, h(-0,001) = -6, h(100) = 4$;
c) $g(-2) = -1, g(-1) = 0, g(0) = 1, g(1) = 2, g(2) = 4$;

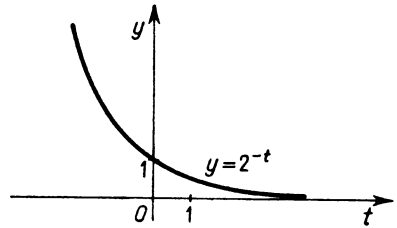
$$d) f(0) = 1, f(-z) = \frac{1+z}{1-z}, f(z+1) = \frac{-z}{2+z}, f(z)+1 = \frac{2}{1+z}, f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{z-1}{z+1},$$

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1+z}{1-z}.$$

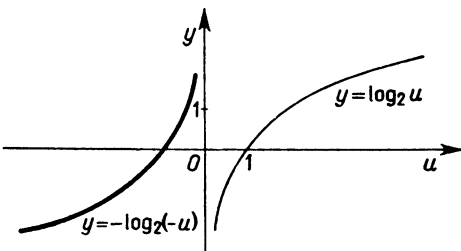
- 17.13. Co najmniej dwie; np. $f_{1,2}(x) = \mp \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2}$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$.
- 17.14. a) $-\infty < z < -2 \vee -2 < z < +\infty$; b) $u \in (-\infty, -1) \cup \langle 0, \frac{4}{7} \rangle \cup (\frac{4}{7}, \frac{5}{7})$;
 c) $-\frac{1}{2} < t \leq 0$; d) $r \in \mathbf{R} - \mathbf{C}$; e) $-\frac{1}{2} < x < 0 \vee 0 < x < \frac{2}{3}$;
 f) $-\sqrt{\frac{1}{2}\pi} \leq x \leq \sqrt{\frac{1}{2}\pi} \vee -\sqrt{\frac{1}{2}\pi(4k+1)} \leq x \leq -\sqrt{\frac{1}{2}\pi(4k-1)} \vee \sqrt{\frac{1}{2}\pi(4k-1)} \leq x \leq \sqrt{\frac{1}{2}\pi(4k+1)}$, $k \in \mathbf{N}$;
 g) $-\infty < z \leq -1 \wedge z \neq \frac{1}{2} + n$, $n = -2, -3, \dots$ lub $1 \leq z < +\infty \wedge z \neq \frac{1}{2} + n$, $n \in \mathbf{N}$;
 h) $10^{\pi(2n-\frac{1}{2})} < y < 10^{\pi(2n+\frac{1}{2})}$, $n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$;
 i) $t \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.
- 17.15. Przeciwdziedzina jest zbiorem skończonym i składa się z liczb: $-1, 0$ i 1 .
- 17.18. a) $x \neq 0$, rys. 17.17; b) $-\infty < t < +\infty$, rys. 17.18;
 c) $-\infty < u < 0$, rys. 17.19; d) $y \neq 0$, rys. 17.20;
 e) $-\infty < t < +\infty$, rys. 17.21;
 f) $x \neq \frac{1}{2}\pi + n\pi$, $n = 0, \mp 1, \dots$, rys. 17.22 (przyjęto różne jednostki na osiach układu).
- 17.19. a) $x \approx 0,6$; b) $x \approx -0,5$; c) $x \approx 1,4$; d) $x \approx \mp 0,8$.
- 17.20. a) $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq y < +\infty$, rys. 17.23; b) $-\infty < x < +\infty$, $|y| \leq 2$, rys. 17.24;
 c) $u \neq \frac{1}{3}\pi(3k+1)$, $k = 0, \mp 1, \dots$, $-\infty < y < +\infty$, rys. 17.25;



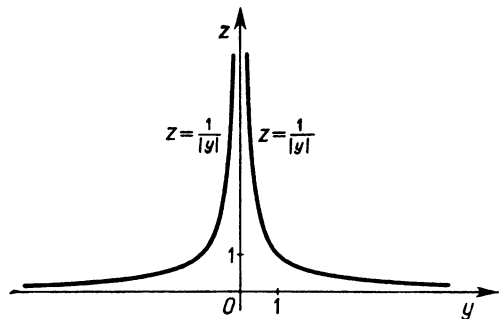
Rys. 17.17



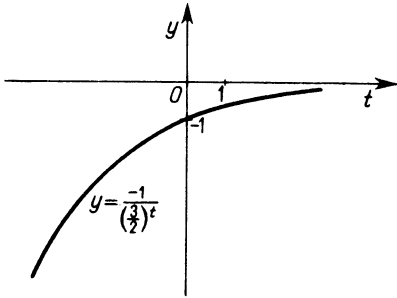
Rys. 17.18



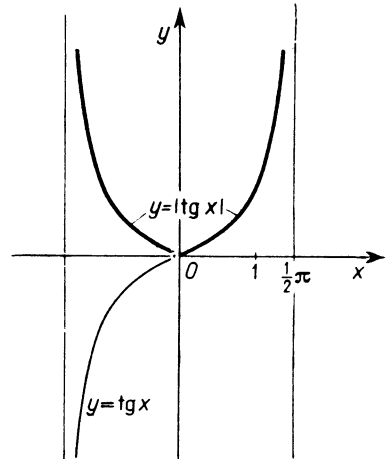
Rys. 17.19



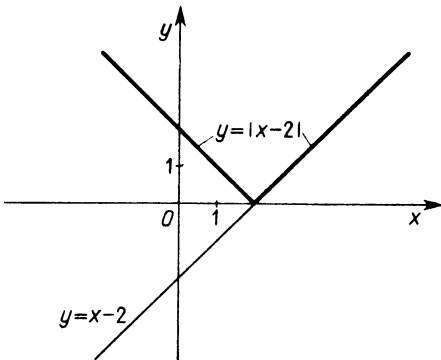
Rys. 17.20



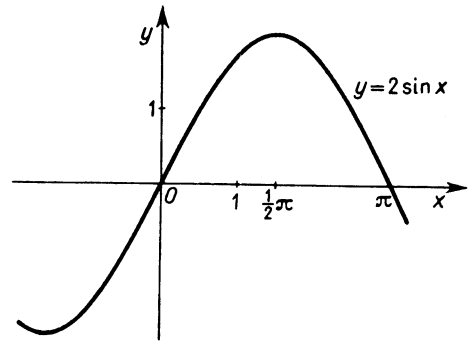
Rys. 17.21



Rys. 17.22



Rys. 17.23



Rys. 17.24

d) $t \neq \frac{1}{2}\pi k, k=0, \mp 1, \dots, -\infty < y < +\infty$, rys. 17.26 (przyjęto różne jednostki na osiach układu);

e) $-\infty < z \leq -2 \vee 2 \leq z < +\infty, 0 \leq y < +\infty$, rys. 17.27;

f) $|x| \leq \sqrt{2}, 0 \leq y \leq \sqrt{2}$, rys. 17.28; g) $-\infty < v < +\infty, 0 < y < +\infty$, rys. 17.29;

h) $-\infty < t < +\infty, |y| \leq 2$, rys. 17.30 (przyjęto różne jednostki na osiach układu);

i) $-\infty < x < +\infty, -4 \leq y \leq 2$, rys. 17.31; j) $-\frac{1}{2} \leq t < +\infty, 0 \leq y < +\infty$, rys. 17.32;

k) $1 < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$, rys. 17.33; l) $-\infty < u < +\infty, 1 < y < +\infty$, rys. 17.34;

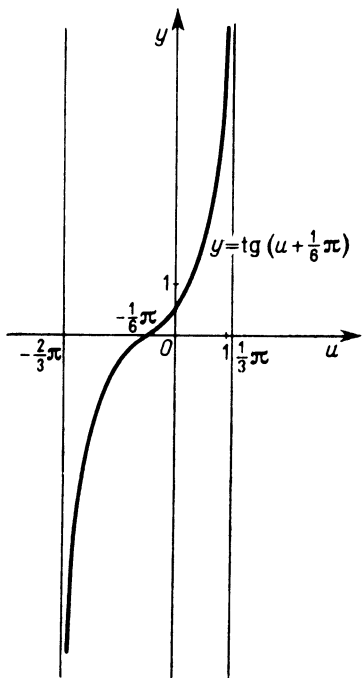
m) $-\infty < z < +\infty, 0 < y < +\infty$, rys. 17.35; n) $-\infty < x < +\infty, 0 \leq y < +\infty$, rys. 17.36;

o) $(-\infty, 0) \cup \langle 1, +\infty)$, przeciwdziedzina $\mp 1, \mp \frac{1}{2}, \mp \frac{1}{3}, \dots, \mp \frac{1}{n}, \dots$, rys. 17.37;

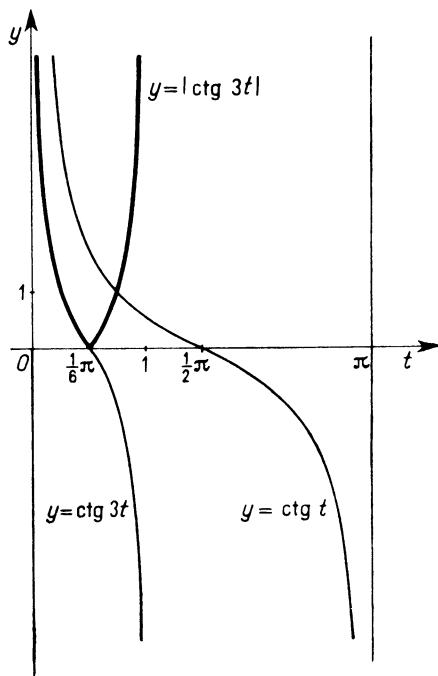
p) $-\infty < x < +\infty$, przeciwdziedzina $\{-2, 0, 1\}$, rys. 17.38;

r) $-\infty < x < +\infty, 3 \leq y < +\infty$, rys. 17.39;

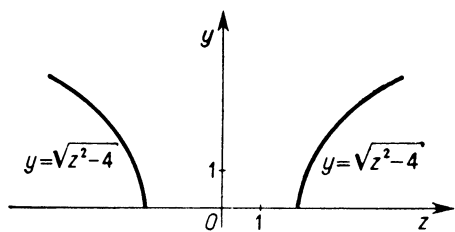
s) $-\infty < x < +\infty, 0 \leq y \leq 2$, rys. 17.40.



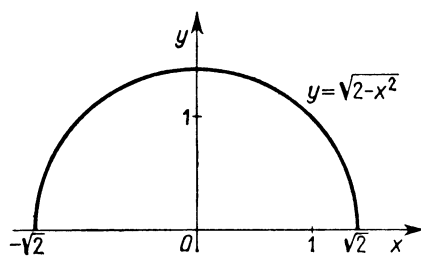
Rys. 17.25



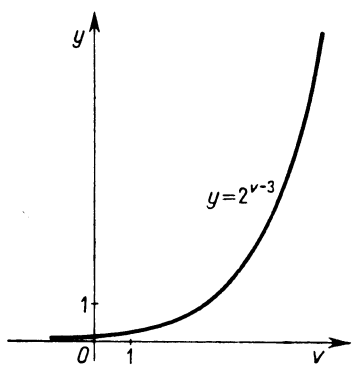
Rys. 17.26



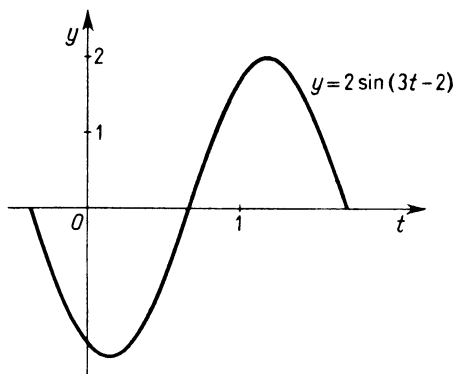
Rys. 17.27



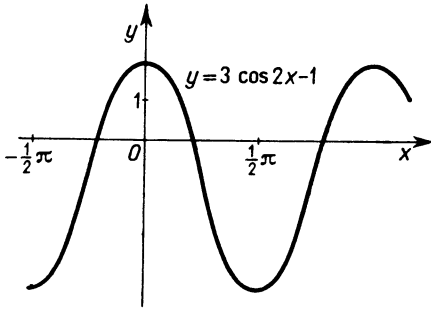
Rys. 17.28



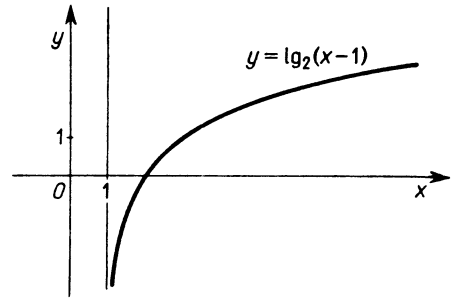
Rys. 17.29



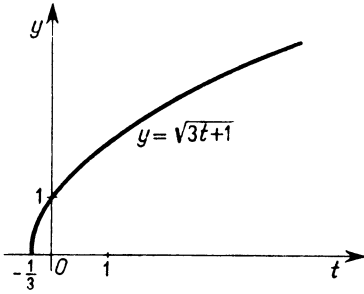
Rys. 17.30



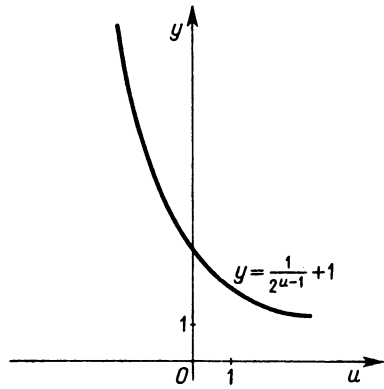
Rys. 17.31



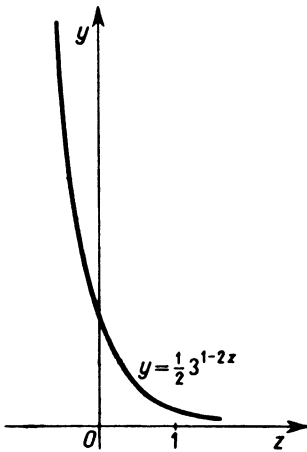
Rys. 17.33



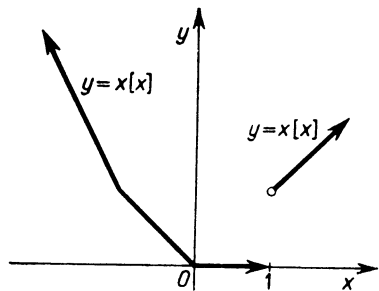
Rys. 17.32



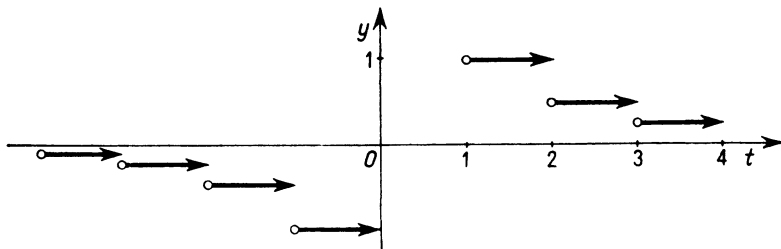
Rys. 17.34



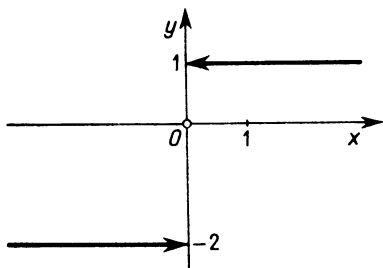
Rys. 17.35



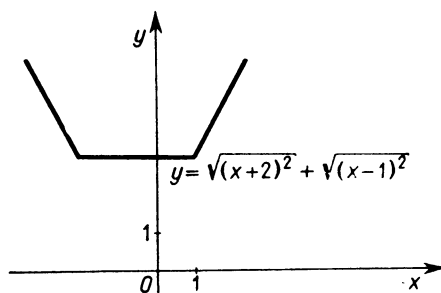
Rys. 17.36



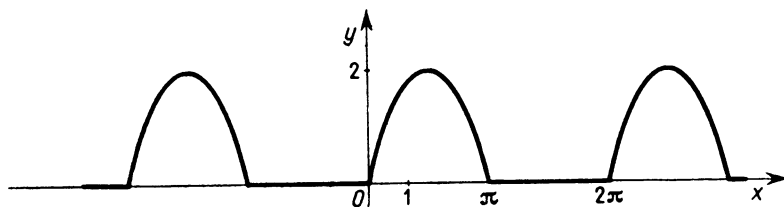
Rys. 17.37



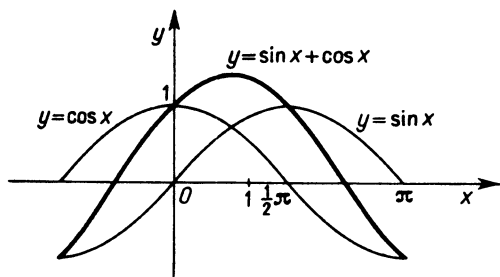
Rys. 17.38



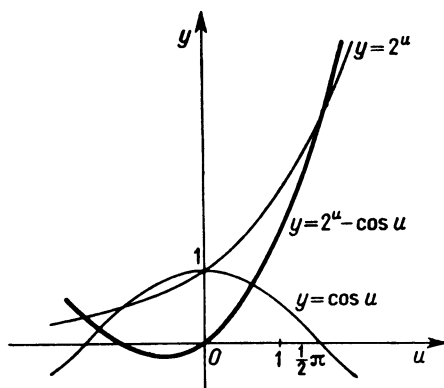
Rys. 17.39



Rys. 17.40



Rys. 17.41



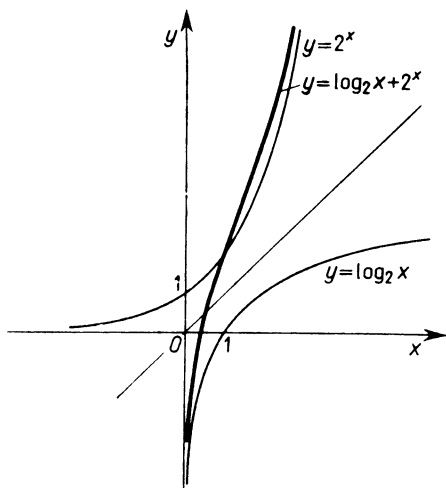
Rys. 17.42

17.21. a) Rys. 17.41; – f) rys. 17.46.

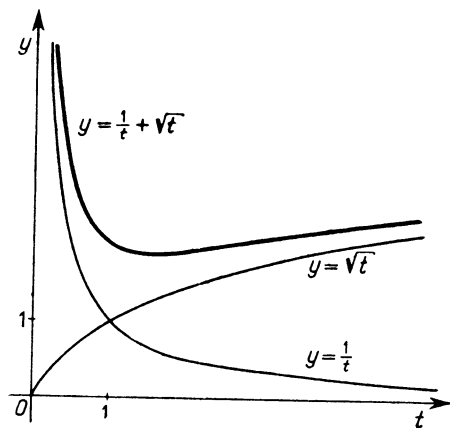
17.22. a) Rys. 17.47; b) rys. 17.48; c) rys. 17.49.

17.23. a) $|x| > \frac{1}{6}$; b) $-\infty < x < 2 \vee 3 < x < +\infty$; c) $|x| > \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

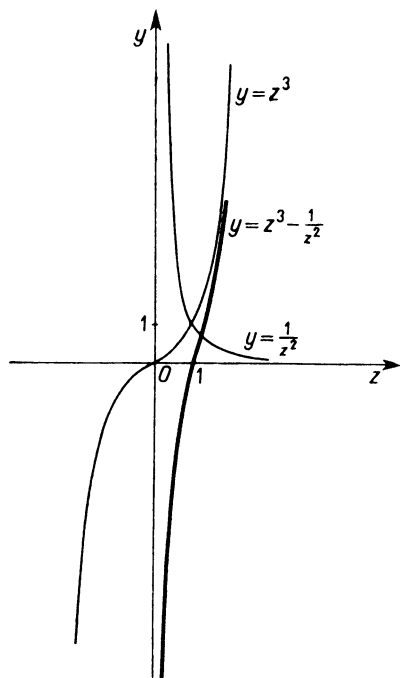
d) $-4 < x < -2 \vee 2 < x < 3$; e) $\frac{1}{2}\pi(2k-1) < x < \frac{1}{8}\pi(6k+1)$, $k=0, \mp 1, \dots$;



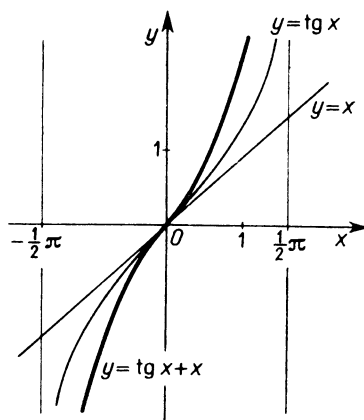
Rys. 17.43



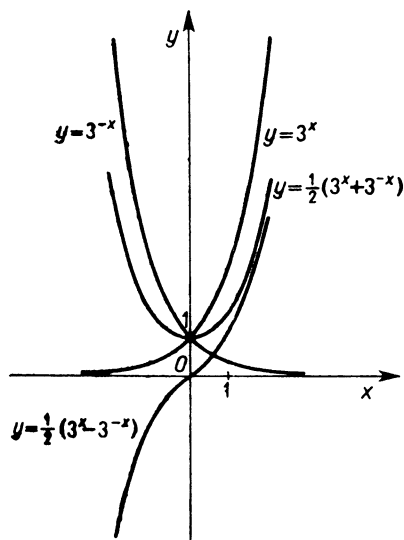
Rys. 17.44



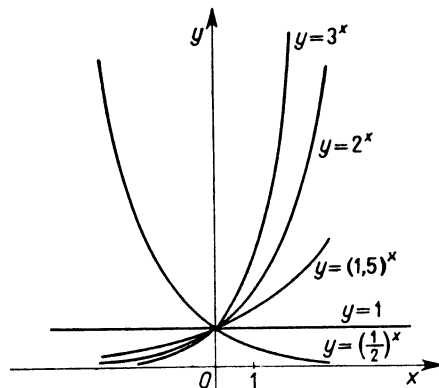
Rys. 17.45



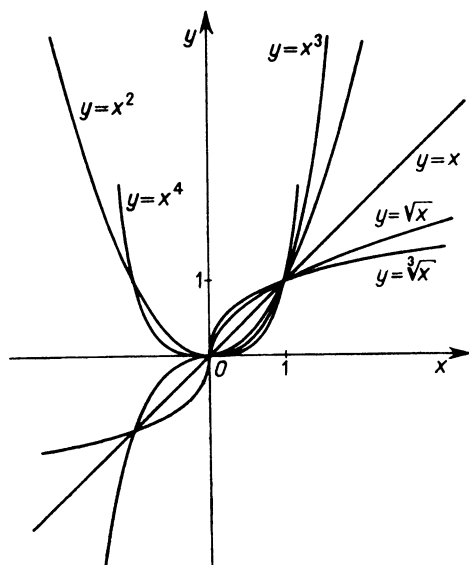
Rys. 17.46



Rys. 17.47



Rys. 17.48

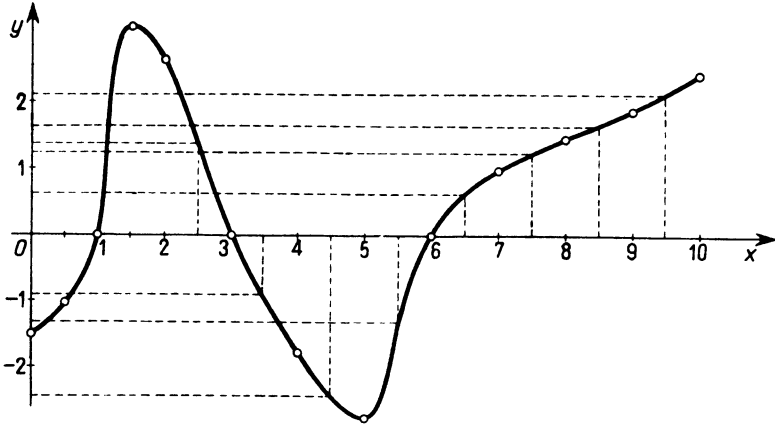


Rys. 17.49

f) $\frac{1}{2}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k=0, \mp 1, \dots$;

g) $-3 < x < +\infty$; h) $-\infty < x < -1$; i) $3^{1/9} < x < +\infty$; j) $\frac{1}{2}\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

17.24. Rys. 17.50; $f(2,5) \approx 1,38$, $f(3,5) \approx -0,89$, $f(4,5) \approx -2,5$, $f(5,5) \approx -1,33$,
 $f(6,5) \approx 0,62$, $f(7,5) \approx 1,25$, $f(8,5) \approx 1,62$, $f(9,5) \approx 2,13$.



Rys. 17.50

17.25. $d(A, C) = d(\varphi) = 2r \cos \varphi$.

17.26. $S(\alpha) = \frac{1}{4}(a^2 - b^2) \operatorname{tg} \alpha$.

17.27. $V(h) = \frac{1}{4}\pi h(4R^2 - h^2)$, $S_b(h) = \pi h \sqrt{4R^2 - h^2}$.

17.28. $i = \frac{1}{3}E$.

17.29. $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$.

17.30. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 + \frac{3}{2}(x-1) & \text{dla } 1 < x \leq 3, \\ x+2 & \text{dla } 3 < x \leq 4; \end{cases}$ (rys. 17.51)

17.31. $S(x_0) = \frac{4b}{a} |x_0| \sqrt{a^2 - x_0^2}$. 17.34. $z = \frac{x+y}{1+xy}$.

17.36. $f(x) = 10 + 5 \cdot 2^x$.

17.37. a) Malejąca dla $-\infty < x < -3$, rosnąca dla $-3 < x < +\infty$;

b) malejąca, gdy $w < 0$, rosnąca, gdy $w > 0$ (w każdym przedziale nie zawierającym liczby $-d/c$);

c) rosnąca dla $-\infty < t < 0$, malejąca dla $0 < t < +\infty$;

d) rosnąca dla $0 \leq x \leq +\infty$; e) rosnąca dla $-\infty < u < +\infty$.

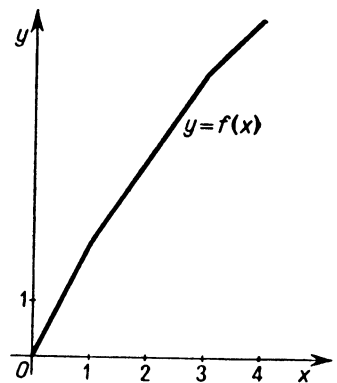
17.39. a) Parzysta; b) nie jest parzysta oraz nie jest nieparzysta; c) jak w punkcie b); d) parzysta; e) nieparzysta; f) nieparzysta.

17.42. $f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.

17.43. a) $k(z) = 2z + 1$; b) $f(x) = \frac{1}{2}(2^x + 2^{-x}) + \frac{1}{2}(2^x - 2^{-x})$;

c) $p(u) = (3u^2 + 2) - u$; d) $g(t) = \frac{1}{2}t^2(e^{-t} + e^t) + \frac{1}{2}t^2(e^{-t} - e^t)$.

17.45. a) $\bigvee_{x_1 \in X \wedge x_2 \in X} [(x_1 \neq x_2) \wedge (f(x_1) = f(x_2))]$;



Rys. 17.51

$$b) \bigvee_{x_1 \in X \wedge x_2 \in X} [(x_1 < x_2) \wedge (f(x_1) \leq f(x_2))];$$

$$c) \bigvee_{x_1 \in X \wedge x_2 \in X} [(x_1 < x_2) \wedge (f(x_1) > f(x_2))];$$

$$d) \bigvee_{x \in X} [f(x) \neq f(-x)]; \quad e) \bigvee_{x \in X} [f(x) \neq -f(-x)].$$

17.48. a), d) i f).

17.51. a) $A=1, \omega=1, T=2\pi, \varphi=0$; b) $A=1, \omega=1/\pi, T=2\pi^2, \varphi=0$;

c) $A=3, \omega=4\pi, T=\frac{1}{2}, \varphi=0$; d) $A=\frac{1}{2}, \omega=3, T=\frac{2}{3}\pi, \varphi=2$;

e) $A=\frac{1}{2}, \omega=2\pi\omega_1, T=1/\omega_1, \varphi=-\frac{2}{3}\pi$.

17.52. a) $f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega x + \varphi)$, gdzie $\varphi = \arctg \frac{b}{a}, a \neq 0$;

b) $g(t) = 2\sqrt{5} \sin(3t + \varphi)$, gdzie $\varphi = \arctg \frac{1}{2}$; c) $f(t) = 2 \sin(2t - \frac{1}{3}\pi)$.

17.53. a) $\frac{2}{3}\pi$; b) 2π ; c) 2π ; d) 24; e) 1.

17.54. Wsk. Podstawić $k = a^m$.

17.55. a) $x \approx 1,4$; b) $x \approx 1,8$; c) $x_1 \approx 0,25, x_2 \approx 1,49$.

17.56. Wsk. W punkcie a) narysować wykresy parabol; w punkcie b) narysować wykresy okręgu i parabol;

a) $x_1 \approx -0,57, y_1 \approx -1,26, x_2 \approx -0,42, y_2 \approx 1,19, x_3 \approx 0,45, y_3 \approx 0,74, x_4 \approx 0,54, y_4 \approx -0,68$;

b) $x_1 \approx -1,3, y_1 \approx 9,91, x_2 \approx 2,3, y_2 \approx 9,73, x_3 \approx -0,62, y_3 \approx -9,98, x_4 \approx 1,62, y_4 \approx -9,87$.

17.57. a) $x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, 1)$; b) $x \in (-1, 2) \cup (4, +\infty)$; c) $x \in (1, +\infty)$;

d) $x \in (-4, -1) \cup (1, 2)$; e) $x \in (-\infty, -2) \cup (\frac{2}{3}, 1) \cup (2, +\infty)$.

17.59. a) $f(x) = \frac{7}{3}x - 2$; b) $f(x) = \frac{7}{6}x^2 + \frac{17}{6}x + 1$; c) $f(x) = \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - \frac{29}{6}x + 2$.

17.60. a) $W(x) = \frac{41}{72}x^3 - \frac{83}{72}x^2 - \frac{127}{36}x + \frac{55}{9}$; b) $W(x) = x^4 + x + 1$; c) $W(x) = x^4 - x + 3$.

17.61. $f(-1) = \frac{25}{4}$.

17.62. a) $z = x + y$; b) $z = \frac{xy}{x+y}$.

16.63. Wsk. Ułożyć równanie i rozwiązać je graficznie; $x \approx 1,47$.

17.64. a) $h(t) = \frac{3}{4t} - \frac{1}{5(t-1)} - \frac{1}{3(t+1)} - \frac{13}{60(t+4)}$; b) $f(x) = -\frac{1}{2} \frac{x-1}{x^2+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x-1}$;

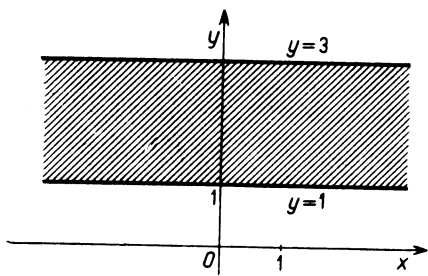
c) $f(z) = -\frac{1}{(z+1)^3} + \frac{1}{3(z+1)^2} - \frac{2}{9(z+1)} + \frac{2}{9(z-2)}$; d) $g(x) = \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{1}{x+1}$;

e) $k(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}$.

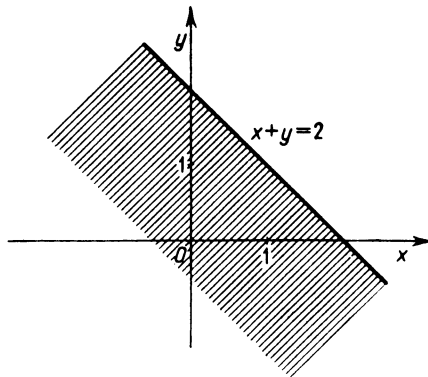
17.65. a) Rys. 17.52; -k) rys. 17.62.

17.66. a) $X_1 = \{(x, y) : (1 \leq x < +\infty) \wedge (-\frac{1}{2} < y < +\infty)\}$;

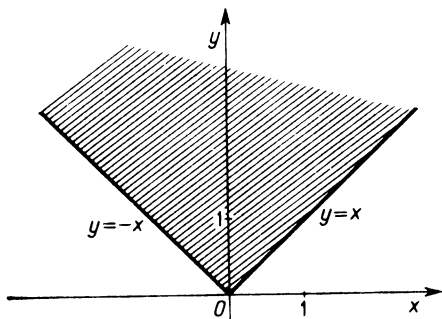
b) $X_2 = \{(u, v) : v \leq 2u+1\}$;



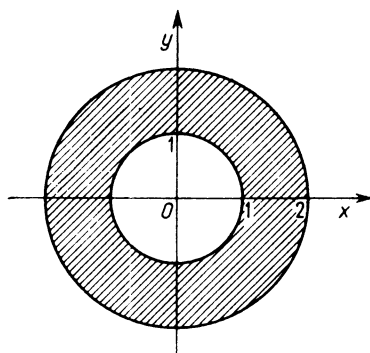
Rys. 17.52



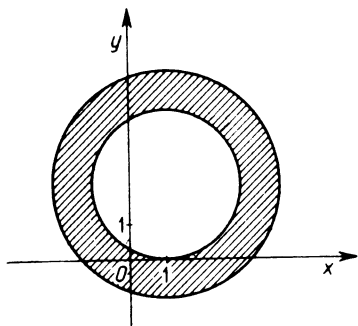
Rys. 17.53



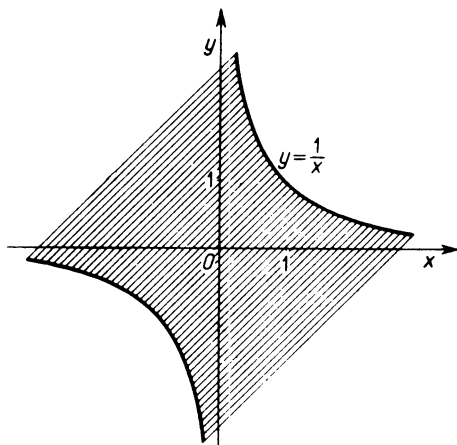
Rys. 17.54



Rys. 17.55



Rys. 17.56

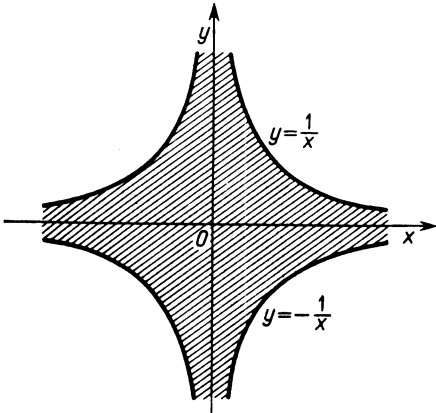


Rys. 17.57

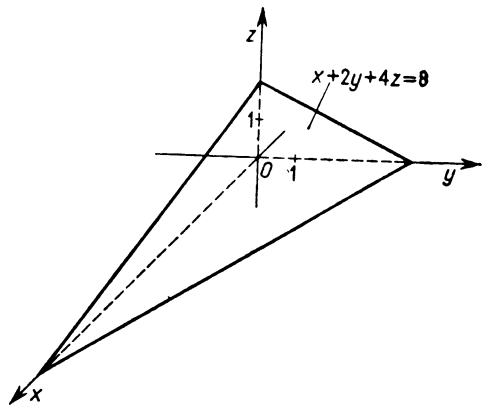
- c) $X_3 = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$;
- d) $X_4 = \{(R, t) : (R^2 + t^2 > 4) \wedge (\frac{1}{9}R^2 + \frac{1}{16}t^2 < 1)\}$;
- e) $X_5 = \{(p, t) : t^2 > 2p \wedge p \neq 0\}$;
- f) $X_6 = \{(x, y, z) : (x^2 + y^2 + z^2 \geq 1) \wedge (x^2 + y^2 + z^2 < 4)\}$;
- g) $X_7 = \{(x, y, z) : z^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 > 1\}$ – wewnątrz hiperboloidy dwupowłokowej;
- h) $X_8 = \{x : \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1\}$ – kula w \mathbf{R}^n ;
- i) $X_9 = \{x : (\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 4) \wedge (x \neq (1, 1, \dots, 1))\}$ – kula domknięta bez punktu.

17.67. $V(x^*, y^*) = 8cx^*y^* \sqrt{1 - \frac{x^{*2}}{a^2} - \frac{y^{*2}}{b^2}}$, gdzie $2x^*$ i $2y^*$ oznaczają długości krawędzi.

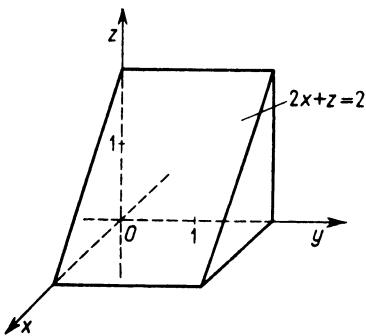
17.68. $L(r, R, V) = \sqrt{(R-r)^2 + \frac{9V^2}{\pi^2(R^2 + rR + r^2)^2}}$.



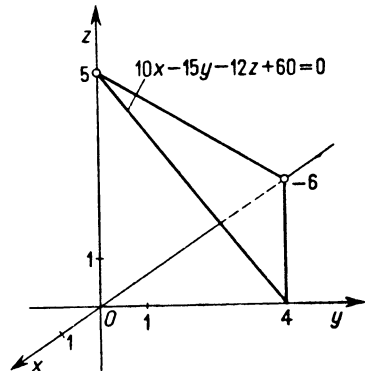
Rys. 17.58



Rys. 17.59



Rys. 17.60

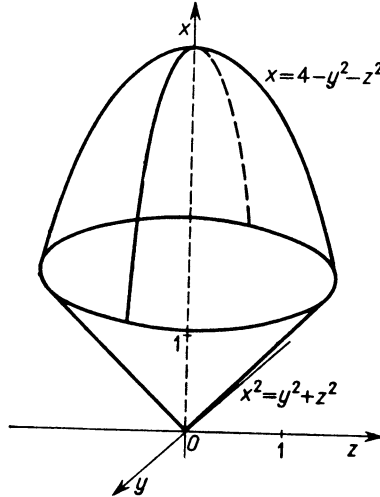


Rys. 17.61

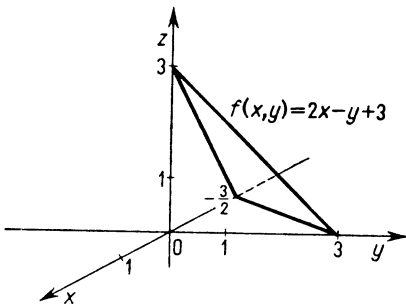
17.69. $d^2 = f(x^*, y^*) = \frac{23}{10}x^{*2} + \frac{7}{10}y^{*2} + \frac{1}{5}x^*y^* - \frac{27}{5}x^* + \frac{1}{5}y^* + \frac{33}{10}$.

17.70. $S(a, b, c) = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$.

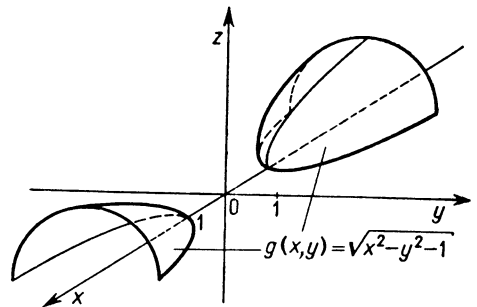
17.71. a) Rys. 17.63; b) rys. 17.64; c) rys. 17.65.



Rys. 17.62



Fys. 17.63



Rys. 17.64

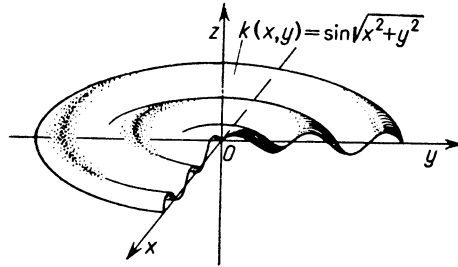
17.72. a) Elipsa o środku w $(2, 3)$ i półosiach 3 i 1 ;

b) parabola w płaszczyźnie o równaniu $z = -2$;

c) linia śrubowa, tzn. zbiór punktów w \mathbb{R}^3 otrzymanych ze złożenia dwóch ruchów: ruchu obrotowego po okręgu o promieniu a ze stałą prędkością kątową $\omega = 1$ i jednostajnego ruchu postępowego w kierunku osi prostopadłej do płaszczyzny okręgu;

d) prosta w \mathbb{R}^n przechodząca przez punkt $a(a_1, a_2, \dots, a_n)$ i równoległa do wektora $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, $\mathbf{w} \neq 0$;

e) sfera o środku w $O(0, 0, 0)$ i promieniu a ; f) pas sferyczny;



Rys. 17.65

- g) część paraboloidy o równaniu $z=4-x^2-y^2$;
 h) walec o równaniu $x^2+y^2=16$, $z \in \mathbf{R}$;
 i) powierzchnia stożka o równaniu $4x^2+4z^2=y^2$ dla $y \geq 0$;
 j) paraboloida hiperboliczna.

17.73. Dla dowolnych dwóch punktów zbioru odcinek łączący te punkty również należy do zbioru.

17.75. Nie. **17.78.** Por. przykład 17.10.

17.80. Wsk. Por. przykład 17.11.

17.84. $h(\mathbf{x}) = \min(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$ oznacza, że

$$\bigwedge_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n} (h(\mathbf{x}) \leq f_i(\mathbf{x}), i=1, 2, \dots, m).$$

§ 18. SUPERPOZYCJA ODWZOROWAŃ. FUNKCJE ODWROTNE

18.1. Niech $h: \mathbf{R} \supset A \mapsto Y \subset \mathbf{R}$, $f: Y \rightarrow \mathbf{R}$. Jak wiadomo (por. § 4) *superpozycją funkcji* h i f (¹) nazywamy funkcję $F=f \circ h: A \rightarrow \mathbf{R}$ określoną wzorem $(f \circ h)(x) = f(h(x))$, $x \in A$. Funkcję h nazywamy *funkcją wewnętrzną*, funkcję f – *funkcją zewnętrzną*. Mając wykresy funkcji h i f można narysować wykres funkcji $f \circ h$ (por. rys. 18.1).

Jeżeli $f: \mathbf{R} \supset X \mapsto Y \subset \mathbf{R}$ przekształca wzajemnie jednoczennie X na Y (tzn. f jest bijekcją), to istnieje funkcja odwrotna $f^{-1}: Y \rightarrow X$ (por. § 4). Jeżeli f określona jest wzorem $y=f(x)$, f^{-1} – wzorem $y=f^{-1}(x)$, to wykres funkcji f^{-1} jest symetryczny do wykresu funkcji f względem prostej o równaniu $y=x$ (por. rys. 18.2).

Inwolucją nazywamy funkcję $f: \mathbf{R} \supset X \rightarrow Y \subset \mathbf{R}$, dla której istnieje funkcja odwrotna f^{-1} i $f=f^{-1}$. Oczywiście w tym przypadku $X=Y$.

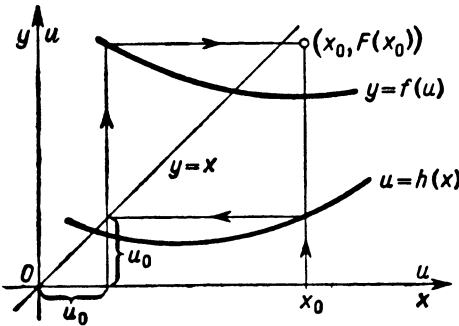
18.2. Niech $g: \mathbf{R}^n \supset A \mapsto B \subset \mathbf{R}^m$, $f: B \rightarrow \mathbf{R}$. *Superpozycją odwzorowań* g i f nazywamy funkcję $h=f \circ g: A \rightarrow \mathbf{R}$ określoną wzorem $(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in A$. Jeżeli funkcje $g_i: A \ni \mathbf{x} \rightarrow g_i(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}$, $i=1, 2, \dots, m$ są współrzędnymi odwzorowania g , to wartość funkcji h w punkcie $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ można napisać w postaci

$$f(g_1(x_1, \dots, x_n), g_2(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)).$$

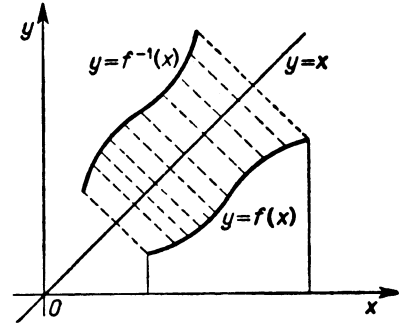
(¹) Por. również uwagę w § 4, punkt 4.2.

Jeżeli $g: \mathbf{R}^n \supset A \mapsto B \subset \mathbf{R}^m$, $f: B \rightarrow \mathbf{R}^k$, to superpozycją odwzorowań g i f nazywamy odwzorowanie $h = f \circ g: A \rightarrow \mathbf{R}^k$ określone wzorem $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, $x \in A$.

Współrzędne odwzorowania h są superpozycjami $h_i = f_i \circ g: A \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \dots, k$, gdzie $f_i: B \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \dots, k$ są współzrędnymi odwzorowania f .



Rys. 18.1



Rys. 18.2

Przykłady

18.1. Dane są funkcje: $f: \langle 0, +\infty \rangle \ni u \rightarrow \sqrt{u} \in \mathbf{R}$,

$$g: \mathbf{R} \ni t \rightarrow (1-t^2) \in \mathbf{R} \quad \text{i} \quad h: \langle \frac{1}{2}\pi, \pi \rangle \ni x \rightarrow \cos 2x \in \mathbf{R}.$$

Znaleźć superpozycje:

- a) $f \circ g: T_1 \rightarrow \mathbf{R}$; b) $g \circ f: U_1 \rightarrow \mathbf{R}$; c) $f \circ f: U_2 \rightarrow \mathbf{R}$;
 d) $g \circ g \circ g: T_2 \rightarrow \mathbf{R}$; e) $h \circ (3f): U_3 \rightarrow \mathbf{R}$; f) $f \circ g \circ h: X_1 \rightarrow \mathbf{R}$;
 g) $g \circ g \circ h: X_2 \rightarrow \mathbf{R}$,

gdzie $T_1, U_1, U_2, T_2, U_3, X_1, X_2$ są maksymalnymi zbiorami w \mathbf{R} , na których może być określona funkcja wyrażona odpowiednim wzorem.

Uwaga. Piszemy $g \circ g \circ g$ zamiast np. $g \circ (g \circ g)$, ponieważ superpozycja jest działaniem łącznym (por. zadanie 4.24).

Rozwiązanie. Korzystamy z definicji superpozycji funkcji, przy czym będziemy pisali wzory określające funkcje:

- a) $(f \circ g)(t) = f(g(t)) = \sqrt{g(t)} = \sqrt{1-t^2} = F(t)$, przy czym $T_1 = \langle -1, 1 \rangle$;
 b) $(g \circ f)(u) = g(f(u)) = 1 - (f(u))^2 = 1 - (\sqrt{u})^2 = G(u)$, $U_1 = \langle 0, +\infty \rangle$;
 c) $(f \circ f)(u) = f(f(u)) = \sqrt{f(u)} = \sqrt{\sqrt{u}} = \sqrt[4]{u} = F(u)$, $U_2 = \langle 0, +\infty \rangle$;
 d) $(g \circ g \circ g)(t) = g(g(g(t))) = 1 - (g(g(t)))^2 = 1 - (1 - (g(t))^2)^2 = 1 - (1 - (1-t^2)^2)^2 = -t^8 + 4t^6 - 4t^4 + 1 = G(t)$, $T_2 = \mathbf{R}$;
 e) $(h \circ (3f))(u) = h(3f(u)) = \cos 2(3f(u)) = \cos 2(3\sqrt{u}) = \cos (6\sqrt{u}) = H(u)$, $U_3 = \langle \frac{1}{36}\pi^2, \frac{1}{9}\pi^2 \rangle$;

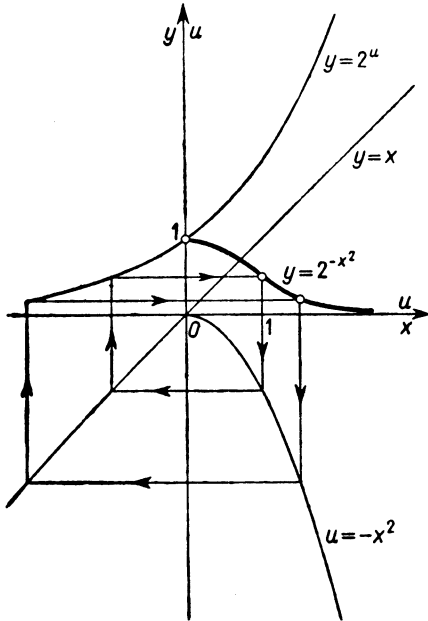
$$f) (f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = \sqrt{g(h(x))} = \sqrt{1-h^2(x)} = \sqrt{1-\cos^2 2x} = \sqrt{\sin^2 2x} = |\sin 2x|, \text{ ale } \sin 2x \leq 0 \text{ dla } \frac{1}{2}\pi \leq x \leq \pi, \text{ stąd } f(g(h(x))) = |\sin 2x| = -\sin 2x = F(x), X_1 = \langle \frac{1}{2}\pi, \pi \rangle;$$

$$g) (g \circ g \circ h)(x) = g(g(h(x))) = 1 - (g(h(x)))^2 = 1 - (1-h^2(x))^2 = 1 - (1-\cos^2 2x)^2 = 1 - \sin^4 2x = G(x), X_2 = \langle \frac{1}{2}\pi, \pi \rangle.$$

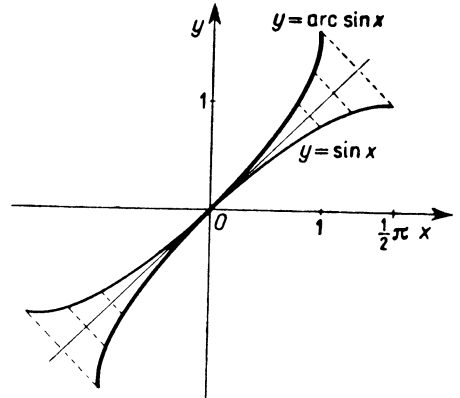
Uwaga. Z przykładów a) i b) wynika, że składanie funkcji nie jest działaniem przemianym.

18.2. Narysować wykres funkcji $f: \langle 0, 2 \rangle \ni x \rightarrow 2^{-x^2} \in \mathbf{R}$.

Rozwiązanie. Funkcja $f = h \circ g$, gdzie $g: \langle 0, 2 \rangle \ni x \rightarrow -x^2 \in \mathbf{R}$ i $h: \langle -4, 0 \rangle \ni u \rightarrow 2^u \in \mathbf{R}$. Mając więc wykresy funkcji g i h znajdujemy punkty wykresu funkcji złożonej f , korzystając z konstrukcji podanej na rysunku 18.1 (rys. 18.3).



Rys. 18.3



Rys. 18.4

18.3. Narysować wykres funkcji odwrotnej względem funkcji $f: \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle \ni x \rightarrow \sin x \in \mathbf{R}$.

Rozwiązanie. Funkcja f jest rosnąca (zatem różnowartościowa) na przedziale $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$, przy czym wartości jej tworzą przedział $\langle -1, 1 \rangle$. Istnieje więc funkcja odwrotna $f^{-1}: \langle -1, 1 \rangle \ni y \rightarrow f^{-1}(y) \in \mathbf{R}$, przy czym $f^{-1}(\langle -1, 1 \rangle) = \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$. Otrzymaną funkcję f^{-1} nazywamy *funkcją cyklotryczną* (kołową) i oznaczamy $\text{arc sin} = f^{-1}$. Wykres funkcji arc sin otrzymujemy z wykresu funkcji sin przez symetryczne odbicie względem prostej $y = x$ (rys. 18.4).

18.4. Wykazać tożsamości:

$$a) \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \text{ dla } |x| \leq 1;$$

$$b) \sin(\arctg x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ dla } x \in \mathbf{R};$$

$$c) \sin(\arcsin x + \arcsin y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \text{ dla } |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1.$$

Rozwiązanie. a) Podstawiając $\alpha = \arcsin x$ do wzoru $\cos \alpha = \mp \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ otrzymujemy

$$\cos(\arcsin x) = \mp \sqrt{1 - [\sin(\arcsin x)]^2} = \mp \sqrt{1 - x^2},$$

ponieważ $\sin(\arcsin x) = x$ dla $|x| \leq 1$. Ale dla $|x| \leq 1$ kąt $\alpha = \arcsin x$ zawarty jest w przedziale $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$, w którym $\cos \alpha \geq 0$; stąd $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

b) We wzorze $\sin \alpha = \mp \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}$, gdzie $|\alpha| < \frac{1}{2}\pi$ podstawiamy $\alpha = \arctg x$; wówczas $x \in \mathbf{R}$. Ale dla $|\alpha| < \frac{1}{2}\pi$, $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$ mają ten sam znak, zatem

$$\sin(\arctg x) = \frac{\operatorname{tg}(\arctg x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\arctg x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ dla } x \in \mathbf{R}.$$

c) Stosując podstawienia $x = \sin \alpha$ ($|x| \leq 1$) i $y = \sin \beta$ ($|y| \leq 1$) do wzoru $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$, kolejno otrzymujemy: $\alpha = \arcsin x$, $|\alpha| \leq \frac{1}{2}\pi$; $\beta = \arcsin y$, $|\beta| \leq \frac{1}{2}\pi$; $\sin(\arcsin x + \arcsin y) = \pm x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}$. Ale $\cos \beta \geq 0$ dla $|\beta| \leq \frac{1}{2}\pi$ i $\cos \alpha \geq 0$ dla $|\alpha| \leq \frac{1}{2}\pi$, stąd $\sin(\arcsin x + \arcsin y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$ dla $|x| \leq 1$ i $|y| \leq 1$.

18.5. Dane są odwzorowania:

$$f: \mathbf{R}^3 \supset D \ni (u, v) \rightarrow (uv, uv \cos v, uv \sin v) \in \mathbf{R}^3,$$

gdzie $D = \{(u, v) : (u \in \langle 0, 1 \rangle) \wedge (v \in \langle 0, 2\pi \rangle)\}$,

$$g: \mathbf{R}^3 \supset V \ni (x, y, z) \rightarrow (1+x^2-y^2-z^2, \sqrt{z}, x^2+y^2+z^2) \in \mathbf{R}^3,$$

gdzie $V = \{(x, y, z) : (x \in \mathbf{R}) \wedge (y \in \mathbf{R}) \wedge (z \in \langle 0, +\infty \rangle)\}$.

Znaleźć superpozycję $g \circ f$ i zbiór, na którym jest określona oraz sprawdzić czy odwzorowania f , g i $g \circ f$ są różnowartościowe na swoich dziedzinach.

Rozwiązanie. Odwzorowanie $g \circ f$ istnieje wtedy gdy $f(D) \cap V \neq \emptyset$. Ale

$$f(D) = \{(x, y, z) : (x \in \langle 0, 2\pi \rangle) \wedge (y \in \langle -\pi, 2\pi \rangle) \wedge (z \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle)\} \Rightarrow f(D) \cap V \neq \emptyset.$$

Zauważmy jednak, że $f(D) \not\subset V$, zatem $g \circ f$ jest określona na zbiorze $D_1 \supset D$, gdzie $D_1 = \{(u, v) : (u \in \langle 0, 1 \rangle) \wedge (v \in \langle 0, \pi \rangle)\}$, ponieważ

$$(\sin v \geq 0 \text{ dla } v \in \langle 0, \pi \rangle) \wedge (\sin v < 0 \text{ dla } v \in (\pi, 2\pi)).$$

Stąd

$$g \circ f: D_1 \ni (u, v) \rightarrow (1, \sqrt{uv \sin v}, 2u^2v^2) \in \mathbf{R}^3.$$

Odwzorowanie f nie jest różnowartościowe na D , ponieważ np.

$$\bigwedge_{v_1, v_2 \in (0, 2\pi) \wedge v_1 \neq v_2} (((0, v_1) \neq (0, v_2)) \Rightarrow ((0v_1, 0v_1 \cos v_1, 0v_1 \sin v_1) = (0v_2, 0v_2 \cos v_2, 0v_2 \sin v_2))),$$

natomiast łatwo sprawdzić, że

$$\bigwedge_{u \in (0, 1) \wedge v \in (0, 2\pi)} (((u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)) \Rightarrow (f((u_1, v_1)) \neq f((u_2, v_2))))$$

Odwzorowanie g jest różnowartościowe na V , gdyż

$$\bigwedge_{z_1, z_2 \in \langle 0, +\infty \rangle} ((z_1 \neq z_2) \Rightarrow (\sqrt{z_1} \neq \sqrt{z_2})).$$

Odwzorowanie $g \circ f$ nie jest różnowartościowe na D_1 , natomiast jest różnowartościowe na $D_2 = \{(u, v) : (u \in (0, 1)) \wedge (v \in (0, \pi))\}$.

Zadania

18.6. Dane są funkcje określone wzorami:

$$f(t) = 1/\sqrt{t}, \quad k(u) = 1 + u^2, \quad h(x) = \operatorname{tg} x^{(1)}.$$

Znaleźć:

- a) $f \circ f$; b) $(f \circ h)(\frac{1}{4}\pi)$; c) $h \circ k$; d) $k \circ h$;
e) $(k \circ k \circ k)(-1)$; f) $f \circ k \circ h$; g) $(f \circ k \circ h)(\frac{1}{3}\pi)$.

18.7. Niech $f: \mathbf{R} \ni x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in \mathbf{R}$. Znaleźć $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ razy}}$.

18.8. Dane są funkcje:

- a) $k = p \circ t: \langle 1, +\infty \rangle \ni x \rightarrow (\sqrt{\log x + \log^2 x}) \in \mathbf{R}$, $t: \mathbf{R}_+ \ni x \rightarrow \log x \in \mathbf{R}$. Znaleźć p ;
b) $h = f \circ g: \mathbf{R} \ni x \rightarrow (x^3 + x - 3) \in \mathbf{R}$, $g: \mathbf{R} \ni x \rightarrow (x + 2) \in \mathbf{R}$. Znaleźć f ;
c) $f \circ g \circ h: \mathbf{R} \ni x \rightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 3} \in \mathbf{R}$,

$$g: \mathbf{R} \ni x \rightarrow (x^2 + 2) \in \mathbf{R}, \quad h: \mathbf{R} \ni x \rightarrow (x + 1) \in \mathbf{R}.$$

Znaleźć f .

18.9. Znaleźć funkcje, z których utworzone są funkcje złożone określone wzorami:

- a) $f(x) = (2x^2 + x + 1)^4$; b) $g(u) = \sqrt{1 + u^2}$; c) $p(x) = a^{-x^2}$; d) $h(t) = 3^{1/(t+1)}$;
e) $m(z) = \log_2 \cos z$; f) $y(x) = \frac{1}{\sqrt{\log_4 \operatorname{tg} x}}$; g) $h(u) = \sqrt{\sin [\log_2 (\operatorname{tg} 3u)]}$.

(¹) Jeżeli w zapisie funkcji nie podano dziedziny, to należy rozumieć, że funkcja jest określona na dziedzinie maksymalnej.

18.10. Narysować wykresy funkcji złożonych określonych wzorami:

a) $f(x) = \sqrt{\operatorname{ctg} x}$ dla $\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$;

b) $g(z) = 2^{\sin z}$ dla $|z| \leq \pi$; c) $h(x) = -\cos \frac{1}{x}$ dla $\frac{-6}{\pi} \leq x \leq \frac{-2}{\pi}$.

18.11. Wykazać, że superpozycja funkcji rosnących [malejących] jest funkcją rosnącą [malejącą].

18.12. Stosując wzór $c^b = a^{b \log_a c}$, przekształcić do postaci funkcji wykładniczej o podstawie a funkcje określone wzorami:

a) $f(x) = x^x$; b) $h(z) = z^{1/(1-z)}$; c) $p(z) = (\operatorname{tg} x)^x$; d) $k(u) = [\cos(\alpha u)]^{b/u^2}$

18.13. Przekształcić funkcje określone wzorami:

a) $f(x) = (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ dla $x \in \mathbf{R} - \mathbf{C}$;

b) $f(x) = x^2 \log_a x$ dla $x > 0$;

c) $f(x) = (\pi - 2 \operatorname{tg} x) \log_3 x$ dla $x > 0$ i $x \neq 1$ i $x \neq (\frac{1}{2}\pi + n\pi)$, $n = 0, 1, 2, \dots$;

d) $f(x) = (a^{1/x} - 1)x$

do postaci h/g , gdzie g nie jest funkcją stałą.

18.14. Na papierze milimetrowym narysować wykresy funkcji cyklometrycznych (por. uwagę do zadania 17.17).

18.15. Dane są funkcje określone wzorami:

a) $y = f(x) = x$; b) $y = f(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$; c) $y = k(z) = z^n$, $n = 1, 2, \dots$;

d) $y = g(x) = \operatorname{ctg}(x+3)$; e) $z = z(x) = \log_3(\frac{1}{2}x+1)$; f) $w = w(u) = \frac{u+1}{2u-3}$;

g) $y = f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$; h) $y = f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x+2}$.

Znaleźć przedziały, w których istnieją funkcje odwrotne do danych oraz wyznaczyć te funkcje.

18.16. Wykazać, że funkcja odwrotna względem funkcji rosnącej [malejącej] jest funkcją rosnącą [malejącą].

18.17. Czy istnieje funkcja odwrotna względem funkcji parzystej określonej na przedziale $\langle -a, a \rangle$ ($a > 0$)?

18.18. Wykazać, że: a) funkcja nieparzysta jest różnowartościowa; b) funkcja odwrotna do funkcji nieparzystej jest nieparzysta.

18.19. Dane są funkcje: $f: \mathbf{R} \ni x \rightarrow \sqrt[3]{x} \in \mathbf{R}$, $g: \mathbf{R} \ni x \rightarrow x^3 \in \mathbf{R}$, $k: \mathbf{R} \ni x \rightarrow a^x \in \mathbf{R}$, $p: \mathbf{R}_+ \ni x \rightarrow \log_a x \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}_+ \wedge a \neq 1$.

Wykazać, że $f(g(x)) - k(2p(x)) - x + x^2 = 0$, $x \in \mathbf{R}_+$.

18.20. Zbadać, czy istnieje funkcja homograficzna $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ spełniająca warunek $h[h(x)] = x$, tzn. identyczna z funkcją do niej odwrotną.

18.21. Obliczyć ⁽¹⁾:

a) $3 \arcsin 1 - 2 \arccos 0 + 4 \arctg 1 - \operatorname{arccotg}(-1)$;

b) $\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2} \sqrt{3} + \arctg(-\sqrt{3}) - 3 \arcsin \frac{1}{2} \sqrt{2}$;

c) $2 \arccos(-\frac{1}{2}) + \arctg(\operatorname{tg} \frac{7}{8} \pi) - \arctg 1$;

d) $-\frac{1}{3} \arctg(2 - \sqrt{3}) + \arccos(\sin \frac{15}{7} \pi) + \arctg \frac{1}{3} \sqrt{3}$;

e) $\cos[3 \arcsin \frac{1}{2} \sqrt{3} + \arccos(-\frac{1}{2})]$.

18.22. Wykazać prawdziwość wzorów:

a) $\arcsin x + \arccos x = \frac{1}{2} \pi$, $|x| \leq 1$; b) $\arcsin \sqrt{x} + \arccos \sqrt{x} = \frac{1}{2} \pi$, $0 \leq x \leq 1$;

c) $\arctg x = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}$, $x \neq 0$; d) $\arccos \sqrt{1-x^2} = -\arcsin x$, $-1 \leq x \leq 0$;

e) $\arctg x + \arctg y = \arctg \frac{x+y}{1-xy}$, $xy < 1$;

f) $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$, $|x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1 \wedge xy \leq 0$ lub $x^2 + y^2 \leq 1$.

18.23. Sprawdzić równości:

a) $\arctg(3 + 2\sqrt{2}) - \arctg \frac{1}{2} \sqrt{2} = \frac{1}{4} \pi$;

b) $\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65} = \frac{1}{2} \pi$;

c) $2 \arctg 2 + \arcsin \frac{4}{5} = \pi$.

18.24. Znaleźć dziedzinę oraz narysować wykresy funkcji określonych wzorami:

a) $f(x) = \arcsin(x-2)$; b) $g(t) = \arctg(t+3)$;

c) $h(u) = \arccos(u-1)$; d) $p(x) = \operatorname{arccotg}(x+4)$;

e) $f(x) = 3 + \arctg(x-2)$; f) $k(t) = -1 + \arccos(t+5)$.

18.25. Narysować wykresy funkcji określonych wzorami:

a) $p(x) = \arcsin \frac{1}{2} x$; b) $h(t) = 2 \arctg 3t$; c) $p(u) = -2 + 3 \arctg \frac{1}{2} u$;

d) $f(x) = 1 + \frac{1}{2} \arccos(2x-1)$; e) $g(t) = (1 + 2 \arctg \frac{1}{4} t)^2$; f) $h(x) = 2^{2 \arcsin(x-1)}$.

18.26. Dane są odwzorowania:

a) $f: \mathbf{R}^2 \supset D \ni (r, \varphi) \rightarrow (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \in \mathbf{R}^2$,

gdzie $D = \{(r, \varphi) : (r \in \langle 1, e \rangle) \wedge (\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle)\}$,

$$g: \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\} \ni (x, y) \rightarrow \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \in \mathbf{R}.$$

Znaleźć $g \circ f$;

b) $h: V \ni (\rho, \theta, \varphi) \rightarrow (\rho \cos \theta \cos \varphi, \rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta) \in \mathbf{R}^3$,

gdzie $V = \{(\rho, \theta, \varphi) : (\rho \in \langle 0, +\infty \rangle) \wedge (\theta \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle) \wedge (\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle)\}$,

$$k: \mathbf{R}^3 \ni (x, y, z) \rightarrow (x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{x^2 + y^2}) \in \mathbf{R}.$$

Znaleźć $k \circ h$.

⁽¹⁾ Funkcje \arcsin i \arccos rozpatrujemy na przedziale $\langle -1, 1 \rangle$, przy czym $-\frac{1}{2}\pi \leq \arcsin x \leq \frac{1}{2}\pi$ oraz $0 \leq \arccos x \leq \pi$; funkcje \arctg i $\operatorname{arccotg}$ rozpatrujemy na przedziale $-\infty < x < +\infty$, przy czym $-\frac{1}{2}\pi < \arctg x < \frac{1}{2}\pi$ oraz $0 < \operatorname{arccotg} x < \pi$.

$$c) \mathbf{r}: \mathbf{R}^3 \ni (\rho, \theta, \varphi) \rightarrow (a \cos \theta \cos \varphi, b \cos \theta \sin \varphi, c \rho \sin \theta) \in \mathbf{R}^3,$$

$$p: \mathbf{R}^3 \ni (x, y, z) \rightarrow \left[\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \frac{z}{c} \right] \in \mathbf{R}.$$

Znaleźć $p \circ \mathbf{r}$;

$$d) \mathbf{h}: \mathbf{R}^n \ni (u, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) \rightarrow$$

$$\rightarrow (u \cos v_1 \cos v_2 \dots \cos v_{n-1}, u \sin v_1 \cos v_2 \dots \cos v_{n-1},$$

$$u \sin v_2 \cos v_3 \dots \cos v_{n-1}, \dots, u \sin v_{n-2} \cos v_{n-1}, u \sin v_{n-1}) \in \mathbf{R}^n$$

(odwzorowanie \mathbf{h} nazywamy odwzorowaniem sferycznym),

$$m: \mathbf{R}^n \ni (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \left(4 \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \in \mathbf{R}.$$

Znaleźć $m \circ \mathbf{h}$.

18.27. Wykazać, że jeżeli odwzorowania \mathbf{f} i \mathbf{g} są różnowartościowe na swoich dziedzinach i istnieje superpozycja $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$, to superpozycja $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ jest różnowartościowa.

18.28. Dane są odwzorowania:

$$\mathbf{f}: \mathbf{R}^2 \ni (u, v) \rightarrow (u + 2v, \cos v, u \sin v) \in \mathbf{R}^3$$

$$\mathbf{g}: \mathbf{R}^3 \ni (x, y, z) \rightarrow (x^2 y^2, 2xyz, x) \in \mathbf{R}^3.$$

Znaleźć współrzędne odwzorowania $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ oraz $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(1, \frac{1}{2}\pi)$.

18.29. Dane są odwzorowania:

$$\mathbf{f}: \mathbf{R}^2 \supset D \ni (x, y) \rightarrow (\sin x + y, \sqrt{x + y + \frac{1}{2}\pi}) \in \mathbf{R}^2$$

gdzie $D = \{(x, y) : (x \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle) \wedge (y \in \langle 0, 1 \rangle)\}$,

$$\mathbf{g}: \mathbf{R}^2 \supset D_1 \ni (x, y) \rightarrow (\log_2(x + y), xy) \in \mathbf{R}^2,$$

gdzie $D_1 = \{(x, y) : (x \in \langle 4, 5 \rangle) \wedge (y \in \langle 0, 3 \rangle)\}$,

$$\mathbf{h}: \mathbf{R}^2 \supset D_3 \ni (x, y) \rightarrow (x^2, y^2, xy) \in \mathbf{R}^3,$$

gdzie $D_3 = \{(x, y) : (x \in \langle -1, 4 \rangle) \wedge (y \in \langle -2, 5 \rangle)\}$.

- Czy istnieją odwzorowania: $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$, $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$, $\mathbf{f} \circ \mathbf{f}$, $\mathbf{g} \circ \mathbf{g}$, $\mathbf{h} \circ \mathbf{g}$?
- Czy symbole $\mathbf{g} \circ \mathbf{h}$, $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$, $\mathbf{h} \circ \mathbf{h}$ mają sens?
- Znaleźć współrzędne odwzorowania $\mathbf{f} \circ \mathbf{f}$;
- Zbadać czy odwzorowania \mathbf{f} , \mathbf{g} i \mathbf{h} są różnowartościowe.

18.30. Znaleźć odwzorowanie $\mathbf{g}: \mathbf{R}^n - \{\mathbf{o}\} \rightarrow \mathbf{R}^n - \{\mathbf{o}\}$ określone następująco: każdemu punktowi $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n - \{\mathbf{o}\}$ przyporządkowujemy wektor $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^n - \{\mathbf{o}\}$ leżący na prostej $L(\mathbf{o}; \mathbf{x})$ i spełniający warunek $d(\mathbf{O}, \mathbf{x}) d(\mathbf{O}, \mathbf{g}(\mathbf{x})) = r^2$, gdzie stała $r \in \mathbf{R}_+$.

Uwaga. Odwzorowanie \mathbf{g} nazywamy inwersją o środku \mathbf{O} i promieniu r .

18.31. Wykazać, że odwzorowanie \mathbf{g} określone w zadaniu 18.30 jest wzajemnie jednoznaczne oraz, że $\mathbf{g} = \mathbf{g}^{-1}$ (\mathbf{g} jest inwolucją).

18.32. Dana jest sfera $F = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n: |\mathbf{x}|^2 = r^2, r \in \mathbf{R}_+\}$ oraz odwzorowanie g określone w zad. 18.30.

Wykazać, że a) każdy punkt sfery F jest stałym punktem odwzorowania g (por. § 9); b) obrazy punktów leżących wewnątrz [zewnątrz] sfery F przy odwzorowaniu g leżą zewnątrz [wewnątrz] sfery F .

18.33. W \mathbf{R}^{n+1} weźmy sferę n wymiarową F o środku $\mathbf{a}(0, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}r) \in \mathbf{R}^{n+1}$ i promieniu $\frac{1}{2}r$, tzn. zbiór punktów:

$$F = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}: \sum_{i=1}^n x_i^2 + x_{n+1}(x_{n+1} - r) = 0\}$$

oraz punkt $\mathbf{b}(0, 0, \dots, 0, r) \in F$ zwany *biegunem*.

Niech $\mathbf{h}: F - \{\mathbf{b}\} \rightarrow \mathbf{R}^n$ będzie odwzorowaniem określonym następująco: każdemu punktowi $\mathbf{x} \in F - \{\mathbf{b}\}$ przyporządkowujemy wektor $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^n$ przecięcia prostej $L(\mathbf{b}; \mathbf{x})$ z \mathbf{R}^n .

Znaleźć współrzędne odwzorowania \mathbf{h} oraz wykazać, że istnieje \mathbf{h}^{-1} i znaleźć współrzędne odwzorowania \mathbf{h}^{-1} .

Uwaga. Odwzorowanie \mathbf{h} nazywamy *rzutem stereograficznym sfery F na \mathbf{R}^n* .

Odpowiedzi ⁽¹⁾

18.6. a) $y = F(t) = \sqrt[4]{t}, 0 < t < +\infty, 0 < y < +\infty;$ b) 1;

c) $y = H(u) = \operatorname{tg}(1 + u^2), -\infty < u < +\infty, u \neq \mp\sqrt{\frac{1}{2}\pi + n\pi - 1}, n = 0, +1, +2, \dots, -\infty < y < +\infty;$

d) $y = K(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, -\infty < x < +\infty$ i $x \neq \frac{1}{2}\pi + n\pi, n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots, 0 < y < +\infty;$

e) 26;

f) $y = F(x) = |\cos x|, -\infty < x < +\infty$ i $x \neq \frac{1}{2}\pi + n\pi, n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots, 0 < y \leq 1;$

g) $\frac{1}{2}$.

18.7. $\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}.$

18.8. a) $p: \langle 0, +\infty \rangle \ni x \rightarrow (\sqrt{x+x^2}) \in \mathbf{R};$

b) $f: \mathbf{R} \ni x \rightarrow (x^3 - 6x^2 + 13x + 13) \in \mathbf{R};$ c) $f: \mathbf{R}_+ \ni x \rightarrow \sqrt{x} \in \mathbf{R}.$

18.9. a) Np. $u = u(x) = 2x^2 + x + 1$ i $f_1(u) = u^4;$ b) np. $t = t(u) = 1 + u^2$ i $g_1(t) = \sqrt{t};$

c) np. $z = z(x) = -x^2$ i $h_1(z) = a^z;$ d) np. $p = p(t) = \frac{1}{1+t}$ i $h_1(p) = 3^p;$

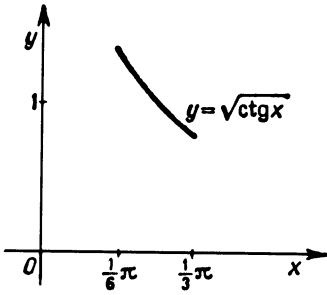
e) np. $y = y(z) = \cos z$ i $m_1(y) = \log_2 y;$ f) np. $z = z(x) = \operatorname{tg} x, u = u(z) = \log_4 z$ i

$y_1(u) = \frac{1}{\sqrt{u}};$ g) np. $m = m(u) = 3u, p = p(m) = \operatorname{tg} m, w = w(p) = \log_2 p, k = k(w) = \sin w$

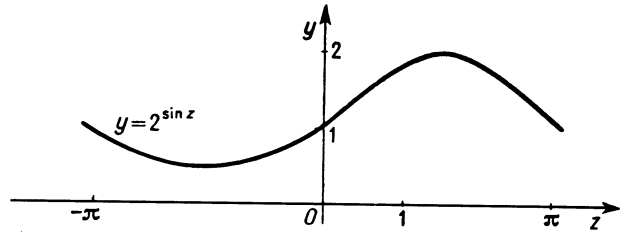
i $h_1(k) = \sqrt{k}.$

18.10. a) Rys. 18.5; b) rys. 18.6; c) rys. 18.7.

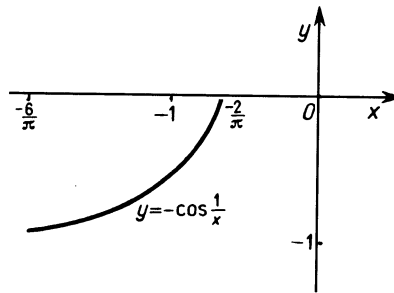
⁽¹⁾ W odpowiedziach podajemy wzory określające funkcje.



Rys. 18.5



Rys. 18.6



Rys. 18.7

18.12. a) $f(x) = a^{x \log_a x}$; b) $h(z) = a^{(\log_a z)/(1-z)}$; c) $p(x) = a^{x \log_a \operatorname{tg} x}$;
 d) $k(u) = a^{(b/u^2) \log_a \cos(au)}$.

18.13. a) Np. $f(x) = \frac{1-x}{\operatorname{ctg}(\frac{1}{2}\pi x)}$; b) np. $f(x) = \frac{\log_a x}{1/x^2}$;

c) np. $f(x) = \frac{\pi - 2 \operatorname{tg} x}{\log_3 x}$; d) np. $f(x) = \frac{a^{1/x} - 1}{x}$.

18.15. a) $-\infty < x < +\infty$, $x = g(y) = y$, b) $|x| < \pi$, $x = g(y) = 2 \arctg y$;

c) dla n nieparzystych $-\infty < z < +\infty$, $z = z(y) = \sqrt[n]{y}$, dla n parzystych $-\infty < z \leq 0$

lub $0 < z < +\infty$, $z = -\sqrt[n]{y}$ dla $-\infty < z \leq 0$, $z = \sqrt[n]{y}$ dla $0 < z < +\infty$;

d) $k\pi - 3 < x < (k+1)\pi - 3$, $k \in \mathbf{C}$, $x = g(y) = k\pi - 3 + \arctg y$;

e) $-2 < x < +\infty$, $x = x(z) = -2 + 2 \cdot 3^z$;

f) $-\infty < u < \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} < u < +\infty$, $u = u(w) = \frac{3w+1}{2w-1}$ w obu przedziałach;

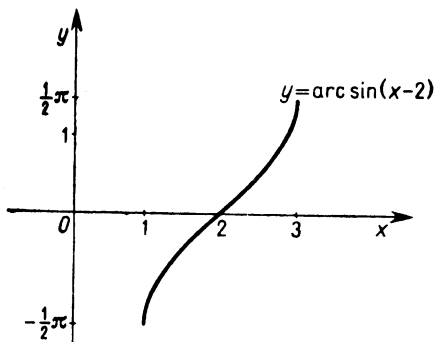
g) $-\infty < x < +\infty$, $x = x(y) = \log_2(y + \sqrt{y^2 + 1})$;

h) $-2 \leq x < +\infty$, $x = x(y) = -2 + \operatorname{tg}^2 y$.

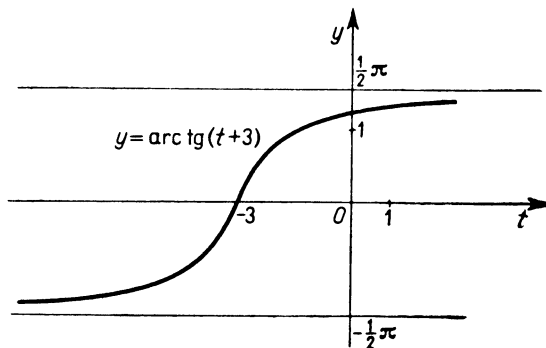
18.17. Nie. 18.20. $h_1(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$.

18.21. a) $\frac{7}{4}\pi$; b) $-\pi$; c) $\frac{23}{24}\pi$; d) $\frac{125}{252}\pi$; e) $\frac{1}{2}$.

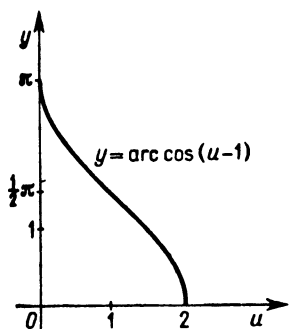
- 18.24. a) $1 \leq x \leq 3$, rys. 18.8; b) $-\infty < t < +\infty$, rys. 18.9;
 c) $0 \leq u \leq 2$, rys. 18.10; d) $-\infty < x < +\infty$, rys. 18.11;
 e) $-\infty < x < +\infty$, rys. 18.12; f) $-6 \leq t \leq -4$, rys. 18.13.
- 18.25. a) Rys. 18.14 – f) rys. 18.19.



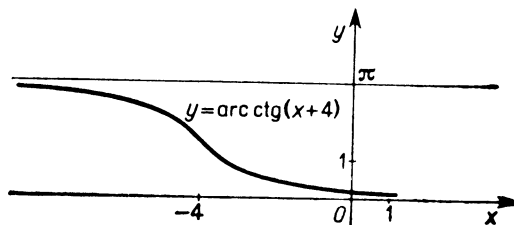
Rys. 18.8



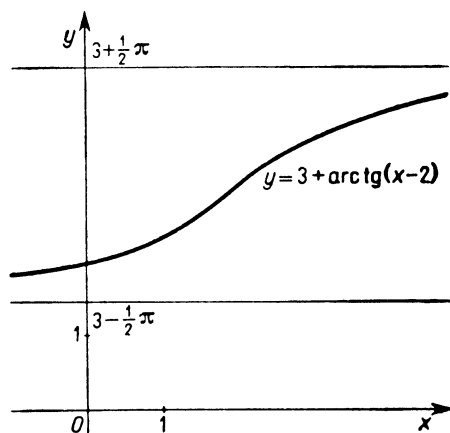
Rys. 18.9



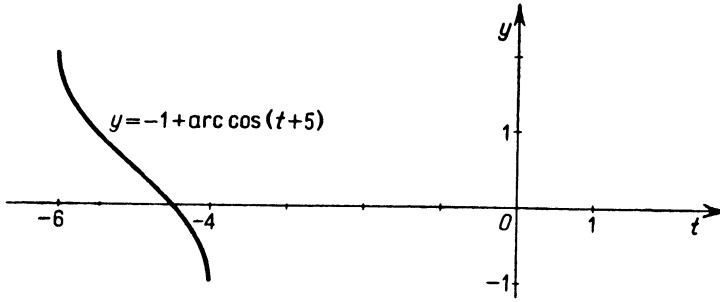
Rys. 18.10



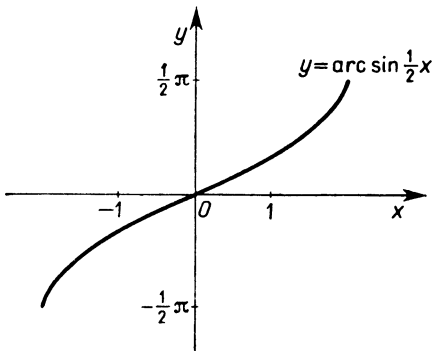
Rys. 18.11



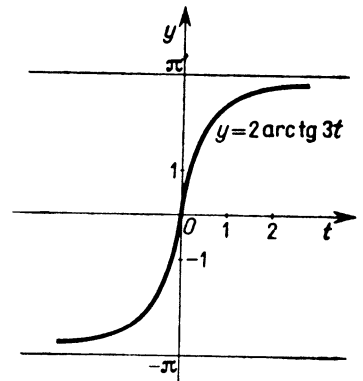
Rys. 18.12



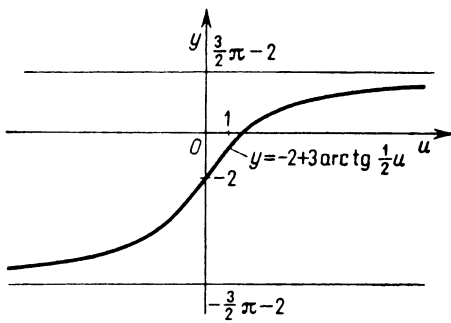
Rys. 18.13



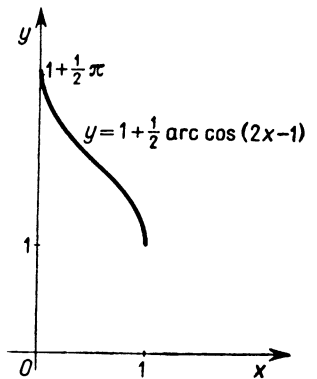
Rys. 18.14



Rys. 18.15



Rys. 18.16



Rys. 18.17

18.26. a) $g \circ f: D \ni (r, \varphi) \rightarrow \frac{2 \ln r}{r^2} \in \mathbf{R};$

b) $k \circ h: V \ni (\rho, \theta, \varphi) \rightarrow (\rho(\rho - \cos \varphi) \in \mathbf{R};$ c) $p \circ r: \mathbf{R}^3 \ni (\rho, \theta, \varphi) \rightarrow (|\rho| + \rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta) \in \mathbf{R};$

d) $m \circ h: \mathbf{R}^n \ni (u, v_1, \dots, v_{n-1}) \rightarrow \sqrt{|u| + u^2} \in \mathbf{R}.$

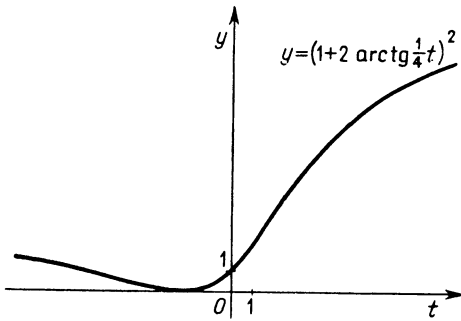
18.28. $h_i = g_i \circ f$, $i = 1, 2, 3$, tzn. $h_1: \mathbf{R}^2 \rightarrow (\cos^2 v(u+2v)^2) \in \mathbf{R}$, $h_2: \mathbf{R}^2 \rightarrow (u(u+2v)\sin 2v) \in \mathbf{R}$, $h_3: \mathbf{R}^2 \rightarrow (u+2v) \in \mathbf{R}$; $(g \circ f)(1, \frac{1}{2}\pi) = (0, 0, 1 + \pi)$.

18.29. a) $f \circ f$, $h \circ g$ istnieją, $g \circ f$, $f \circ g$, $g \circ g$ nie istnieją, mają dziedziny puste; b) nie mają sensu; c) jeżeli $k = f \circ f$, to współrzędne $k_i = f_i \circ f$, gdzie $f = (f_1, f_2)$,

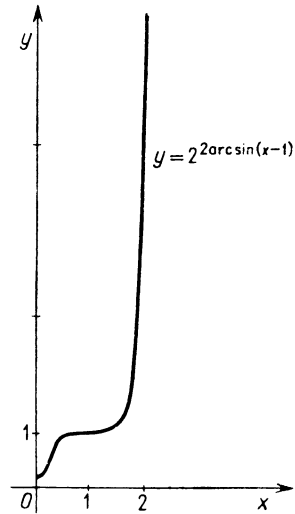
$$k_1(x, y) = \sin(\sin x + y) + \sqrt{x + y + \frac{1}{2}\pi},$$

$$k_2(x, y) = \sqrt{\sin x + y + \sqrt{x + y + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi}};$$

d) f i g różnowartościowe na swoich dziedzinach, h nie jest różnowartościowe.



Rys. 18.18



Rys. 18.19

$$18.30. \left(y = g(x) = r^2 \frac{x}{|x|^2} \right) \Leftrightarrow \left(y_i = f_i(x) = r^2 \frac{x_i}{|x|^2}, i = 1, 2, \dots, n \right).$$

$$18.31. g^{-1}: \mathbf{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}^n - \{0\}, \text{ gdzie } x = g^{-1}(y) = r^2 \frac{y}{|y|^2}.$$

18.32. Wsk. Mówimy, że punkt $x^1 \in \mathbf{R}^n$ leży wewnątrz [zewnątrz] sfery $F = \{x \in \mathbf{R}^n: d(x, x^0) = r\}$, jeżeli $d(x^1, x^0) < r$ [$d(x^1, x^0) > r$].

$$18.33. (y = h(x)) \Leftrightarrow \left(y_i = h_i(x) = \frac{r x_i}{r - x_{n+1}}, i = 1, 2, \dots, n \right),$$

$$(x = h^{-1}(y)) \Leftrightarrow \left(x_i = \frac{y_i r^2}{r^2 + |y|^2}, i = 1, 2, \dots, n, x_{n+1} = \frac{r|y|^2}{r^2 + |y|^2} \right).$$

§ 19. GRANICA

19.1. Granica ciągu. Dana jest p.m. (X, d) , ciąg (p_n) oraz element p , gdzie $p_n, p \in X$. Mówimy, że ciąg (p_n) jest zbieżny lub że p jest granicą ciągu (p_n) , jeżeli zachodzi

$$(1) \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p) \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n_0 \in \mathbf{N}} \bigwedge_{n \geq n_0} (d(p_n, p) < \varepsilon).$$

Jeżeli ciąg nie jest zbieżny, to mówimy, że jest rozbieżny. Niech (n_k) będzie ciągiem rosnącym liczb naturalnych. Ciąg (p_{n_k}) , $k \in \mathbf{N}$, nazywamy podciągiem ciągu (p_n) . Jeżeli podciąg (p_{n_k}) jest zbieżny, to jego granicę nazywamy granicą częściową ciągu (p_n) .

Mówimy, że ciąg (p_n) , $p_n \in X$ jest ciągiem Cauchy'ego, jeżeli

$$(2) \quad \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n_0 \in \mathbf{N}} \bigwedge_{n, m \in \mathbf{N}} ((n > n_0) \wedge (m > n_0) \Rightarrow (d(p_n, p_m) < \varepsilon)).$$

Jeżeli w p.m. (X, d) każdy ciąg Cauchy'ego ma granicę należącą do X , to przestrzeń (X, d) nazywamy przestrzenią zupełną.

19.2. Jeżeli $(X, d) = (\mathbf{R}, d_1)$, gdzie d_1 jest metryką pitagorejską, to (1) jest znaną definicją granicy ciągu liczbowego. Dla ciągów tych podamy pewne definicje i twierdzenia.

Ciąg (a_n) ma granicę nieskończoną, jeżeli

$$(3) \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \text{ } [-\infty]) \Leftrightarrow (\bigwedge_{a \in \mathbf{R}} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n > n_0} (a_n > a) \text{ } [\bigwedge_{b \in \mathbf{R}} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n > n_0} (a_n < b)]).$$

T₁. Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

T₂. $((\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g) \wedge (\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = q) \wedge (\alpha, \beta \in \mathbf{R})) \Rightarrow$

$$\Rightarrow ((\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha g + \beta q) \wedge (\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = gq) \wedge \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{g}{q}, q \neq 0 \right)).$$

Weźmy zbiór

$$E = \{x \in \bar{\mathbf{R}} : \bigvee_{(a_{k_n})} \bigvee_{k \rightarrow \infty} ((x = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a \in \mathbf{R}) \vee (x = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = -\infty) \vee (x = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = +\infty))\},$$

gdzie $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ (por. § 3). Liczbę $\underline{g} = \inf E$ $[\bar{g} = \sup E]$ nazywamy granicą dolną [górną] ciągu (a_n) i piszemy $\underline{g} = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ $[\bar{g} = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n]$.

19.3. Granica odwzorowania. Dane są p.m. (X, d_X) , (Y, d_Y) , zbiór $E \subset X$, $p \in X \wedge p \in E_s$ (E_s zbiór punktów skupienia zbioru E), $g \in Y$ oraz odwzorowanie $\mathcal{F}: E \rightarrow Y$.

Definicja granicy Cauchy'ego:

$$(4) \quad (\lim_{x \rightarrow p} \mathcal{F}(x) = g) \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\eta > 0} \bigwedge_{x \in E} (0 < d_X(p, x) < \eta \Rightarrow d_Y(g, \mathcal{F}(x)) < \varepsilon).$$

Z (4) w szczególności otrzymujemy:

1° jeżeli $f: \mathbf{R} \supset Q(x_0; r) \rightarrow \mathbf{R}$, to $d_{\mathbf{R}}(x, y) = |x - y|$ i

$$(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g) \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\eta > 0} \bigwedge_{x \in Q(x_0; r)} (0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon)$$

– granica funkcji jednej zmiennej rzeczywistej;

2° jeżeli $f: \mathbf{R}^2 \supset Q((x_0, y_0); r) \rightarrow \mathbf{R}$, to

$$d_{\mathbf{R}^2}((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

i

$$\left(\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = g \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\eta > 0} \bigwedge_{(x, y) \in Q((x_0, y_0); r)} (0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \eta^2 \Rightarrow |f(x, y) - g| < \varepsilon)$$

– granica funkcji dwóch zmiennych rzeczywistych;

3° jeżeli $f: \mathbf{R}^n \supset Q(\mathbf{x}^0; r) \rightarrow \mathbf{R}$, to

$$d(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^1 - x_i^2)^2} = |\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2|,$$

i

$$\left(\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = g \right) \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\eta > 0} \bigwedge_{\mathbf{x} \in Q(\mathbf{x}^0; r)} (0 < \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2 < \eta^2 \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - g| < \varepsilon)$$

– granica funkcji n zmiennych;

4° jeżeli $\mathbf{r}: \mathbf{R} \supset Q(t_0; r) \rightarrow \mathbf{R}^3$, to $d_{\mathbf{R}^3} = |t_1 - t_2|$, $d_{\mathbf{R}^3}(x, y) = |x - y|$, $\mathbf{g} \in \mathbf{R}^3$ i

$$\left(\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{g} \right) \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\eta > 0} \bigwedge_{t \in Q(t_0; r)} (0 < |t - t_0| < \eta \Rightarrow |\mathbf{r}(t) - \mathbf{g}| < \varepsilon)$$

– granica funkcji wektorowej jednej zmiennej rzeczywistej;

5° jeżeli $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \supset Q(\mathbf{x}^0; r) \rightarrow \mathbf{R}^m$, to $d_{\mathbf{R}^n}(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = |\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2|$,

$$d_{\mathbf{R}^m}(\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2) = |\mathbf{y}^1 - \mathbf{y}^2|, \quad \mathbf{g} \in \mathbf{R}^m$$

i

$$\left(\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g} \right) \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\eta > 0} \bigwedge_{\mathbf{x} \in Q(\mathbf{x}^0; r)} (0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \eta \Rightarrow |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}| < \varepsilon)$$

– granica funkcji wektorowej n zmiennych.

T₃. Jeżeli funkcje $f_i: \mathbf{R}^n \supset Q(\mathbf{x}^0; r) \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$, są współrzędnymi odwzorowania $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \supset Q(\mathbf{x}^0; r) \rightarrow \mathbf{R}^m$ i $\mathbf{R}^m \ni \mathbf{g} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, to

$$\left(\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g} \right) \Leftrightarrow \left(\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} f_i(\mathbf{x}) = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \right).$$

Uwaga. Zastępując w definicji 1° sąsiedztwo $Q(x_0; r)$ sąsiedztwem lewostronnym $Q^-(x_0; r) = \{x: -\eta < x - x_0 < 0\}$ [prawostronnym $Q^+(x_0; \eta) = \{x: 0 < x - x_0 < \eta\}$] otrzymujemy definicję granicy jednostronnej, lewostronnej $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = g$ [prawostronnej $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g$].

Podamy dwa twierdzenia dotyczące granic funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

$$\mathbf{T}_4: \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \right) \Leftrightarrow \left(\left(\text{istnieje } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = g \right) \wedge \left(\text{istnieje } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g \right) \right).$$

$$\mathbf{T}_5: \left(\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \right) \wedge \left(\bigwedge_{x \in Q(x_0; \eta)} y = f(x) \neq g \right) \wedge \left(\lim_{y \rightarrow g} h(y) = p \right) \right) \Rightarrow \left(\lim_{x \rightarrow x_0} h(f(x)) = p \right) = \lim_{y \rightarrow g} h(y) = p.$$

Uwaga. \mathbf{T}_5 jest również prawdziwe dla granic jednostronnych.

19.4. Granice niewłaściwe, granice w nieskończoności. Podamy pewne przypadki granic niewłaściwych i granic w nieskończoności

α) Jeżeli $f: \mathbf{R} \supset Q(x_0; r) \rightarrow \mathbf{R}$, to

$$(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty) \Leftrightarrow \bigwedge_{c \in \mathbf{R}} \bigvee_{\eta > 0} \bigwedge_{x \in Q(x_0; r)} (0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) < c).$$

Podobnie określamy granice: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ [$+\infty$], $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$ [$+\infty$].

β) Jeżeli $f: \mathbf{R}^2 \supset Q((x_0, y_0); r) \rightarrow \mathbf{R}$, to

$$(\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = +\infty) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{c \in \mathbf{R}} \bigvee_{r_1 > 0} \bigwedge_{(x, y) \in Q((x_0, y_0); r)} (0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r_1^2 \Rightarrow f(x, y) > c).$$

Podobnie określamy granicę $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = -\infty$.

γ) Jeżeli $f: (-\infty, a) \rightarrow \mathbf{R}$, to

$$(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g) \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{c \in \mathbf{R}} \bigwedge_{x \in (-\infty, a)} (x < c \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon).$$

Podobnie określamy granicę $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g$.

δ) Jeżeli $r: (a, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}^3$, to

$$(\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = \mathbf{g} \in \mathbf{R}^3) \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{c \in \mathbf{R}} \bigwedge_{t \in (a, +\infty)} (t > c \Rightarrow |r(t) - \mathbf{g}| < \varepsilon).$$

Podobnie określamy granicę $\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = \mathbf{g}$.

ε) Jeżeli $f: (a, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, to

$$(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty) \Leftrightarrow \bigwedge_{c \in \mathbf{R}} \bigvee_{b \in \mathbf{R}} \bigwedge_{x \in (a, +\infty)} (x > b \Rightarrow f(x) > c).$$

Podobnie określamy granice: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Niech $f: \mathbf{R}^n \supset Q(\mathbf{x}^0; r) \rightarrow \mathbf{R}$, $h: \mathbf{R}^n \supset Q(\mathbf{x}^0; r) \rightarrow \mathbf{R}$, $p, q \in \mathbf{R}$.

T₆. Jeżeli $(\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = p) \wedge (\lim_{x \rightarrow x^0} h(x) = q)$, to

$$\lim_{x \rightarrow x^0} (f \pm h)(x) = p \pm q, \quad \lim_{x \rightarrow x^0} (fh)(x) = pq,$$

Twierdzenie T₆ jest również prawdziwe dla granic niewłaściwych.

Niezależnie od definicji granicy Cauchy'ego (4) podaje się równoważną definicję granicy za pomocą ciągów. Przyjmując dane z definicji Cauchy'ego mamy definicję granicy Heinego

$$(5) \quad (\lim_{x \rightarrow p} \mathcal{F}(x) = g) \Leftrightarrow \bigwedge_{(p_n)} \left(\bigwedge_{n \in \mathbf{N}} p_n \in E \wedge p_n \neq p \right) \wedge (\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p) \Rightarrow (\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(p_n) = g).$$

Przykłady

19.1. Udowodnić twierdzenie (twierdzenie o trzech ciągach)

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} ((a_n \leq b_n \leq c_n) \wedge (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g)) \Rightarrow (\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g).$$

Dowód. Korzystając z (1) i z założeń twierdzenia kolejno otrzymujemy:

$$a_n - g \leq b_n - g \leq c_n - g,$$

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n > n_0} (-\varepsilon < a_n - g) \wedge \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\bar{n}_0} \bigwedge_{n > \bar{n}_0} (c_n - g < \varepsilon),$$

stąd

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n_1 = \max(n_0, \bar{n}_0)} \bigwedge_{n > n_1} ((-\varepsilon < b_n - g < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g). \quad \square$$

19.2. Wykazać, że $(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0\right)$.

Dowód. Należy wykazać, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taki wskaźnik n_0 , że dla każdego $n > n_0$ prawdziwa jest nierówność $\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| < \varepsilon$.

Z założenia $\bigwedge_{M > 0} \bigvee_{n_1} \bigwedge_{n > n_1} (a_n > M > 0)$; wystarczy więc przyjąć $M = 1/\varepsilon$, wówczas

$$\bigwedge_{n > n_0 = n_1} \left(a_n > \frac{1}{\varepsilon}\right) \Rightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n_1} \bigwedge_{n > n_1} \left|\frac{1}{a_n} - 0\right| < \varepsilon. \quad \square$$

19.3. Znaleźć granice ciągów:

a) (a^n) ; b) $(\sqrt[n]{n})$; c) $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$.

Rozwiązanie. a) Rozróżnimy cztery przypadki:

α) $|a| < 1 \wedge a \neq 0$ (dla $a = 0$ oczywiście $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$). Z nierówności $0 < |a| < 1$ otrzymujemy $1/|a| > 1 \Rightarrow 1/|a| = 1 + p$, gdzie $p > 0$. Stosując nierówność Bernoulliego (por. zadanie 2.14), otrzymujemy $\frac{1}{|a|^n} = (1 + p)^n \geq 1 + np \Rightarrow 0 < |a|^n \leq \frac{1}{1 + np}$. Traktując wyrażenia 0 i $\frac{1}{1 + np}$ jako n -te wyrazy ciągów, mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + np} = 0$, stąd na mocy twierdzenia o trzech ciągach i zadania 19.15 f) mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$.

β) $a = 1$. Wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$.

γ) $a > 1$. Zatem $a = 1 + p \wedge p > 0$. Stosując nierówność Bernoulliego, otrzymujemy $a^n = (1 + p)^n \geq 1 + np$. Niech A będzie dowolnie dużą liczbą ($A > 0$). Wówczas dla $n > \frac{A-1}{a}$ jest $1 + np > A$, czyli $a^n > A$, tzn. $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$.

δ) $a \leq -1$. W tym przypadku ciąg (a^n) jest rozbieżny. Istotnie, gdyby istniała granica $g = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n$, to dla $n > n_0$, wyrazy ciągu (a^n) różniłyby się od liczby g o dowolnie mało.

Ale dla dużych n parzystych wyrazy ciągu (a^n) są dowolnie duże ($a < -1$), a dla dużych n nieparzystych wyrazy ciągu (a^n) są dowolnie małe; natomiast dla $a = -1$ mamy ciąg rozbieżny $-1, 1, -1, 1, \dots$. A więc jeżeli $a \leq -1$, to ciąg (a^n) jest rozbieżny.

b) Udowodnimy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Jeżeli $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$, to $a_n \geq 0$ oraz $n = (1 + a_n)^n$. Korzystając z dwumianu Newtona, otrzymujemy:

$$n = (a_n + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_n^k \geq \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{1}{2} n(n-1) a_n^2,$$

stąd $0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ dla $n \geq 2$. Z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. \square

c) Stosujemy T_1 . W tym celu udowodnimy, że badany ciąg jest rosnący i ograniczony z góry. Korzystając z nierówności Bernoulliego, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \\ &= \frac{n+2}{n+1} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > \frac{n+2}{n+1} \left(1 - n \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \\ &= \frac{((n+1)^2 - (n+1) + 1)((n+1) + 1)}{(n+1)^3} = \frac{(n+1)^3 + 1}{(n+1)^3} > 1 \end{aligned}$$

dla $n > 1$ oraz $\frac{a_2}{a_1} = \frac{9}{8} > 1$, stąd $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow (a_n)$ rosnący. Z kolei (dla $n > 1$)

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \\ &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-(n-1))}{n!} \frac{1}{n^n} = \\ &= 2 + \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{3!} + \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{n!} < \\ &< 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots = \\ &= 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_n < 3, \end{aligned}$$

tzn. (a_n) jest ograniczony z góry. \square

Granicę ciągu (a_n) oznaczamy e , tzn. $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Udowodnia się, że e jest liczbą niewymierną, przy czym $e = 2,71828\dots$

Uwaga. Wzór $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ można uogólnić następująco:

$$(a) \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty\right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e \quad (1).$$

19.4. Znaleźć (jeżeli istnieją) granice dolne i górne ciągów:

$$a) \quad (a_n) = \left(1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\right); \quad b) \quad (b_n) = \left(\frac{n^2}{1+n^2} \cos \frac{n\pi}{2}\right).$$

Rozwiązanie. a) Łatwo sprawdzić, że badany ciąg ma następujące podciągi: $(a_{4n-2} = -4)_1^\infty$, $(a_{4n-1} = 0)_1^\infty$, $(a_{4n} = 2)_1^\infty$, $(a_{4n+1} = 6)_0^\infty$ zbieżne odpowiednio do liczb $-4, 0, 2, 6$. Są to jedyne podciągi zbieżne. Istotnie, jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = g \notin \{-4, 0, 2, 6\} = A$, to poza otoczeniem o promieniu $r = \min(d(g, -4), d(g, 0), d(g, 2), d(g, 6))$ znajdują się wszystkie wyrazy ciągu, co daje sprzeczność. Zatem

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf A = -4 \wedge \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup A = 6.$$

b) Ciąg (b_n) ma podciągi zbieżne:

$$\begin{aligned} (b_{2n-1} = 0)_1^\infty \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} &= 0, \\ \left(b_{4n-2} = \frac{-n^2}{n^2+1}\right)_1^\infty \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{n^2+1} &= -1, \\ \left(b_{4n} = \frac{n^2}{n^2+1}\right)_1^\infty \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_{4n} &= 1, \end{aligned}$$

które są jedynymi podciągami zbieżnymi ciągu (b_n) ; stąd $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = -1 \wedge \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$.

19.5. Niech $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (x_n \in \mathbb{R}^k \wedge x_n(x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{kn}))$ oraz niech $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$. Wykazać, że

$$(a) \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{jn} = \alpha_j, j = 1, 2, \dots, k\right).$$

Dowód. \Rightarrow : Korzystamy z (1), przy czym dla $X = \mathbb{R}^k$ metryka d jest normą:

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^k (x_i - y_i)^2}.$$

(1) Dowód wzoru (a) można znaleźć np. w książce: L. Maurin, M. Mączyński, T. Traczyk, *Matematyka, podręcznik dla studentów wydziałów chemicznych*, tom 1, Warszawa 1973.

Stąd, dla $j=1, 2, \dots, k$ mamy

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n > n_0} (|x_{jn} - \alpha_j| \leq |x_n - \alpha| < \varepsilon) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{jn} = \alpha_j.$$

\Leftarrow : Z założenia $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{jn} = \alpha_j$, $j=1, 2, \dots, k$, wynika, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje takie \bar{n}_j , że

$$\bigwedge_{n > \bar{n}_j} |x_{jn} - \alpha_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}, \quad j=1, 2, \dots, k.$$

Stąd

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\bar{n} = \max(\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_k)} \bigwedge_{n > \bar{n}} (|x_n - \alpha| = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_{jn} - \alpha_j)^2} < \sqrt{\frac{k\varepsilon^2}{k}} = \varepsilon). \quad \square$$

19.6. Udowodnić równoważność definicji granicy Cauchy'ego i Heinego.

Załóżmy, że istnieje granica w sensie Cauchy'ego, czyli zachodzi (4) oraz weźmy dowolny ciąg (p_n) występujący w definicji granicy Heinego. Z warunku $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ wynika, że dla dowolnej liczby ε_1 , np. $\varepsilon_1 = \eta$ istnieje takie n_0 , że

$$\bigwedge_{n > n_0} (0 < d_X(p_n, p) < \eta \Rightarrow d_Y(g, f(p_n)) < \varepsilon),$$

ozn. zachodzi (5).

Załóżmy teraz, że zachodzi (5) i przypuśćmy, że nie zachodzi (4). Korzystając z praw De Morgana (por. § 1) i z tautologii $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge (\sim q)$, mamy

$$\begin{aligned} \sim \left(\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\eta > 0} \bigwedge_{x \in E} (0 < d_X(p, x) < \eta \Rightarrow d_Y(g, T(x)) < \varepsilon) \right) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \bigvee_{\varepsilon > 0} \bigwedge_{\eta > 0} \bigvee_{x_0 \in E} (0 < d_X(p, x_0) < \eta \wedge d_Y(g, T(x_0)) \geq \varepsilon). \end{aligned}$$

Biorąc $\eta_n = \frac{1}{n}$, $n=1, 2, \dots$, otrzymujemy ciąg (x_{0n}) zbieżny do p i $x_{0n} \neq p$ dla $n=1, 2, \dots$, dla którego ciąg $(T(x_{0n}))$ nie jest zbieżny do g wbrew założeniu. \square

19.7. Wykazać, że:

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ (c – stała); b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}$; c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$;
 d) $\lim_{x \rightarrow 0} \log_2 |x| = -\infty$; e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{1}{2}\pi$; f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ ($a > 1$).

Rozwiązanie. a) Z definicji 1° wynika, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ należy znaleźć taką liczbę $\eta > 0$, że dla wszystkich x spełniających nierówność $0 < |x - x_0| < \eta$, zachodzi nierówność $|c - c| < \varepsilon$. Ale $|c - c| = 0 < \varepsilon$, więc η może być dowolną liczbą dodatnią.

Analogicznie udowadnia się, że $\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c$ oraz $\lim_{x \rightarrow -\infty} c = c$.

b) Z definicji 1° wynika, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ należy znaleźć taką liczbę $\eta > 0$, żeby z nierówności $0 < |x - 1| < \eta$ wynikała nierówność $\left| \frac{1}{x+2} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$. Weźmy więc dowol-

ną liczbę $\varepsilon > 0$ oraz różnicę

$$A = \left| \frac{1}{x+2} - \frac{1}{3} \right| = \frac{|-x+1|}{|3x+6|}.$$

Np. dla $0 < x < 2$ mamy $6 < |3x+6| < 12$; stąd

$$A = \frac{|-x+1|}{|3x+6|} < \frac{|x-1|}{6} < \varepsilon,$$

a więc dla $\eta = 6\varepsilon$ z nierówności $0 < |x-1| < \eta = 6\varepsilon$, wynika nierówność $\left| \frac{1}{x+2} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$. \square

c) Z definicji α) wynika, że dla dowolnej liczby $M > 0$ należy znaleźć taką liczbę $\eta > 0$, aby dla wszystkich x spełniających nierówność $0 < |x-1| < \eta$ zachodziła nierówność $f(x) > M$. Weźmy więc dowolną liczbę $M > 0$. Jeżeli $\frac{1}{(x-1)^2} > M$, to $0 < |x-1| < \frac{1}{\sqrt{M}} = \eta$; stąd dla $0 < |x-1| < \eta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ jest $\frac{1}{(x-1)^2} > M$. \square

d) Podobnie jak w c) dla dowolnej liczby $M < 0$ należy znaleźć taką liczbę $\eta > 0$, aby dla wszystkich x spełniających nierówność $0 < |x| < \eta$ zachodziła nierówność $\log_2 |x| < M$. Weźmy więc dowolną liczbę $M < 0$. Jeżeli $\log_2 |x| < M = \log_2 2^M$, to $|x| < 2^M$. Istotnie, $\log_2 |x| = \log_2 x < \log_2 2^M$ dla $x > 0$, czyli $x = |x| < 2^M$ (funkcja \log_2 jest rosnąca), natomiast $f(x) = \log_2 |x| = \log_2 (-x) < \log_2 2^M = \log_2 [-(2^M)]$ dla $x < 0$, czyli $x > -2^M$ (funkcja określona wzorem $f(x) = \log_2 (-x)$ jest malejąca), a więc $-x = |x| < 2^M$. Wystarczy więc przyjąć $\eta = 2^M$, wówczas dla $0 < |x| < \eta$ mamy $\log_2 |x| < M$. \square

e) Z definicji γ) wynika, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ należy znaleźć taką liczbę A , żeby dla $x < A$ zachodziła nierówność $|\arctg x + \frac{1}{2}\pi| < \varepsilon$. Ale $-\frac{1}{2}\pi < \arctg x < \frac{1}{2}\pi$, stąd $|\arctg x + \frac{1}{2}\pi| = \arctg x + \frac{1}{2}\pi$. Jeżeli więc dana jest dowolna liczba $\varepsilon > 0$, to z nierówności $|\arctg x + \frac{1}{2}\pi| < \varepsilon$ kolejno otrzymujemy, $\arctg x + \frac{1}{2}\pi < \varepsilon$, $\arctg x < \varepsilon - \frac{1}{2}\pi = \arctg [\operatorname{tg}(\varepsilon - \frac{1}{2}\pi)]$, czyli $x < \operatorname{tg}(\varepsilon - \frac{1}{2}\pi) = A$ (funkcja \arctg jest rosnąca). Jeżeli więc $x < A$, to $|\arctg x + \frac{1}{2}\pi| < \varepsilon$. \square

f) Z definicji ε) wynika, że dla dowolnej liczby $M > 0$ należy znaleźć taką liczbę $A > 0$, aby z nierówności $x > A$ wynikała nierówność $a^x > M$. Niech więc dana będzie dowolna liczba $M > 0$. Jeżeli $a^x > M = a^{\log_a M}$, to $x > \log_a M$ (funkcja wykładnicza jest dla $a > 1$ rosnąca); zatem dla $x > A = \max(b, \log_a M)$ ($b > 0$) zachodzi nierówność $a^x > M$. \square

19.8. Wykazać, że:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{1/x} = 0; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1, \quad \text{gdzie} \quad f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } -\infty < x \leq 1, \\ 2^{-x} & \text{dla } 1 < x < +\infty; \end{cases}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Rozwiązanie. a) Z uwagi do def. 1^o wynika, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ należy znaleźć taką liczbę $\eta > 0$, że jeżeli $-\eta < x < 0$, to $|2^{1/x} - 0| < \varepsilon$. Weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ (np.

$\varepsilon < 1$). Jeżeli $|2^{1/x} - 0| < \varepsilon$, to $2^{1/x} < \varepsilon$, $1/x < \log_2 \varepsilon$, $x \log_2 \varepsilon < 1$ ($x < 0$), czyli $0 > x > \frac{1}{\log_2 \varepsilon} = -\eta$. Istnieje więc liczba dodatnia $\eta = \frac{-1}{\log_2 \varepsilon}$, że dla $-\eta < x < 0$ zachodzi nierówność $|2^{1/x} - 0| < \varepsilon$. \square

b) Weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Jeżeli $|2 - x - 1| < \varepsilon$, to $|x - 1| < \varepsilon = \eta$; ale $|x - 1| = x - 1$ ($x > 1$), zatem dla $0 < x - 1 < \eta$ zachodzi nierówność $|2 - x - 1| < \varepsilon$. \square

c) Weźmy dowolną liczbę $A < 0$ oraz niech $x < 0$. Jeżeli $1/x < A$, to $x > 1/A = -\eta$ ($\eta > 0$); czyli dla $-\eta < x < 0$ zachodzi nierówność $1/x < A$. \square

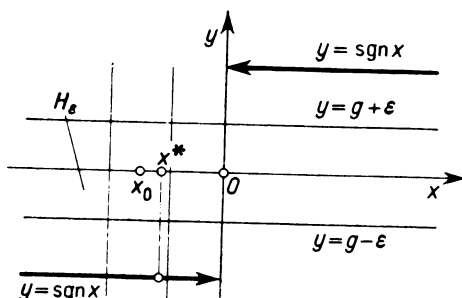
19.9. Wykazać, że funkcja $f = \text{sgn}$ (por. zadanie 17.15) nie ma granicy w punkcie $x = 0$. Podać interpretację geometryczną.

Rozwiązanie. Wykażemy, że $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, skąd na mocy T_4 wynika, że nie istnieje $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Otóż dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ oraz dla $x < 0$ mamy $|-1 - (-1)| = 0 < \varepsilon$. Zatem dla każdej liczby $\eta > 0$, jeżeli $-\eta < x < 0$, to $|f(x) - (-1)| < \varepsilon$, czyli $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$.

Analogicznie udowadnia się, że $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$. \square (1).

W celu podania interpretacji geometrycznej znajdziemy najpierw zaprzeczenie definicji 1°. Otóż

$$\begin{aligned} \sim \{ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \} &\Leftrightarrow \sim \{ \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\eta > 0} \bigwedge_x [0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon] \} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \bigvee_{\varepsilon > 0} \bigwedge_{\eta > 0} \bigvee_x \sim [0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \bigvee_{\varepsilon > 0} \bigwedge_{\eta > 0} \bigvee_x [(0 < |x - x_0| < \eta) \wedge |f(x) - g| \geq \varepsilon], \end{aligned}$$



Rys. 19.1

czyli liczba g nie jest granicą funkcji f w punkcie x_0 , jeżeli istnieje taka liczba $\varepsilon > 0$, że dla każdej liczby $\eta > 0$ istnieje liczba x taka, że $0 < |x - x_0| < \eta$ i $|f(x) - g| \geq \varepsilon$. Korzystając z podanego zaprzeczenia oraz przedstawiając nierówności $0 < |x - x_0| < \eta$ i $|f(x) - g| \geq \varepsilon$

(1) Oczywiście nie istnieje również granica niewłaściwa funkcji f w punkcie $x = 0$.

w postaci $x_0 - \eta < x < x_0 + \eta$ ($x \neq x_0$) i $f(x) \leq g - \varepsilon$ lub $f(x) \geq g + \varepsilon$ otrzymujemy interpretację geometryczną zaprzeczenia definicji 1^o: istnieje taki pas poziomy H_ε ograniczony prostymi $y = g \mp \varepsilon$, że w każdym przedziale $x_0 - \eta < x < x_0 + \eta$ istnieje taka liczba x^* , że punkt wykresu $(x^*, f(x^*))$ leży poza pasem H_ε .

W przypadku funkcji f , zakładając, że istnieje $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = g$ (np. $g = 0$), wystarczy przyjąć za $\varepsilon > 0$ liczbę $\varepsilon < |g - 1|$ (rys. 19.1).

19.10. Udowodnić twierdzenie: jeżeli funkcje f i g są określone na sąsiedztwie punktu x_0 oraz $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ i funkcja g jest ograniczona, to $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

Dowód. Z założeń mamy: dla każdej liczby $\varepsilon_1 > 0$ istnieje liczba $\eta > 0$, że z nierówności $0 < |x - x_0| < \eta$ wynika nierówność $|f(x) - 0| < \varepsilon_1$, oraz istnieje taka liczba M , że dla wszystkich x , dla których określona jest funkcja g , prawdziwa jest nierówność $|g(x)| \leq M$. Weźmy teraz dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ oraz wyrażenie

$$A = |f(x) \cdot g(x) - 0| = |f(x) \cdot g(x)| \leq |f(x)| \cdot M < \varepsilon_1 M \quad \text{dla} \quad 0 < |x - x_0| < \eta.$$

Jeżeli za ε_1 weźmiemy liczbę $\varepsilon_1 = \varepsilon/M$, to dla $0 < |x - x_0| < \eta$ jest $|f(x) \cdot g(x) - 0| < \varepsilon$, czyli $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$. \square

Uwaga. Analogicznie udowadnia się twierdzenie w przypadku, gdy $x \rightarrow +\infty$ lub $x \rightarrow -\infty$.

19.11. Znaleźć granice:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n$, $n \in \mathbb{N}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0)$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;

e) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)}$, jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ oraz $\varphi(x) \neq 0$ dla $0 < |x - x_0| < \eta$.

Rozwiązanie. a) Wykażemy, że $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. W tym celu weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Jeżeli

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{x} < \varepsilon \quad (x > 0), \quad \text{to} \quad x > \frac{1}{\varepsilon} = A,$$

zatem z nierówności $x > A$ wynika nierówność $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$. \square

b) Wykażemy, że $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$. W tym celu weźmy dowolną liczbę $M > 0$. Jeżeli $x^n > M$ ($x > 0$), to $x > \sqrt[n]{M} = A$, tzn. istnieje liczba A , że dla $x > A$ zachodzi nierówność $x^n > M$. \square

c) W celu zastosowania twierdzeń o granicach przekształcamy funkcję następująco:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) \right]$$

(wystarczy rozpatrywać funkcję dla $0 < x < +\infty$). Ale $\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n = a_n$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x^k} = 0$ dla $k = 1, 2, \dots$ oraz $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$, stąd

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) = \begin{cases} -\infty, & \text{jeżeli } a_n < 0, \\ +\infty, & \text{jeżeli } a_n > 0. \end{cases}$$

d) Zastosujemy twierdzenie T_5 . Otóż $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1/x = -\infty$ (por. przykład 19.8c) oraz $\lim_{y \rightarrow -\infty} \arctg y = -\frac{1}{2}\pi$ (por. przykład 19.7e). Zatem przyjmując $y = 1/x$, otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctg \frac{1}{x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \arctg y = -\frac{\pi}{2}.$$

e) Korzystamy z T_5 oraz ze wzoru $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Jeżeli $u = \varphi(x)$, to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1.$$

19.12. Z badać czy istnieje granica $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x_1^2}{|x|^2}$, gdzie $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Rozwiązanie. Niech $x_i = kx_1$, $i = 2, 3, \dots, n$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$. Jeżeli $x_1 \rightarrow 0$, to $x_i = kx_1 \rightarrow 0$, $i = 2, 3, \dots, n$ i

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x_1^2}{|x|^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x_1^2}{x_1^2 (1 + (n-1)k^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + (n-1)k^2} = \frac{1}{1 + (n-1)k^2}$$

(granica stałej równa się tej stałej). Dla różnych k otrzymujemy różne granice, a więc badana granica nie istnieje.

19.13. Wykazać, że

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Rozwiązanie. Ponieważ $(x-y)^2 \geq 0$, to $x^2 + y^2 \geq 2xy$; stąd dla $x^2 + y^2 > 0$ jest $\frac{2xy}{x^2 + y^2} \leq 1$. Zatem

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right| \frac{|x|}{2} \leq \frac{|x|}{2}.$$

Dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ wystarczy wziąć liczbę $\eta = 2\varepsilon$, aby dla $0 < |x| < \eta$ i $0 < |y| < \eta$, tzn. dla $0 < d[P(x, y), O(0, 0)] < \eta$, zachodziła nierówność $\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x|}{2} < \varepsilon$,

a więc (por. 2°)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

19.14. Dana jest funkcja określona wzorem $f(x, y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$. Zbadać granice iterowane $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y))$ i $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$.

Uwaga. Przy obliczaniu granic iterowanych dokonujemy przejść granicznych oddzielnie dla każdej zmiennej przy ustalonych pozostałych zmiennych.

Rozwiązanie. $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} = x + 1 = \varphi(x)$, stąd

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = 1$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} = y - 1 = \psi(y),$$

zatem

$$\lim_{y \rightarrow 0} \psi(y) = \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = -1,$$

tzn. granice iterowane istnieją i są różne. Łatwo sprawdzić, że granica $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ (mówimy czasem granica podwójna) nie istnieje.

Zadania

19.15. Wykazać, że:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$; .

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$; e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$; f) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

g) $(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \wedge a_n > 0 \text{ dla } n > n_0) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = +\infty \right)$.

19.16. Znaleźć granice ciągów:

a) $\left(\frac{n^3 - n}{-2n^4 + n - 5} \right)$; b) $\left(\frac{(2n-1)^2}{n^2 + 3n - 1} \right)$; c) $\left(\frac{6n^7 - n^4 + 2n^3 - 1}{-n^5 + 2} \right)$;

d) $\left(\frac{c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \dots + c_1 n + c_0}{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \dots + b_1 n + b_0} \right)$, $k, m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$,

$c_i, i=0, 1, 2, \dots, k$, i $b_i, i=0, 1, 2, \dots, m$ ($c_k, b_m \neq 0$), oznaczają stałe współczynniki;

$$e) \left(\frac{\sqrt[3]{n^2+3n}}{n+4} \right); \quad f) \left(\frac{3n^2 - \sqrt{n^3+1}}{n^2-2n+4} \right);$$

$$g) \left(\frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n-n}} \right); \quad h) (\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}); \quad i) (\sqrt[3]{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^2});$$

$$j) (\sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})).$$

19.17. Znaleźć granice ciągów:

$$a) \left(\frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right); \quad b) \left(\frac{1+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3} \right);$$

$$c) \left(\frac{1+2^2+\dots+n^2}{n^2} - \frac{n}{3} \right); \quad d) \left(\frac{1+2^3+3^3+\dots+n^3}{n^4} \right);$$

$$e) \left(\frac{a}{2^n} \right); \quad f) \left(\frac{n}{2^n} \right); \quad g) \left(\frac{\ln n}{n} \right); \quad h) \left(\left(1 + \frac{4}{n} \right)^n \right);$$

$$i) \left(\left(\frac{2+n}{3+n} \right)^n \right); \quad j) \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n} \right); \quad k) ((n+1)^k - n^k), \quad k \in (0, 1).$$

19.18. Dane są ciągi:

$$(a_n) = \left(\frac{n^n}{n!} \right), \quad (b_n) = \left(\frac{(2n)!}{n^{2n}} \right), \quad (c_n) = \left(\frac{(3n)!}{n^{3n}} \right), \quad (d_n) = \left(\frac{(n!)^2}{n^{2n}} \right).$$

Znaleźć granice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}}.$$

19.19. Udowodnić, że jeżeli $p > 0$, to:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0; \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p} = 1;$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0, \quad \alpha \in \mathbf{W} \text{ (tzn. } \alpha \text{ jest liczbą wymierną)}.$$

19.20. Dany jest ciąg (a_n) , $\bigwedge_{n \in \mathbf{N}} (a_n \in \mathbf{R})$. Wykazać, że

$$a) (((a_n) \text{ rosnący}) \wedge (\bigvee_{(a_{n_k})_1^\infty} (a_{n_k}) \text{ zbieżny})) \Rightarrow ((a_n) \text{ zbieżny});$$

$$b) (((a_n) \text{ nieograniczony}) \wedge (\bigwedge_{n \in \mathbf{N}} a_n > 0)) \Rightarrow (\bigvee_{(a_{n_k})_1^\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = +\infty)$$

$$c) ((a_n) \text{ zbieżny}) \Rightarrow (\bigwedge_{(a_{n_k})_1^\infty} (a_{n_k}) \text{ zbieżny})$$

19.21. Znaleźć (jeżeli istnieją) granice dolne i górne ciągów:

a) $\left((-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$; b) $\left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}\right)$;

c) $\left(1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}\right)$; d) $\left(\frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}\right)$;

e) $\left((-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \sin \frac{n\pi}{4}\right)$; f) $\left(\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}\right)$; g) $\left(1 + n \cos \frac{n\pi}{2}\right)$.

19.22. Wykazać, że

$$\left(\text{istnieje: } \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \wedge \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \wedge \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\text{istnieje } \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)\right) \wedge$$

$$\wedge \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n\right).$$

19.23. Niech dany będzie ciąg (p_n) w przestrzeni metrycznej (X, d) . Wykazać, że:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$, $p \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy każde otoczenie punktu p zawiera wszy-

stkie wyrazy ciągu z wyjątkiem pewnej skończonej ilości;

b) $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p \in X\right) \wedge \left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = q \in X\right) \Rightarrow (p = q)$;

c) $((p_n)$ zbieżny) $\Rightarrow ((p_n)$ ograniczony) (mówimy, że ciąg (p_n) jest *ograniczony*, jeżeli zbiór $Y = \{p_n \in X: n \in \mathbb{N}\}$ jest ograniczony);

d) $\left((E \subset X) \wedge (p \text{ jest punktem skupienia zbioru } E)\right) \Rightarrow \left(\bigvee_{(p_n)} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (p_n \in E) \wedge (\lim p_n = p)\right)$;

e) $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = g\right) \Leftrightarrow \bigwedge_{(p_{n_k})} \lim_{k \rightarrow \infty} p_{n_k} = g$.

19.24. Zbadać granice ciągów (x_n) , $x_n(x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{kn}) \in \mathbb{R}^k$, jeżeli

a) $x_{jn} = g_j$, $j = 1, 2, \dots, k$, $g(g_1, g_2, \dots, g_k) \in \mathbb{R}^k$ stały punkt;

b) $x_{jn} = \left(1 + \frac{j}{n}\right)^n$, $j = 1, 2, \dots, k$;

c) $x_{1n} = 1 + (-1)^n$, $x_{jn} = \frac{1}{n^j}$, $j = 2, 3, \dots, k$;

d) $x_{jn} = j$, $j = 1, 2, \dots, k-1$, $x_{kn} = \left(\frac{n+k}{n-k}\right)^n$.

19.25. Dane są ciągi (x_n) , $x_n \in \mathbb{R}^k$, (y_n) , $y_n \in \mathbb{R}^k$, (a_n) , $a_n \in \mathbb{R}$. Wykazać, że jeżeli

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x\right) \wedge \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y\right) \wedge \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g\right),$$

to

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \odot y_n = x \odot y$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n x_n) = g x$.

19.26. Wykazać, że każdy ograniczony ciąg w \mathbf{R}^k ma podciąg zbieżny.

19.27. Wykazać, że przestrzeń (W, d) , gdzie W jest zbiorem liczb wymiernych i $d(w_1, w_2) = |w_1 - w_2|$ nie jest zupełna.

19.28. Niech $(a_n), (b_n), a_n, b_n \in \mathbf{R}$ będą ciągami Cauchy'ego. Wykazać, że ciąg $(\alpha a_n + \beta b_n), \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ jest ciągiem Cauchy'ego.

19.29. Wykazać, że każdy ciąg zbieżny w przestrzeni metrycznej (X, d) jest w tej przestrzeni ciągiem Cauchy'ego.

19.30. Wykazać, że każda przestrzeń metryczna składająca się ze skończonej liczby punktów jest przestrzenią zupełną.

19.31. Zakładając, że przestrzeń \mathbf{R} jest przestrzenią zupełną, wykazać, że przestrzeń \mathbf{R}^k jest zupełna.

19.32. Niech $(X_i, d_i), i = 1, 2$, będą przestrzeniami metrycznymi zupełnymi. Wykazać, że struktura $(X_1 \times X_2, d_{1,2})$, gdzie $d_{1,2} = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ jest przestrzenią zupełną.

19.33. Wykazać, że każda przestrzeń dyskretna (por. § 7) jest przestrzenią zupełną.

19.34. Wykazać, że:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{2x + 3} = \frac{2}{5}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1; \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x = 1;$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = 12; \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{3}{5}; \quad \text{g) } \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x - 1} = 2; \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

19.35. Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{x - 1}{2(x + 1)}$, przy czym $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{1}{4}$. Dla jakich wartości η z nierówności $0 < |x - 3| < \eta$ wynika nierówność

$$|f(x) - \frac{1}{4}| < 0,01.$$

19.36. Wykazać, że $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ oraz znaleźć liczbę $\eta > 0$, dla której z nierówności $0 < |x - 2| < \eta$ wynika nierówność

$$|x^2 - 4| < \varepsilon = 0,001.$$

19.37. Na mocy zadania 19.34 d) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x = 1$. Dla jakich liczb η wynika z nierówności $0 < |x - \frac{1}{2}\pi| < \eta$ nierówność $|\sin x - 1| < 0,01$?

19.38. Zapisać definicje granic:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty;$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

za pomocą kwantyfikatorów.

19.39. Wykazać, że:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty$, $n \in \mathbf{N}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{ctg} x| = +\infty$; d) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-1}{\cos^2 x} = -\infty$.

19.40. Wykazać, że:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ ($a > 1$);

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ ($0 < a < 1$); d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{1/x} = 1$; e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ ($a > 1$);

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) =$

$$= \begin{cases} -\infty & \text{dla } n \text{ nieparzystych } \wedge a_n > 0 \text{ lub dla } n \text{ parzystych } \wedge a_n < 0 \\ +\infty & \text{dla } n \text{ nieparzystych } \wedge a_n < 0 \text{ lub dla } n \text{ parzystych } \wedge a_n > 0. \end{cases}$$

19.41. Dana jest funkcja wymierna określona wzorem

$$h(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0} \quad (a_n \cdot b_m \neq 0).$$

Wykazać, że:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } n < m, \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{jeżeli } n = m; \end{cases}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } n < m, \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{jeżeli } n = m; \end{cases}$

c) granice $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ są niewłaściwe, jeżeli $n > m$.

19.42. Z przykładu b) zadania 19.41 wynika, że $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-3}{2x+1} = 2$. Dla jakich liczb x wartości funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{4x-3}{2x+1}$ będą się różniły od 2 o mniej niż o 0,001?

19.43. Wykazać, że:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ oraz $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, jeżeli $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } -\infty < x < 0, \\ 2 & \text{dla } x = 0, \\ 1 & \text{dla } 0 < x < +\infty; \end{cases}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{1/x} = +\infty$; c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$; d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_3 x = +\infty$;

e) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{3-x} = +\infty$.

19.44. $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{1/x} = +\infty$ (zadanie 19.43b). Dla jakich liczb x $2^{1/x} > 10^5$?

19.45. Dane są funkcje określone wzorami

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } -\infty < x < 1, \\ 1 & \text{dla } x = 1, \\ x + 1 & \text{dla } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Wykazać, że $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ oraz że nie istnieje granica funkcji g w punkcie $x = 1$.

19.46. Podać zaprzeczenie oraz interpretację geometryczną definicji granicy:
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

19.47. Wykazać, że nie istnieją granice funkcji określonych wzorami:

a) $f(x) = 2^{-1/x}$ w punkcie $x = 0$; b) $g(x) = \sin(1/x)$ w punkcie $x = 0$.

19.48. Udowodnić twierdzenia:

T_1 . Jeżeli funkcje f i g są określone na przedziale $\langle a, +\infty \rangle$ oraz $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \wedge \wedge \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, to $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \cdot g(x)] = -\infty$.

T_2 . Jeżeli funkcje f i g są określone na sąsiedztwie punktu x_0 oraz $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \wedge \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ ($-\infty$), to $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

T_3 . Jeżeli funkcje f i g są określone na przedziale $\langle a, +\infty \rangle$ oraz $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = g \neq 0$, to $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \cdot g(x)] = \begin{cases} -\infty, & \text{jeżeli } g < 0, \\ +\infty, & \text{jeżeli } g > 0. \end{cases}$

19.49. Udowodnić twierdzenie: Jeżeli funkcje f , g i h są określone na sąsiedztwie punktu x_0 oraz $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ w każdym punkcie tego sąsiedztwa i $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = g$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g$ (twierdzenie o trzech funkcjach).

19.50. Obliczyć:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^2 + x - 2)$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 5}{-3x^3 - x + 5}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^3 + x^2 - 6x + 1}{x^3 + x - 1}$;

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 6x^2 - x + 3}{3x^3 - x - 9}$; e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x + 5}{-x^3 + 6x^2 - x + 7}$; f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - x^4 + 1}{x^3 + 7x - 2}$;

g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} a^{1/x}$ ($0 < a < 1$); h) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctg \frac{1}{x}$; i) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi^+} 2^{8x}$;

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(\arctg x)$; k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x}$; l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$; t) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\sin 3x}{x} + 1}$;

m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 \left| \frac{x+1}{x^2+2} \right|$; n) $\lim_{x \rightarrow 1} 3^{-1/(x-1)^2}$; o) $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x2^{1/x})$.

19.51. Wykazać, że odwzorowanie (por. 19.3, wzór (4)) może mieć co najwyżej jedną granicę w punkcie.

19.52. Wykazać, że

$(\mathcal{F}: X \ni x \rightarrow y_0 \in Y, y_0 \text{ stały punkt zbioru } Y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bigwedge_{x_0 \in X} (\lim_{x \rightarrow x_0} \mathcal{F}(x) = y_0) \quad ((X, d_1), (Y, d_2) \text{ p.m.}).$$

19.53. Znaleźć (jeżeli istnieją) granice:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y}$; b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$; c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$;

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, a)} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$; e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left((x^2+y^2) \sin \frac{1}{xy}\right)$; f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,a)} \frac{\sin(xy)}{x}$;

g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, a)} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2/(x+y)}$; h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;

i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$; j) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

19.54. Znaleźć granice iterowane $\lim_{x \rightarrow a} [\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)]$ i $\lim_{y \rightarrow b} [\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)]$, jeżeli:

a) $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, $a = +\infty$, $b = +\infty$; b) $f(x, y) = \frac{x^y}{1+x^y}$, $a = +\infty$, $b = 0^+$;

c) $f(x, y) = \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy}$, $a = 0$, $b = +\infty$;

d) $f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2x+y}$, $a = +\infty$, $b = +\infty$.

19.55. Niech $f: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \ni (x, y) \rightarrow \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$.

Wykazać, że $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = 0$, ale nie istnieje granica

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y).$$

19.56. Wykazać, że istnieje granica

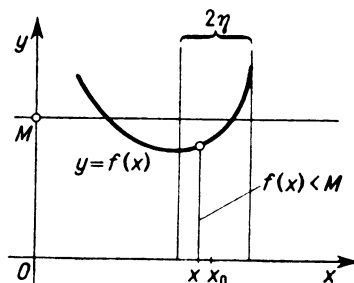
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left((x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right).$$

19.57. Wykazać, że nie istnieją granice iterowane:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right), \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right).$$

Odpowiedzi

- 19.16. a) 0; b) 4; c) $-\infty$;
 d) 0 dla $k < m$, c_k/b_m dla $k = m$, $+\infty$ dla $k > m$ i $c_k b_m > 0$, $-\infty$ dla $k > m$ i $c_k b_m < 0$;
 e) 0; f) 3; g) -1; h) 0; i) 0; j) 1.
- 19.17. a) $-\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{4}$; e) 0; f) 0; g) 0; h) e^4 ; i) e^{-1} ;
 j) 0. Wsk. Zastosować twierdzenie o trzech ciągach; k) 0.
- 19.18. e , $(2/e)^2$, $(3/e)^3$, e^2 .
- 19.19. Wsk. Por. przykład 19.1. W c) skorzystać z dwumianu Newtona.
- 19.21. a) -1, 1; b) 0, 1; c) 0, 2; d) $-\frac{1}{2}$, 0; e) $-\left(e + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $e + 1$;
 f) 1, 2; g) $-\infty$, $+\infty$.
- 19.24. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = g(g_1, g_2, \dots, g_k)$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha(e^1, e^2, \dots, e^k)$;
 c) ciąg rozbieżny; d) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \beta(1, 2, \dots, k-1, e^{2k})$.
- 19.27. Wsk. Rozpatrzeć przybliżenia wymierne liczby $\sqrt{2}$.
- 19.35. $0 < \eta \leq \frac{2}{13}$. 19.36. $\eta = \sqrt{4 + \varepsilon} - 2$, $\eta = 0,00025$.
- 19.37. $\eta \leq 2 \arcsin \sqrt{0,005} \approx 0,142$.
- 19.38. a) $(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty) \Leftrightarrow \bigwedge_M \bigvee_{\eta > 0} \bigwedge_x (0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) > M)$;
 b) $(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g) \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_A \bigwedge_x (x > A \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon)$;
 c) $(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty) \Leftrightarrow \bigwedge_M \bigvee_A \bigwedge_x (x > A \Rightarrow f(x) < M)$;
 d) $(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty) \Leftrightarrow \bigwedge_M \bigvee_A \bigwedge_x (x < A \Rightarrow f(x) > M)$;
 e) $(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty) \Leftrightarrow \bigwedge_M \bigvee_A \bigwedge_x (x < A \Rightarrow f(x) < M)$.
- 19.42. $|x| > 2500,5$. 19.44. $0 < x < \frac{1}{5} \log 2 = 0,0602$.
- 19.46. $\sim(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty) \Leftrightarrow \bigvee_M \bigwedge_{\eta > 0} \bigvee_x [(0 < |x - x_0| < \eta) \wedge (f(x) \leq M)]$ (rys. 19.2).



Rys. 19.2

- 19.50. W przykładach g) - o) skorzystać z T_5 . a) $-\infty$; b) 0; c) -5 ; d) $\frac{2}{3}$; e) $-\infty$; f) $+\infty$; g) 0; h) $-\frac{1}{2}\pi$; i) 0; j) 1; k) 1; l) 3; ł) 2; m) $-\infty$; n) 0; o) 0.
 19.53. a), b), c), h) nie istnieją; d) e^a ; e) 0; f) a ; g) e ; i) 0; j) 1.
 19.54. a) 0 i 1; b) $\frac{1}{2}$ i 1; c) 0 i 1; d) 0 i 1.

§ 20. CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI

20.1. Niech $\mathcal{F}: X \rightarrow Y$ spełnia warunki podane przy definicji granicy (por. § 19), gdzie zamiast sąsiedztwa $Q(p; r)$ bierzemy otoczenie $E = U(p; r)$.

Definicja *ciągłości odwzorowania \mathcal{F} w punkcie p* :

$$(1) \quad (\mathcal{F} \text{ ciągłe w } p) \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\eta > 0} \bigwedge_{x \in E} (d_X(p, x) < \eta \Rightarrow d_Y(\mathcal{F}(p), \mathcal{F}(x)) < \varepsilon).$$

Z (1) wynika (por. def. granicy), że \mathcal{F} jest ciągłe w p , jeżeli spełniona jest koniunkcja:

$$(2) \quad (\text{istnieje } \mathcal{F}(p)) \wedge (\text{istnieje } \lim_{x \rightarrow p} \mathcal{F}(x)) \wedge (\lim_{x \rightarrow p} \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(p)).$$

Jeżeli \mathcal{F} jest ciągłe dla każdego $x \in X$, to mówimy, że jest *ciągłe na X* i piszemy $\mathcal{F} \in C^0(X)$. W szczególności np. $f \in C^0((a, b))$ oznacza, że funkcja $f: \mathbb{R} \supset (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na (a, b) .

Mówimy, że *odwzorowanie \mathcal{F} nie jest ciągłe w p (jest nieciągłe w p)*, jeżeli $\sim(\mathcal{F}$ ciągłe w p), tzn.

$$(3) \quad (\mathcal{F} \text{ nie jest określone w } p) \vee (\text{nie istnieje granica } \lim_{x \rightarrow p} \mathcal{F}(x)) \vee (\lim_{x \rightarrow p} \mathcal{F}(x) \neq \mathcal{F}(p)).$$

Punkt w którym odwzorowanie nie jest ciągłe nazywamy *punktem nieciągłości odwzorowania*. W przypadku gdy $\mathcal{F}: \mathbb{R} \supset X \rightarrow \mathbb{R}$, rozróżnia się dwa rodzaje punktów nieciągłości: 1° jeżeli istnieją skończone granice jednostronne w x_0 , to x_0 nazywamy *punktem nieciągłości pierwszego rodzaju* i piszemy (n.I.r.), 2° w przeciwnym przypadku, tzn. jeżeli nie istnieje co najmniej jedna granica jednostronna, to x_0 nazywamy *punktem nieciągłości drugiego rodzaju* i piszemy (n.II.r.). Jeżeli w x_0 jest (n.I.r.) $\wedge \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, to mówimy, że f ma w punkcie x_0 *nieciągłość usuwalną* i piszemy (n.u.). Mówimy, że funkcja $f: \mathbb{R} \supset \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ jest *ciągła na $\langle a, b \rangle$* , jeżeli $f \in C^0((a, b))$ i jest ciągła prawostronnie w a , tzn. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ i lewostronnie w b , tzn. $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

W dalszym ciągu ograniczymy się do odwzorowań $\mathcal{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, w szczególności do przypadków: 1° $m = 1$, 2° $n = m = 1$.

T₁. Jeżeli $f_i: \mathbb{R}^m \supset X \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, są ciągłe na X i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to funkcje: $\alpha f_1 + \beta f_2$, $f_1 f_2$, f_1/f_2 ($f_2 \neq 0$ na X) są ciągłe na X .

T₂. Jeżeli $\mathcal{F}: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathcal{G}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\mathcal{F} \in C^0(A)$, $\mathcal{G} \in C^0(\mathbb{R}^m)$, to *superpozycja $\mathcal{F} = \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ jest ciągła na A* .

W przypadku $n=m=1$ korzystamy z twierdzenia:

T₃. Jeżeli $(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)=g) \wedge$ (funkcja h jest ciągła w g), to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(f(x)) = h(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)) = h(g).$$

Twierdzenie **T₃** jest również prawdziwe dla granic jednostronnych.

T₄. Jeżeli $f: \mathbf{R}^n \supset X \rightarrow \mathbf{R}$, X jest zbiorem otwartym, f jest ciągła w $p \in X$, to

$$(f(p) < 0) [f(p) > 0] \Rightarrow \left(\bigvee_{\eta > 0} \bigwedge_{x \in U(p; \eta) \subset X} f(x) < 0 [f(x) > 0] \right).$$

T₅ (własność Darboux). Jeżeli $f: \mathbf{R}^n \supset X \rightarrow \mathbf{R}$, X jest zbiorem spójnym, $f \in C^0(X)$, to

$$\bigwedge_{p, g \in X} \bigwedge_{y_0 \in \mathbf{R}} \bigvee_{p_0 \in X} ((f(p) \leq y_0 \leq f(g)) \Rightarrow (f(p_0) = y_0)).$$

T₆. Funkcja $f: \mathbf{R}^n \supset X \rightarrow \mathbf{R}$ ciągła na zbiorze X ograniczonym i domkniętym jest ograniczona na tym zbiorze i osiąga w nim swoje kresy, tzn. istnieją takie punkty $p, g \in X$, że

$$f(p) = \inf \{f(x) : x \in X\}, \quad f(g) = \sup \{f(x) : x \in X\}.$$

Twierdzenia **T₇** i **T₈** dotyczą funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Z **T₅** dla $n=1$, $y_0=0$ wynika:

$$\mathbf{T}_7. ((f \in C^0((a, b))) \wedge (f(a)f(b) < 0)) \Rightarrow \left(\bigvee_{x_0 \in (a, b)} f(x_0) = 0 \right).$$

T₈. Funkcje elementarne, tzn. funkcje utworzone z funkcji elementarnych podstawowych potęgowej, wykładniczej i funkcji \sin za pomocą działań wymiernych „+”, „-”, „·”, „:” oraz operacji odwracania i składania są funkcjami ciągłymi na swoich dziedzinach.

Przykłady

20.1. Zbadać ciągłość funkcji określonych wzorami:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ 1 & \text{dla } x > 0; \end{cases} \quad \text{b) } h(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{dla } x \neq \mp 1, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = 1; \end{cases}$$

$$\text{c) } g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{nx} + x e^{nx} + e^{nx} + 1}{e^{nx} + 2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

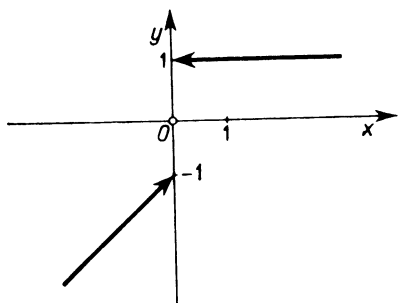
Rozwiązanie ⁽¹⁾. a) Wykażemy, że $f \in C^0(\mathbf{R} - \{0\})$ (rys. 20.1). W tym celu zgodnie z definicją ciągłości funkcji w punkcie x_0 należy udowodnić, że $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Dla $x < 0$ jest $f(x) = x-1$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0} (x-1) = x_0-1$ dla każdego $x_0 < 0$. Istotnie, dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ mamy $|x-1 - x_0+1| = |x-x_0| < \varepsilon = \eta$, zatem istnieje liczba $\eta = \varepsilon$, dla której z nierówności $|x-x_0| < \eta$ wynika nierówność $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Zarazem wykazaliśmy,

⁽¹⁾ Nie będziemy korzystali z twierdzenia **T₈**.

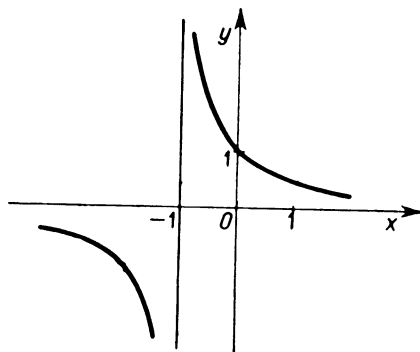
że $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1 \neq 0 = f(0)$. Zatem funkcja f nie jest ciągła lewostronnie w punkcie $x=0$, czyli nie jest ciągła w tym punkcie. Dla $x > 0$ funkcja f jest również ciągła, gdyż $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = 1$, przy czym

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \neq f(0) = 0.$$

Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, więc punkt $x_0 = 0$ jest punktem nieciągłości pierwszego rodzaju.



Rys. 20.1



Rys. 20.2

b) Ponieważ funkcja h nie jest określona dla $x = -1$, przy czym np. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = -\infty$, więc punkt $x = -1$ jest punktem nieciągłości drugiego rodzaju. Dla $x \neq -1$ funkcja h jest ciągła, ponieważ

$$h(x) = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x_0+1}$$

dla wszystkich $x_0 \neq -1$.

W szczególności, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} = h(1)$, czyli funkcja h jest ciągła w punkcie $x=1$

(por. rys. 20.2)

c) Znajdziemy najpierw funkcję g : otóż

$$\bigwedge_{x \in (-\infty, 0)} g(x) = \bigwedge_{x \in (-\infty, 0)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{nx} + x e^{nx} + e^{nx} + 1}{e^{nx} + 2} = \frac{1}{2}$$

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} e^{nx} = 0), \quad g(0) = \frac{2}{3},$$

$$\bigwedge_{x \in (0, +\infty)} g(x) = \bigwedge_{x \in (0, +\infty)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1 + e^{-nx}}{1 + 2e^{-nx}} = x^2 + x + 1$$

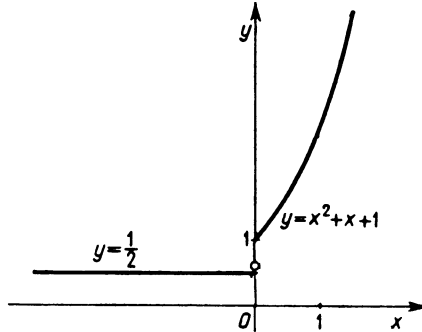
($\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nx} = 0$), stąd wykres (rys. 20.3).

Wykażemy, że $g \in C^0(\mathbb{R} - \{0\})$. Istotnie

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\eta > 0} \bigwedge_{x \in (-\infty, 0)} (|x - x_0| < \eta \Rightarrow |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}| = 0 < \varepsilon)$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \frac{1}{2} \neq g(0) = \frac{2}{3} \Rightarrow g \in C^0((-\infty, 0))$$



Rys. 20.3

i g nie jest ciągła w $x=0$. Z kolei, niech $\varepsilon > 0$ dowolna liczba, $x_0 \in (0, +\infty)$, $|x - x_0| < a \in \mathbb{R}_+$, wówczas

$$|x^2 + x + 1 - x_0^2 - x_0 - 1| = |x - x_0| |x + x_0 + 1| < |x - x_0| |a + 2x_0 + 1| < \varepsilon.$$

Jeżeli $0 < \eta = \frac{\varepsilon}{|a + 2x_0 + 1|}$, to

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\eta > 0} \bigwedge_{x \in (0, +\infty)} (|x - x_0| < \eta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon) \Rightarrow g \in C^0((0, +\infty)).$$

Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1 \neq g(0) = \frac{2}{3}$, więc $x=0$ (n.I.r.).

20.2. Zbadać ciągłość funkcji określonych wzorami w danych punktach:

a) $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $x_0 = 1$; b) $g(t) = \begin{cases} t^2 & \text{dla } t \neq 0 \\ 2 & \text{dla } t = 0, \end{cases} \quad t_0 = 0$;

c) $p(u) = \frac{\operatorname{tg} 2u}{u}$, $u_0 = 0$; d) $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5} & \text{dla } x \neq 5, \\ a & \text{dla } x = 5, \end{cases} \quad x_0 = 5$;

e) $n(t) = \frac{1}{t}$, $t_0 = 0$; f) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{1}{2}\pi$; g) $g(r) = 2^{1/r}$, $r_0 = 0$;

h) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$; i) $p(t) = \sqrt{t} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{1}{t}$, $t_0 = 0$.

Rozwiązanie. a) Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+2} = f(1) = \frac{1}{3}$ (por. 19.7b), więc w punkcie $x_0 = 1$ funkcja f jest ciągła.

b) Funkcja g jest nieciągła w punkcie $t = 0$, ponieważ $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0 \neq g(0) = 2$. Istotnie, dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ wystarczy przyjąć $\eta = \sqrt{\varepsilon}$, to z nierówności $0 < |t| < \sqrt{\varepsilon}$ wynika nierówność $t^2 < \varepsilon$. Punkt $t = 0$ jest punktem nieciągłości usuwalnej, ponieważ

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 0.$$

Uwaga. Przyjmując $g(0) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0$ zamiast $g(0) = 2$, otrzymujemy funkcję ciągłą w punkcie $t = 0$.

c) Funkcja p nie jest określona w punkcie $u = 0$, zatem jest w tym punkcie nieciągła. Zauważmy jednak, że

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2u}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin 2u}{u} \cdot \frac{1}{\cos 2u} = 2 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin 2u}{2u} \cdot \frac{1}{\cos 2u} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2,$$

czyli $u = 0$ (n.u.). Przyjmując dodatkowo $p(0) = 2$, otrzymujemy $\lim_{u \rightarrow 0} p(u) = 2 = p(0)$, a więc funkcję ciągłą w punkcie $u = 0$.

d) Obliczamy

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x+5) = 10$$

($x \neq 5 \wedge$ funkcja $g : \mathbb{R} \ni x \rightarrow (x+5) \in \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $x = 5$). Jeżeli więc $h(5) = a = 10 = \lim_{x \rightarrow 5} h(x)$, to funkcja h jest ciągła w punkcie $x = 5$, w przeciwnym przypadku otrzymujemy dla $x = 5$ (n.u.).

e) Funkcja n nie jest określona w punkcie $t = 0$, przy czym np. $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t} = -\infty$ (por.

19.8c) zatem $t = 0$ (n.II.r.).

f) Funkcja f nie jest określona w punkcie $x = \frac{1}{2}\pi$, przy czym $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi^-} \operatorname{tg} x = +\infty$. Istotnie, dla dowolnej liczby $A > 0$, jeżeli $\operatorname{tg} x > A = \operatorname{tg}(\operatorname{arc} \operatorname{tg} A)$, to $\frac{1}{2}\pi > x > \operatorname{arc} \operatorname{tg} A$ (tg jest funkcją rosnącą), czyli $\operatorname{arc} \operatorname{tg} A - \frac{1}{2}\pi < x - \frac{1}{2}\pi < 0$. Przyjmując $-\eta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} A - \frac{1}{2}\pi < 0$ otrzymujemy $\eta > 0$ i $-\eta < x - \frac{1}{2}\pi < 0$. Istnieje więc liczba $\eta = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} A > 0$ taka, że dla $0 < |x - \frac{1}{2}\pi| < \eta$ słuszna jest nierówność $\operatorname{tg} x > A$, czyli $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi^-} \operatorname{tg} x = +\infty$. Zatem $x = \frac{1}{2}\pi$ (n.II.r.).

g) Funkcja g nie jest określona w punkcie $r = 0$, przy czym $\lim_{r \rightarrow 0^-} 2^{1/r} = 0$ (por. 19.8a) oraz $\lim_{r \rightarrow 0^+} 2^{1/r} = +\infty$ (por. 19.43b). Zatem $r = 0$ (n.II.r.).

h) Funkcja f nie jest określona w punkcie $x = 0$, przy czym w punkcie tym nie istnieją granice jednostronne (por. 19.47b). Zatem $x = 0$ (n.II.r.).

i) Funkcja p jest określona i ciągła na przedziale $(0, +\infty)$, wystarczy więc zbadać

granice $\lim_{t \rightarrow 0^+} p(t)$. Otóż $\lim_{t \rightarrow 0^+} \arctg \frac{1}{t} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \arctg u = \frac{1}{2}\pi$, oraz $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} = \sqrt{0} = 0$, stąd $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{t} \arctg \frac{1}{t} \right) = 0 \cdot \frac{1}{2}\pi = 0$. Zatem punkt $t=0$ jest punktem nieciągłości usuwalnej (prawostronnie).

20.3. Znaleźć granice:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} \quad (m \cdot n \neq 0)$;

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}\pi} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos(x + \frac{1}{8}\pi)}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}$;

e) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 3x_0}{x - x_0}$;

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x})$.

Rozwiązanie. Przy rozwiązywaniu przykładów a) - f) będziemy korzystali m. in. z twierdzenia T_8 , z twierdzenia T_6 § 19 oraz z 19.11e. Zauważmy jednak, że bezpośrednio nie możemy korzystać z wymienionych twierdzeń, ponieważ przykłady a) - e) prowadzą do obliczania granic wyrażeń nieoznaczonych typu $\frac{0}{0}$ (por. § 24), a przykład f) do obliczenia granicy wyrażenia nieoznaczonego typu $\infty - \infty$ (por. § 24).

a) Ponieważ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 2x - 1) = f(-1) = 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^5 - 2x - 1) = g(-1) = 0$, więc należy znaleźć granicę wyrażenia nieoznaczonego typu $\frac{0}{0}$. W tym celu (dla $x \neq -1$) przekształcamy funkcję następująco:

$$\frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1} = \frac{x(x^2 - 1) - (x + 1)}{x(x^4 - 1) - (x + 1)} = \frac{(x + 1)[x(x - 1) - 1]}{(x + 1)[x(x - 1)(x^2 + 1) - 1]} = \frac{x(x - 1) - 1}{x(x - 1)(x^2 + 1) - 1}.$$

Stąd

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x - 1) - 1}{x(x - 1)(x^2 + 1) - 1} = h(-1) = \frac{1}{3},$$

ponieważ funkcja określona wzorem $h(x) = \frac{x(x - 1) - 1}{x(x - 1)(x^2 + 1) - 1}$ jest funkcją ciągłą dla $x = -1$.

Zauważmy, że funkcja określona wzorem $p(x) = \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}$ ma w punkcie $x = -1$ (n.u.), stąd określając dodatkowo $p(-1) = \frac{1}{3}$ otrzymujemy funkcję ciągłą w punkcie $x = -1$.
b) W celu zastosowania wzoru

$$\lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$$

(por. 19.11e) dzielimy licznik i mianownik ułamka $\frac{\sin mx}{\sin nx}$ przez $mx \neq 0$. Stąd

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin mx}{mx}}{\frac{\sin nx}{nx}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin mx}{mx}}{\frac{1}{n} \cdot \frac{\sin nx}{nx}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{mx}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{nx}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{1} = \frac{m}{n}.$$

c) Nieoznaczoność typu $\frac{0}{0}$. Korzystając z elementarnych przekształceń, otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos(x + \frac{1}{2}\pi)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\pi) (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\pi)}{\cos(x + \frac{1}{2}\pi)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(x - \frac{1}{2}\pi) \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\pi)}{\cos(x + \frac{1}{2}\pi) \cos x \cos \frac{1}{2}\pi}.$$

Ale

$$\sin(x - \frac{1}{2}\pi) = -\sin(\frac{1}{2}\pi - x) = -\cos(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi + x) = -\cos(\frac{1}{2}\pi + x),$$

stąd

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos(x + \frac{1}{2}\pi)} = -\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x + \sqrt{3})}{\frac{1}{2} \cos x} = -24.$$

d) Przekształcamy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos \sqrt{x})(1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}x}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \sqrt{x} (1 + \sqrt{\cos x})}.$$

Ale $x = \sqrt{x}\sqrt{x} \neq 0$, stąd

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin \frac{1}{2}x \frac{\sin \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}}{\frac{\sin \frac{1}{2} \sqrt{x}}{\frac{1}{2} \sqrt{x}} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \sqrt{x}}{\frac{1}{2} \sqrt{x}} (1 + \sqrt{\cos x})} = 0,$$

ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \frac{1}{2} \sqrt{x}}{\frac{1}{2} \sqrt{x}} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 3x_0}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(3x - 3x_0)}{(x - x_0) \cos 3x \cos 3x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3 \sin(3x - 3x_0)}{(3x - 3x_0) \cos 3x \cos 3x_0} = \\ &= \frac{3}{\cos^2 3x_0}. \end{aligned}$$

f) Nieoznaczoność typu $\infty - \infty$, ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} = +\infty \wedge \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right)} = +\infty.$$

W celu uwolnienia od różnicy pierwiastków licznika, mnożymy licznik i mianownik przez

wyrażenie dodatnie $(a^3 + b^3)(a^2 + ab + b^2)$, gdzie $a = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$, $b = \sqrt{x^2 - 2x}$ ($x > 2$). Otóż

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x}) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^5 - 3x^4 + 8x^3}{(x^3 + 3x^2 + \sqrt{(x^2 - 2x)^3})(\sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)^2} + \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}\sqrt{x^2 - 2x} + x^2 - 2x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12 - \frac{3}{x} + \frac{8}{x^2}}{\left(1 + \frac{3}{x} + \sqrt{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^3}\right)\left(\sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}}\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1 - \frac{2}{x}\right)} = \frac{12}{6} = 2. \end{aligned}$$

20.4. Wykazać, że każde równanie stopnia trzeciego $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

Rozwiązanie. Weźmy funkcję $f: \mathbf{R} \ni x \rightarrow (x^3 + ax^2 + bx + c) \in \mathbf{R}$. Ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

więc dla dowolnej liczby A np. $A < 0$ istnieje taka liczba $B < 0$, że dla $x < B$ mamy $f(x) < A < 0$ oraz dla dowolnej liczby A_1 np. $A_1 > 0$ istnieje taka liczba $B_1 > 0$, że dla $x > B_1$ zachodzi nierówność $f(x) > A_1 > 0$. Zatem istnieją takie liczby x_1, x_2 , że $f(x_1) < 0 \wedge f(x_2) > 0$. Ale $f \in C^0(\langle x_1, x_2 \rangle)$ (f jest funkcją elementarną), stąd na mocy T_7 istnieje taka liczba $x_0 \in (x_1, x_2)$, że

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow (x_0^3 + ax_0^2 + bx_0 + c = 0). \quad \square$$

20.5. Wykazać, że równanie $\operatorname{tg} x - x = 0$ ma nieskończenie wiele pierwiastków.

Rozwiązanie. Weźmy funkcję $f: \mathbf{R} \ni x \rightarrow (\operatorname{tg} x - x) \in \mathbf{R}$ na $X = \mathbf{R} - X_1$, gdzie $X_1 = \{x: x = \frac{1}{2}\pi + n\pi, n \in \mathbf{C}\}$ (w dalszym ciągu zadania zawsze $n \in \mathbf{C}$). Wykażemy najpierw, że

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2}\pi + n\pi)^-} \operatorname{tg} x = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2}\pi + n\pi)^+} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

Istotnie, podstawiając $x = y + n\pi$ otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2}\pi + n\pi)^-} \operatorname{tg} x = \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2}\pi^-} \operatorname{tg}(y + n\pi) = \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2}\pi^-} \operatorname{tg} y = +\infty$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2}\pi + n\pi)^+} \operatorname{tg} x = \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2}\pi^+} \operatorname{tg}(y + n\pi) = \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2}\pi^+} \operatorname{tg} y = -\infty.$$

Wynika stąd, że w każdym z przedziałów $X_n = (-\frac{1}{2}\pi + n\pi, \frac{1}{2}\pi + n\pi)$ dla dowolnej liczby $A_n > 0$, np. $A_n > |\frac{1}{2}\pi + n\pi| > 0$, istnieje taka liczba $x_n^* \in X_n$, że dla $x_n^* < x_{1n} \in X_n$ prawdziwa jest nierówność $\operatorname{tg} x_{1n} > A_n > \frac{1}{2}\pi + n\pi > x_{1n}$, czyli $f(x_{1n}) = \operatorname{tg} x_{1n} - x_{1n} > 0$ oraz dla dowolnej liczby A_n^* , np. $A_n^* < -|\frac{1}{2}\pi + n\pi| < 0$, istnieje taka liczba $x_n^{**} \in X_n$, że dla $x_n^{**} > x_{2n} \in X_n$ zachodzi nierówność $\operatorname{tg} x_{2n} < A_n^* < -\frac{1}{2}\pi + n\pi < x_{2n}$, czyli $f(x_{2n}) = \operatorname{tg} x_{2n} - x_{2n} < 0$. Ponieważ funkcja

f jest ciągła na przedziale domkniętym $\langle x_{2n}, x_{1n} \rangle$ (łatwo wykazać, że $x_{2n} < x_{1n}$) oraz $f(x_{2n}) \cdot f(x_{1n}) < 0$, więc na mocy T_7 , istnieje taki punkt x_{0n} , że $f(x_{0n}) = 0 \Leftrightarrow (tg x_{0n} - x_{0n} = 0)$ dla nieskończenie wielu liczb x_{0n} , $n \in \mathbb{C}$. \square

20.6. Niech (X, d_X) , (Y, d_Y) p.m. Wykazać, że

$$(\mathcal{F} \in C^0(X)) \Leftrightarrow \bigwedge_{V \subset Y} (\text{zbiór } \mathcal{F}^{-1}(V) \text{ jest otwarty w } X)$$

$(\mathcal{F}^{-1}(V))$ oznacza przeciwobraz zbioru V (por. § 4)).

Dowód \Rightarrow : Załóżmy, że $\mathcal{F} \in C^0(X)$ i V dowolny zbiór otwarty w Y . Należy wykazać, że każdy punkt zbioru $\mathcal{F}^{-1}(V)$ jest jego punktem wewnętrznym. Jeżeli $\mathcal{F}^{-1}(V) = \emptyset$, to $\mathcal{F}^{-1}(V)$ jest otwarty. Niech więc $p \in X \wedge \mathcal{F}(p) \in V$. Ponieważ V otwarty, to

$$\bigvee_{\varepsilon_1 > 0} \bigwedge_{y \in Y} (d_Y(\mathcal{F}(p), y) < \varepsilon_1 \Rightarrow y \in V).$$

Ale odwzorowanie \mathcal{F} jest ciągle w p , więc dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$, np. $\varepsilon = \varepsilon_1$ jest

$$\bigvee_{\eta > 0} \bigwedge_{x \in X} (d_X(p, x) < \eta \Rightarrow d_Y(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(p)) < \varepsilon_1).$$

A więc jeżeli $p \in \mathcal{F}^{-1}(V)$, to

$$\bigvee_{\eta > 0} \bigwedge_{x \in X} (d_X(x, p) < \eta \Rightarrow x \in \mathcal{F}^{-1}(V)).$$

\Leftarrow : Ustalmy punkt $p \in X$, weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ oraz niech

$$V = \{Y \ni y : d_Y(\mathcal{F}(p), y) < \varepsilon\}.$$

Zbiór V jest otwarty (kula otwarta), a więc $\mathcal{F}^{-1}(V)$ jest otwarty, czyli

$$\begin{aligned} \bigvee_{\eta > 0} \bigwedge_{x \in X} (d_X(p, x) < \eta \Rightarrow x \in \mathcal{F}^{-1}(V)) &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\eta > 0} \bigwedge_{x \in X} (d_X(p, x) < \eta \Rightarrow d_Y(\mathcal{F}(p), \mathcal{F}(x)) < \varepsilon). \quad \square \end{aligned}$$

Zadania

20.7. Niech $f: U(x_0, \eta) \rightarrow \mathbb{R}$.

- Zapisać za pomocą kwantyfikatorów definicję ciągłości f w punkcie x_0 ;
- podać interpretację geometryczną ciągłości f w punkcie x_0 ;
- podać zaprzeczenie definicji ciągłości f w punkcie x_0 ;
- podać interpretację geometryczną zaprzeczenia definicji ciągłości f w punkcie x_0 .

20.8. Wykazać ciągłość funkcji określonych wzorami:

a) $f(x) = 3x$, $-\infty < x < +\infty$; b) $f(x) = ax + b$, $-\infty < x < +\infty$;

c) $p(t) = t^3$, $-\infty < t < +\infty$; d) $k(x) = \sin x$, $-\infty < x < +\infty$; e) $h(u) = \frac{1}{u}$, $u \neq 0$;

f) $m(z) = \sqrt[3]{z}$, $0 \leq z < +\infty$; g) $k(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x+1)}{x+1} & \text{dla } x \neq -1 \\ 1 & \text{dla } x = -1 \end{cases}$.

20.9. Należy sporządzić płytkę kwadratową o boku $a=10$ cm. W jakich przedziałach można przyjąć długości boków, jeżeli pole tej płytki ma się różnić od zaplanowanego pola $S=100$ cm² o mniej niż o:

- a) ∓ 1 cm²; b) $\mp 0,1$ cm²; c) $\mp 0,01$ cm²; d) $\mp \varepsilon$ cm²?

20.10. Długość krawędzi sześcianu zawiera się w przedziale $\langle 2m, 3m \rangle$. Z jakim błędem bezwzględnym Δ można przyjąć długość krawędzi tego sześcianu, aby jego objętość można było wyznaczyć z błędem bezwzględnym nie przekraczającym ε m³, gdzie:

- a) $\varepsilon=0,1$; b) $\varepsilon=0,01$; c) $\varepsilon=0,001$?

20.11. Dana jest funkcja $f: \mathbf{R} \ni x \rightarrow (4x+1) \in \mathbf{R}$, punkt x_0 i liczba $\varepsilon > 0$. Znaleźć największą liczbę $\eta > 0$, dla której z nierówności $|x-x_0| < \eta$ wynika nierówność $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ oraz wypełnić tabelkę

ε	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
η					

20.12. Dana jest funkcja $f: \langle 0, +\infty \rangle \ni x \rightarrow \sqrt{x} \in \mathbf{R}$, punkt x_0 i liczba $\varepsilon > 0$. Znaleźć największy przedział zawierający punkt x_0 i taki, że dla punktów tego przedziału zachodzi nierówność $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$. Przeprowadzić rachunek dla $x_0=10$, $\varepsilon=10^{-n}$, gdzie $n=0, 1, 2, 3$.

20.13. Zbadać ciągłość funkcji określonych wzorami:

a) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbf{R}$; b) $g(t) = [t] - t$, $t \in \mathbf{R}$;

c) $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \text{ wymiernych,} \\ x & \text{dla } x \text{ niewymiernych;} \end{cases}$ d) $k(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \text{ wymiernych,} \\ 1 & \text{dla } x \text{ niewymiernych;} \end{cases}$

e) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1+x^n}$, $x \in \langle 0, +\infty \rangle$; f) $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+nx}$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$;

g) $k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^{-x} + n^x}$, $x \in \mathbf{R}$; h) $t(x) = [x] x \sin \pi x$, $x \in \mathbf{R}$;

i) $p(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $x \in \mathbf{R}$.

20.14. Wykazać, że jeżeli funkcja f jest ciągła i nieujemna na przedziale $x \in \mathbf{R}$, to funkcja \sqrt{f} też jest ciągła na przedziale X .

20.15. Znaleźć i zbadać punkty nieciągłości funkcji określonych wzorami:

a) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x=0 \text{ i } x=\mp 2, \\ 4-x^2 & \text{dla } 0 < |x| < 2, \\ 4 & \text{dla } |x| > 2; \end{cases}$ b) $h(x) = \begin{cases} \frac{\sin 5x}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ x & \text{dla } x=0; \end{cases}$

$$c) g(t) = \begin{cases} 4-t^2 & \text{dla } t \in \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}, \\ |4t-t^3| & \text{dla } t \in \{-2, 0, 2\}, \\ 0 & \text{dla } t \in \{-2, 0, 2\}, \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} 2^{1/x} - 1 & \text{dla } x \neq 0, \\ 2^{1/x} + 1 & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0; \end{cases}$$

$$e) h(u) = \begin{cases} \frac{1}{1+2^{1/u}} & \text{dla } u \neq 0, \\ 1 & \text{dla } u = 0; \end{cases} \quad f) f(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 1 & \text{dla } x = 0; \end{cases}$$

$$g) p(u) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{1-u} & \text{dla } u \neq 1, \\ \frac{1}{2}\pi & \text{dla } u = 1; \end{cases} \quad h) m(t) = \begin{cases} 2^{1/(t-2)} & \text{dla } t \neq 2, \\ 0 & \text{dla } t = 2; \end{cases}$$

$$i) f(x) = \begin{cases} 2^{1/\sqrt{x}} & \text{dla } x \neq 0, \\ 1 & \text{dla } x = 0; \end{cases} \quad j) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{dla } x \geq 0 \wedge x \neq 1, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = 1; \end{cases}$$

$$k) p(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 1 & \text{dla } x = 0; \end{cases} \quad l) m(x) = (-1)^{[x^2]}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

20.16. Znaleźć:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2}}{x^2+3x-2}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}; \quad c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7-1}{x-1}; \quad e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}; \quad f) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x_0+1}}{x-x_0};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha x}{\sin \beta x}; \quad h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 2x}; \quad i) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{1 - \operatorname{tg}^2 x};$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha+x) - \sin(\alpha-x)}{x}; \quad k) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{\sin x} - \sqrt{\sin x_0}}{x-x_0}; \quad l) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{tg} \sqrt[3]{x} + \operatorname{tg} 1}{x+1};$$

$$l) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{arc\,sin}(x+2)}{x^2+2x}; \quad m) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} [(x - \frac{1}{2}\pi) \operatorname{tg} x];$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}; \quad o) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$$

20.17. Znaleźć:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 - x - 2}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x - 1}{-x^3 + 4x - 1};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2 + 4x - 1}{2x^4 - x^3 - 7}; \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - x + 1});$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 - ax}); \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}];$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(\sqrt{x^2 + 1} - x)]; \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}}{\sqrt{2x+1}}; \quad \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}.$$

20.18. Znaleźć:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} 2^{(\sin x)/x}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin \frac{\operatorname{tg} x}{x}; \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \log \frac{\sqrt{x}-1}{x-1};$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 10^{(-x^2+1)/(x^2+3)}; \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} 3^{x \operatorname{ctg} x}; \quad \text{g) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \arcsin \frac{1-2 \cos x}{\pi-3x}.$$

20.19. Funkcje określone na wspólnej dziedzinie $X = \mathbb{R} - \{0\}$ wzorami:

$$\text{a) } f_1(x) = \frac{\operatorname{tg} 3x}{5x}; \quad \text{b) } f_2(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x};$$

$$\text{c) } f_3(x) = \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}; \quad \text{d) } f_4(x) = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x};$$

są nieciągłe w punkcie $x=0$.

Określić funkcje f_i , $i=1, 2, 3, 4$, w punkcie $x=0$ w taki sposób, aby były one ciągłe w tym punkcie.

20.20. Znaleźć wartości parametrów p , dla których dane funkcje określone wzorami, we wskazanych punktach są ciągłe:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 27}{x - 3} & \text{dla } x \neq 3, \\ p & \text{dla } x = 3, \end{cases} \quad \text{w punkcie } x=3;$$

$$\text{b) } g(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{t+1} - \sqrt[3]{4}}{t-3} & \text{dla } t \neq 3, \\ p+1 & \text{dla } t = 3, \end{cases} \quad \text{w punkcie } t=3;$$

$$\text{c) } h(u) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\sin u} - \sqrt{\sin u_0}}{u - u_0} & \text{dla } u \neq u_0, \\ p & \text{dla } u = u_0, \end{cases} \quad \text{w punkcie } u = u_0;$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x} & \text{dla } x \neq -2, \\ p^2-1 & \text{dla } x = -2, \end{cases} \quad \text{w punkcie } x = -2;$$

$$e) g(h) = \begin{cases} \frac{\sin 3h}{\sin 5h} & \text{dla } h \neq 0, \\ p & \text{dla } h = 0, \end{cases} \quad \text{w punkcie } h = 0;$$

$$f) m(x) = \begin{cases} (x - \frac{1}{2}\pi) \operatorname{tg} x & \text{dla } x \neq \frac{1}{2}\pi, \\ p^2 & \text{dla } x = \frac{1}{2}\pi, \end{cases} \quad \text{w punkcie } x = \frac{1}{2}\pi;$$

$$g) t(u) = \begin{cases} \frac{3}{u^2-2} & \text{dla } u \neq \mp\sqrt{2}, \\ p & \text{dla } u = \sqrt{2}, \end{cases} \quad \text{w punkcie } u = 2;$$

$$h) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2} & \text{dla } x \neq 7, \\ -p^2+3p-12 & \text{dla } x = 7, \end{cases} \quad \text{w punkcie } x = 7.$$

20.21. Wykazać, że każde równanie $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$, gdzie $n = 2k + 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$, ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

20.22. Wykazać, że równanie $x^3 - 3x + 1 = 0$ ma w przedziale $\langle 1, 2 \rangle$ co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Znaleźć wartość przybliżoną tego pierwiastka z dokładnością do 0,01.

20.23. Dane są funkcje $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ określone wzorami:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{dla } (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy^2}{x^2 + y^6} & \text{dla } (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}. \end{cases}$$

Udowodnić, że: 1° f jest ograniczone na \mathbb{R}^2 , 2° g nie jest ograniczona na dowolnym otoczeniu punktu $(0, 0)$, 3° f jest nieciągła w $(0, 0)$, 4° funkcje $f|L$ i $g|L$ (obcięcia funkcji f i g), gdzie L jest dowolną prostą na \mathbb{R}^2 , są ciągłe na L .

20.24. Wykazać, że jeżeli funkcja $f: \mathbb{R}^2 \supset A \ni (x, y) \rightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}$ jest ciągła względem zmiennej x (przy ustalonym y) i spełnia warunek (tzw. *warunek Lipschitza*)

$$\bigvee_{k \in \mathbb{R}} \bigwedge_{(x, y_1), (x, y_2) \in A} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k |y_1 - y_2|,$$

to $f \in C^0(A)$.

20.25. Udowodnić T_4 .

20.26. Wykazać, że funkcje $\varphi_i: \mathbf{R}^n \ni \mathbf{x} \rightarrow x_i \in \mathbf{R}, i=1, 2, \dots, n$, są ciągłe na \mathbf{R}^n .

20.27. Wykazać, że funkcja $f: \mathbf{R}^n \ni \mathbf{x} \rightarrow |\mathbf{x}| \in \mathbf{R}$ jest ciągła na \mathbf{R}^n .

20.28. Udowodnić, że: a) jeżeli odwzorowania f i g są ciągłe na $X \subset \mathbf{R}^n$, to odwzorowanie $f+g$ jest ciągłe na X ;

b) jeżeli odwzorowania $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m, g: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^k$ są ciągłe na swoich dziedzinach, to odwzorowanie $g \circ f$ jest ciągłe na \mathbf{R}^n .

20.29. Niech $(X_i, d_i), i=1, 2, 3$, będą przestrzeniami metrycznymi oraz niech $f_1: X_1 \rightarrow X_2, f_2: X_2 \rightarrow X_3, f_3=f_2 \circ f_1: X_1 \rightarrow X_3$. Wykazać, że jeżeli f_1 jest ciągłe w p i f_2 jest ciągłe w $f_1(p)$, to f_3 jest ciągłe w p .

20.30. Dane jest odwzorowanie $f: \mathbf{R}^n \supset A \rightarrow \mathbf{R}^m$ określone składowymi $f_i: A \ni \mathbf{x} \rightarrow f_i(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}$. Wykazać, że

$$(f \in C^0(A)) \Leftrightarrow (f_i \in C^0(A), i=1, 2, \dots, m).$$

20.31. Wykazać, że jeżeli $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ i $f \in C^0(\mathbf{R}^n)$, to funkcja

$$\varphi: \mathbf{R}^n \ni \mathbf{x} \rightarrow |f(\mathbf{x})| \in \mathbf{R}$$

jest ciągła na \mathbf{R}^n .

20.32. Dane są przestrzenie metryczne $(X_i, d_i), i=1, 2, 3$ oraz odwzorowania $\mathcal{F}: X_1 \rightarrow X_2$ ciągłe na $X_1, \mathcal{G}: X_2 \rightarrow X_3$ ciągłe na X_2 . Korzystając z definicji ciągłości za pomocą zbiorów otwartych (por. przykład 20.6) udowodnić, że superpozycja $\mathcal{H}=\mathcal{G} \circ \mathcal{F}: X_1 \rightarrow X_3$ jest ciągła na X_1 .

20.33. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Wykazać, że metryka $d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$ jest funkcją ciągłą na $X \times X$.

Odpowiedzi

20.7. a) $\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\eta > 0} \bigwedge_x (|x-x_0| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon)$;

b) rys. 20.4, dla dowolnego pasa poziomego H_ε istnieje pas pionowy H_η taki, że jeżeli $x \in H_\eta$, to $y=f(x) \in H_\varepsilon$;

c) $\bigvee_{\varepsilon > 0} \bigwedge_{\eta > 0} \bigvee_x [(|x-x_0| < \eta) \wedge (|f(x)-f(x_0)| \geq \varepsilon)]$;

d) rys. 20.5, istnieje taki pas poziomy H_ε , że dla każdego pasa pionowego H_η istnieje $x \in H_\eta$ i $y=f(x) \notin H_\varepsilon$.

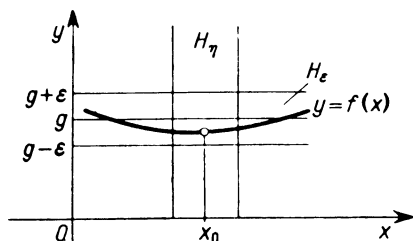
20.9. a) $9,95 < a < 10,05$; b) $9,995 < a < 10,005$;

c) $9,9995 < a < 10,0005$; d) $\sqrt{100-\varepsilon} < a < \sqrt{100+\varepsilon}$.

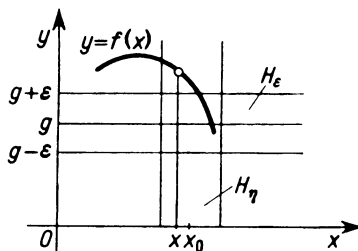
20.10. $\Delta < \frac{1}{27}\varepsilon$; a) $\Delta < 3,7$ mm; b) $\Delta < 0,37$ mm; c) $\Delta < 0,037$ mm.

20.11. $\eta = \frac{1}{4}\varepsilon$

ε	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
η	0,25	0,025	0,0025	0,00025	0,000025



Rys. 20.4



Rys. 20.5

20.12. $(\sqrt{x_0} - \varepsilon)^2 < x < (\sqrt{x_0} + \varepsilon)^2$, $\varepsilon < \sqrt{x_0}$; dla $x_0 = 10$ i $\varepsilon = 10^{-n}$, $100(10^{-1/2} - 10^{-n-1})^2 < x < 100(10^{-1/2} + 10^{-n-1})^2$; dla $n=0$, $4,84 < x < 17,6$; dla $n=1$, $9,61 < x < 10,89$; dla $n=2$, $9,92 < x < 10,05$; dla $n=3$, $9,979 < x < 9,991$.

20.13. a) Ciągła na $\mathbf{R} - \{0\}$; b) ciągła na $\mathbf{R} - \mathbf{C}$; c) ciągła w $x=0$;

d) Wsk. W każdym przedziale $\langle x_1, x_2 \rangle$ istnieją liczby wymierne i niewymierne; nieciągła na \mathbf{R} ;

e) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x=0, \\ 0 & \text{dla } x \in (0, +\infty), \end{cases} \quad f \in C^0((0, +\infty));$

f) $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x=0, \\ 0 & \text{dla } x \in (0, 1), \end{cases} \quad g \in C^0((0, 1));$

g) $k(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \\ 0 & \text{dla } x=0, \\ 1 & \text{dla } x \in (0, +\infty), \end{cases} \quad k \in C^0(\mathbf{R} - \{0\}), \quad x=0 \text{ (n.I.r.)};$

h) $t(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \mathbf{C}, \\ kx \sin \pi x & \text{dla } x \in (k, k+1), \quad k \in \mathbf{C}, \end{cases} \quad t \in C^0(\mathbf{R});$

i) $p(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$, $p \in C^0(\mathbf{R})$.

20.15. a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$, $x = -2$ (n.I.r.), $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$, $x = 0$ (n.u.),

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$, $x = 2$ (n.I.r.);

b) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 5$, $x = 0$ (n.u.);

c) $\lim_{t \rightarrow -2^-} g(t) = -\frac{1}{2}$, $\lim_{t \rightarrow -2^+} g(t) = \frac{1}{2}$, $t = -2$ (n.I.r.), $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = +\infty$, $t = 0$ (n.II.r.),

$\lim_{t \rightarrow 2^-} g(t) = \frac{1}{2}$, $\lim_{t \rightarrow 2^+} g(t) = -\frac{1}{2}$, $t = 2$ (n.I.r.);

d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, $x = 0$ (n.I.r.);

e) $\lim_{u \rightarrow 0^-} h(u) = 1$, $\lim_{u \rightarrow 0^+} h(u) = 0$, $u = 0$ (n.I.r.);

$$f) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{1}{2}\pi, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2}\pi, \quad x=0 \text{ (n.I.r.)};$$

$$g) \lim_{u \rightarrow 1^-} p(u) = \frac{1}{2}\pi, \quad \lim_{u \rightarrow 1^+} p(u) = -\frac{1}{2}\pi, \quad u=1 \text{ (n.I.r.)};$$

$$h) \lim_{t \rightarrow 2^-} m(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 2^+} m(t) = +\infty, \quad t=2 \text{ (n.II.r.)};$$

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $x=0$ (n.II.r.), punkty przedziału $(-\infty, 0)$ są również punktami nieciągłości drugiego rodzaju, ponieważ w żadnym w nich nie istnieje granica jednostronna;

$$j) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}, \quad x=1 \text{ (n.u.)}, \text{ punkty przedziału } (-\infty, 0) \text{ (n.II.r.)};$$

k) wsk. por. 19.47b, nie istnieją granice $\lim_{x \rightarrow 0^-} p(x)$ i $\lim_{x \rightarrow 0^+} p(x)$, $x=0$ (n.II.r.);

$$l) x = \mp \sqrt{k}, \quad k \in \mathbb{N} \text{ (n.I.r.)}.$$

$$20.16. \text{ a) } \frac{1}{2}\sqrt{3}; \quad \text{b) } \frac{2}{3}; \quad \text{c) } \frac{1}{4}; \quad \text{d) } 7;$$

$$\text{e) } \frac{1}{3}; \quad \text{f) } \frac{1}{3}(x_0+1)^{-2/3}; \quad \text{g) } \frac{\alpha}{\beta}; \quad \text{h) } 3; \quad \text{i) } \frac{1}{4}; \quad \text{j) } 2\cos\alpha;$$

$$\text{k) } \frac{\cos x_0}{2\sqrt{\sin x_0}}; \quad \text{l) } \frac{1}{3\cos^2 1}; \quad \text{ł) } -\frac{1}{2}; \quad \text{m) } -1; \quad \text{n) } \frac{1}{2}; \quad \text{o) } \frac{112}{27}.$$

$$20.17. \text{ a) } 3; \quad \text{b) } +\infty; \quad \text{c) } 0; \quad \text{d) } \frac{1}{2}; \quad \text{e) } -a;$$

$$\text{f) } 0; \quad \text{g) } \frac{1}{2}; \quad \text{h) } 1/\sqrt{2}; \quad \text{i) } +\infty.$$

$$20.18. \text{ a) } 2; \quad \text{b) } -\frac{1}{2}\pi; \quad \text{c) } \frac{1}{4}\pi; \quad \text{d) } -\log 2; \quad \text{e) } \frac{1}{10}; \quad \text{f) } 3; \quad \text{g) } -\frac{1}{3}\pi.$$

$$20.19. \text{ a) } f_1(0) = \frac{3}{5}; \quad \text{b) } f_2(0) = \frac{1}{3}; \quad \text{c) } f_3(0) = \frac{1}{2}; \quad \text{d) } f_4(0) = 0.$$

$$20.20. \text{ a) } p=27; \quad \text{b) } p = \frac{1}{6\sqrt[3]{2}} - 1; \quad \text{c) } p = \frac{\cos u_0}{2\sqrt{\sin u_0}}; \quad \text{d) } p = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \text{e) } p = \frac{3}{5};$$

f), g) i h) dla żadnej wartości p .

$$20.22. x_0 \approx 1,53.$$

$$20.32. \text{ Wsk. } (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})^{-1}(A) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{G}^{-1}(A)).$$

§ 21. POCHODNA I RÓŻNICZKA FUNKCJI $f: \mathbb{R} \supset X \rightarrow \mathbb{R}$

21.1. Niech $f: \mathbb{R} \supset X \rightarrow \mathbb{R}$, X zbiór otwarty, $x_0 \in X$. Jeżeli istnieje taka stała $l \in \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in X$

$$(1) \quad \Delta f = \Delta y = f(x) - f(x_0) = l(x - x_0) + o(x - x_0),$$

gdzie

$$(2) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

(nieskończenie mała o jest rzędu wyższego niż $\Delta x = x - x_0$), to mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 .

Liczbę l nazywamy *pochodną funkcji f w punkcie x_0* i oznaczamy $f'(x_0)$; część liniową przyrostu Δf , tzn. $l \cdot \Delta x = f'(x_0)\Delta x$ nazywamy *różniczką funkcji f w punkcie x_0* odpowia-

dającą przyrostowi $x - x_0 = \Delta x$ i oznaczamy $df(x_0, \Delta x)$, lub $df(x_0)$. Jeżeli f jest różniczkowalna dla każdego $x \in X_1 \subset X$, to mówimy że f jest różniczkowalna na X_1 i piszemy $f \in D^1(X_1)$. Funkcję $g: X_1 \rightarrow \mathbf{R}$, gdzie $g(x) = f'(x)$, $x \in X_1$ nazywamy funkcją pochodną lub pochodną funkcji f i oznaczamy f' .

$$T_1 \text{ (istnieje } f' \text{ w } x_0) \Rightarrow \left(f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right).$$

Jak wiadomo funkcję \mathcal{J} określoną wzorem

$$\mathcal{J}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad x \in X - \{x_0\}$$

nazywamy ilorazem różnicowym funkcji $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ w punkcie x_0 oraz następnik implikacji w T_1 jest definicją pochodnej (jeżeli granica ilorazu \mathcal{J} istnieje).

T_2 . (f jest różniczkowalna w x_0) \Leftrightarrow (istnieje pochodna $f'(x_0)$).

Jeżeli istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \mathcal{J}(x)$ [$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \mathcal{J}(x)$], to nazywamy ją pochodną lewostronną [prawostronną] funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy $f'(x_0^-)$ [$f'(x_0^+)$]. Mówimy, że f jest różniczkowalna na $\langle a, b \rangle$, jeżeli $f \in D^1(\langle a, b \rangle)$ i istnieją pochodne $f'(a^+)$, $f'(b^-)$.

Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} \mathcal{J}(x) = -\infty$ [$+\infty$], to mówimy, że f ma w punkcie x_0 pochodną niewłaściwą (nieskończoną). Podobnie określamy pochodne niewłaściwe jednostronne. Geometrycznie pochodna $f'(x_0)$ oznacza współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $P_0(x_0, f(x_0))$. Interpretując iloraz różnicowy $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ jako prędkość średnią v_{sr} zmiany

wartości funkcji f dla przyrostu argumentu Δx , możemy pochodną, tzn. granicę $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v_{\text{sr}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ nazwać prędkością chwilową zmiany wartości funkcji f w punkcie x_0 .

T_3 . (istnieje f' w x_0) \Rightarrow ($f \in C^0$ w x_0).

21.2. Znajdowanie pochodnych. Podamy wzory i twierdzenia o pochodnych częściowo znane ze szkoły.

T_4 . Jeżeli $f, g \in D^1(X)$, $\beta, \alpha \in \mathbf{R}$, to

$$(3) \quad (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g', \quad x \in X,$$

$$(4) \quad (f \cdot g)' = f'g + fg', \quad x \in X,$$

$$(5) \quad \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad x \in X_1 \subset X \wedge g(x) \neq 0.$$

T_5 . (o pochodnej superpozycji). Jeżeli $g \in D^1(X) \wedge f \in D^1(Y) \wedge Y \supset g(X)$, to $(f \circ g) \in D^1(X)$ i

$$(6) \quad (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \quad \text{dla } x \in X.$$

T₆. (o pochodnej funkcji odwrotnej). Jeżeli $f \in D^1((a, b)) \wedge (f'(x) \neq 0 \text{ dla } x \in (a, b))$, to istnieje $f^{-1} \in D^1(f((a, b)))$ i

$$(7) \quad (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}, \quad \text{dla } x \in (a, b).$$

Tabela wzorów

- | | | | |
|-------|---|------|---|
| I | $(c)' = 0, \quad c - \text{stała}, \quad x \in \mathbf{R}$ | II | $(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbf{R}$ |
| III | $(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbf{R}$ | | |
| IV | $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x, \quad x \in \mathbf{R} \wedge x \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbf{C}$ | | |
| V | $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x, \quad x \in \mathbf{R} \wedge x \neq k\pi, \quad k \in \mathbf{C}$ | | |
| VI | $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$ | VII | $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$ |
| VIII | $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbf{R}$ | IX | $(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbf{R}$ |
| X | $(e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbf{R}$ | XI | $(a^x)' = \ln a \cdot a^x, \quad x \in \mathbf{R}, \quad a \in \mathbf{R}_+ - \{1\}$ |
| XII | $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbf{R}_+$ | XIII | $(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a \cdot x}, \quad x \in \mathbf{R}_+, \quad a \in \mathbf{R}_+ - \{1\}$ |
| XIV | $(\sinh x)' = \cosh x, \quad x \in \mathbf{R}$ | XV | $(\cosh x)' = \sinh x, \quad x \in \mathbf{R}$ |
| XVI | $(\operatorname{tgh} x)' = 1/\cosh^2 x, \quad x \in \mathbf{R}$ | XVII | $(\operatorname{ctgh} x)' = -1/\sinh^2 x, \quad x \in \mathbf{R} - \{0\}$ |
| XVIII | $(\operatorname{ar} \sinh x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbf{R}$ | | |
| XIX | $(\operatorname{ar} \cosh x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x \in X = \{x : x > 1\}$ | | |
| XX | $(\operatorname{ar} \operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in X = \{x : x < 1\}$ | | |
| XXI | $(\operatorname{ar} \operatorname{ctgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in X = \{x : x > 1\}$ | | |
| XXII | $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad f \in D^1 \text{ na } X = \{x : f(x) > 0\}$ | | |
| XXIII | $(f^g)' = (e^{g \ln f})' = f^g \left(g' \ln f + \frac{g}{f} f' \right), \quad f, g \in D^1 \text{ na } X = \{x : f(x) > 0\}$ | | |

21.3. Pochodne wyższych rzędów: Jeżeli $(f \in D^1(X)) \wedge (x_0 \in X)$, to pochodną funkcji f' w punkcie x_0 nazywamy *drugą pochodną funkcji f w punkcie x_0* i oznaczamy $f''(x_0)$. Jeżeli dla każdego $x \in X_1 \subset X$ istnieje pochodna funkcji f' , to mamy określoną funkcję $f'' : X_1 \rightarrow \mathbf{R}$ zwaną pochodną 1żędu drugiego $f'' = f^{(2)} = (f')'$.

Ogólnie, jeżeli $f^{(n-2)} \in D^1(X_2) \wedge (x_0 \in X_2)$ ($f^{(k)}$ oznacza pochodną rzędu k), to pochodną funkcji $f^{(n-1)}$ w x_0 nazywamy *pochodną rzędu n funkcji f w x_0* i oznaczamy $f^{(n)}(x_0)$. Jeżeli dla każdego punktu $x \in X_3 \subset X_2$ istnieje $f^{(n)}(x)$, to mamy określoną funkcję $f^{(n)}: X_3 \rightarrow \mathbf{R}$ zwaną *pochodną rzędu n funkcji*, lub *n -tą pochodną funkcji f* , tzn. $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$. Jeżeli $f^{(n)} \in C^0(X)$, to mówimy, że funkcja f jest klasy C^n na X , i piszemy $f \in C^n(X)$.

Podobnie jak pochodne określamy różniczki wyższych rzędów. Jeżeli $f \in D^1(X)$, to przy ustalonym przyroście Δx różniczka $df: X \rightarrow \mathbf{R}$. Jeżeli df jest różniczkowalna w x_0 , to różniczkę funkcji df w punkcie x_0 odpowiadającą przyrostowi Δx (lub innemu przyrostowi) nazywamy *drugą różniczką*, lub *różniczką drugiego rzędu funkcji f w x_0* i oznaczamy $d^2f(x_0, \Delta x)$, czyli $d^2f(x_0, \Delta x) = dg(x_0, \Delta x)$, gdzie $g = df$. Jeżeli $df \in D^1(X)$, to $d^2f(x, \Delta x) = d(d(x, \Delta x))$. Ogólnie

$$d^n f := d(d^{n-1} f), \quad \text{przy czym} \quad d^n f(x, \Delta x) = f^{(n)}(x)(\Delta x)^n,$$

jeżeli dla każdej z różniczek $d^i f$, $i = 1, 2, \dots, n$ bierzemy zawsze ten sam przyrost Δx .

Przykłady

21.1. Korzystając z definicji znaleźć pochodne funkcji określonych wzorami:

- a) $f(x) = \cos 2x$ w punkcie $x = x_0$; b) $g(u) = \sqrt{u^3 - u}$ w punkcie $u = u_1$;
 c) $p(x) = \operatorname{tg} 3x$ w punkcie $x = x_0$; d) $h(t) = \sqrt[3]{\sin \sqrt{t}}$ w punkcie $t = t_0$.

Rozwiązanie.

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos 2x - \cos 2x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-2 \sin(x - x_0) \sin(x + x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[(-2) \frac{\sin(x - x_0)}{x - x_0} \sin(x + x_0) \right] = -2 \cdot 1 \cdot \sin(x_0 + x_0) = -2 \sin 2x_0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } g'(u_1) &= \lim_{u \rightarrow u_1} \frac{\sqrt{u^3 - u} - \sqrt{u_1^3 - u_1}}{u - u_1} = \lim_{u \rightarrow u_1} \frac{(u - u_1)(u^2 + uu_1 + u_1^2 - 1)}{(u - u_1)(\sqrt{u^3 - u} + \sqrt{u_1^3 - u_1})} = \\ &= \lim_{u \rightarrow u_1} \frac{u^2 + uu_1 + u_1^2 - 1}{\sqrt{u^3 - u} + \sqrt{u_1^3 - u_1}} = \frac{3u_1^2 - 1}{2\sqrt{u_1^3 - u_1}}. \end{aligned}$$

c) Korzystając z 20.3, otrzymujemy

$$p'(x_0) = \frac{3}{\cos^2 3x_0}.$$

$$\begin{aligned} \text{d) } h'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\sqrt[3]{\sin \sqrt{t}} - \sqrt[3]{\sin \sqrt{t_0}}}{t - t_0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\sin \sqrt{t} - \sin \sqrt{t_0}}{(t - t_0)(\sqrt[3]{\sin^2 \sqrt{t}} + \sqrt[3]{\sin \sqrt{t} \sin \sqrt{t_0}} + \sqrt[3]{\sin^2 \sqrt{t_0}})} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sin \frac{\sqrt{t}-\sqrt{t_0}}{2} \cos \frac{\sqrt{t}+\sqrt{t_0}}{2} \\
 = & \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(\sqrt{t}-\sqrt{t_0})(\sqrt{t}+\sqrt{t_0})}{2} \cdot \frac{1}{(\sqrt[3]{\sin^2 \sqrt{t} + \sqrt[3]{\sin \sqrt{t} \sin \sqrt{t_0} + \sqrt[3]{\sin^2 \sqrt{t_0}}})} = \\
 = & \frac{\cos \sqrt{t_0}}{6 \sqrt{t_0} \sqrt[3]{\sin^2 \sqrt{t_0}}}.
 \end{aligned}$$

21 2. Wyprowadzić wzory: a) VI; b) X; c) XI.

Rozwiązanie. a) Funkcją odwrotną względem funkcji

$$f: \langle -1, 1 \rangle \ni x \rightarrow \arcsin x \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$$

jest funkcja

$$f^{-1}: \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle \ni y \rightarrow \sin y \in \langle -1, 1 \rangle,$$

przy czym $(\sin y)' = \cos y \neq 0$ dla $|y| < \frac{1}{2}\pi$. Stąd

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\mp \sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\mp \sqrt{1 - x^2}}.$$

Ale $\cos y > 0$ dla $|y| < \frac{1}{2}\pi$, więc

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad \square$$

W punktach $x = -1$ oraz $x = 1$ funkcja \arcsin ma pochodne niewłaściwe równe $+\infty$.

b) Przy dowodzie wzoru X skorzystamy ze wzoru $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ ⁽¹⁾ oraz z T_3 § 20.

Otóż

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(e^{x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} \right) = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}.$$

Stąd $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} (e^x)' = e^x. \quad \square$

c) Mamy $a^x = e^{x \ln a}$, zatem, stosując T_5 oraz wzór XII, otrzymujemy

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} (x \ln a)' = \ln a \cdot a^x. \quad \square$$

21.3. Znaleźć pochodne funkcji określonych wzorami:

a) $m(x) = \frac{x \operatorname{th} x}{\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt[6]{x^5} \log_5 x$; b) $p(u) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{u}$;

c) $t(x) = \sinh^2(\cosh x)$; d) $f(x) = \operatorname{tg}^5 \{ \operatorname{tg}^3 [\operatorname{tg}^2(\operatorname{tg} x)] \}$;

(1) Dowód wzoru można znaleźć w książce *Matematyka dla wydziałów budowlanych i mechanicznych* T1, praca zbiorowa pod redakcją E. Otto, Warszawa 1975.

$$e) f(x) = \log \cosh \sqrt[3]{e^{\sin^2 2x} + \ln^2 \operatorname{tg} x};$$

$$f) f(x) = \frac{2}{\sqrt{ac-b}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ax+b}{ac-b}} \quad (ac-b > 0);$$

$$g) h(t) = \left(\frac{a}{b}\right)^t \left(\frac{b}{t}\right)^a \left(\frac{t}{a}\right)^b \quad (a > 0, b > 0);$$

$$h) g(u) = u \ln^2(u + \sqrt{1+u^2}) - 2\sqrt{1+u^2} \ln(u + \sqrt{1+u^2}) + 2u;$$

$$i) p(z) = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arcsin} \frac{a \sin z + b}{a + b \sin z} \quad (|b| < a);$$

$$j) k(z) = (\sin z)^{\cos z} + (\cos z)^{\sin z}.$$

Rozwiązanie. Korzystać będziemy z podstawowych wzorów i twierdzeń.

$$a) m'(x) = (x^{1/3} \operatorname{tgh} x)' - (x^{5/6} \log_5 x)' = \frac{1}{3} x^{-2/3} \operatorname{tgh} x + \frac{x^{1/3}}{\cosh^2 x} - \frac{5}{6} x^{-1/6} \log_5 x - \frac{1}{\ln 5} x^{-1/6}.$$

W przykładach b) - i) stosujemy m. in. wzór (6).

$$b) p(u) = \operatorname{arctg} \frac{1}{u} = \operatorname{arctg} v = h(v), \text{ czyli}$$

$$p'_u(u) = (h(v))'_v \cdot v'_u(u) = (\operatorname{arctg} v)'_v \left(\frac{1}{u}\right)'_u = \frac{1}{1+v^2} \cdot \frac{-1}{u^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \frac{-1}{u^2} = \frac{-1}{u^2+1}.$$

$$c) t(x) = \sinh^2(\cosh x) = \underbrace{[\sinh(\cosh x)]^2}_{v(x)}, \text{ czyli } h(v) = v^2. \text{ Stąd}$$

$$\begin{aligned} t'_x(x) &= h'_v(v) v'_x(x) = (v^2)'_v [\sinh(\cosh x)]'_x = \\ &= 2v [\sinh(\cosh x)]'_x = 2v (\sinh z)'_z \cdot (\cosh x)'_x = \\ &= 2v \cdot \cosh z \cdot \sinh x = 2 \sinh(\cosh x) \cdot \cosh(\cosh x) \cdot \sinh x. \end{aligned}$$

d) Wielokrotnie stosujemy wzór (6)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (r^5)'_r r'_x = 5r^4 (\operatorname{tg} p)'_p p'_x = 5r^4 \frac{1}{\cos^2 p} (z^3)'_z z'_x = 5r^4 \frac{1}{\cos^2 p} 3z^2 (\operatorname{tg} w)'_w w'_x = \\ &= \frac{5r^4}{\cos^2 p} \cdot \frac{3z^2}{\cos^2 w} (v^2)'_v v'_x = \frac{5r^4}{\cos^2 p} \cdot \frac{3z^2}{\cos^2 w} 2v (\operatorname{tg} u)'_u u'_x = \\ &= \frac{5r^4}{\cos^2 p} \cdot \frac{3z^2}{\cos^2 w} \cdot \frac{2v}{\cos^2 u} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}, \end{aligned}$$

gdzie

$$r = \operatorname{tg} \{ \operatorname{tg}^3 [\operatorname{tg}^2 (\operatorname{tg} x)] \}, \quad p = \operatorname{tg}^3 [\operatorname{tg}^2 (\operatorname{tg} x)],$$

$$z = \operatorname{tg} [\operatorname{tg}^2 (\operatorname{tg} x)], \quad w = \operatorname{tg}^2 (\operatorname{tg} x), \quad v = \operatorname{tg} (\operatorname{tg} x) \quad \text{i} \quad u = \operatorname{tg} x.$$

Stąd

$$f'(x) = 30 \frac{\operatorname{tg}^4 \{ \operatorname{tg} [\operatorname{tg} (\operatorname{tg} x)] \}^3 \operatorname{tg}^2 [\operatorname{tg} (\operatorname{tg} x)]^2 \operatorname{tg} (\operatorname{tg} x)}{\cos^2 \{ \operatorname{tg}^3 [\operatorname{tg} (\operatorname{tg} x)] \} \cos^2 [\operatorname{tg}^2 (\operatorname{tg} x)] \cos^2 (\operatorname{tg} x) \cos^2 x}.$$

$$\text{e) } f'(x) = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{\cosh^3 \sqrt{e^{\sin^2 2x} + \ln^2 \operatorname{tg} x}} \cdot \sinh^3 \sqrt{e^{\sin^2 2x} + \ln^2 \operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{3} (e^{\sin^2 2x} + \ln^2 \operatorname{tg} x)^{-2/3} \cdot \left(e^{\sin^2 2x} \cdot 2 \sin 4x + 2 \ln \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x \frac{1}{\cos^2 x} \right) \quad (1).$$

$$\begin{aligned} \text{f) } f'(x) &= \frac{2}{\sqrt{ac-b}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{ax+b}{ac-b}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{ax+b}{ac-b}}} \cdot \frac{a}{ac-b} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{ac-b}} \cdot \frac{ac-b}{a(c+x)} \cdot \frac{\sqrt{ac-b}}{2\sqrt{ax+b}} \cdot \frac{a}{ac-b} = \frac{1}{(x+c)\sqrt{ax+b}}. \end{aligned}$$

g) Korzystamy ze wzoru $(uvw)' = (uv)'w + uvw' = u'vw + uv'w + uvw'$.

$$\begin{aligned} h'(t) &= \ln \frac{a}{b} \left(\frac{a}{b} \right)^t \left(\frac{b}{t} \right)^a \left(\frac{t}{a} \right)^b + \\ &+ \left(\frac{a}{b} \right)^t a \left(\frac{b}{t} \right)^{a-1} \left(\frac{-b}{t^2} \right) \left(\frac{t}{a} \right)^b + \left(\frac{a}{b} \right)^t \left(\frac{b}{t} \right)^a b \left(\frac{t}{a} \right)^{b-1} \frac{1}{a} = \\ &= \left(\frac{a}{b} \right)^t \left(\frac{b}{t} \right)^a \left(\frac{t}{a} \right)^b \left(\ln \frac{a}{b} + \frac{b-a}{t} \right) = h(t) \left(\ln \frac{a}{b} + \frac{b-a}{t} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } g'(u) &= \ln^2(u + \sqrt{1+u^2}) + 2u \ln(u + \sqrt{1+u^2}) \frac{1 + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}}{u + \sqrt{1+u^2}} - \\ &- 2 \left[\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \ln(u + \sqrt{1+u^2}) + \sqrt{1+u^2} \frac{1 + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}}{1 + \sqrt{1+u^2}} \right] + 2 = \\ &= \ln^2(u + \sqrt{1+u^2}) + \frac{2u \ln(u + \sqrt{1+u^2})}{\sqrt{1+u^2}} - \frac{2u \ln(u + \sqrt{1+u^2})}{\sqrt{1+u^2}} - 2 + 2 = \\ &= \ln^2(u + \sqrt{1+u^2}). \end{aligned}$$

(1) Przykłady d) i e) są skomplikowane w sposób nieistotny i sztuczny; chodzi o pokazanie, że problem różniczkowania funkcji sprowadza się do mechanicznego stosowania wzorów.

$$\begin{aligned} \text{i) } p'(z) &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a \sin z + b}{a + b \sin z}\right)^2}} \cdot \frac{a \cos z (a + b \sin z) - b \cos z (a \sin z + b)}{(a + b \sin z)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{a + b \sin z}{\sqrt{(a^2 - b^2) \cos^2 z}} \cdot \frac{(a^2 - b^2) \cos z}{(a + b \sin z)^2} = \frac{1}{a + b \sin z} \frac{\cos z}{|\cos z|}. \end{aligned}$$

$$\text{j) } k'(z) = (\sin z)^{\cos z} (-\sin z \ln \sin z + \cos z \operatorname{ctg} z) + (\cos z)^{\sin z} (\cos z \ln \cos z - \sin z \operatorname{tg} z),$$

(korzystaliśmy ze wzoru XXIII).

21.4. Zbadać różniczkalność funkcji określonych wzorami:

a) $f(x) = \operatorname{sgn} x$; b) $h(u) = |u + 2| - |u - 1| + 2u$;

c) $k(t) = |t^2 - t - 6|$; d) $p(z) = |z|e^{-|z-1|}$; e) $g(t) = \sqrt[3]{(t-1)^2}$;

f) $r(u) = [u + 1] \sin \pi(u + 1)$.

Rozwiązanie. a) Ponieważ

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ 1 & \text{dla } x > 0, \end{cases}$$

więc $f'(x) = 0$ dla $x \neq 0$, natomiast nie istnieje $f'(0)$, gdyż funkcja f nie jest ciągła w $x = 0$.

W przypadkach b), c), d) będziemy korzystali między innymi ze wzoru $|x| = x \operatorname{sgn} x$ (por. zad. 17.16) i z przykładu a).

$$\text{b) } h(u) = (u + 2) \operatorname{sgn}(u + 2) - (u - 1) \operatorname{sgn}(u - 1) + 2u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'(u) = \operatorname{sgn}(u + 2) - \operatorname{sgn}(u - 1) + 2 = \begin{cases} 2 & \text{dla } u \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty), \\ 4 & \text{dla } u \in (-2, 1). \end{cases}$$

Dla punktów $u = -2$ oraz $u = 1$ korzystamy z definicji:

$$\lim_{u \rightarrow -2^-} \frac{2u + 4}{u + 2} = 2, \quad \lim_{u \rightarrow -2^+} \frac{4u + 8}{u + 2} = 4,$$

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{4u - 4}{u - 1} = 4, \quad \lim_{u \rightarrow 1^+} \frac{2u - 2}{u - 1} = 2,$$

skąd $h'(-2^-) = 2 \neq h'(-2^+) = 4$, $h'(1^-) = 4 \neq h'(1^+) = 2$, tzn. nie istnieją pochodne w punktach -2 i 1 .

$$\text{c) } k(t) = (t^2 - t - 6) \operatorname{sgn}(t^2 - t - 6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k'(t) = (2t - 1) \operatorname{sgn}(t^2 - t - 6) = \begin{cases} -2t + 1 & \text{dla } t \in (-2, 3) \\ 2t - 1 & \text{dla } t \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty). \end{cases}$$

Z kolei

$$\lim_{t \rightarrow -2^-} \frac{t^2 - t - 6}{t + 2} = -5, \quad \lim_{t \rightarrow -2^+} \frac{-t^2 + t + 6}{t + 2} = 5,$$

$$\lim_{t \rightarrow 3^-} \frac{-t^2 + t + 6}{t - 3} = -5, \quad \lim_{t \rightarrow 3^+} \frac{t^2 - t - 6}{t - 3} = 5,$$

stąd $k'(-2^-) = -5 \neq k'(-2^+) = 5$, $k'(3^-) = -5 \neq k'(3^+) = 5$, tzn. nie istnieją pochodne w punktach -2 i 3 .

$$\begin{aligned} \text{d) } p(z) &= z \operatorname{sgn} z e^{-(z-1) \operatorname{sgn}(z-1)} \Rightarrow p'(z) = z' \operatorname{sgn} z e^{-(z-1) \operatorname{sgn}(z-1)} + \\ &+ z (\operatorname{sgn} z)' e^{-(z-1) \operatorname{sgn}(z-1)} + z \operatorname{sgn} z (e^{-(z-1) \operatorname{sgn}(z-1)})' = \\ &= \operatorname{sgn} z e^{|z-1|} (1 - z \operatorname{sgn}(z-1)) = \begin{cases} -e^{z-1}(1+z) & \text{dla } z \in (-\infty, 0) \\ e^{z-1}(1+z) & \text{dla } z \in (0, 1) \\ e^{1-z}(1-z) & \text{dla } z \in (1, +\infty). \end{cases} \end{aligned}$$

W punktach 0 i 1 mamy:

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} \frac{-ze^{z-1}}{z-0} = -e^{-1}, \quad \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{ze^{z-1}}{z-0} = e^{-1},$$

$$\lim_{z \rightarrow 1^-} \frac{ze^{z-1} - 1}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1^-} \frac{ze^{z-1} - e^{z-1} + e^{z-1} - 1}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1^-} \left(e^{z-1} \frac{z-1}{z-1} + \frac{e^{z-1} - 1}{z-1} \right) = 2,$$

$$\lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{ze^{1-z} - 1}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{ze^{1-z} - e^{1-z} + e^{1-z} - 1}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1^+} \left(e^{1-z} \frac{z-1}{z-1} - \frac{e^{1-z} - 1}{1-z} \right) = 0$$

(korzystaliśmy ze wzoru $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{e^{\varphi(z)} - 1}{\varphi(z)} = 1$, jeżeli $\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = 0$). Wynika stąd, że $p'(0^-) = -e^{-1} \neq p'(0^+) = e^{-1}$, $p'(1^-) = 2 \neq p'(1^+) = 0$, tzn. nie istnieją pochodne w punktach 0 i 1 .

e) Dla $t \neq 1$ mamy $g'(t) = [(t-1)^{2/3}]' = \frac{2}{3\sqrt[3]{t-1}}$. W punkcie $t=1$ otrzymujemy:

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt[3]{(t-1)^2}}{t-1} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1}{3\sqrt[3]{t-1}} = -\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{(t-1)^2}}{t-1} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{1}{3\sqrt[3]{t-1}} = +\infty,$$

tzn. funkcja g ma w punkcie $t=1$ pochodne jednostronne niewłaściwe.

Uwaga. Styczna do wykresu funkcji g (określonej i ciągłej w punkcie $t=1$) w punkcie o odciętej $t=1$ jest prostopadłą do osi Ot .

f) Ponieważ funkcja określona wzorem $y = [u+1]$ jest różniczkowalna dla $u \neq k$, $k \in \mathbb{C}$ i $[u+1]' = 0$, $u \neq k$, $k \in \mathbb{C}$, więc $r'(u) = \pi[u+1] \cos \pi(u+1)$ dla $u \neq k$, $k \in \mathbb{C}$, tzn.

$$r'(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } u \in (-1, 0) \vee u = k + \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{C}, \\ \pi(k+1) \cos \pi(u+1) & \text{dla } u \in (k, k+1), \quad k \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

W punktach $u=k$ mamy

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow k^-} \frac{[u+1] \sin \pi(u+1) - [k+1] \sin \pi(k+1)}{u-k} &= \lim_{u \rightarrow k^-} \frac{[u+1] \sin \pi(u-k+k+1)}{u-k} = \\ &= \lim_{u \rightarrow k^-} \frac{[u+1] \sin \pi(u-k) \cos \pi(k+1) + \sin \pi(k+1) \cos \pi(u-k)}{u-k} = \\ &= \lim_{u \rightarrow k^-} \frac{\pi [u+1] \cos \pi(k+1) \sin \pi(u-k)}{\pi(u-k)} = \pi k (-1)^{k+1}, \\ \lim_{u \rightarrow k^+} \frac{[u+1] \sin \pi(u+1) - [k+1] \sin \pi(k+1)}{u-k} &= \lim_{u \rightarrow k^+} \frac{\pi [u+1] \cos \pi(k+1) \sin \pi(u-k)}{\pi(u-k)} = \\ &= \pi(k+1)(-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Stąd

$$r'(k^-) = \pi k (-1)^{k+1} \neq \pi(k+1)(-1)^{k+1} = r'(k^+),$$

zn. nie istnieją pochodne w punktach $u=k$, $k \in \mathbb{C}$.

21.5. Znaleźć: a) $h^{(4)}(0)$, jeżeli $h(u) = e^u \cos u$; b) $p^{(100)}(x)$, jeżeli $p(x) = x \sinh x$.

Rozwiązanie. a) $h'(u) = e^u(\cos u - \sin u)$, $h''(u) = e^u(-2 \sin u)$, $h'''(u) = -2e^u(\cos u + \sin u)$, $h^{(4)}(u) = -4e^u \cos u$; stąd $h^{(4)}(0) = -4$.

b) Korzystamy ze wzoru Leibniza (por. zadanie 21.29)

$$p^{(100)}(x) = (x \sinh x)^{(100)} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} (x)^{(100-k)} (\sinh x)^{(k)}.$$

Ale

$$(x)^{(p)} = 0 \quad \text{dla} \quad p > 1 \quad \text{oraz} \quad (\sinh x)^{(p)} = \begin{cases} \sinh x & \text{dla } p \text{ parzystych,} \\ \cosh x & \text{dla } p \text{ nieparzystych,} \end{cases}$$

stąd

$$\begin{aligned} p^{(100)}(x) &= (x \sinh x)^{(100)} = \binom{100}{99} (x)' (\sinh x)^{(99)} + \binom{100}{100} (x)^{(0)} (\sinh x)^{(100)} = 100 \cosh x + \\ &+ x \sinh x. \end{aligned}$$

21.6. Znaleźć $f^{(n)}$, jeżeli $f: \mathbb{R} \ni x \rightarrow (e^x \sin x) \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie. $f'(x) = (e^x \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x) =$

$$= e^x [\sin x + \sin(\frac{1}{2}\pi + x)] = e^x 2 \sin(x + \frac{1}{4}\pi) \cos \frac{1}{4}\pi = \sqrt{2} e^x \sin(x + \frac{1}{4}\pi),$$

$$f''(x) = [\sqrt{2} e^x \sin(x + \frac{1}{4}\pi)]' = \sqrt{2} e^x [\sin(x + \frac{1}{4}\pi) + \cos(x + \frac{1}{4}\pi)] =$$

$$= \sqrt{2} e^x [\sin(x + \frac{1}{4}\pi) + \sin(\frac{1}{2}\pi + x + \frac{1}{4}\pi)] =$$

$$= \sqrt{2} e^x 2 \sin(x + 2 \cdot \frac{1}{4}\pi) \cos \frac{1}{4}\pi = (\sqrt{2})^2 e^x \sin(x + 2 \cdot \frac{1}{4}\pi);$$

stąd przypuszczamy, że $(e^x \sin x)^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^x \sin(x + n \cdot \frac{1}{4}\pi)$. Istotnie; wzór jest prawdziwy dla $n=1$. Zakładając prawdziwość wzoru dla $n=k \geq 1$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= [(\sqrt{2})^k e^x \sin(x + k \cdot \frac{1}{4}\pi)]' = (\sqrt{2})^k e^x [\sin(x + k \cdot \frac{1}{4}\pi) + \cos(x + k \cdot \frac{1}{4}\pi)] = \\ &= (\sqrt{2})^k e^x 2 \sin[x + (k+1) \frac{1}{4}\pi] \cos \frac{1}{4}\pi = (\sqrt{2})^{k+1} e^x \sin[x + (k+1) \frac{1}{4}\pi]. \end{aligned}$$

21.7. Dane są funkcje określone wzorami: $y=f(u)$, $u \in U \subset \mathbf{R}$, $u=\varphi(x)$, $x \in X \subset \mathbf{R}$, gdzie $U \supset \varphi(X)$. Zakładając, że funkcje φ i f mają pochodne rzędu drugiego na swoich dziedzinach, znaleźć F''_x , gdzie $F=f \circ \varphi$ (symbol F''_x oznacza pochodną rzędu drugiego względem zmiennej x).

Rozwiązanie. Stosujemy wzór (6)

$$\begin{aligned} F''_x(x) &= [F'_x(x)]'_x = [f'_u(u)u'_x]'_x = [f''_u(u)]'_x u'_x + f'_u(u)(u'_x)'_x = \\ &= [(f''_u(u))'_u u'_x] u'_x + f''_u(u)u''_x = f''_{uu}(u)(u'_x)^2 + f''_u(u)u''_x. \end{aligned}$$

Zadania

21.8. Dana jest funkcja $f: \mathbf{R} \ni x \rightarrow (x^4 + x + 1) \in \mathbf{R}$. Znaleźć:

- przyrost funkcji w punktach $x_1=1$, $x_2=2$;
- przyrost funkcji w punkcie $x_0=-2$ dla przyrostu argumentu $\Delta x=0,1$;
- iloraz różnicowy funkcji dla punktu $x_0=2$ i w punkcie $x_1=4$;
- iloraz różnicowy funkcji dla punktu $x_0=3$, jeżeli $\Delta x=0,5$;
- iloraz różnicowy dla punktu $x=x_0$;
- iloraz różnicowy funkcji dla punktu $x=x_0$ i dla przyrostu Δx .

21.9. Znaleźć ilorazy różnicowe funkcji określonych wzorami:

- $f(x)=2x^3 - x^2 + 1$ dla punktu $x=1$ i przyrostu $\Delta x=0,1$;
- $g(x)=\frac{1}{x}$ dla punktu $x_0=2$ i przyrostu $\Delta x=0,01$;
- $h(x)=\sqrt{x}$ dla punktu $x_0=4$ i przyrostu $\Delta x=0,4$.

21.10. Udowodnić twierdzenia T_1 i T_2 .

21.11. Zakładając, że prędkość w ruchu prostoliniowym punktu materialnego zależy od czasu ($v=v(t)$) znaleźć przyspieszenie ruchu.

21.12. Zakładamy, że ilość ciepła W potrzebna do ogrzania ciała od 0° do T° jest zależna od temperatury ($W=W(T)$). Znaleźć pojemność cieplną c ciała w temperaturze T_0 .

21.13. Prędkość kątową ruchu obrotowego jednostajnego określa się jako stosunek kąta obrotu do odpowiadającego mu okresu czasu. Podać określenie prędkości ruchu obrotowego niejednostajnego.

21.14. Zakładając, że ładunek elektryczny Q przepływający przez przekrój poprzeczny przewodnika jest funkcją czasu ($Q=Q(t)$), znaleźć natężenie prądu I w przewodniku w chwili t_0 .

21.15. Na podstawie definicji znaleźć pochodne funkcji określonych wzorami:

a) $f(x) = x^2 - x + 3$, w $x_0 = 3$; b) $r(u) = \frac{2a}{u+3}$, w $u_0 = -1$;

c) $f(x) = \sin \frac{1}{2}x$, w $x = x_0$; d) $g(t) = \frac{1}{t^2+3}$, w $t = t_0$;

e) $h(x) = \cos 2x$, w $x_0 = \frac{1}{4}\pi$; f) $p(z) = \sqrt{3z-2}$, w $z = z_1$;

g) $r(x) = \operatorname{ctg}(mx)$, w $x = x_0$; h) $f(x) = \sqrt[3]{kx^2 + mx + n}$, w $x = 1$;

i) $R(t) = \operatorname{tg} \sqrt{pt}$, w $t = t_0$.

21.16. Za pomocą funkcji $f: \mathbb{R} \ni x \rightarrow e^x \in \mathbb{R}$ definiujemy funkcje hiperboliczne określone wzorami:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{tgh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ctgh} x := \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

a) Narysować wykresy funkcji hiperbolicznych;

b) znaleźć (jeżeli istnieją) funkcje odwrotne do funkcji hiperbolicznych oraz narysować ich wykresy;

c) sprawdzić tożsamości:

α) $\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$; β) $\operatorname{ctgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$ ($x \neq 0$);

γ) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$; δ) $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$;

ε) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$;

ζ) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x$;

η) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$.

21.17. Wyprowadzić wzory: VII, VIII, IX, XII - XXIII.

21.18. Udowodnić wzór

$$((f(x))^{g(x)})' = g(x)(f(x))^{g(x)-1} f'(x) + \ln f(x)(f(x))^{g(x)} g'(x),$$

gdzie $f, g \in D^1(X) \wedge f(x) > 0, x \in X$.

21.19. Znaleźć pochodne funkcji określonych wzorami:

a) $f(u) = 3u^2 - 2\sqrt[3]{u} + \frac{1}{4} u \sqrt[5]{u^3} - \frac{17}{\sqrt[4]{u}}$; b) $g(v) = \frac{3v-4\sqrt[6]{v^5}}{v\sqrt{v}}$;

c) $h(x) = (\operatorname{tg} x - x^2)(\cos x + \sqrt{x} - 2)$; d) $R(t) = \frac{Art^2 + 1}{6t^3 - 4t^2 + 5t + 7}$;

$$e) p(z) = \frac{\alpha z^2 \cos z}{(3z+2) \operatorname{arctg} z}; \quad f) k(y) = (y^2 + y - 3) \operatorname{arcsin} y \cdot \ln y;$$

$$g) f(x) = A e^x \sin x \operatorname{arccos} x; \quad h) y(z) = 4^z \operatorname{ctg} z \left(1 - \frac{1}{z}\right);$$

$$i) g(t) = \log_3 t \cdot \sin t \cdot \operatorname{arctg} t; \quad j) p(u) = \operatorname{tgh} u \cdot \log u \cdot \operatorname{arsinh} u \cdot \operatorname{arctg} u;$$

$$k) g(x) = x^2 e^{-x^2}; \quad l) p(u) = \sqrt{Au - u^2};$$

$$l) h(z) = \frac{e^{2z} + e^{-2z}}{e^z - e^{-z}}; \quad m) f(t) = \log_4 \sin t;$$

$$n) p(z) = e^{iz} \log_2 \operatorname{arctg} z; \quad o) h(t) = t - \sqrt{1-t^2} \operatorname{arcsin} t;$$

$$p) m(x) = 4^{\cosh ax} \cdot \log_{\sqrt{x}} \cos 3x; \quad r) w(u) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tgh} u);$$

$$s) f(x) = \operatorname{arccos} \frac{1}{\cosh x}; \quad t) h(t) = \operatorname{arcsin} \frac{1}{\cosh t};$$

$$u) f(z) = a \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{k} + b\right); \quad w) R(t) = \cos^2 2t \cdot \sin^2 t;$$

$$x) L(p) = \sin 2p \cdot e^{-p^2+1}; \quad y) w(a) = \cos a \sqrt{1 + \sin^2 a};$$

$$z) I(x) = \frac{kax}{(a^2 + x^2)^{3/2}}; \quad a_1) g(t) = a^{bt};$$

$$b_1) h(u) = a^{ub}; \quad c_1) f(u) = \frac{1}{18} \sin^6 3u - \frac{1}{24} \sin^8 3u;$$

$$d_1) h(z) = \sqrt{z^2 - a^2} - a \operatorname{arccos} \frac{a}{z} \quad (a \neq 0);$$

$$e_1) d(u) = \frac{\cosh u}{\sinh^2 u} \cdot \ln \left(\operatorname{ctgh} \frac{u}{2}\right); \quad f_1) f(x) = \ln(\cosh x) + \frac{1}{2 \cosh^2 x};$$

$$g_1) g(t) = \frac{\sin t}{4 \cos^4 t} + \frac{3 \sin t}{8 \cos^2 t} + \frac{3}{8} \ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} t}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} t} \right|;$$

$$h_1) f(y) = \ln \frac{b + x \cos y + \sqrt{b^2 - x^2} \sin y}{x + b \cos y} \quad (0 \leq |x| < |b|);$$

$$i_1) g(t) = \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} t - \cos t \cdot \ln(\operatorname{tg} t);$$

$$j_1) k(u) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{u^2+2} - \sqrt{3}u}{\sqrt{u^2+2} + \sqrt{3}u} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{u^2+2}}{u};$$

$$k_1) P(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}z}{\sqrt{1+z^4}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1+z^4} - \sqrt{2}z}{\sqrt{1+z^4} + \sqrt{2}z};$$

$$l_1) p(z) = \frac{4^{\sin z} \log_{2z} z}{e^{\cos^2 z}}; \quad l_1) f(x) = x^{\sin x};$$

$$m_1) p(w) = \left(\frac{w}{a}\right)^{aw}; \quad n_1) g(t) = [\operatorname{tg}(5t^2)]^2;$$

$$o_1) f(t) = (\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sin t)^{\cos^3 4t}; \quad p_1) g(x) = [\operatorname{tg} \alpha x]^{\cos \beta x} + [\cos \beta x]^{\operatorname{tg} \alpha x};$$

$$r_1) g(x) = x^{(\sin x)^{\ln x}}.$$

21.20. Znaleźć $p'(x)$, jeżeli $p(x) = (f(x))^{(g(x))^{h(x)}}$, gdzie

$$f, g, h \in D^1(X) \wedge (f(x) > 0 \wedge g(x) > 0, x \in X).$$

21.21. Sprawdzić, że funkcja określona wzorem:

a) $f(x) = \ln \frac{1}{1+x}$ spełnia równanie $xy' + 1 = e^y$;

b) $g(t) = (c + e^t)(1+t)^n$ spełnia równanie $(t+1)g'(t) - ng(t) = e^t(t+1)^{n+1}$;

c) $g(z) = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z\sqrt{z^2+1} + \ln\sqrt{z+\sqrt{z^2+1}}$ spełnia równanie $2g(z) = zg'(z) + \ln g'(z)$.

21.22. Znaleźć pochodne funkcji określonych wzorami:

a) $f(x) = x|x|$; b) $g(x) = (x-1)^2|(x+1)^3|$;

c) $h(t) = \ln|t|$, $t \neq 0$; d) $w(u) = \arccos \frac{1}{|u|}$, $u \neq 0$.

21.23. Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = (x-b_1)^{a_1}(x-b_2)^{a_2}\dots(x-b_n)^{a_n}$.

Wykazać prawdziwość wzoru

$$f'(x) = f(x) \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x-b_i}.$$

21.24. Zbadać różniczkowalność funkcji określonych wzorami:

a) $f(x) = |x|$; b) $g(x) = \frac{1}{2}(|x| + |x-2|)$; c) $k(u) = \sqrt[3]{u}$; d) $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$;

e) $h(t) = [t] \sin \pi t$; f) $p(v) = v \left| \cos \frac{\pi}{v} \right|$ dla $v \neq 0 \wedge p(0) = 0$;

g) $m(z) = z \operatorname{arctg} \frac{1}{z}$ dla $z \neq 0 \wedge m(0) = 0$; h) $k(x) = \sqrt{\sin x^2}$.

21.25. Wykazać prawdziwość wzoru

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ f'_{k1}(x) & \dots & f'_{kn}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

gdzie funkcje f_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$ są różniczkowalne na $X \subset \mathbb{R}$.

21.26. Znaleźć:

$$\text{a) } g'(x), \text{ jeżeli } g(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix};$$

$$\text{b) } h'(x), \text{ jeżeli } h(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}.$$

21.27. Niech

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq x_0, \\ ax + b & \text{dla } x > x_0. \end{cases}$$

Dla jakich wartości a i b funkcja f jest ciągła i różniczkowalna w punkcie x_0 ?

21.28. Niech

$$k(x) = \begin{cases} g(x) & \text{dla } x \leq x_0, \\ ax + b & \text{dla } x > x_0, \end{cases}$$

przy czym istnieje $g'(x_0^-)$. Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja k jest ciągła i różniczkowalna w punkcie $x = x_0$?

21.29. Udowodnić wzory:

$$\text{(a) } (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)},$$

$$\text{(b) } (cu)^{(n)} = cu^{(n)},$$

$$\text{(c) } (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)} \quad (u^{(0)} := u),$$

gdzie funkcje u i v mają pochodne rzędu n oraz $c \in \mathbf{R}$ jest stałą.

Uwaga. Wzór (c) nazywamy *wzorem Leibniza*.

21.30. Znaleźć drugie pochodne funkcji określonych wzorami:

$$\text{a) } f(x) = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2;$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}x}{x^2 - 1};$$

$$\text{c) } g(u) = \arcsin \frac{1-u^2}{1+u^2}; \quad \text{d) } g(t) = t [\sin(\ln t) + \cos(\ln t)]; \quad \text{e) } h(z) = \operatorname{arctg} \frac{1+z}{1-z}.$$

21.31. Znaleźć:

a) $f''(\sqrt{2})$, jeżeli $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$; b) $f''(\frac{1}{2}\pi)$, jeżeli $f(t) = a(t - \sin t)$;

c) $x'''(t)$, jeżeli $x(t) = a \cos^3 t$; d) $r^{(4)}(\varphi)$, jeżeli $r(\varphi) = a \sin 2\varphi$.

21.32. Znaleźć:

a) $W^{(n)}(x)$, jeżeli $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, $n \in \mathbf{N}$;

b) $p^{(n)}(u)$, jeżeli $p(u) = u^s$, gdzie $s \in \mathbf{R}$. W szczególności znaleźć $p^{(n)}(u)$ dla $s = -1$ i $s = -\frac{1}{2}$.

c) $g^{(n)}(x)$, jeżeli $g(x) = a^x$; d) $u^{(n)}(t)$, jeżeli $u(t) = \ln(a + bt)$;

e) $k^{(n)}(x)$, jeżeli $k(x) = \log_a x$; f) $h^{(n)}(t)$, jeżeli $h(t) = (a + bt)^s$, gdzie $s \in \mathbf{R}$;

g) $f^{(n)}(x)$, jeżeli $f(x) = \frac{1}{a + bx}$; h) $k^{(n)}(x)$, jeżeli $k(x) = \frac{1}{\sqrt{a + bx}}$;

i) $f^{(n)}(9x)$, jeżeli $f(x) = (1 + x)^s$, gdzie $s \in \mathbf{R}$;

j) $f^{(n)}(x)$, jeżeli $f(x) = \sin x$; k) $g^{(n)}(x)$, jeżeli $g(x) = \cos x$;

l) $f^{(n)}(\frac{1}{2}\pi)$, jeżeli $f(x) = \cos 2x$;

ł) $f^{(20)}(x)$, jeżeli $f(x) = x^2 e^{2x}$; m) $f^{(50)}(x)$, jeżeli $f(x) = x \cosh x$;

n) $p^{(n)}(z)$, jeżeli $p(z) = ze^z$; o) $g^{(n)}(z)$, jeżeli $g(z) = z^2 \sin z$;

p) $f^{(n)}(x)$, jeżeli $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

21.33. Wykazać, że $(\arctg x)^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \sin [n(y + \frac{1}{2}\pi)]$, gdzie $y = \arctg x$.

21.34. Sprawdzić, że funkcje określone wzorami spełniają dane równania:

a) $g(x) = e^x \sin x$, $g''(x) - 2g'(x) + 2g(x) = 0$;

b) $h(u) = \frac{u-3}{u+4}$, $2[h'(u)]^2 = [h(u)-1]h''(u)$;

c) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, $(f(x))^3 f''(x) + 1 = 0$;

d) $p(r) = e^{4r} + 2e^{-r}$, $p'''(r) - 13p'(r) - 12p(r) = 0$;

e) $f(t) = a_1 e^{nt} + a_2 e^{-nt} + a_3 \cos nt + a_4 \sin nt$, $f^{(4)}(t) = n^4 f(t)$, gdzie a_i , $i = 1, 2, 3, 4$ są stałymi.

21.35. Wykazać, że jeżeli funkcja f ma pochodne rzędu n , to $[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$.

21.36. Dane są funkcje określone wzorami $y = f(u)$ i $u = \varphi(x)$ mające trzecie pochodne na swoich dziedzinach. Znaleźć $F_x'''(x)$, jeżeli $F(x) = f[\varphi(x)]$.

21.37. Dana jest funkcja f mająca pochodne rzędu trzeciego. Znaleźć $F_x''(x)$ i $F_x'''(x)$, jeżeli:

a) $F(x)=f(x^2)$; b) $F(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$; c) $F(x)=f(\ln x)$.

21.38. Dane jest równanie ruchu prostoliniowego punktu $s(t)=\frac{4}{3}t^3-t+5$. Znaleźć przyspieszenie w chwili $t=2$.

21.39. Droga przebyta przez ciało przy swobodnym spadku z uwzględnieniem oporu powietrza wyraża się wzorem $s(t)=\frac{v_1^2}{g} \ln \cosh \frac{gt}{v_1}$, gdzie $v_1=\frac{\sqrt{g}}{k}$, przy czym g oznacza przyspieszenie ziemskie, a k jest współczynnikiem uwzględniającym opór powietrza. Znaleźć przyspieszenie ruchu spadającego ciała w zależności od czasu t .

Odpowiedzi

21.8. a) ∓ 16 ; b) $-28,67$; c) 121 ; d) $\frac{1113}{8}$;

e) $\frac{x^4+x-x_0^4-x_0}{x-x_0}$; f) $\frac{(x_0+\Delta x)^4-x_0^4+\Delta x}{\Delta x}$.

21.9. a) $4,52$; b) $-0,249$; c) $0,245$. 21.11. $a(t_0)=\lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t_0)$.

21.12. $c(T_0)=\lim_{\Delta T \rightarrow 0} c_{\Delta T} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta T} = W'(T_0)$.

21.13. $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} = \alpha'(t)$, gdzie $\alpha(t)$ oznacza kąt obrotu w zależności od czasu t .

21.14. $I(t_0)=\lim_{\Delta t \rightarrow 0} I_{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Q'(t_0)$.

21.15. a) 5 ; b) $-\frac{1}{2}a$; c) $\frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}x_0$; d) $\frac{-2t_0}{(t_0^2+3)^2}$; e) -2 ;

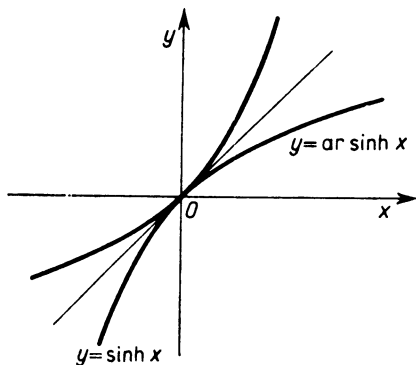
f) $\frac{3}{2\sqrt{3z_1-2}}$; g) $\frac{-m}{\sin^2 mx_0}$; h) $\frac{1}{3}(k+m+n)^{-2/3}(2k+m)$; i) $\frac{p}{2 \cos^2 \sqrt{pt_0} \cdot \sqrt{pt_0}}$.

21.16. a) Rys. 21.1 – rys. 21.4; b) $y = \operatorname{ar} \sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $x \in \mathbf{R}$;

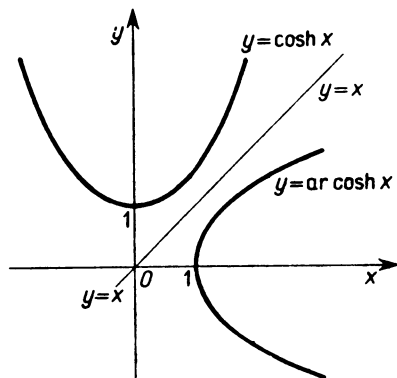
$y = g_1(x) = \operatorname{ar} \cosh x = \ln(x - \sqrt{x^2-1})$, $x \in \langle 1, +\infty \rangle$; $y = g_2(x) =$

$= \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, $x \in \langle 1, +\infty \rangle$; $y = \operatorname{ar} \operatorname{tgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$;

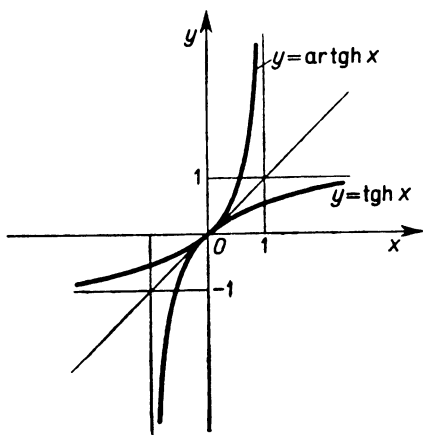
$y = \operatorname{ar} \operatorname{ctgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$, $|x| > 1$; rys. 21.1 – rys. 21.4.



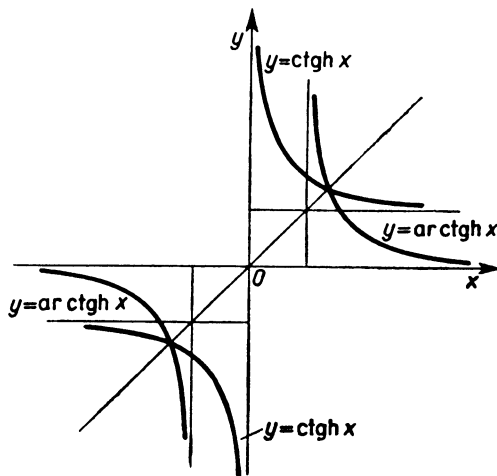
Rys. 21.1



Rys. 21.2



Rys. 21.3



Rys. 21.4

21.19. a) $f'(u) = 6u - \frac{2}{3}u^{-2/3} + \frac{2}{5}u^{3/5} + \frac{17}{4}u^{-5/4}$; b) $g'(v) = -\frac{3}{2}v^{-3/2} + \frac{8}{3}v^{-5/3}$;

c) $h'(x) = (\cos^{-2} x - 2x)(\cos x + \sqrt{x} - 2) + (\operatorname{tg} x - x^2)(-\sin x + \frac{1}{2}x^{-1/2})$;

d) $R'(t) = \frac{-6Ar^4 + (5Ar - 18)t^2 + 2(7Ar + 4)t - 5}{(6t^3 - 4t^2 + 5t + 7)^2}$;

e) $p'(z) = \alpha \frac{(2z \cos z - z^2 \sin z)(3z + 2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} z - z^2 \cos z [3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} z + (3z + 2)(1 + z^2)^{-1}]}{[(3z + 2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} z]^2}$;

f) $k'(y) = (2y + 1) \operatorname{arc} \sin y \cdot \ln y + (y^2 + y - 3)(1 - y^2)^{-1/2} \cdot \ln y + (y^2 + y - 3) \operatorname{arc} \sin y \cdot y^{-1}$;

g) $f'(x) = Ae^{2x} [\sin x \cdot \operatorname{arc} \cos x + \cos x \cdot \operatorname{arccos} x - \sin x (1 - x^2)^{-1/2}]$;

$$\text{h) } y'(z) = 4^z \left[\ln 4 \operatorname{ctg} z \left(1 - \frac{1}{z} \right) - \sin^{-2} z \left(1 - \frac{1}{z} \right) + \operatorname{ctg} z \cdot z^{-2} \right];$$

$$\text{i) } g'(t) = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1}{t} \cdot \sin t \cdot \operatorname{ar} \operatorname{tgh} t + \log_3 t \cdot \cos t \cdot \operatorname{ar} \operatorname{tgh} t + \frac{\log_3 t \sin t}{1-t^2};$$

$$\text{j) } p'(u) = \frac{\log u \cdot \operatorname{ar} \operatorname{sinh} u \cdot \operatorname{ar} \operatorname{tgh} u}{\cosh^2 u} + \frac{\operatorname{tgh} u \cdot \operatorname{ar} \operatorname{sinh} u \cdot \operatorname{ar} \operatorname{tgh} u}{\ln 10 \cdot u} + \\ + \frac{\operatorname{tgh} u \cdot \log u \cdot \operatorname{ar} \operatorname{tgh} u}{\sqrt{u^2+1}} + \frac{\operatorname{tgh} u \cdot \log u \cdot \operatorname{ar} \operatorname{sinh} u}{1-u^2};$$

$$\text{k) } g'(x) = 2xe^{-x^2}(1-x^2); \quad \text{l) } p'(u) = \frac{1}{2}(A-2u)(Au-u^2)^{-\frac{1}{2}};$$

$$\text{ł) } h'(z) = (e^z - e^{-z})^{-2}(e^{3z} - 3e^{-z} - 3e^z + e^{-3z}); \quad \text{m) } f'(t) = \frac{t \operatorname{ctg} t \cdot \ln t - \ln \sin t}{t \ln^2 t};$$

$$\text{n) } p'(z) = \frac{e^{\operatorname{tg} z}}{2 \ln^2 z} \left[\ln z \left(\frac{\ln \operatorname{arc} \operatorname{tg} z}{\cos^2 z} + \frac{1}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} z \cdot (1+z^2)} \right) - \frac{\ln \operatorname{arc} \operatorname{tg} z}{z} \right];$$

$$\text{o) } h'(t) = \frac{t \operatorname{arc} \sin t}{\sqrt{1-t^2}};$$

$$\text{p) } m'(x) = \frac{2 \cdot 4^{\cosh ax}}{\ln^2 x} \left[\ln x (\alpha \ln 4 \cdot \sinh ax \cdot \ln \cos 3x - 3 \operatorname{tg} 3x) - \frac{\ln \cos 3x}{x} \right];$$

$$\text{r) } w'(u) = \frac{1}{\cosh 2u}; \quad \text{s) } f'(x) = \frac{1}{\cosh x} \frac{\sinh x}{|\sinh x|};$$

$$\text{t) } h'(t) = \frac{-1}{\cosh t} \frac{\sinh t}{|\sinh t|}; \quad \text{u) } f'(z) = \frac{ka}{k^2 + (z+bk)^2};$$

$$\text{w) } R'(t) = \frac{1}{2} \sin 4t(1-6 \sin^2 t);$$

$$\text{x) } L'(p) = 2e^{-p^2+1}(\cos 2p - p \sin 2p); \quad \text{y) } w'(a) = \frac{-2 \sin^3 a}{\sqrt{1+\sin^2 a}};$$

$$\text{z) } I'(x) = ka(a^2 - 2x^2)(a^2 + x^2)^{-5/2}; \quad \text{a}_1) g'(t) = \ln a \cdot \ln b \cdot b^t a^{bt};$$

$$\text{b}_1) h'(u) = \ln a \cdot b \cdot u^{b-1} a^{ub}; \quad \text{c}_1) f'(u) = \sin^5 3u \cdot \cos^3 3u;$$

$$\text{d}_1) h'(z) = \frac{z^3 - a^2|z|}{z^2 \sqrt{z^2 - a^2}}; \quad \text{e}_1) d'(u) = \frac{-2}{\sinh^3 u};$$

$$\text{f}_1) f'(x) = \operatorname{tgh}^3 x; \quad \text{g}_1) g'(t) = \frac{1}{\cos^5 t}; \quad \text{h}_1) f'(y) = \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{x + b \cos y};$$

$$\text{i}_1) g'(t) = \sin t \ln(\operatorname{tg} t); \quad \text{j}_1) k'(u) = \frac{1}{(u^4-1)\sqrt{u^2+2}}; \quad \text{k}_1) P'(z) = \frac{\sqrt{1+z^4}}{1-z^4};$$

$$l_1) p'(z) = 4^{\sin z} e^{-\cos^2 z} (\ln 4 \cdot \cos z \cdot \log_{2z} z + \sin 2z \cdot \log_{2z} z + \ln 2 \cdot z^{-1} \cdot \ln^{-2} 2z);$$

$$k_1) f'(x) = x^{\sin x} (\cos x \cdot \ln x + x^{-1} \sin x); \quad m_1) p'(w) = \left(\frac{w}{a}\right)^{aw} a^w \left(\ln a \cdot \ln \frac{w}{a} + \frac{1}{w}\right);$$

$$n_1) g'(t) = t^2 [\operatorname{tg}(5t^2)]^3 \left[3 \ln \operatorname{tg}(5t^2) + \frac{20t^2}{\sin 10t^2} \right];$$

$$o_1) f'(t) = (\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sin t)^{\cos^3 4t} [\cos^3 4t \cdot \cos t (\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sin t)^{-1} (1 + \sin^2 t)^{-1} - \\ - 12 \cos^2 4t \sin 4t \cdot \ln \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sin t];$$

$$p_1) g'(x) = [\operatorname{tg} \alpha x]^{\cos \beta x} \left[-\beta \sin \beta x \ln \operatorname{tg} \alpha x + 2\alpha \cos \beta x \frac{1}{\sin 2\alpha x} \right] + \\ + [\cos \beta x]^{\operatorname{tg} \alpha x} \left[\frac{\alpha \ln \cos \beta x}{\cos^2 \alpha x} - \beta \operatorname{tg} \alpha x \operatorname{tg} \beta x \right];$$

$$r_1) g'(x) = x^{(\sin x)^{\ln x}} (\sin x)^{\ln x} \left(\frac{1}{x} + \operatorname{ctg} x \ln^2 x + \frac{\ln x \ln \sin x}{x} \right).$$

21.20. $p'(x) = u'v^w u^{vw-1} + v'u^{vw} \ln uv^{w-1} + w'u^{vw} \ln uv^w \ln v$, gdzie $u=f(x)$, $v=g(x)$, $w=h(x)$.

21.22. a) $f'(x) = 2|x|$; b) $g'(x) = (x-1)(x+1)^2(5x-1) \operatorname{sgn}(x+1)$;

$$c) h'(t) = \frac{1}{t}; \quad d) w'(u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}.$$

21.24. a) $f'(x) = -1$ dla $-\infty < x < 0$, $f'(x) = 1$ dla $0 < x < +\infty$, w punkcie $x=0$ pochodna nie istnieje, $f'(0^-) = -1$, $f'(0^+) = 1$;

b) $g'(x) = -1$ dla $-\infty < x < 0$, $g'(x) = 0$ dla $0 < x < 2$, $g'(x) = 1$ dla $2 < x < +\infty$, w punktach $x=0$ i $x=2$ pochodne nie istnieją, $g'(0^-) = -1$, $g'(0^+) = 0$, $g'(2^-) = 0$, $g'(2^+) = 1$;

c) $k'(u) = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}$ dla $u \neq 0$, w punkcie $u=0$ istnieje pochodna nieskończona $+\infty$;

d) $g'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ $x \neq 0$, w punkcie $x=0$ pochodna nie istnieje, przy czym $g'(0^-) = -\infty$, $g'(0^+) = +\infty$;

e) $h'(t) = \pi [t] \cos \pi t$ dla $t \neq k$, $k \in \mathbf{C}$, $h'(k^-) = \pi(k-1)(-1)^k \neq h'(k^+) = \pi k(-1)^k$, $k \in \mathbf{C}$;

$$f) p'(v) = \left(\cos \frac{\pi}{v} + \frac{\pi}{v} \sin \frac{\pi}{v} \right) \operatorname{sgn} \left(\cos \frac{\pi}{v} \right) \text{ dla } v \neq \frac{2}{2k+1}, k \in \mathbf{C}, p' \left(\left(\frac{2}{2k+1} \right)^- \right) = \\ = -(2k+1) \frac{1}{2} \pi, \quad p' \left(\left(\frac{2}{2k+1} \right)^+ \right) = (2k+1) \frac{1}{2} \pi;$$

$$g) m'(z) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+1}, \quad z \neq 0, \quad m'(0^-) = -\frac{1}{2} \pi \neq m'(0^+) = \frac{1}{2} \pi;$$

$$\text{h) } k'(x) = \frac{x \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}} \text{ dla } \sqrt{2k\pi} < |x| < \sqrt{(2k+1)\pi}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k(0^-) = -1, k'(0^+) = 1$$

$$k'(\sqrt{(2k+1)\pi}^-) = -\infty, k'(\sqrt{(2k+1)\pi}^+) = +\infty, k'(\sqrt{2k\pi}^-) = -\infty, k'(\sqrt{2k\pi}^+) = +\infty.$$

21.25. Skorzystać ze wzoru (4) § 6 oraz z twierdzenia o indukcji matematycznej.

21.26. a) $g'(x) = 3x^2 + 15$; b) $h'(x) = 6x^2$.

21.27. $a = 2x_0$, $b = -x_0^2$. 21.28. $a = g'(x_0^-)$, $b = g(x_0) - x_0 g'(x_0^-)$.

21.30. a) $f''(x) = \frac{x(x+2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x)}{(1+x^2)^2}$; b) $f''(x) = \frac{-4x^3}{(1+x^4)^2}$;

c) $g''(u) = \mp \frac{4u}{(1+u^2)^2}$; d) $g''(t) = \frac{-2}{t} \sin(\ln t)$; e) $h''(z) = \frac{2z}{(1+z^2)^2}$.

21.31. a) $10\sqrt{2}$; b) a ; c) $3a \sin t(7-9 \sin^2 t)$; d) $16a \sin 2\varphi$.

21.32. a) $W^{(n)}(x) = a_n n!$; b) $p^{(n)}(u) = s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)u^{s-n}$,

$$(u^{-1})^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{u^{n+1}}, \quad (u^{-\frac{1}{2}})^{(n)} = \frac{(-1)^n (2n-1)!! (1)^{1/2}}{(2n)^n \sqrt{u}};$$

c) $g^{(n)}(x) = (\ln a)^n a^x$; d) $u^{(n)}(t) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)! b^n}{(a+bt)^n}$;

e) $k^{(n)}(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{x^n}$;

f) $h^{(n)}(t) = s(s-1)\dots(s-n+1)b^n(a+bt)^{s-n}$; g) $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! b^n}{(a+bx)^{n+1}}$,

h) $k^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n (2n-1)!! b^n}{2^n (a+bx)^n \sqrt{a+bx}}$;

i) $f^{(n)}(3x) = s(s-1)\dots(s-n+1)(1+3x)^{s-n}$;

j) $f^{(n)}(x) = \sin(\frac{1}{2}n\pi + x)$; k) $g^{(n)}(x) = \cos(\frac{1}{2}n\pi + x)$;

l) $f^{(n)}(\frac{1}{2}\pi) = 2^n \cos(n \cdot \frac{1}{2}\pi + 2 \cdot \frac{1}{2}\pi) = 2^n \cos(\pi + n \cdot \frac{1}{2}\pi) = \begin{cases} 2^n (-1)^{k-1} & \text{dla } n=2k, \\ 0 & \text{dla } n=2k-1, \end{cases}$

gdzie $k=1, 2, 3, \dots$;

ł) $f^{(20)}(x) = 2^{20} e^{2x}(x^2 + 20x + 95)$;

m) $f^{(50)}(x) = x \cosh x + 50 \sinh x$; n) $p^{(n)}(z) = ne^z + ze^z$;

(¹) $n!! := \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1), & \text{jeżeli } n \text{ jest liczbą nieparzystą,} \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n, & \text{jeżeli } n \text{ jest liczbą parzystą.} \end{cases}$

o) $g^{(n)}(z) = z^2 \sin\left(z + \frac{n\pi}{2}\right) + 2nz \sin\left(z + \frac{n-1}{2}\pi\right) + n(n-1) \sin\left(z + \frac{n-2}{2}\pi\right)$;

p) Wsk. Rozłożyć funkcję f na ułamki proste;

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right].$$

21.33. Zastosować twierdzenie o indukcji matematycznej.

21.36. $F_x'''(x) = f_u'''(u)(u_x')^3 + 3f_u''(u)u_x'u_x'' + f_u'(u)u_x''^2$.

21.37. a) $F_x''(x) = 4x^2 f_u''(u) + 2f_u'(u)$, $F_x'''(x) = 8x^3 f_u'''(u) + 12x f_u''(u)$;

b) $F_x''(x) = \frac{1}{x^4} f_u''(u) + \frac{2}{x^3} f_u'(u)$, $F_x'''(x) = -\frac{1}{x^6} f_u'''(u) - \frac{6}{x^5} f_u''(u) - \frac{6}{x^4} f_u'(u)$;

c) $F_x''(x) = \frac{1}{x^2} [f_u''(u) - f_u'(u)]$, $F_x'''(x) = \frac{1}{x^3} [f_u'''(u) - 3f_u''(u) + 2f_u'(u)]$.

21.38. $a(2) = 16$. 21.39. $w(t) = s'(t) = \frac{g}{\cosh^2(gt/v_1)}$.

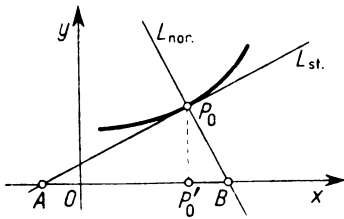
§ 22. ZASTOSOWANIA POCHODNEJ I RÓŻNICZKI

22.1. Niech $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in D^1(\langle a, b \rangle)$, $x_0 \in \langle a, b \rangle$. Równania stycznej $L_{st.}$ i normalnej $L_{nor.}$ do wykresu funkcji $f(t)$ w punkcie $P_0(x_0, f(x_0))$ (rys. 22.1) są następujące:

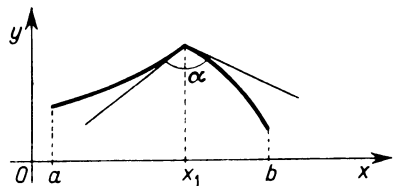
(1) $L_{st.}: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$,

(2) $L_{nor.}: y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$, $f'(x_0) \neq 0$.

W punktach $P_1(a, f(a))$, $P_2(b, f(b))$ równanie (1) określa styczne jednostronne. Jeżeli $f'(x_0) \neq 0$, to określamy: P_0A – odcinek stycznej, P_0B – odcinek normalnej, AP_0' – odcinek podstycznej, $P_0'B$ – odcinek podnormalnej (rys. 22.1). W przypadku $f'(x_0) = 0$ odcinki P_0A i $P_0'A$ nie są określone oraz $P_0B = P_0'P_0$, $B = P_0'$.



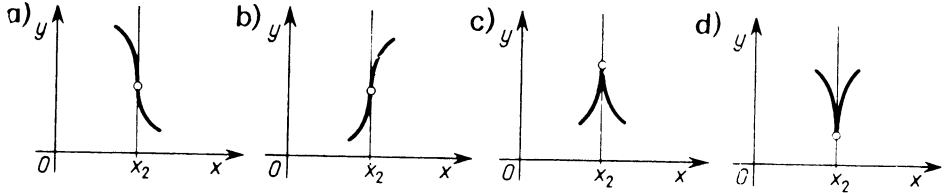
Rys. 22.1



Rys. 22.2

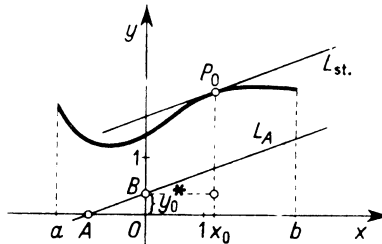
(¹) Czasem zamiast „wykres funkcji f ” będziemy mówili „krzywa o równaniu $y = f(x)$ ”.

Jeżeli w punkcie $P_1(x_1, g(x_1))$ istnieją różne pochodne jednostronne funkcji g , to punkt P_1 nazywamy *punktem kątowym* krzywej (rys. 22.2). Jeżeli g ma pochodną niewłaściwą w punkcie $x_2 \in (a, b)$, to istnieje styczna pionowa do wykresu funkcji g w punkcie $P_2(x_2, g(x_2))$ (rys. 22.3). Punkty na rys. 22.3a i b nazywamy *punktami przegięcia*; punkty na rys. 22.3c i d nazywamy *punktami zwrotu*.



Rys. 22.3

Mając wykres funkcji $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ możemy graficznie (a więc w sposób przybliżony) znaleźć wykres pochodnej f' . Otóż kreślimy styczną $L_{st.}$ przez punkt $P_0(x_0, f(x_0))$ oraz prostą $L_A \parallel L_{st.}$ przechodzącą przez punkt $A(-1, 0)$. Rzędna y_0^* punktu B przecięcia prostej L_A z osią Oy , będzie rzędną punktu wykresu pochodnej f' o odciętej x_0 (rys. 22.4).



Rys. 22.4

22.2. Przyjmując $x_0 = x$, $\Delta x = dx$ we wzorze (1) § 21, mamy $\Delta f - df(x, dx) = o(dx)$, skąd na mocy (2) § 21 otrzymujemy

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\Delta f - df(x, dx)}{dx} = 0.$$

A więc dla małych przyrostów $|dx|$ prawdziwy jest wzór przybliżony

$$(3) \quad (\Delta f \approx df) \Leftrightarrow (f(x+dx) \approx f(x) + f'(x)dx).$$

Wzór (3) służy do określania błędu wartości funkcji f , mianowicie:

$$(4) \quad \Delta = |\Delta y| = |f'(x)| |dx|, \quad \Delta_y = |f'(x)| \Delta_x \\ \delta_y = |(ln f(x))'| \Delta_x,$$

gdzie Δ oznacza błąd bezwzględny wartości funkcji f , $|dx|$ – błąd bezwzględny zmiennej x , Δ_x – błąd maksymalny bezwzględny zmiennej x , Δ_f – błąd maksymalny wartości funkcji f , δ_f – błąd względny maksymalny wartości funkcji f (por. § 3).

Przykłady

22.1. Dana jest rodzina krzywych określona wzorem

$$(a) \quad y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c.$$

Znaleźć: a) Styczną w punkcie $P(0, c)$;

b) styczną w punkcie $P_0(x_0, y_0)$, jeżeli $x_0 = -1$;

c) normalną w punkcie $P_0(x_0, y_0)$, jeżeli $x_0 = 1$;

d) krzywą rodziny (a) styczną do prostej $L_1: y = -x + 2$ w punkcie o odciętej $x = 2$ oraz mającą styczną w punkcie o odciętej $x = 5$ równoległą do prostej $L_2: y = -2x + 1$.

Rozwiązanie. a) Stosujemy równanie (1). Otóż

$$P_0(x_0, f(x_0)) = P(0, c), \quad f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, \quad f'(0) = b,$$

stąd $y - c = b(x - 0)$, czyli $bx - y + c = 0$. Zauważmy, że styczna istnieje dla dowolnych wartości a , b i c , ponieważ zawsze $b^2 + (-1)^2 > 0$.

b) Stosujemy równanie (1); $x_0 = -1$, $y_0 = f(-1) = -1 + a - b + c$,

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, \quad f'(-1) = 3 - 2a + b;$$

stąd

$$y - (-1 + a - b + c) = (3 - 2a + b)(x + 1), \quad \text{czyli} \quad (3 - 2a + b)x - y + 2 + c - a = 0.$$

c) Stosujemy równanie (2): $x_0 = 1$, $y_0 = f(1) = 1 + a + b + c$,

$$f'(1) = 3 + 2a + b, \quad \text{skąd} \quad y - (1 + a + b + c) = \frac{-1}{3 + 2a + b}(x - 1),$$

czyli

$$x + (3 + 2a + b)y - 4 - 5a - 4b - 3c - 2a^2 - b^2 - 3ab - 2ac - bc = 0.$$

d) Punkt styczności P_0 : $x_0 = 2$, $y_0 = -2 + 2 = 0$, skąd

$$(d_1) \quad 8 + 4a + 2b + c = 0;$$

$$m = f'(2) = 12 + 4a + b, \quad \text{czyli}$$

$$(d_2) \quad 12 + 4a + b = -1.$$

Z warunku równoległości stycznej do prostej L_2 w punkcie o odciętej $x = 5$, otrzymujemy trzecie równanie

$$(d_3) \quad 75 + 10a + b = -2.$$

Rozwiązując układ (d_1) , (d_2) , (d_3) , mamy $a = -\frac{32}{3}$, $b = \frac{89}{3}$ i $c = -\frac{74}{3}$, czyli

$$f(x) = x^3 - \frac{32}{3}x^2 + \frac{89}{3}x - \frac{74}{3}.$$

22.2. Dana jest krzywa określona wzorem

(a)
$$y=f(x)=e^{-x^2}$$

oraz jej punkt $P_0(1, e^{-1})$. Znaleźć styczną w punkcie P_0 , normalną w punkcie P_0 , długość odcinka stycznej w P_0 , długość odcinka normalnej w P_0 , podstyczną w P_0 i podnormalną w P_0 .

Rozwiązanie. Stosujemy wzory (1) i (2) oraz korzystamy z zadania 22.22. Otóż $f'(x)=-2xe^{-x^2}$, $f'(1)=-2e^{-1}$, skąd

$$y-e^{-1}=-2e^{-1}(x-1), \quad \text{czyli} \quad L_{st.}: \quad 2x+ey-3=0;$$

$$y-e^{-1}=\frac{-1}{-2e^{-1}}(x-1), \quad \text{czyli} \quad L_{nor.}: \quad e^2x-2ey+2-e^2=0;$$

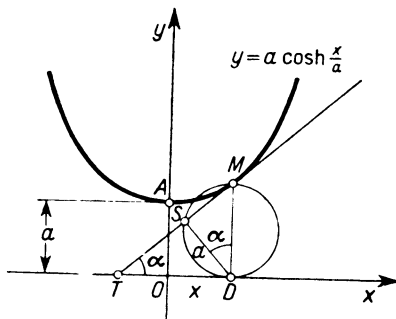
$$d(P_0, A)=\left|\frac{e^{-1}}{-2e^{-1}}\right|\sqrt{1+4e^{-2}}=\frac{1}{2}\sqrt{1+4e^{-2}};$$

$$d(P_0, B)=|e^{-1}|\sqrt{1+4e^{-2}}=e^{-1}\sqrt{1+4e^{-2}};$$

$$d(A, P'_0)=\left|\frac{e^{-1}}{-2e^{-1}}\right|=\frac{1}{2};$$

$$d(P'_0, B)=|e^{-1}e^{-1}(-2)|=2e^{-2}.$$

22.3. Podać konstrukcję stycznej do linii łańcuchowej w danym jej punkcie.



Rys. 22.5

Rozwiązanie. Równanie linii łańcuchowej ma postać $y=f(x)=a \cosh \frac{x}{a}$ ($a>0$). Stąd, jeżeli punkt $M(x, f(x))$ (zakładamy, że $x>0$) leży na linii łańcuchowej (rys. 22.5), to $\operatorname{tg} \alpha=f'(x)=\sinh \frac{x}{a}$,

$$\cos \alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 \frac{x}{a}}}=\frac{1}{\sqrt{\cosh^2 \frac{x}{a}}}=\frac{1}{\cosh \frac{x}{a}}=\frac{a}{y},$$

czyli $a = y \cos \alpha$. Jeżeli więc z punktu D (rys. 22.5) poprowadzimy prostopadłą DS do stycznej MT , to $d(D, S) = a$. Wynika stąd następująca konstrukcja stycznej do linii łańcuchowej. Rzędną DM traktujemy jako średnicę półokręgu i z punktu D zataczamy łuk o promieniu a do przecięcia z półokręgiem w punkcie S . Prosta MS będzie szukaną styczną. Dla $x < 0$ korzystamy z parzystości funkcji \cosh i z podanej konstrukcji dla $x > 0$.

22.4. Narysować wykresy funkcji określonych wzorami, w otoczeniu wskazanych punktów:

- a) $f(x) = |x^3 + x^2 - 4x - 4|$; $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$;
 b) $g(t) = |t|e^{-|t-1|}$; $t_1 = 0$, $t_2 = 1$; c) $h(u) = \sqrt[3]{(u-1)^2}$; $u_1 = 1$.

Rozwiązanie. Postępując analogicznie jak w przykładzie 21.4, otrzymujemy:

$$f'(x) = ((x^3 + x^2 - 4x - 4) \operatorname{sgn}(x^3 + x^2 - 4x - 4))' = (3x^2 + 2x - 4) \operatorname{sgn}(x^3 + x^2 - 4x - 4)$$

dla $x \in X = (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$ oraz

$$f'(-2^-) = -4 = (\operatorname{tg} \alpha_{st.})_{x=-2^-} \neq f'(-2^+) = 4 = (\operatorname{tg} \alpha_{st.})_{x=-2^+},$$

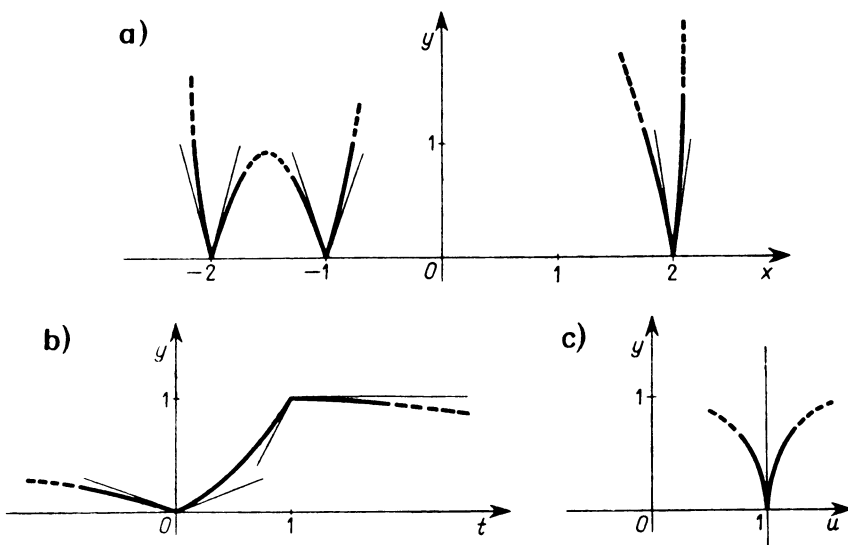
$$f'(-1^-) = -3 = (\operatorname{tg} \alpha_{st.})_{x=-1^-} \neq f'(-1^+) = 3 = (\operatorname{tg} \alpha_{st.})_{x=-1^+},$$

$$f'(2^-) = -12 = (\operatorname{tg} \alpha_{st.})_{x=2^-} \neq f'(2^+) = 12 = (\operatorname{tg} \alpha_{st.})_{x=2^+},$$

zatem punkty $P_1(-2, 0)$, $P_2(-1, 0)$ i $P_3(2, 0)$ są punktami kątowymi wykresu funkcji f (rys. 22.6a).

b) Korzystając z przykładu 21.4d, mamy

$$g'(0^-) = \frac{-1}{e} = (\operatorname{tg} \alpha_{st.})_{t=0^-} \neq g'(0^+) = \frac{1}{e} = (\operatorname{tg} \alpha_{st.})_{t=0^+}$$



Rys. 22.6

oraz

$$g'(1^-) = 2 = (\operatorname{tg} \alpha_{st.})_{t=1^-} \neq g'(1^+) = 0 = (\operatorname{tg} \alpha_{st.})_{t=1^+}.$$

Wynika stąd, że $O(0, 0)$ i $P_1(1, 1)$ są punktami kątowymi wykresu funkcji g rys. 22.6b.

c) Korzystając z przykładu 21.4e, mamy $h'(1^-) = -\infty$, $h'(1^+) = +\infty$, czyli punkt $P(1, 0)$ jest punktem zwrotu wykresu funkcji h rys. 22.6c.

22.5. Znaleźć czas t_0 , w którym prędkość i przyspieszenie ruchu określonego równaniem $s(t) = t^3 + 4t^2 - t + 1$ są równe.

Rozwiązanie. Korzystamy z interpretacji fizycznej pierwszej pochodnej i zadania 21.11

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 + 8t - 1, \quad a(t) = v'(t) = 6t + 8.$$

Stąd

$$3t^2 + 8t - 1 = 6t + 8, \quad \text{czyli} \quad 3t^2 + 2t - 9 = 0,$$

zatem

$$t_{1,2} = \frac{1}{3}(-1 \mp \sqrt{1+27}), \quad \text{a więc} \quad t_0 = t_2 = \frac{1}{3}(2\sqrt{7}-1).$$

22.6. Korzystając ze wzoru (3) obliczyć przybliżenia liczb: a) $\sin 46^\circ$; b) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 0,97$ oraz oszacować błąd bezwzględny i względny znalezionych przybliżeń.

Rozwiązanie. a) Niech $f = \sin$, zatem

$$\begin{aligned} \sin 46^\circ &= f(46^\circ) = f(45^\circ + 1^\circ) = f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} = 0,7071 + 0,7071 \cdot 0,0170 = 0,7194, \end{aligned}$$

tzn. $\sin 46^\circ \approx 0,7194$ (z tablic otrzymalibyśmy $\sin 46^\circ = 0,7193$). W celu oszacowania błędu korzystamy ze wzorów (4). Otóż

$$\Delta = |\Delta y| = \left| \cos \frac{\pi}{4} \right| \left| \frac{\pi}{180} \right| = 0,7071 \cdot 0,017 = 0,0123.$$

Ale przyjmując możemy, że $|\Delta x| = \Delta x$, zatem $\Delta y = 0,0123$;

$$\delta_y = \frac{\cos \frac{1}{4}\pi}{\sin \frac{1}{4}\pi} \cdot \frac{\pi}{180} = 0,017 \quad \text{lub} \quad \delta_y 100\% = 1,7\%.$$

b) Niech $f = \operatorname{arc} \operatorname{tg}$. Stąd $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 0,97 = f(0,97) = f(1 - 0,03) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (1 - 0,03) \approx \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1 - 0,03 \cdot \frac{1}{1+1^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{0,03}{2} = 0,7704$, czyli $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 0,97 \approx 0,7704$ (z tablic otrzymalibyśmy $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 0,97 = 0,7682$):

$$\Delta = |\Delta y| = \left| \frac{1}{1+1^2} \right| |-0,03| = 0,015, \quad \text{czyli} \quad \Delta_y = 0,015$$

oraz

$$\delta_y = \left| \frac{1}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} 1} \cdot \frac{1}{1+1^2} \right| |-0,03| = 0,019 \quad \text{lub} \quad \delta_y 100\% = 1,9\%.$$

22.7. Belka o przekroju prostokątnym podparta jest w dwóch punktach, których odległość wynosi k cm. Jeżeli na tę belkę działa siła P N, to nastąpi jej ugięcie, przy czym strzałka ugięcia określona jest wzorem $f(k) = \frac{P}{48 \cdot B \cdot E} k^3$, gdzie E jest modułem sprężystości w Pa, B — momentem bezwładności w m^4 (względem osi przekroju), $f(k)$ wyrażone jest w m. Znaleźć Δ_f i δ_f , jeżeli dany jest błąd Δ_k .

Rozwiązanie. Korzystając ze wzorów (4), otrzymujemy

$$\Delta_f = |f'(k)| \Delta_k = \frac{P}{48 \cdot B \cdot E} 3k^2 \Delta_k = \frac{Pk^2}{16 \cdot B \cdot E} \Delta_k \quad (1),$$

$$\delta_f = \frac{Pk^2}{16 \cdot B \cdot E} \cdot \frac{48 \cdot B \cdot E}{Pk^3} \Delta_k = 3 \frac{\Delta_k}{k} = 3\delta_k.$$

22.8. Przy obliczaniu kątów z tablic logarytmiczno-trygonometrycznych można korzystać np. z tablic sinusów względnie tangensów. Sprawdzić, które tablice dają mniejszy błąd bezwzględny.

Rozwiązanie. Oznaczając poszukiwany kąt przez φ , mamy $y_1 = \log \sin \varphi$ i $y_2 = \log \operatorname{tg} \varphi$, przy czym zakładamy, że $\Delta_{y_1} = \Delta_{y_2}$. Niech $\Delta_{1\varphi}$ i $\Delta_{2\varphi}$ oznaczają błędy maksymalne kąta φ obliczane ze wzorów $y_1 = \log \sin \varphi$ i $y_2 = \log \operatorname{tg} \varphi$. Stąd

$$\Delta_{y_1} = |(\log \sin \varphi)'| \Delta_{1\varphi} = \operatorname{ctg} \varphi \cdot \Delta_{1\varphi} \quad (1) \quad \text{ i } \quad \Delta_{y_2} = |(\log \operatorname{tg} \varphi)'| \Delta_{2\varphi} = \operatorname{ctg} \varphi \frac{1}{\cos^2 \varphi} \Delta_{2\varphi}.$$

Ale $\Delta_{y_1} = \Delta_{y_2}$, zatem

$$\operatorname{ctg} \varphi \Delta_{1\varphi} = \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\cos^2 \varphi} \Delta_{2\varphi}, \quad \text{czyli} \quad \Delta_{2\varphi} = \Delta_{1\varphi} \cos^2 \varphi < \Delta_{1\varphi},$$

a więc $\Delta_{2\varphi} < \Delta_{1\varphi}$. Wynika stąd, że tablice tangensów dają mniejszy błąd.

22.9. Dana jest funkcja określona wzorem $y = f(x) = Ax^\alpha$, $x \in (0, +\infty)$, $\alpha \cdot A \neq 0$. Jaki powinien być błąd $\delta_x 100\%$, aby błąd $\delta_y 100\%$ był nie większy od $p\%$?

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzoru (4). Otóż

$$\delta_y = |(\ln f(x))'| \Delta_x = \left| \frac{\alpha}{x} \right| \Delta_x = |\alpha| \frac{\Delta_x}{|x|} = |\alpha| \delta_x,$$

stąd jeżeli $\delta_y 100\% \leq p\%$, czyli $\delta_y \leq \frac{p}{100}$, to $|\alpha| \delta_x \leq \frac{p}{100}$, czyli $\delta_x \leq \frac{p}{100|\alpha|}$, a więc

$$\delta_x 100\% \leq \frac{p}{|\alpha|} \%.$$

W szczególności, jeżeli np. objętość kuli $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ chcemy obliczyć z błędem względnym procentowym nie większym niż 6% , to wystarczy, aby błąd procentowy promienia był nie większy od $\frac{6}{3}\% = 2\%$.

(1) Ograniczamy się do kątów $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$.

Zadania

22.10. Znaleźć równania stycznych i normalnych do krzywych o danych równaniach we wskazanych punktach:

a) $f(x) = \operatorname{tg} 3x$ w punkcie $O(0, 0)$;

b) $g(t) = \arcsin \frac{t-1}{2}$ w punkcie przecięcia krzywej o równaniu $y=g(t)$ z osią Ot ;

c) $W(x) = 3x^4 - 2x^2 + x - 2$ w punkcie o odciętej $x=1$;

d) $k(z) = e^{z^2-2}$ w punktach przecięcia krzywej o równaniu $y=k(z)$ z prostą $y=e^2$;

e) $p(u) = \frac{8a^3}{4a^2 + u^2}$ w punkcie o odciętej $u=2a$;

f) $x^2 = 2py$ w punkcie o odciętej $x=x_0$;

g) $f(x) = \cosh x$ w punkcie o odciętej $x=x_0$;

h) $y(x) = ax^2 + bx + c$ w punkcie o odciętej $x=x_0$.

22.11. W jakim punkcie styczna do paraboli $y=f(x)=x^2+1$:

a) jest równoległa do osi Ox ;

b) tworzy z dodatnim kierunkiem osi Ox kąt $\alpha = \frac{1}{3}\pi$?

22.12. Jaki warunek muszą spełniać współczynniki a , b i c , żeby parabola $y=ax^2+bx+c$ była styczna do osi Ox ?

22.13. Znaleźć równanie normalnej do krzywej o równaniu $y=x \ln x$ i jednocześnie równoległej do prostej $2x-2y+3=0$.

22.14. Dla jakich wartości zmiennej niezależnej styczne do krzywych o równaniach $y=x^2$ i $y=x^3$ są równoległe?

22.15. Wykazać, że: a) normalne do krzywej o równaniu $y=x^2-x+1$ w punktach $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=\frac{1}{2}$ przecinają się w jednym punkcie;

b) styczne do krzywej o równaniu $y = \frac{1+x^2}{3+x^2}$ w punktach przecięcia krzywej z prostą $y=\frac{1}{2}$, przecinają się w punkcie $(0, \frac{1}{4})$.

22.16. Znaleźć kąt między krzywymi o równaniach $y=f_1(x)$ i $y=f_2(x)$ w ich punkcie przecięcia $P_0(x_0, y_0)$.

Uwaga. Przez kąt między krzywymi rozumiemy kąt między stycznymi do tych krzywych w ich punkcie przecięcia.

22.17. Znaleźć kąt przecięcia krzywych o równaniach:

a) $f(x) = \ln x$ z osią Ox ; b) $f(x) = x^3 + 2$ z osią Ox ;

c) $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$; d) $f(x) = x^2$ i $g(x) = x$;

e) $h(t) = e^{t/2}$ i $g(t) = 2$.

22.18. Dla jakich wartości parametrów b i c krzywa o równaniu $y=x^3+bx+c$ jest styczna do prostej $y=x$ w punkcie $P_0(1, 1)$?

22.19. Wykazać, że krzywe o równaniach $y=4x^2+2x-8$ i $y=x^3-x+10$ są styczne w punkcie $P_0(3, 34)$.

Uwaga. Mówimy, że krzywe o równania $y=f_1(x)$ i $y=f_2(x)$ są styczne, jeżeli mają tę samą styczną w ich wspólnym punkcie.

22.20. Dla jakich wartości parametru a parabola $y=ax^2$ jest styczna do krzywej o równaniu $y=\ln x$?

22.21. Jaki warunek muszą spełniać współczynniki p i q , żeby krzywa o równaniu $y=x^3+px+q$ była styczna do osi Ox ?

22.22. Znaleźć długości odcinków P_0A , P_0B , AP'_0 , P'_0B (por. punkt 22.1).

22.23. Znaleźć długości odcinków P_0A , P_0B , AP'_0 , P'_0B (por. punkt 22.1) krzywych o danych równaniach we wskazanych punktach:

- a) $f(x)=x^3-x+1$ w punkcie o odciętej $x=1$; b) $g(t)=2\sqrt{t}$ w punkcie $P_0(1, 2)$;
c) $h(u)=\sin^3 u$ w punkcie o odciętej $u=\frac{1}{4}\pi$; d) $y=f(x)=\operatorname{tg} x$ w punkcie $P(x, y)$.

22.24. Znaleźć długość odcinka normalnej linii łańcuchowej $y(x)=a \cosh(x/a)$ w punkcie $P_0(x_0, y_0)$.

22.25. Znaleźć podstyczną krzywej o równaniu $y=f(x)=ax^m$ ($m>0$) w dowolnym jej punkcie $P(x, f(x))$.

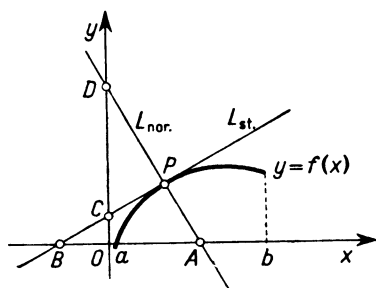
22.26. Korzystając z zadania 22.25 podać konstrukcję stycznych do krzywej o równaniu $y=f(x)=x^{3/2}$ w punktach o odciętych $x_1=1$, $x_2=\frac{3}{2}$, $x_3=3$.

22.27. Wykazać, że:

- a) podnormalna paraboli $y^2=2px$ jest stała w dowolnym jej punkcie;
b) podstyczna krzywej o równaniu $y=a^x$, $a \in \mathbb{R}_+ - \{1\}$ jest stała w dowolnym jej punkcie;

c) dla krzywej o równaniu $y=f(x)=ax^k$ ($a \neq 0$, $k \neq 0$) stosunek $\frac{d}{x}$ ($x \in \mathbb{R}_+$), gdzie d jest podstyczną, jest stały w każdym punkcie krzywej.

22.28. Dana jest funkcja f różniczkowalna na przedziale $\langle a, b \rangle$ (rys. 22.7). Znaleźć długości odcinków PD , AD , OA , OD , PC , CB , OC i OB .



Rys. 22.7

22.29. Dana jest krzywa o równaniu $y = \ln x$. Znaleźć długości odcinków wymienionych w zadaniu 22.28, jeżeli $P(x, f(x)) = P(e, 1)$.

22.30. Dana jest krzywa o równaniu $y = f(x) = \frac{a}{2} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \sqrt{a^2 - x^2}$. Sprawdzić, że długość odcinka PC (por. zadanie 22.28) jest stała dla każdego punktu styczności.

22.31. Wykazać, że dowolna styczna do krzywej o równaniu $y = \frac{1}{2} \sqrt{x - 4x^2}$ przecina oś Oy w punkcie jednakowo oddalonym od punktu styczności i od początku układu współrzędnych.

22.32. Narysować wykresy funkcji określonych danymi wzorami w otoczeniu wskazanych punktów:

a) $f(x) = x^2 + |x - 1|$, punkt $P_0(1, 1)$; b) $g(x) = e^{|x|}$, punkt $P_0(0, 1)$;

c) $h(t) = \sqrt[3]{t}$, punkt $O(0, 0)$; d) $m(z) = \sqrt[3]{z^2}$, punkt $O(0, 0)$.

22.33. Znaleźć kąty między stycznymi jednostronnymi krzywych o równaniach:

a) $f(x) = \sqrt{1 - e^{-a^2 x^2}}$ w punkcie o odciętej $x = 0$;

b) $g(t) = \arcsin \frac{2t}{1+t^2}$ w punkcie o odciętej $t = 1$.

22.34. Dane jest równanie ruchu prostoliniowego $s(t) = t^3 + t^2 + 2/t$. Znaleźć średnie prędkości ruchu w przedziałach czasu:

a) $\langle 2, 4 \rangle$; b) $\langle 2, 3 \rangle$; c) $\langle 2, 2, 1 \rangle$.

22.35. Ruch ciała o masie 3 kg poruszającego się po prostej określony jest wzorem $s(t) = (t^2 + t + 1)$ cm (czas t wyrażony jest w sekundach). Wyznaczyć energię ciała $\left(E = \frac{mv^2}{2}\right)$ po upływie 5 sekund od początku ruchu.

22.36. Kąt α , o jaki obraca się koło po upływie t sekund określony jest wzorem $\alpha(t) = at^2 - bt + c$, gdzie a , b i c są stałymi liczbami dodatnimi. Wyznaczyć prędkość kątową ruchu koła. Po jakim czasie prędkość ta będzie równa zeru?

22.37. Znaleźć prędkość i przyspieszenie ruchu określonego równaniem

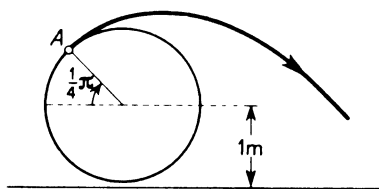
$$x(t) = Ae^{-kt} \sin \omega t \quad (A > 0, k > 0, \omega > 0).$$

22.38. Ciało zostało wyrzucone pionowo w górę z prędkością v_0 m/s. Znaleźć równania: a) ruchu ciała; b) prędkości i przyspieszenia ruchu ciała. Po ilu sekundach ciało osiągnie punkt najwyższy i w jakiej odległości od ziemi?

22.39. Dane jest równanie ruchu prostoliniowego punktu $s(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 3$. Znaleźć prędkość i przyspieszenie ruchu w chwili $t = 6$ oraz wyznaczyć czas, w którym punkt zmieni zwrot ruchu.

22.40. Pociąg i balon wyruszają z jednego punktu w tej samej chwili. Pociąg jedzie po prostej z jednostajną prędkością $v = 50$ km/h, a balon unosi się pionowo w górę także z prędkością jednostajną $v_2 = 10$ km/h. Z jaką prędkością pociąg i balon oddalają się od siebie?

22.41. Koło zamachowe wykonujące 80 obrotów na minutę zerwało się. Promień koła $r=90$ cm; środek koła znajduje się 1 m nad podłogą. Jaka prędkość będzie miał odłamek zaznaczony na rys. 22.8 punktem A w chwili zetknięcia z podłogą?



Rys. 22.8

22.42. Zróżniczkować graficznie funkcje określone wzorami:

- a) $f(x)=x^2$, $0 \leq x \leq 2$; b) $g(x)=e^x$, $-1 \leq x \leq 2$;
c) określona tabelarycznie w zadaniu 17.24.

22.43. Dane są funkcje różniczkowalne określone wzorami $u=f(x)$ i $v=g(x)$. Wyprowadzić wzory na różniczki funkcji: $u \mp v$, $u \cdot v$, u/v ($v \neq 0$).

22.44. Znaleźć wskazane niżej różniczki dla przyrostu dx :

- a) $d(\ln(x + \sqrt{x^2 + a}))$; b) $d\left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right)$;
c) $d\left(\frac{\ln x}{x}\right)$; d) $d\left(\frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi\right)\right)$; e) $d^2(2^{\sin 2x})$.
f) $d^3(e^{-x^2})$; g) $d^{10}(x \cos 2x)$; h) $d^n[\sin(2x + 5)]$.

22.45. Dana jest funkcja określona wzorem $f(x)=x^3 - 2x + 1$. Znaleźć liczby $\Delta f(1)$ i $df(1)$ dla przyrostów:

- a) $\Delta x=1$; b) $\Delta x=0,1$; c) $\Delta x=0,01$.

22.46. Dane jest równanie ruchu prostoliniowego punktu $x(t)=5t^2$, gdzie czas t mierzymy w sekundach, a drogę $x(t)$ w metrach. Porównać liczby $\Delta x(2)$ i $dx(2)$ dla przyrostów czasów:

- a) $\Delta t=1$ s; b) $\Delta t=0,1$ s; c) $\Delta t=0,001$ s.

22.47. Sprawdzić, że dla funkcji $f: \mathbf{R} \ni x \rightarrow (ax + b) \in \mathbf{R}$ prawdziwy jest wzór $\Delta y = dy$.

22.48. Podać interpretację geometryczną różniczki $df=f'(x)dx$.

22.49. Korzystając ze wzoru (3), znaleźć przybliżenia liczb:

- a) $\sqrt[3]{1,02}$; b) $\sin 29^\circ$; c) $\operatorname{arctg} 1,05$; d) $\log 11$; e) $\sqrt{\frac{2,037^2 - 1}{2,037^2 + 1}}$.

22.50. Korzystając ze wzoru (3), obliczyć przybliżenia liczb:

- a) $\cos 61^\circ$; b) $\sqrt[4]{82}$; c) $\operatorname{arctg} 1,02$

oraz oszacować błędy bezwzględne i względne znalezionych przybliżeń.

22.51. Dane są wzory:

a) $i(\varphi) = A \operatorname{tg} \varphi$ (natężenie prądu mierzonego za pomocą busoli stycznych);

b) $V(r) = \pi h r^2$ (objętość walca o danej wysokości h);

c) $s(f) = k + \frac{2}{3k} f^2$ (długość ciężkiego przewodnika umocowanego w dwóch punktach

na linii poziomej w odległości $2k$);

d) $R(x) = \frac{mx}{m+1,798x} \cdot 17860$ (ilość energii chemicznej przemienianej w ciepło);

e) $E(v) = \frac{1}{2} m v^2$ (energia kinetyczna ciała o stałej masie m);

f) $s(t) = A e^{-kt} \sin \omega t$ (ruch harmoniczny tłumiony).

Znaleźć maksymalne błędy bezwzględne i względne funkcji określonych wzorami a) - f), jeżeli dane są maksymalne błędy bezwzględne argumentów tych funkcji.

22.52. Z jakim błędem względnym procentowym należy zmierzyć długość promienia koła, aby przy obliczaniu pola S tego koła, popełnić błąd $\delta_s 100\%$ nie większy od 5% ?

22.53. Krawędź sześcianu o długości a zmierzono z błędem $\delta_a 100\% = \frac{5}{3}\%$. Jaki będzie błąd $\delta_v 100\%$ objętości sześcianu?

22.54. W ruchu harmonicznym tłumionym (por. zadanie 22.51f), gdzie $A=2$, $k=3$, $\omega=1$, zmierzono czas t w chwili $t_0 = \frac{1}{4}\pi$ z błędem $\delta_t 100\% = 2\%$. Jaki będzie błąd $\delta_s 100\%$ wychylenia $s(t)$ w chwili $t_0 = \frac{1}{4}\pi$?

22.55. Dana jest funkcja określona wzorem $y=f(x)=a^x$. Jaki powinien być błąd Δ_x argumentu, aby błąd δ_y funkcji był nie większy od $\varepsilon > 0$ oraz jaki powinien być błąd δ_x funkcji, aby błąd argumentu Δ_x był nie większy od $\eta > 0$?

Odpowiedzi

22.10. a) $3x - y = 0$, $x + 3y = 0$ (¹); b) $t - 2y - 1 = 0$, $2t + y - 2 = 0$;

c) $9x - y - 9 = 0$, $x + 9y - 1 = 0$; d) $4e^2 z \mp y \mp 7e^2 = 0$, $z \mp 4e^2 y \pm 2 \pm 4e^4 = 0$;

e) $u + 2y - 4a = 0$, $2u - y - 3a = 0$; f) $x_0 x = p \left(y + \frac{x_0^2}{2p} \right)$, $y - \frac{x_0^2}{2p} = \frac{-p}{x_0} (x - x_0) (x_0 \neq 0)$;

g) $y - \cosh x_0 = \sinh x_0 (x - x_0)$, $y - \cosh x_0 = \frac{-1}{\sinh x_0} (x - x_0) (x_0 \neq 0)$;

h) $(2ax_0 + b)x - y - ax_0^2 + c = 0$, $x + (2ax_0 + b)y - 2a^2x_0^3 - 3abx_0^2 - b^2x_0 - 2acx_0 - bc - x_0 = 0$.

22.11. a) $A(0, 1)$; b) $B(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{7}{4})$.

22.12. $b^2 - 4ac = 0$.

22.13. $x - y - 3e^{-2} = 0$.

22.14. $x_1 = 0$ i $x_2 = \frac{2}{3}$.

(¹) Odpowiedzi podawane będą zawsze w kolejności sformułowanych pytań w zadaniu, czyli np. $3x - y = 0$ jest równaniem stycznej, a $x + 3y = 0$ jest równaniem normalnej.

22.16. $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)f_2'(x_0)} \right|$.

22.17. a) $\frac{1}{4}\pi$; b) $\arccos \frac{1}{3}$ (¹); c) $\arccos 2\sqrt{2}$; d) $\arccos \frac{1}{3}$; e) $\frac{1}{4}\pi$.

22.18. $b = -2, c = 2$. 22.20. $a = \frac{1}{2e}$. 22.21. $(\frac{1}{3}p)^3 + (\frac{1}{3}q)^2 = 0$.

22.22. $d(P_0, A) = \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \sqrt{1 + f'^2(x_0)}$, $d(P_0, B) = |f(x_0)| \sqrt{1 + f'^2(x_0)}$,

$d(A, P'_0) = \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right|$, $d(P'_0, B) = |f(x_0)f'(x_0)|$.

22.23. a) $\frac{1}{2}\sqrt{5}, \sqrt{5}, \frac{1}{2}, 2$; b) $2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 2, 2$; c) $\frac{1}{12}\sqrt{34}, \frac{1}{8}\sqrt{17}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}$;

d) $|\operatorname{tg} x| \sqrt{1 + \cos^4 x}$, $\left| \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \right| \sqrt{1 + \cos^4 x}$, $\frac{1}{2} |\sin 2x|$, $\left| \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \right|$.

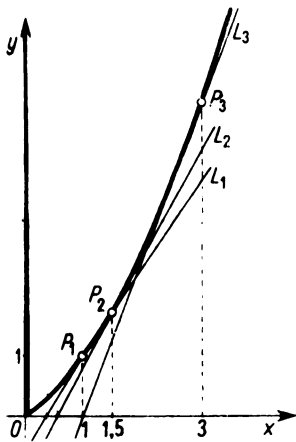
22.24. $|a| y^2(x_0)$.

22.25. $\frac{|x|}{m}$.

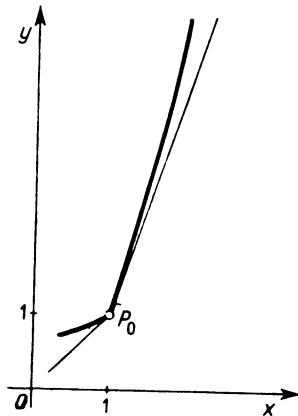
22.26. Rys. 22.9.

22.27. a) $|p|$; b) $\frac{1}{|\ln a|}$; c) $\frac{1}{|k|} = \operatorname{const.}$

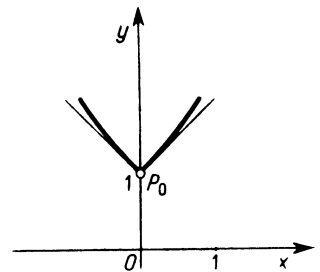
22.28. $d(P, D) = \left| \frac{x}{y'} \right| \sqrt{1 + y'^2}$, $d(A, D) = \left| \frac{x + yy'}{y'} \right| \sqrt{1 + y'^2}$, $d(O, A) = |x + yy'|$,



Rys. 22.9



Rys. 22.10



Rys. 22.11

(¹) Przez kąt między prostymi rozumiemy kąt ostry między tymi prostymi, jeżeli proste nie są prostopadłe oraz kąt prosty w przypadku prostych prostopadłych.

$$d(O, D) = \left| y + \frac{x}{y'} \right|, \quad d(P, C) = |x| \sqrt{1+y'^2}, \quad d(C, B) = \left| \frac{y-xy'}{y'} \right| \sqrt{1+y'^2},$$

$$d(O, C) = |y-xy'|, \quad d(O, B) = \left| x - \frac{y}{y'} \right|.$$

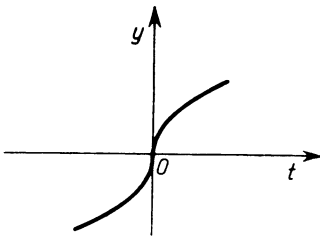
22.29. $e\sqrt{1+e^2}$, $e^{-1}(1+e^2)^{\frac{1}{2}}$, $e^{-1}(1+e^2)$, $1+e^2$, $\sqrt{1+e^2}$, 0 , 0 , 0 .

22.32. a) $f'(1^-) = 1 \neq f'(1^+) = 3$, P_0 punkt kątowy, rys. 22.10;

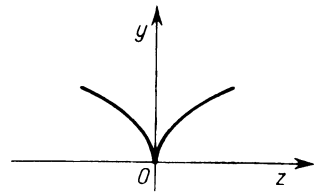
b) $g'(0^-) = -1 \neq g'(0^+) = 1$, P_0 punkt kątowy, rys. 22.11; .

c) $h'(0) = +\infty$, P_0 punkt przegięcia, rys. 22.12;

d) $m'(0^-) = -\infty$, $m'(0^+) = +\infty$, P_0 punkt zwrotu, rys. 22.13.



Rys. 22.12



Rys. 22.13

22.33. a) Zastosować wzór $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$; $2 \arctg \frac{1}{|a|}$; b) $\frac{1}{2}\pi$.

22.34. a) $v = \frac{323}{16}$; b) $v = \frac{311}{18}$; c) $v = 14,7$.

22.35. $E = 181,5 \cdot 10^{-4}$ dżula.

22.36. $\omega = \alpha'(t) = (2at - b) \text{ rad/s}$, $\omega = 0$ dla $t = \frac{b}{2a}$.

22.37. $v(t) = x'(t) = Ae^{-kt}(\omega \cos \omega t - k \sin \omega t)$,
 $a(t) = v'(t) = -Ae^{-kt}(\omega^2 \sin \omega t + 2\omega k \cos \omega t - k^2 \sin \omega t)$.

22.38. a) $s(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$; b) $v(t) = v_0 - g t$, $a(t) = -g$, $t_0 = \frac{v_0}{g}$, $s(t_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g}$, gdzie g oznacza przyspieszenie ziemskie.

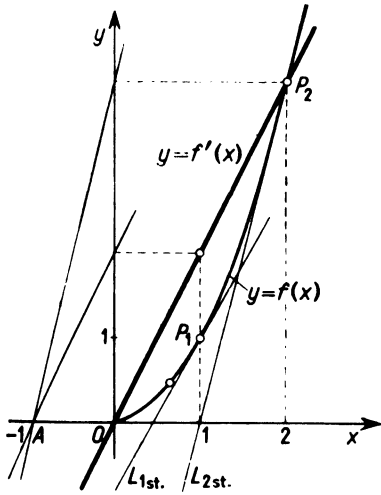
22.39. $v(6) = 15$, $a(6) = 18$, $t_1 = 1$, $t_2 = 5$. 22.40. $v = 10\sqrt{26}$ km/h ≈ 51 km/h.

22.41. Skorzystać z równania toru ciała w rzucie ukośnym; $v \approx 9,43$ m/s.

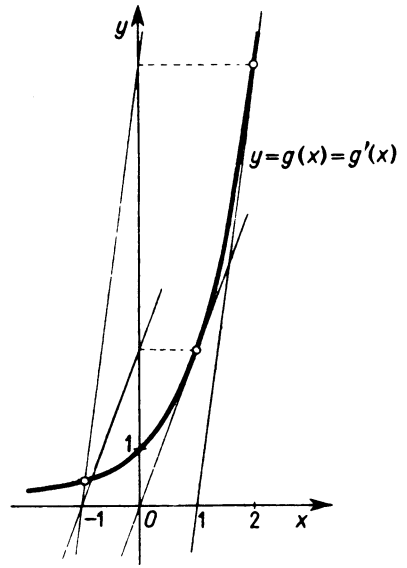
22.42. a) Rys. 22.14; b) rys. 22.15; c) rys. 22.16.

22.43. $d(u \mp v) = du \mp dv$, $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$, $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}$.

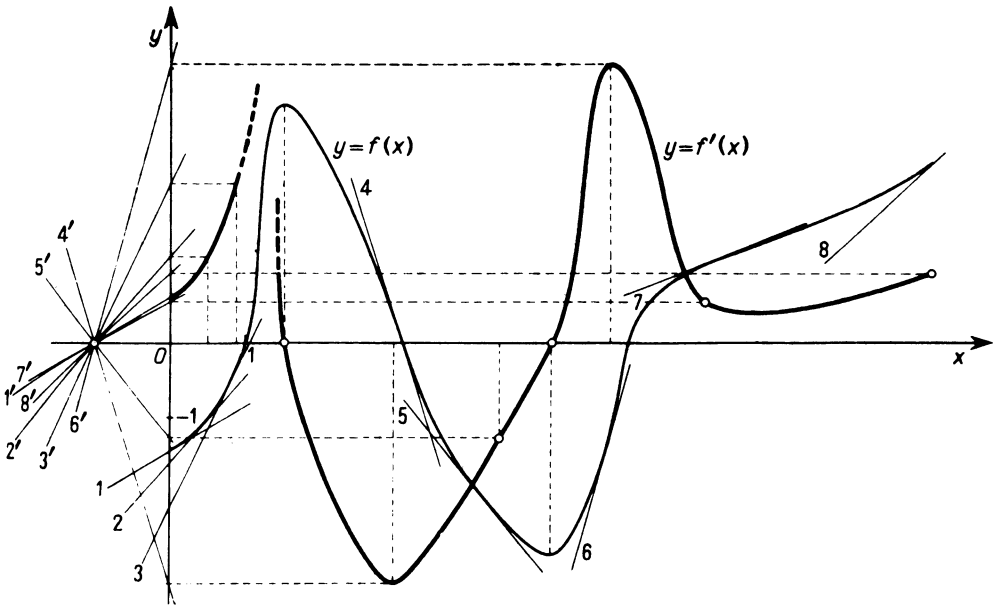
22.44. a) $\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$; b) $\frac{dx}{x^2+a^2}$; c) $\frac{1-\ln x}{x^2} dx$;



Rys. 22.14



Rys. 22.15



Rys. 22.16

d) $\frac{dx}{\cos^3 x}$; e) $4 \cdot \ln 2 \cdot 2^{\sin 2x} (\ln 2 \cdot \cos^2 2x - \sin 2x) (dx)^2$; f) $4x e^{-x^2} (3 - 2x^2) (dx)^3$;

g) $-2^{10} (x \cos 2x + 5 \sin 2x) (dx)^{10}$; h) $2^n \sin (2x + 5 + \frac{1}{2}n\pi) (dx)^n$.

22.45. $\Delta f(1) = \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$, $df(1) = \Delta x$;

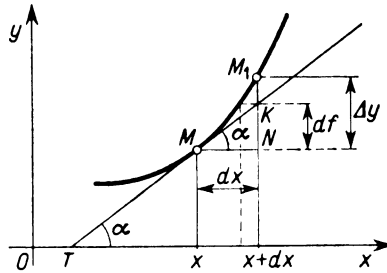
a) 5 i 1; b) 0,131 i 0,1; c) 0,010301 i 0,01.

22.46. $\Delta x(2) = 20\Delta t + 5(\Delta t)^2$, $dx(2) = 20\Delta t$;

a) 25 m i 20 m; b) 2,05 m i 2 m;

c) 0,020005 m i 0,02 m.

22.48. Rys. 22.17; liczba $df = f'(x)dx$ oznacza przyrost rzędnej stycznej do krzywej $y=f(x)$ w punkcie x , dla argumentów x i $x+dx$.



Rys. 22.17

22.49. a) Np. 1,007; b) np. 0,4849;

c) np. 0,8104; d) np. 1,43; e) np. 0,782.

22.50. a) Np. $y=0,4851$, $\Delta y=0,0147$, $\delta_y=0,0303$, $\delta_y 100\%=3,03\%$;

b) np. $y=3,0093$, $\Delta y=0,0093$, $\delta_y=0,003$, $\delta_y 100\%=0,3\%$;

c) np. $y=0,796$, $\Delta y=0,01$, $\delta_y=0,0126$, $\delta_y 100\%=1,26\%$.

22.51. a) $\Delta_i = \frac{A}{\cos^2 \varphi} \Delta \varphi$, $\delta_i = \frac{2A}{|\sin 2\varphi|} \Delta \varphi$; b) $\Delta_v = 2\pi hr \Delta r$, $\delta_v = \frac{2}{r} \Delta r$;

c) $\Delta_s = \frac{4}{3k} f \Delta_f$, $\delta_s = \frac{4f}{3k^2 + 2f^2} \Delta_f$; d) $\Delta_R = \frac{17860m^2}{(m+1,798x)^2} \Delta x$, $\delta_R = \frac{m}{(m+1,978x)x} \Delta x$;

e) $\Delta_E = mv \Delta_v$, $\delta_E = \frac{2}{v} \Delta_v$;

f) $\Delta_s = e^{-kt} |A(-k \sin \omega t + \omega \cos \omega t)| \Delta t$, $\delta_s = |-k + \omega \operatorname{ctg} \omega t| \Delta t$.

22.52. $\leq 2,5\%$.

22.53. 5% .

22.54. $\frac{1}{2}\pi\%$.

22.55. $\Delta_x \leq \frac{\varepsilon}{\ln a}$, $\delta_y \leq \eta \ln a$.

§ 23. TWIERDZENIA: ROLLE'A, LAGRANGE'A, TAYLORA

23.1. T₁. TWIERDZENIE ROLLE'A. Niech $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbf{R}$.

$$(f \in C^0(\langle a, b \rangle)) \wedge (f \in D^1(a, b)) \wedge (f(a) = f(b)) \Rightarrow \bigvee_{c \in (a, b)} f'(c) = 0.$$

T₂. TWIERDZENIE LAGRANGE'A (twierdzenie o wartości średniej).

Niech $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbf{R}$,

$$(f \in C^0(\langle a, b \rangle)) \wedge (f \in D^1(a, b)) \Rightarrow \bigvee_{c \in (a, b)} (f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)).$$

Przyjmując $a = x_0$, $b = x_0 + \Delta x$ możemy tezę tw. T₂ napisać w postaci

$$(1) \quad \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(c) \Delta x,$$

gdzie $c \in (x_0, x_0 + \Delta x)$ jeżeli $\Delta x > 0$, względnie $c \in (x_0 + \Delta x, x_0)$ jeżeli $\Delta x < 0$.

Uwaga. Wzór (1) w odróżnieniu od wzoru (3) § 22 określa dokładnie przyrostu funkcji.

T₃. TWIERDZENIE TAYLORA. Niech $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbf{R}$, $x_0, x \in \langle a, b \rangle \wedge x \neq x_0$, $n \in \mathbf{N}$. Jeżeli $f \in C^{n-1}(\langle a, b \rangle) \wedge f^{(n-1)} \in D^1((a, b))$ ⁽¹⁾, to istnieje taki punkt c leżący między punktami x_0 i x , że

$$(2) \quad f(x) - f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} + R_n,$$

gdzie $R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n$ (tzw. reszta w postaci Lagrange'a).

Wzór (2) nazywamy wzorem Taylora funkcji f . W szczególności, jeżeli $x_0 = 0$, to otrzymujemy wzór Maclaurina

$$(3) \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n, \quad \theta \in (0, 1).$$

23.2. Wnioski z T₂ i T₃. Niech $X_p \subset \mathbf{R}$ oznacza jeden z przedziałów: (a, b) , $\langle a, b \rangle$, $(a, b]$, $\langle a, b \rangle$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$, $\langle a, +\infty \rangle$, $(-\infty, +\infty)$ (w dalszym ciągu X_p oznaczać będzie zawsze jeden z powyższych przedziałów).

Dana jest funkcja $f: X_p \rightarrow \mathbf{R}$, ciągła na X_p i różniczkowalna na $\text{int } X_p$ (por. § 7).

T₄. ($f = \text{const}$ na X_p) \Leftrightarrow ($\bigwedge_{x \in \text{int } X_p} f'(x) = 0$).

T₅. (f malejąca [rosnąca] na X_p) \Leftrightarrow ($\bigwedge_{x \in \text{int } X_p} (f'(x) \leq 0$ [$f'(x) \geq 0$]) \wedge (f' nie równa się tożsamościowo zeru na żadnym przedziale zawartym w X_p)).

Wzór (2) względnie (3) służy m. in. do przybliżonego przedstawiania funkcji za pomocą wielomianów oraz do przybliżonego obliczania wartości funkcji. Otóż

$$(4) \quad f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

⁽¹⁾ Przyjmujemy umowę $f^{(0)} = f$.

względnie

$$(5) \quad f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

przy czym błąd bezwzględny Δ określony jest wzorem

$$(6) \quad \Delta = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1},$$

względnie

$$(7) \quad \Delta = \frac{|f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$

Jeżeli np. $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ dla $|x| \leq \eta$, to

$$(8) \quad \Delta_y \leq \frac{M|\eta|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Przykłady

23.1. Nie znajdując pochodnej funkcji określonej następującym wzorem $f(x) = (x+1)(x-2)(x-4)(x-5)$ obliczyć liczbę pierwiastków rzeczywistych równania $f'(x) = 0$ i podać przedziały, w których one leżą.

Rozwiązanie. Funkcja f jest wielomianem stopnia czwartego, jest więc funkcją ciągłą i różniczkowalną na każdym przedziale, przy czym $f(-1) = f(2) = f(4) = f(5) = 0$. Zatem w przedziałach $\langle -1, 2 \rangle$, $\langle 2, 4 \rangle$ i $\langle 4, 5 \rangle$ funkcja f spełnia założenia twierdzenia Rolle'a, czyli istnieją co najmniej trzy pierwiastki pochodnej f' . Ponieważ jednak funkcja f' jest wielomianem stopnia trzeciego, może więc mieć co najwyżej trzy pierwiastki, a więc ma dokładnie trzy pierwiastki po jednym w każdym z przedziałów $\langle -1, 2 \rangle$, $\langle 2, 4 \rangle$ i $\langle 4, 5 \rangle$.

23.2. Sprawdzić, że funkcja $f: \langle 0, 3 \rangle \ni x \rightarrow (x^3 - 4x^2 + x + 6) \in \mathbf{R}$ spełnia założenia twierdzenia Lagrange'a oraz znaleźć liczbę c występującą w tezie twierdzenia.

Rozwiązanie. Ponieważ $f \in C^1(\mathbf{R})$, więc f spełnia założenia twierdzenia Lagrange'a. Stąd

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = f'(c), \quad \text{gdzie} \quad 0 < c < 3.$$

Ale $f(0) = 6$, $f(3) = 0$, $f'(x) = 3x^2 - 8x + 1$, czyli

$$3c^2 - 8c + 1 = -2, \quad \text{tzn.} \quad c_{1,2} = \frac{1}{3}(4 \mp \sqrt{7}).$$

Ponieważ $0 < c_{1,2} < 3$, więc $c_{1,2} = \frac{1}{3}(4 \mp \sqrt{7})$.

23.3. Wielomian $f(x) = 2x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 2$ przedstawić jako sumę potęg dwumianu $x - 1$.

Rozwiązanie. Funkcja f jest różniczkowalna dowolną ilość razy na każdym przedziale, możemy więc stosować wzór (2). Otóż dla $x_0 = 1$ otrzymujemy

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(1)}{(n-1)!}(x-1)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-1)^n,$$

gdzie $1 < c < x$ względnie $x < c < 1$. Kolejno otrzymujemy: $f(1) = 2$, $f'(x) = 8x^3 + 3x^2 - 4x - 1$, $f'(1) = 6$, $f''(x) = 24x^2 + 6x - 4$, $f''(1) = 26$, $f'''(x) = 48x + 6$, $f'''(1) = 54$, $f^{(4)}(x) = 48$, $f^{(4)}(1) = 48$, $f^{(n)}(x) = 0$ dla $n > 4$, $f^{(n)}(1) = 0$ dla $n > 4$; stąd

$$f(x) = 2 + \frac{6}{1!}(x-1) + \frac{26}{2!}(x-1)^2 + \frac{54}{3!}(x-1)^3 + \frac{48}{4!}(x-1)^4,$$

czyli

$$f(x) = 2(x-1)^4 + 9(x-1)^3 + 13(x-1)^2 + 6(x-1) + 2.$$

23.4. Napisać wzór Taylora dla funkcji określonej wzorem $f(x) = a^x$ w punkcie $x_0 = -2$.

Rozwiązanie. Ponieważ istnieje $f^{(n)}(x) = (\ln a)^n a^x$, więc możemy stosować wzór (2). Otóż

$$a^x = a^{-2} + \frac{a^{-2} \ln a}{1!}(x+2) + \frac{a^{-2}(\ln a)^2}{2!}(x+2)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{a^{-2}(\ln a)^{n-1}}{(n-1)!}(x+2)^{n-1} + \frac{a^c(\ln a)^n}{n!}(x+2)^n,$$

gdzie $c = -2 + \vartheta(x+2)$, $0 < \vartheta < 1$.

23.5. Wykazać, że funkcja określona wzorem

$$f(x) = 2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

jest stała na przedziale $(1, +\infty)$.

Rozwiązanie. Korzystamy z T_4 . Funkcja f jest ciągła i różniczkowalna na $(0, +\infty)$, przy czym

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} + \frac{2(1-x^2)(1+x^2)}{(x^2-1)(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0;$$

stąd

$$2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = C,$$

gdzie C jest stałą. Podstawiając np. $x = \sqrt{3}$, otrzymujemy

$$C = f(\sqrt{3}) = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \arcsin \frac{2\sqrt{3}}{1+3} = 2 \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi.$$

23.6. Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji określonych wzorami:

a) $g(x) = \sqrt[3]{x^2} e^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$;

b) $x(t) = Ae^{-kt} \sin \omega t$, $t \in (0, +\infty)$ ($A > 0, k > 0, \omega > 0$).

Rozwiązanie. Korzystamy z T_5 .

a) Ponieważ $g \in D^1(\mathbf{R} - \{0\}) \wedge g'(x) = e^{-x} x^{-1/3} (\frac{2}{3} - x) \wedge \wedge_{x \in \mathbf{R}} e^{-x} > 0$, więc $g'(x) < 0$ dla $x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$ oraz $g'(x) > 0$ dla $x \in (0, \frac{2}{3})$. A więc g jest malejąca na każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$, $(\frac{2}{3}, +\infty)$ oraz rosnąca na $(0, \frac{2}{3})$.

b) Funkcja x jest różniczkowalna na przedziale $(0, +\infty)$ i

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ae^{-kt}(\omega \cos \omega t - k \sin \omega t) = Ae^{-kt} \sqrt{\omega^2 + k^2} \left(\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \cos \omega t - \frac{k}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \sin \omega t \right) = \\ &= Ae^{-kt} \sqrt{\omega^2 + k^2} \sin(\varphi - \omega t) = -Ae^{-kt} \sqrt{\omega^2 + k^2} \sin(\omega t - \varphi), \end{aligned}$$

gdzie $\varphi = \arctg \frac{\omega}{k} > 0$. Ponieważ $-Ae^{-kt} \sqrt{\omega^2 + k^2} < 0$ ($A > 0$) wystarczy zbadać znak

funkcji $h: (0, +\infty) \ni t \rightarrow \sin(\omega t - \varphi) \in \mathbf{R}$. Otóż korzystając z wykresu sinusoidy otrzymujemy:

$x'(t) < 0$, jeżeli $2n\pi < \omega t - \varphi < (2n+1)\pi$, $n=0, 1, 2, \dots$, tzn. funkcja x jest malejąca dla

$\frac{1}{\omega}(2n\pi + \varphi) < t < \frac{1}{\omega}[(2n+1)\pi + \varphi]$, $n=0, 1, 2, \dots$. Analogicznie $x'(t) > 0$ dla

$\frac{1}{\omega}[(2n-1)\pi + \varphi] < t < \frac{1}{\omega}(2n\pi + \varphi)$, $n=1, 2, \dots$, czyli funkcja x jest rosnąca dla

$\frac{1}{\omega}[(2n-1)\pi + \varphi] < t \leq \frac{1}{\omega}(2n\pi + \varphi)$, $n=1, 2, \dots$

Uwaga. $x'(t) = 0$ dla $t = \frac{1}{\omega}(n\pi + \varphi)$, $n=0, 1, 2, \dots$

23.7. Wykazać prawdziwość nierówności:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 1 + \frac{x^2}{2} \text{ dla } -\infty < x < +\infty.$$

Rozwiązanie. Korzystamy z twierdzenia T_5 . Weźmy funkcję pomocniczą określoną wzorem $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1 - \frac{1}{2}x^2$, $x \in \mathbf{R}$ oraz $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - 2x - e^{-x})$, $x \in \mathbf{R}$. Interesuje nas znak funkcji $g: \mathbf{R} \ni x \rightarrow (e^x - 2x - e^{-x}) \in \mathbf{R}$. Zatem

$$g'(x) = e^x - 2 + e^{-x} = (e^{x/2} - e^{-x/2})^2 \geq 0 \text{ dla } x \in \mathbf{R} \Rightarrow g \text{ rosnąca na } \mathbf{R}.$$

Zatem $g(x) < g(0) = 0$ dla $x < 0$ oraz $g(x) > g(0) = 0$ dla $x > 0$. Wynika stąd, że dla $x < 0$ oraz dla $x > 0$

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 - \frac{x^2}{2} > f(0) = 0,$$

czyli

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 1 + \frac{x^2}{2} \quad \text{dla } x \in \mathbf{R}. \quad \square$$

23.8. Oszacować błąd wzoru przybliżonego

$$(a) \quad \sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3 \quad \text{dla } |x| \leq \frac{1}{2}.$$

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzoru (3) dla $n=5$. Otóż $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$, $f^{(4)}(0)=0$, $f^{(5)}(x)=\cos x$. Stąd

$$y = \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \cos \vartheta x,$$

czyli $\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$, przy czym błąd bezwzględny

$$\Delta = \left| \frac{x^5}{120} \right| |\cos \vartheta x| \leq \frac{|x^5|}{120} = \Delta_y.$$

Jeżeli $|x| \leq \frac{1}{2}$, to $|x^5| \leq \frac{1}{32}$, stąd otrzymujemy następujące oszacowanie błędu wzoru (a): $\Delta_y \leq \frac{1}{3840}$, gdzie Δ_y oznacza błąd maksymalny.

23.9. Obliczyć e z dokładnością do 10^{-5} .Rozwiązanie. Korzystamy ze wzorów (5) i (7) dla funkcji $f: \mathbf{R} \ni x \rightarrow e^x \in \mathbf{R}$:

$$(a) \quad e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

gdzie $\Delta = \frac{|x^n|}{n!} e^{\vartheta x}$, $0 < \vartheta < 1$. Dla $x > 0$ otrzymujemy następujące oszacowanie błędu Δ ,

$$\Delta = \frac{|x^n|}{n!} e^{\vartheta x} = \frac{x^n}{n!} e^{\vartheta x} < \frac{x^n}{n!} e^x = \Delta_y.$$

Stąd np. dla $x=1$ mamy

$$\Delta < \frac{1}{n!} e < \frac{3}{n!} = \Delta_y, \quad (e < 3).$$

Należy wziąć taką liczbę n , dla której zachodzi nierówność $\frac{3}{n!} \leq 10^{-5}$, tzn. $n=9$, ponieważ

$$\frac{3}{9!} = \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{1}{120960} < \frac{1}{100000} = 10^{-5}.$$

Ze wzoru (a) dla $x=1$ otrzymujemy

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} = 2,71828.$$

Zadania

23.10. Sprawdzić, że funkcje określone wzorami:

a) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$, $-1 \leq x \leq 2$; b) $g(x) = \ln \sin x$, $\frac{1}{6}\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$;
spełniają założenia twierdzenia Rolle'a.

23.11. Wykazać, że funkcje określone wzorami:

a) $f(x) = \ln x$, $1 \leq x \leq e$; b) $g(t) = \frac{2-t^2}{t^4}$, $-1 \leq t \leq 1$;

c) $p(w) = \begin{cases} w-1 & \text{dla } 1 \leq w < 3, \\ 0 & \text{dla } w = 3; \end{cases}$

d) $f(x) = |x|$, $-2 \leq x \leq 2$; e) $h(u) = \sqrt[3]{(u-2)^2}$, $0 \leq u \leq 4$,

nie spełniają założeń twierdzenia Rolle'a.

23.12. Nie znajdując pochodnej funkcji określonej wzorem $W(t) = (t+2)(t+1)t(t-3)$ wykazać, że równanie $W'(t) = 0$ ma dokładnie trzy pierwiastki rzeczywiste oraz znaleźć przedziały, w których one się znajdują.

23.13. Wykazać, że równanie $x^3 - 3x + c = 0$ nie może mieć dwóch różnych pierwiastków w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$.

23.14. Wykazać, że równanie $x^n + px + q = 0$ (p i q – parametry) nie może mieć więcej niż dwa pierwiastki rzeczywiste dla n parzystych i nie może mieć więcej niż trzy pierwiastki rzeczywiste dla n nieparzystych.

23.15. Sprawdzić, że funkcje określone wzorami:

a) $f(x) = x^4$, $0 \leq x \leq a$; b) $p(x) = \ln x$, $1 \leq x \leq e$,
spełniają założenia twierdzenia Lagrange'a.

23.16. Wykazać, że funkcja określona wzorem $f(t) = |\sin t| + 1$, $-\frac{1}{2}\pi \leq t \leq \pi$ nie spełnia założeń twierdzenia Lagrange'a.

23.17. Sprawdzić, że funkcje określone wzorami:

a) $f(x) = x^2$, $a \leq x \leq b$; b) $g(x) = \sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 4$; c) $k(x) = x - x^3$, $-2 \leq x \leq 1$;
d) $h(t) = \arctg t$, $0 \leq t \leq 1$; e) $g(v) = \ln v$, $1 \leq v \leq 2$,

spełniają założenia twierdzenia Lagrange'a oraz znaleźć liczbę c występującą w tezie twierdzenia.

23.18. Na łuku krzywej o równaniu $y = f(x) = x^3 - x^2 + 1$, którego końce mają odcięte $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, znaleźć punkt, w którym styczna do krzywej jest równoległa do cięciwy łączącej końce łuku.

23.19. Wielomian $g(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ przedstawić jako sumę potęg dwumianu $x - 4$.

23.20. Wielomian $f(x) = x^{10} - 3x^5 + 1$ przedstawić jako sumę potęg dwumianu $x - 1$.

23.21. Napisać wzór Taylora (jeżeli $n=4$) dla funkcji określonej wzorem $f(x)=e^x$ w punkcie $x_0=-1$.

23.22. Napisać wzór Taylora (jeżeli $n=4$) dla funkcji określonej wzorem $f(x)=\frac{x}{x-1}$ w punkcie $x_0=2$.

23.23. Napisać wzór Taylora dla funkcji określonych wzorami:

a) $f(x)=1/x$ w punkcie $x_0=-1$; b) $g(t)=\sqrt{t}$ w punkcie $t_0=4$;

c) $k(x)=x^2 \sin x$ w punkcie $x_0=\frac{1}{2}\pi$.

23.24. Napisać wzór Maclaurina dla funkcji określonych wzorami:

a) $f(x)=\sin x$; b) $h(x)=\cos x$; c) $p(x)=(1+x)^x$, $|x|<1$; d) $g(x)=xe^x$.

23.25. Wykazać, że funkcje określone wzorami są stałe oraz znaleźć te stałe:

a) $f(x)=\arctg x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $-\infty < x < +\infty$;

b) $u(v)=\arccos \frac{5 \cos v + 2}{5 + 2 \cos v} - 2 \arctg \left(\sqrt{\frac{3}{7}} \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right) + 3$, $0 \leq v < \pi$;

c) $g(t)=\cos^2 t + \cos^2(t + \frac{1}{3}\pi) - \cos t \cos(t + \frac{1}{3}\pi)$, $-\infty < t < +\infty$.

23.26. Dane są funkcje f i g ciągle na przedziale X_p i różniczkowalne wewnątrz tego przedziału, przy czym $f'(x)=g'(x)$ w każdym punkcie wewnętrznym przedziału X_p . Wykazać, że $f(x)=g(x)+C$, gdzie C jest stałą.

23.27. Znaleźć przedziały monotoniczności funkcji określonych wzorami:

a) $m(z)=\frac{z^2-z+1}{z^2+z+1}$; b) $f(x)=x \ln x$; c) $f(t)=t^2 \ln t$;

d) $g(x)=x^2 e^{-x^2}$; e) $h(u)=2u^2 - \ln u$; f) $f(x)=x^x$;

g) $p(x)=x - 2 \sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$; h) $r(x)=x \sqrt{ax-x^2}$ ($a>0$).

23.28. Wykazać prawdziwość nierówności:

a) $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$, $x > 1$; b) $x > \ln(1+x)$, $x > 0$; c) $\ln x > 2 \frac{x-1}{x+1}$, $x > 1$;

d) $2x \arctg x \geq \ln(1+x^2)$; e) $\sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{12}$, $x > 0$.

23.29. Oszacować błędy bezwzględne wzorów przybliżonych:

a) $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$ dla $0 \leq x \leq 1$;

b) $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}$ dla $|x| \leq 0,1$; c) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ dla $0 \leq x \leq 1$.

23.30. Dla jakich x wzór przybliżony $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2$ można stosować z błędem $\Delta_1 = 0,0001$?

23.31. Stosując wzór przybliżony $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x) \Delta x$ obliczyć przybliżenia liczb: a) $\arcsin 0,54$, przyjmując $x_0 = 0,5$; b) $\log 11$, przyjmując $x_0 = 10$.

23.32. Obliczyć $1/\sqrt[4]{e}$ z błędem bezwzględnym mniejszym od 0,01.

23.33. Obliczyć $\cos 10^\circ$ z dokładnością do 0,001.

23.34. Obliczyć $\sin 18^\circ$ z dokładnością do 0,00001.

23.35. Obliczyć $\operatorname{tg} 40^\circ$ z dokładnością do 0,0001.

Odpowiedzi

23.12. $(-2, -1), (-1, 0), (0, 3)$.

23.17. a) $\frac{a+b}{2}$; b) $\frac{9}{4}$; c) -1 ; d) $\sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}$; e) $\frac{1}{\ln 2}$.

23.18. $P(\frac{1}{3}(1 + \sqrt{7}), \frac{1}{27}(25 + 4\sqrt{7}))$.

23.19. $g(x) = (x-4)^4 + 11(x-4)^3 + 37(x-4)^2 + 21(x-4) - 56$.

23.20. $f(x) = (x-1)^{10} + 10(x-1)^9 + 45(x-1)^8 + 120(x-1)^7 + 210(x-1)^6 + 249(x-1)^5 +$
 $+ 195(x-1)^4 + 90(x-1)^3 + 15(x-1)^2 - 5(x-1) - 1$.

23.21. $e^x = e^{-1} \left[2 + x + \frac{(x+1)^2}{2!} + \frac{(x+1)^3}{3!} + \frac{(x+1)^4}{4!} e^{\vartheta(x+1)} \right], \quad 0 < \vartheta < 1$.

23.22. $\frac{x}{x-1} = 2 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 + \frac{(x-2)^4}{[2 + \vartheta(x-2)]^5}, \quad 0 < \vartheta < 1$.

23.23. a) $f(x) = -1 - (x+1) - \dots - (x+1)^n + \frac{(-1)^{n+1}(x+1)^{n+1}}{[-1 + \vartheta(x+1)]^{n+2}}, \quad 0 < \vartheta < 1$;

b) $g(t) = 2 + \frac{1}{4}(t-4) - \frac{1}{64}(t-4)^2 + \frac{1}{512}(t-4)^3 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!(t-4)^{n-1}}{n!(n-1)!2^{4n-2}} +$
 $+ \frac{(2n)!(t-4)^{n+1}}{2^{2n+1}n!(n+1)!\sqrt{[4 + \vartheta(t-4)]^{2n+1}}}, \quad 0 < \vartheta < 1$;

c) Wsk. Por. zadanie 21.32o.

$k(x) = \frac{1}{4}\pi^2 + (x - \frac{1}{2}\pi)\pi + \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\pi)^2(2 - \frac{1}{4}\pi^2) + \dots$
 $\dots + \frac{(x - \frac{1}{2}\pi)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \{ \frac{1}{4}\pi^2 \sin(\frac{1}{2}n\pi) + \pi(n-1) \sin[\frac{1}{2}\pi(n-1)] + (n-1)(n-2) \sin[\frac{1}{2}\pi(n-2)] \} +$
 $+ \frac{(x - \frac{1}{2}\pi)^n}{n!} k^{(n)}[\frac{1}{2}\pi + \vartheta(x - \frac{1}{2}\pi)],$

gdzie

$$k^{(n)}(t) = t^2 \sin\left(t + \frac{1}{2}n\pi\right) + 2nt \sin\left(t + \frac{n-1}{2}\pi\right) + (n-1)n \sin\left(t + \frac{n-2}{2}\pi\right), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

$$23.24. \text{ a) } \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + \frac{x^n}{n!} \sin\left[\vartheta x + \frac{1}{2}n\pi\right], \quad 0 < \vartheta < 1;$$

$$\text{b) } \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots + \frac{x^n}{n!} \cos\left[\vartheta x + \frac{1}{2}n\pi\right], \quad 0 < \vartheta < 1;$$

$$\text{c) } (1+x)^\vartheta = 1 + \binom{\vartheta}{1}x + \binom{\vartheta}{2}x^2 + \dots + \binom{\vartheta}{n-1}x^{n-1} + \binom{\vartheta}{n}(1+\vartheta x)^{\vartheta-n}, \quad 0 < \vartheta < 1;$$

$$\text{d) } xe^x = x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \dots + \frac{x^n}{(n-1)!} + \frac{x^{n+1}}{n!} (\vartheta x + n+1)e^{\vartheta x}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

$$23.25. \text{ a) } 0; \quad \text{b) } 3; \quad \text{c) } \frac{3}{4}.$$

23.26. Zastosować twierdzenie T_4 .23.27. a) Rosnąca na każdym z przedziałów $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$, malejąca na $(-1, 1)$;

$$\text{b) } \text{malejąca na } \left(0, \frac{1}{e}\right), \text{ rosnąca na } \left(\frac{1}{e}, +\infty\right);$$

$$\text{c) } \text{malejąca na } (0, e^{-1/2}), \text{ rosnąca na } (e^{-1/2}, +\infty);$$

d) rosnąca na każdym z przedziałów $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$, malejąca na każdym z przedziałów $(-1, 0)$, $(1, +\infty)$;

$$\text{e) } \text{malejąca na } (0, \frac{1}{2}), \text{ rosnąca na } (\frac{1}{2}, +\infty);$$

f) jak w przykładzie b);

$$\text{g) } \text{malejąca na każdym z przedziałów } \langle 0, \frac{1}{3}\pi \rangle, \langle \frac{5}{3}\pi, 2\pi \rangle, \text{ rosnąca na } (\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi);$$

$$\text{h) } \text{rosnąca na } \langle 0, \frac{3}{4}a \rangle, \text{ malejąca na } (\frac{3}{4}a, a).$$

$$23.29. \text{ a) } \Delta_y = \frac{1}{40}; \quad \text{b) } \Delta_y = 2 \cdot 10^{-6}; \quad \text{c) } \Delta_y = \frac{1}{16}.$$

$$23.30. |x| < 0,222.$$

$$23.31. \text{ a) } 0,57; \quad \text{b) } 1,0414.$$

$$23.32. 0,78.$$

$$23.33. 0,985.$$

$$23.34. 0,30902.$$

$$22.35. 0,8391.$$

§ 24. EKSTREMA FUNKCJI $f: R \supset X \rightarrow R$

W paragrafie tym będziemy mówili tylko o funkcjach ciągłych. Dana jest funkcja f określona na pewnym otoczeniu U punktu x_0 .

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 *minimum* [*maksimum*] *lokalne*, jeżeli istnieje takie sąsiedztwo $Q \subset U$ punktu x_0 , że

$$(1) \quad \bigwedge_{x \in Q} (f(x) > f(x_0) \quad [f(x) < f(x_0)])$$

Uwaga 1. Zastępując nierówności (1) nierównościami $f(x) \geq f(x_0)$ [$f(x) \leq f(x_0)$], otrzymujemy tzw. *minimum* [*maksimum*] *niewłaściwe*.

Uwaga 2. Minimum lub maksimum nazywamy *ekstremum*.

T₁. Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcji f w punkcie x_0 jest: $\alpha_1) f'(x_0) = 0$ w przypadku funkcji różniczkowalnej w punkcie x_0 , lub $\alpha_2)$ nie istnienie pochodnej w punkcie x_0 .

T₂. Jeżeli na sąsiedztwie $Q(x_0; \eta)$ istnieje pochodna f' , przy czym $f'(x) < 0$ [$f'(x) > 0$] dla $x_0 - \eta < x < x_0$ i $f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$] dla $x_0 < x < x_0 + \eta$, to funkcja f ma minimum [maksimum] w punkcie x_0 . Jeżeli pochodna f' ma stały znak na sąsiedztwie Q , to w punkcie x_0 nie ma ekstremum.

T₃. Jeżeli funkcja f ma na pewnym otoczeniu punktu x_0 drugą pochodną, przy czym $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) \neq 0$, to w przypadku $f''(x_0) < 0$ funkcja f ma maksimum w punkcie x_0 , a w przypadku $f''(x_0) > 0$ funkcja f ma minimum w punkcie x_0 .

T₄. Jeżeli $f \in C^0(X_p)$ i ma dokładnie jedno minimum [maksimum] na X_p , to jest to jednocześnie wartość najmniejsza [największa] funkcji f na X_p .

Jeżeli $f \in C^0(\langle a, b \rangle)$, to przyjmuje na tym przedziale wartość najmniejszą i największą.

Wartości te otrzymujemy następująco: znajdujemy punkty x_1, x_2, \dots przedziału (a, b) spełniające warunek konieczny istnienia ekstremum (por. T₁) oraz wartości funkcji w tych punktach $f(x_1), f(x_2), \dots$; najmniejsza z liczb: $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(b)$ [największa z liczb: $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(b)$] jest wartością najmniejszą [największą] funkcji f w przedziale $\langle a, b \rangle$.

Przykłady

24.1. Znaleźć ekstrema funkcji określonych wzorami

a) $p(z) = \sqrt[3]{2z^2 - z^3}$, $z \in \mathbf{R}$; b) $p(t) = (t-2)e^{1/(t-2)}$, $t \in \mathbf{R} - \{2\}$;

c) $x(t) = Ae^{-kt} \sin \omega t$, $t \in \langle 0, +\infty \rangle$ ($A > 0, k > 0, \omega > 0$); d) $k(x) = |x^2 - 1|e^{-|x|}$, $x \in \mathbf{R}$.

Rozwiązanie. Każda z funkcji przykładów a) - d) jest ciągła na swojej dziedzinie. Należy więc najpierw znaleźć punkty spełniające warunek konieczny (por. T₁), a następnie stosować twierdzenie T₂ lub twierdzenie T₃.

a) $p'(z) = \frac{4z - 3z^2}{3\sqrt[3]{z^4(2-z)^2}} = \frac{4-3z}{3\sqrt[3]{z(2-z)^2}}$, $z \in \mathbf{R} - \{0, 2\}$, $p'(z) = 0$, jeżeli $z_3 = \frac{4}{3}$. W punk-

tach $z_1 = 0$ i $z_2 = 2$ nie istnieją pochodne skończone funkcji p , natomiast sama funkcja p jest w tych punktach ciągła, zatem (por. T₁ α_2) punkty $z_1 = 0$ i $z_2 = 2$ spełniają warunek konieczny istnienia ekstremum. Korzystając z otrzymanej pochodnej p' sporządzamy tabelkę

z	0	$\frac{4}{3}$	2
$p'(z)$	-	+	-

z której wynika, że w punkcie $z=0$ jest minimum równe $y_{\min} = p(0) = 0$, natomiast w punkcie $z = \frac{4}{3}$ funkcja p ma maksimum równe $y_{\max} = p(\frac{4}{3}) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$ oraz że nie ma ekstremum w punkcie $z = 2$.

b) $p'(t) = e^{1/(t-2)} \frac{t-3}{t-2}$, $t \in \mathbb{R} - \{2\}$, $p'(t) = 0$, jeżeli $t = 3$. Ponieważ punkt $t = 2$ nie należy do dziedziny funkcji p , więc ekstremum może być jedynie w punkcie $t = 3$. Ale dla $t < 3$, $p'(t) < 0$ oraz dla $t > 3$, $p'(t) > 0$, czyli w punkcie $t = 3$ jest minimum równe $y_{\min} = p(3) = e$.

c) $x'(t) = -Ae^{-kt} \sqrt{\omega^2 + k^2} \sin(\omega t - \varphi)$, $t \in \langle 0, +\infty \rangle$, gdzie $\varphi = \arctg \omega/k > 0$; $x'(t) = 0$, jeżeli $t_n = (n\pi + \varphi)/\omega$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (por. przykład 23.6b). Ekstrema mogą więc być jedynie w punktach $t_n = (n\pi + \varphi)/\omega$, $n = 0, 1, 2, \dots$ Z kolei korzystamy z twierdzenia T_3 . Otóż

$$\begin{aligned} x''(t) &= [-A \sqrt{\omega^2 + k^2} e^{-kt} \sin(\omega t - \varphi)]' = -A \sqrt{\omega^2 + k^2} [e^{-kt} \sin(\omega t - \varphi)]' = \\ &= -A(\omega^2 + k^2) e^{-kt} \cdot \left[\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \cos(\omega t - \varphi) - \frac{k}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \sin(\omega t - \varphi) \right] = \\ &= A(\omega^2 + k^2) e^{-kt} \sin(\omega t - 2\varphi), \end{aligned}$$

przy czym $g(t) = A(\omega^2 + k^2) e^{-kt} > 0$ dla $t \in \mathbb{R}$. Stąd

$$\begin{aligned} x''(t_n) &= g(t_n) \sin(\omega t_n - 2\varphi) = g(t_n) \sin(\varphi + n\pi - 2\varphi) = \\ &= g(t_n) (\sin n\pi \cos \varphi - \cos n\pi \sin \varphi) = -g(t_n) \sin \varphi \cos n\pi = \\ &= -g(t_n) \sin \varphi (-1)^n = g(t_n) \sin \varphi (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

czyli $x''(t_n) < 0$ dla $n = 0, 2, 4, \dots$ oraz $x''(t_n) > 0$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$ Zatem funkcja x ma maksima dla $t = t_{2n}$ oraz ma minima dla $t = t_{2n+1}$, gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \text{d) } k'(x) &= ((x^2 - 1) \operatorname{sgn}(x^2 - 1) e^{-x \operatorname{sgn} x})' = \\ &= \operatorname{sgn}(x^2 - 1) e^{-x \operatorname{sgn} x} (2x - \operatorname{sgn} x \cdot (x^2 - 1)) = \\ &= \begin{cases} e^x(x^2 + 2x - 1) & \text{dla } x \in (-\infty, -1), \\ -e^x(x^2 + 2x - 1) & \text{dla } x \in (-1, 0), \\ e^{-x}(x^2 - 2x - 1) & \text{dla } x \in (0, 1), \\ -e^{-x}(x^2 - 2x - 1) & \text{dla } x \in (1, +\infty). \end{cases} \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że

$$\begin{aligned} k'(-1^-) &= -2e^{-1} \neq k'(-1^+) = 2e^{-1}, & k'(0^-) &= 1 \neq k'(0^+) = -1, \\ k'(1^-) &= -2e^{-1} \neq k'(1^+) = 2e^{-1}, \end{aligned}$$

zatem punkty $-1, 0, 1$ spełniają warunek konieczny istnienia ekstremum, przy czym punkty wykresu $(-1, k(-1)), (0, k(0)), (1, k(1))$ są punktami kątowymi wykresu. Korzystając z T_2 wykazujemy, że

$$y_{\min} = k(-1) = k(1) = 0 \quad \text{oraz} \quad y_{\max} = k(0) = 1.$$

Z kolei, $k'(x) = 0$ dla $x \in (-\infty, -1)$ w punkcie $x = -1 - \sqrt{2}$, $k'(x) \neq 0$ dla $x \in (-1, 0)$, $k'(x) \neq 0$ dla $x \in (0, 1)$, $k'(x) = 0$ dla $x \in (1, +\infty)$ w punkcie $x = 1 + \sqrt{2}$. Korzystając z T_2 stwierdzamy, że $y_{\max} = k(-1 - \sqrt{2}) = k(1 + \sqrt{2})$.

24.2. Znaleźć najmniejsze i największe wartości funkcji określonych wzorami:

a) $f(x) = x^3 - 3x + 3$, $-3 \leq x \leq \frac{3}{2}$; b) $g(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$, $-2 \leq x \leq 5$;

c) $k(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t=0, \\ \frac{\sin t}{t} & \text{dla } -\frac{1}{2}\pi \leq t \leq \frac{1}{2}\pi \text{ i } t \neq 0. \end{cases}$

Rozwiązanie. Funkcje f i g są ciągłe na danych przedziałach, funkcja k jest również ciągła, ponieważ $\lim_{t \rightarrow 0} k(t) = 1 = k(0)$, zatem każda z nich przyjmuje wartość najmniejszą i największą na odpowiednim przedziale.

a) $f'(x) = 3x^2 - 3$ dla $-\infty < x < +\infty$; $f'(x) = 0$, jeżeli $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$, przy czym $-3 < x_{1,2} < \frac{3}{2}$. Zatem $f(-3) = -15$, $f(-1) = 5$, $f(1) = 1$, $f(\frac{3}{2}) = \frac{15}{8}$, czyli wartość najmniejsza funkcji f w przedziale $\langle -3, \frac{3}{2} \rangle$ równa się -15 , a wartość największa 5 .

b) $g'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{12x - 3x^2}{\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2}} = \frac{4-x}{\sqrt[3]{x(6-x)^2}}$ dla $x \neq 0$; $g'(x) = 0$, jeżeli $x = 4$. W punkcie $x = 0$ nie istnieje skończona pochodna funkcji g , zatem spełnia on warunek konieczny istnienia ekstremum, czyli $g(-2) = \sqrt[3]{32}$, $g(0) = 0$, $g(4) = \sqrt[3]{32}$, $g(5) = \sqrt[3]{25}$. A więc wartość najmniejsza równa się 0 , a wartość największa równa się $2\sqrt[3]{4}$.

c) $k'(t) = (t \cos t - \sin t)/t^2$ dla $t \neq 0$; $k'(t) = 0$, jeżeli $t \cos t - \sin t = 0$, czyli $\operatorname{tg} t = t$. Ale dla punktów przedziału $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ różnych od 0 mamy $\operatorname{tg} t \neq t$, czyli $k'(t) \neq 0$. W punkcie $t = 0$ pochodna k' nie istnieje, stąd $k(-\frac{1}{2}\pi) = 3/\pi$, $k(0) = 1$, $k(\frac{1}{2}\pi) = 3\sqrt{3}/2\pi$. Zatem wartość najmniejsza równa się $3\sqrt{3}/2\pi$, a wartość największa równa się 1 .

24.3. Na półkuli o promieniu R opisać stożek obrotowy o najmniejszej objętości. Zakładamy przy tym, że podstawy półkuli i stożka leżą w jednej płaszczyźnie i są współśrodkowe.

Rozwiązanie. Objętość stożka wyrazimy za pomocą kąta α (rys. 24.1). Mianowicie, $r = \frac{R}{\cos \alpha}$, $h = \frac{R}{\sin \alpha}$, stąd

$$V = V(\alpha) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^3}{\cos^2 \alpha \sin \alpha}, \quad \alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi).$$

Objętość V będzie najmniejsza wtedy, jeżeli funkcja określona wzorem $h(\alpha) = \cos^2 \alpha \sin \alpha$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ będzie miała wartość największą na przedziale $(0, \frac{1}{2}\pi)$. Zatem, $h'(\alpha) = 2 \cos^3 \alpha (\frac{1}{2} - \operatorname{tg}^2 \alpha)$, $h'(\alpha) = 0$, jeżeli $\operatorname{tg} \alpha_1 = 1/\sqrt{2}$. Ale funkcja h na przedziale domkniętym $\langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$ przyjmuje wartość największą równą największej z liczb: $h(0) = 0$, $h(\frac{1}{2}\pi) = 0$, $h(\alpha_1)$ będąca jednocześnie największą wartością funkcji h w przedziale $(0, \frac{1}{2}\pi)$. Zatem wymiary stożka o najmniejszej objętości:

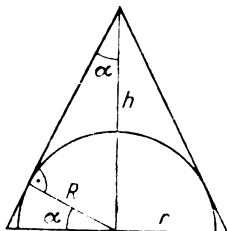
$$r = \frac{R}{\cos \alpha_1}, \quad h = \frac{R}{\sin \alpha_1}.$$

Ale

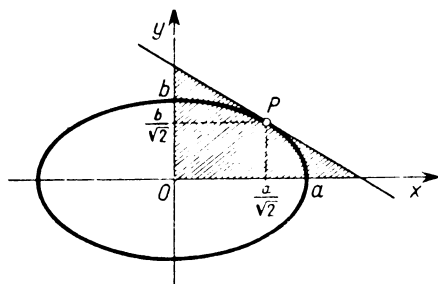
$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

oraz

$$\sin \alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{czyli} \quad r = \sqrt{\frac{2}{3}} R, \quad h = \sqrt{\frac{3}{3}} R.$$



Rys. 24.1



Rys. 24.2

24.4. W jakim punkcie elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ należy poprowadzić styczną do niej żeby pole trójkąta utworzonego przez tę styczną i osie układu było najmniejsze?

Rozwiązanie. Korzystając z 17.4 otrzymujemy

$$S = S(x_0) = \frac{a^3b}{2} \cdot \frac{1}{x_0 \sqrt{a^2 - x_0^2}}, \quad 0 < x_0 < a.$$

Pole trójkąta będzie wtedy najmniejsze, jeżeli funkcja określona wzorem $M(x_0) = x_0 \sqrt{a^2 - x_0^2}$ na przedziale $(0, a)$ będzie miała wartość największą. Zatem

$$M'(x_0) = \frac{-2(x_0 + \frac{1}{2}\sqrt{2}a)(x_0 - \frac{1}{2}\sqrt{2}a)}{\sqrt{a^2 - x_0^2}},$$

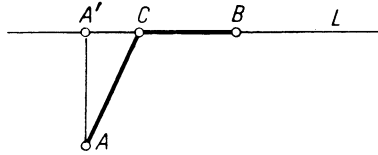
skąd $M'(x_0) = 0$, jeżeli $x_0 = a/\sqrt{2}$. Funkcja M na przedziale domkniętym $\langle 0, a \rangle$ przyjmuje wartość największą w punkcie $x_0 = a/\sqrt{2}$, będącą zarazem największą wartością funkcji na przedziale $(0, a)$. Wynika stąd, że pole trójkąta jest najmniejsze, jeżeli punkt styczności ma współrzędne

$$x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y_0 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2} = \frac{b}{\sqrt{2}} \quad (\text{por. rys. 24.2}).$$

24.5. Punkt A oddalony jest od prostej L o 3 km i od punktu $B \in L$ o 5 km (rys. 24.3). Piechur ma przebyć drogę z A do B ruchem jednostajnym po odcinkach AC i CB (rys. 24.3), przy czym jego prędkość na odcinku AC wynosi $v_1 = 1$ km/h, a na odcinku CB wynosi $v_2 = 4$ km/h. Znaleźć taki punkt $C \in L$, aby piechur przebył drogę z A do B w najkrótszym czasie.

Rozwiązanie. Łatwo stwierdzić, że punkt C musi leżeć na odcinku $A'B$ (rys. 24.3). Przyjmując zmienną $x = d(A', C)$ i korzystając ze wzoru $s = vt$, otrzymujemy

$$f(x) = \frac{4-x}{4} + \frac{\sqrt{9+x^2}}{1}, \quad \text{gdzie } 0 \leq x \leq 4$$



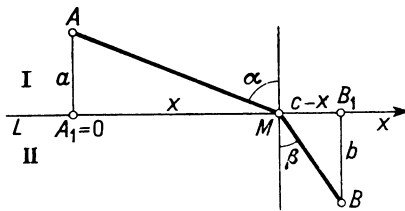
Rys. 24.3

($f(x)$ oznacza czas wyrażony w godzinach). Należy więc znaleźć najmniejszą wartość funkcji ciągłej f na przedziale domkniętym $\langle 0, 4 \rangle$. Otóż

$$f'(x) = -\frac{1}{4} + \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} \quad \text{dla } 0 \leq x \leq 4,$$

stąd $f'(x) = 0$, jeżeli $x = \sqrt{\frac{3}{5}}$, zatem $f(0) = 4$, $f(\sqrt{\frac{3}{5}}) = 1 + \frac{15}{4}\sqrt{\frac{3}{5}}$, $f(4) = 5$. Najmniejszą wartość przyjmuje funkcja w punkcie $x = \sqrt{\frac{3}{5}}$, czyli punkt C ma być oddalony od punktu A' o $\sqrt{\frac{3}{5}}$ km.

24.6. Płaszczyzna π podzielona jest prostą L na dwie półpłaszczyzny (dwa ośrodki) I i II . W ośrodku I punkt może poruszać się ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością v_1 , a w ośrodku II ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością v_2 . Znaleźć drogę, po której powinien poruszać się punkt, aby z danego punktu A ośrodka I dostać się do danego punktu B ośrodka II w najkrótszym czasie.



Rys. 24.4

Rozwiązanie. Niech $AA_1 \perp L$ i $BB_1 \perp L$ oraz $d(A, A_1) = a$, $d(B, B_1) = b$ i $d(A_1, B_1) = c$, przy czym na prostej L przyjmujemy układ Ox (rys. 24.4). Droga po odcinku AB nie musi być drogą najkrótszego czasu ($v_1 \neq v_2$), zatem rozpatrywana droga składa się z dwóch odcinków AM i MB , gdzie $M \in L$. Jako zmienną przyjmujemy współrzędną x punktu M , czyli $x = (AM)_x$ (miara wektora \overrightarrow{AM}), przy czym $-\infty < x < +\infty$. Czas t , którego najmniejszą wartość poszukujemy określony jest wzorem

$$t = f(x) = \frac{d(A, M)}{v_1} + \frac{d(M, B)}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Stąd

$$f'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (c-x)^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Znalezienie pierwiastków równania $f'(x)=0$ jest kłopotliwe, postępujemy więc następująco:

Znajdujemy

$$f''(x) = \frac{a^2}{v_1(a^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{b^2}{v_2[b^2 + (c-x)^2]^{3/2}} > 0 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R},$$

zatem funkcja f' jest rosnąca na \mathbb{R} , tzn. może mieć co najwyżej jeden pierwiastek. Ale

$$f'(0) = \frac{-c}{v_1 \sqrt{b^2 + c^2}} < 0 \wedge f'(c) = \frac{c}{v_1 \sqrt{a^2 + c^2}} > 0,$$

przy czym funkcja f' jest ciągła na każdym przedziale (istnieje f''). Stąd na mocy twierdzenia T₇ § 20 istnieje dokładnie jedna liczba $0 < x_0 < c$ taka, że $f'(x_0)=0$. Ponieważ $f''(x_0) > 0$, więc w punkcie x_0 funkcja f ma minimum. Poszukiwany punkt M leży więc między punktami A_1 i B_1 , przy czym jego współrzędna x_0 spełnia równanie

$$(a) \quad \frac{x_0}{v_1 \sqrt{a^2 + x_0^2}} = \frac{c-x_0}{v_2 \sqrt{b^2 + (c-x_0)^2}}.$$

Zauważmy, że równanie (a) można przykształcić następująco:

$$\frac{d(A_1, M)}{v_1 d(A, M)} = \frac{d(M, B_1)}{v_2 d(B, M)},$$

czyli

$$(a_1) \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Z równania (a₁) wynika, że w najkrótszym czasie punkt przebędzie drogę wtedy, gdy stosunek sinusów kątów α i β (rys. 24.4) będzie równy stosunkowi prędkości w ośrodkach I i II.

Wynik ten jest zgodny ze znanym prawem załamania światła i wobec tego załamanie to odbywa się w taki sposób, że promień światła przebiega drogę w najkrótszym czasie.

Zadania

24.7. Znaleźć ekstrema funkcji określonych wzorami:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$; b) $g(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$;

c) $k(t) = 6t^3 + 3t^2 + 2t - 5$; d) $p(z) = \frac{2}{1 + \cos^2 z}$;

e) $w(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$; f) $m(u) = \frac{u^4}{(u+1)^3}$; g) $h(x) = x^2 e^{-x^2/2}$;

$$\text{h) } g(v) = (1+v^2)e^{-v^2}; \quad \text{i) } f(x) = \frac{\ln^2 x}{x};$$

$$\text{j) } k(x) = (x-5)^2 \sqrt[3]{(x+1)^2}; \quad \text{k) } t(u) = \sqrt[3]{u^2} e^{-u};$$

$$\text{l) } h(z) = z^2 \ln z; \quad \text{ł) } w(x) = x^{2x}; \quad \text{m) } p(x) = |x| e^{-|x-1|};$$

$$\text{n) } k(u) = e^{|u^2+2u-3}|.$$

24.8. Znaleźć najmniejsze i największe wartości funkcji określonych wzorami:

a) $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ na przedziale $\langle -2, 2 \rangle$;

b) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ na przedziale $\langle 0, 4 \rangle$;

c) $h(t) = \sqrt{100-t^2}$ na przedziale $\langle -6, 8 \rangle$;

d) $k(u) = \sin 2u - u$ na przedziale $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$;

e) $g(x) = \arctg \frac{1-u}{1+u}$ na przedziale $\langle 0, 1 \rangle$;

f) $p(z) = \frac{\ln z}{\sqrt{z}}$ na przedziale $\langle 1, e^{8/3} \rangle$;

g) $f(t) = e^{2t-t^2}$ na przedziale $\langle 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}, 2 \rangle$;

h) $r(x) = |x^2 - 6x - 7|$ na przedziale $\langle 0, 9 \rangle$;

i) $t(u) = \left| \frac{\sin u}{2 + \cos u} \right| - \frac{\sqrt{3}}{3}$ na przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

24.9. Który z prostokątów o stałym polu S ma najmniejszy obwód?

24.10. Który z prostopadłościanów o podstawie kwadratowej i stałej sumie długości krawędzi ma największą objętość?

24.11. Dla jakiej liczby dodatniej x suma $x + \frac{1}{x}$ ma wartość najmniejszą?

24.12. Należy sporządzić skrzynkę prostopadłościenną z pokrywką. Objętość skrzynki ma wynosić 72 cm^3 , długości krawędzi podstawy mają być w stosunku $1 : 2$. Jakiej długości powinny być krawędzie, żeby powierzchnia całkowita skrzynki była najmniejsza?

24.13. W kulę o długości promienia R wpisać walec o największej objętości.

24.14. Jakie powinny być wymiary puszki (w kształcie walca) o stałej objętości V , aby jej powierzchnia całkowita była najmniejsza?

24.15. Trzeba sporządzić lejek w kształcie stożka obrotowego, którego tworząca ma mieć 20 cm długości. Jaka powinna być wysokość lejka, aby jego objętość była największa?

24.16. Który z trójkątów równoramiennych wpisanych w koło o długości promienia r ma największy obwód?

24.17. W trójkąt prostokątny o długościach przyprostokątnych równych a i b wpisano prostokąt, którego bok leży na przeciwprostokątnej trójkąta. Jakie powinny być wymiary prostokąta, żeby jego pole było największe?

24.18. Który ze stożków obrotowych opisanych na kuli o długości promienia R ma najmniejszą objętość?

24.19. Który z ostrosłupów prawidłowych o podstawie kwadratowej i stałej sumie długości wszystkich krawędzi równej k ma największą objętość?

24.20. Figura płaska F ma kształt podany na rysunku 24.5. Znaleźć:

- największe pole figury F przy stałym jej obwodzie k ;
- najmniejszy obwód figury F przy stałym jej polu S .

24.21. Wykazać, że namiot w kształcie stożka o danej pojemności ma najmniejszą powierzchnię (chodzi o powierzchnię boczną stożka), jeżeli jego wysokość jest $\sqrt{2}$ razy większa od promienia podstawy.

24.22. Znaleźć równanie prostej przechodzącej przez punkt $A(a, b)$ ($a > 0$, $b > 0$), która z dodatnimi półosiąmi układu Oxy tworzy trójkąt o najmniejszym polu.

24.23. W elipsę $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ wpisać prostokąt o największym polu.

24.24. Znaleźć elipsę o najmniejszym polu opisaną na prostokącie o długościach boków a_1 i b_1 .

24.25. Pień o przekroju kołowym ma średnicę o długości d . Trzeba obciosać go w taki sposób, aby otrzymać belkę o przekroju prostokątnym i o największej wytrzymałości (wytrzymałość belki prostokątnej jest proporcjonalna do iloczynu bh^2 , gdzie b jest podstawą przekroju belki, a h wysokością).

24.26. W odcinek paraboli $y^2 = 2px$ ograniczony prostą $x = 2a$, wpisać prostokąt o największym polu.

24.27. Na jakiej wysokości nad środkiem okrągłego stołu o długości promienia r należy zawiesić żarówkę, żeby brzeg stołu był najlepiej oświetlony?

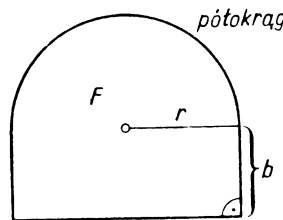
24.28. Pewna siła działająca wzdłuż drogi x wykonuje pracę określoną wzorem $L = L(x) = 1 - e^{-2x^2}$. Wyznaczyć, w którym miejscu drogi ($x > 0$) wartość siły $F = dL/dx$ jest największa.

24.29. Wykazać, że funkcja określona wzorem $y = \sqrt[n]{f(x)}$, $n \in \mathbb{N}$, ma wtedy i tylko wtedy ekstremum w punkcie x_0 , gdy funkcja f ma ekstremum w tym punkcie.

24.30. Wielkość siły F działającej przy przesunięciu ciała o ciężarze G po płaszczyźnie poziomej, określona jest wzorem

$$f = f(\varphi) = \frac{\mu G}{\cos \varphi + \mu \sin \varphi},$$

gdzie $\varphi \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$ oznacza kąt jaki tworzy siła z płaszczyzną poziomą oraz $\mu \in \langle 0, 1 \rangle$ jest danym współczynnikiem tarcia. Znaleźć kąt φ , dla którego wielkość siły f jest najmniejsza.



Rys. 24.5

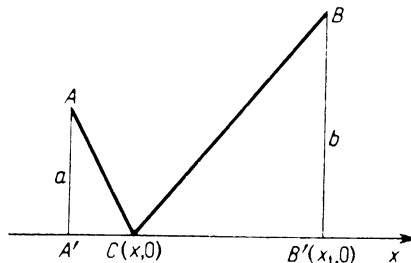
24.31. W punktach A i B , których odległość wynosi 6 m umieszczono źródła światła o natężeniach tworzących stosunek 8 : 1. Jaki punkt odcinka AB jest najświetniej oświetlony?

25.32. Lejek stożkowy, którego długość promienia podstawy wynosi r , a wysokość wynosi h , napełniono wodą. W lejek zanurzono kulę. Jaki powinien być promień kuli, żeby objętość wody usunięta zanurzoną częścią kuli była największa?

24.33. W n doświadczeniach otrzymujemy n wartości x_i , $i=1, 2, \dots, n$, badanej wielkości A . Często zastępuje się wartość A taką wartością x , dla której suma kwadratów jej różnic z liczbami x_i , $i=1, 2, \dots, n$, ma wartość najmniejszą. Znaleźć wartość x spełniającą ten warunek.

24.34. Do rzeki o szerokości 27 m wpada pod kątem prostym kanał szerokości 8 m. Jaka jest największa długość sztuki drewna, która może wpłynąć z kanału do rzeki?

24.35. Piechur ma przebyć ruchem jednostajnym drogę z punktu A do punktu B po łamanej ACB (rys. 24.6), gdzie a , b i x_1 są dane. Znaleźć taki punkt C , aby łamana ACB była najkrótsza.



Rys. 24.6

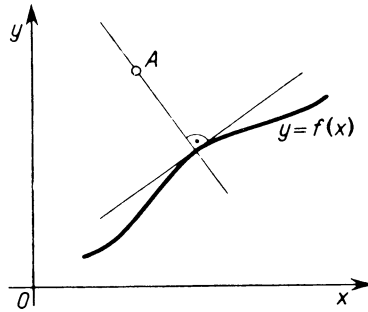
24.36. Koszt eksploatacji statku w ciągu godziny pływania wyraża się wzorem empirycznym $K(v) = a + bv^3$, gdzie a i b ⁽¹⁾ są stałymi dodatnimi, które powinny być obliczone dla każdego statku osobno, a v jest prędkością statku w węzłach (1 węzeł = 1,85 km/h). Przy jakiej prędkości statek przebędzie dowolną drogę przy najmniejszych kosztach?

24.37. Wydatki na opał na statku są proporcjonalne do sześciastu prędkości statku. Wiadomo, że przy prędkości 10 km/h wydatki na opał wynoszą 300 zł za godzinę, inne wydatki (związane z amortyzacją statku) wynoszą 480 zł za godzinę. Przy jakiej prędkości statku ogólna suma wydatków na 1 km będzie najmniejsza?

24.38. Punkty A , B i C nie leżą na jednej prostej, przy czym $\sphericalangle ABC = \alpha$ oraz odległość od A do B wynosi a km. W tej samej chwili wyrusza samochód z punktu A do punktu B z prędkością v_1 km/h oraz pociąg z punktu B do punktu C z prędkością v_2 km/h. W jakiej chwili (licząc od początku ruchu) odległość między samochodem i pociągiem będzie najmniejsza?

⁽¹⁾ Część kosztów a pochodzi od amortyzacji i kosztów utrzymania załogi, a koszt bv^3 zależy od kosztów paliwa.

24.39. W prostokątnym układzie współrzędnych Oxy dany jest punkt $A(a, b)$ i krzywa o równaniu $y=f(x)$. Wykazać, że odległość punktu A od zmiennego punktu $(x, f(x))$ może osiągnąć minimum tylko w kierunku normalnej do krzywej o równaniu $y=f(x)$ (rys. 24.7).



Rys. 24.7

Odpowiedzi

- 24.7.** a) $y_{\max} = f(1) = 0$, $y_{\min} = f(3) = -4$;
 b) $y_{\min} = g(x_1) \approx -0,76$, $y_{\max} = g(1) = 0$, $y_{\min} = g(x_2) \approx -0,05$,
 gdzie $x_1 = \frac{1}{8}(5 - \sqrt{13}) \approx 0,23$, $x_2 = \frac{1}{8}(5 + \sqrt{13}) \approx 1,43$;
 c) ekstremum nie ma; d) $y_{\min} = p(k\pi) = 1$, $y_{\max} = p(\frac{1}{2}\pi + k\pi) = 2$, $k \in \mathbb{C}$;
 e) $y_{\max} = w(-5) = -\frac{27}{2}$;
 f) $y_{\max} = m(-4) = -\frac{256}{27}$, $y_{\min} = m(0) = 0$; g) $y_{\max} = h(\mp\sqrt{2}) = \frac{2}{e}$, $y_{\min} = h(0) = 0$;
 h) $y_{\max} = g(0) = 1$, i) $y_{\min} = f(1) = 0$, $y_{\max} = f(e^2) = 4/e^2 \approx 0,541$;
 j) $y_{\max} = k(\frac{1}{2}) = \frac{81}{8} \sqrt[3]{18}$, $y_{\min} = k(-1) = 0$, $y_{\min} = k(5) = 0$;
 k) $y_{\min} = t(0) = 0$, $y_{\max} = t(\frac{2}{3}) = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} e^{-2/3} \approx 0,39$;
 l) $y_{\min} = h(e^{-1/2}) = -1/2e$; ł) $y_{\min} = w(e^{-1}) = 1/\sqrt{e^2}$;
 m) $y_{\max} = p(-1) = e^{-2} \approx 0,135$, $y_{\min} = p(0) = 0$, $y_{\max} = p(1) = 1$;
 n) $y_{\min} = k(-3) = 1$, $y_{\max} = k(-1) = e^4$, $y_{\min} = k(1) = 1$.
- 24.8.** a) 4 i 13; b) -1 i 0; c) 6 i 10; d) $-\frac{1}{2}\pi$ i $\frac{1}{2}\pi$;
 e) 0 i $\frac{1}{4}\pi$; f) 0 i $2/e$; g) 1 i e ; h) 0 i 20; i) $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ i 0.
- 24.9.** Kwadrat. **24.10.** Sześcian.
24.11. $x=1$ **24.12.** 3 cm, 6 cm i 4 cm.
24.13. $h_w = \frac{2}{3}\sqrt{3}R$, $r_w = \sqrt{\frac{2}{3}}R$. **24.14.** $r = \sqrt[3]{V/2\pi}$, $w = 2r$.
24.15. $h = 20/\sqrt{3}$ cm. **24.16.** Trójkąt równoboczny.
24.17. Boki prostokąta $d = ab/2c$, $e = c/2$, gdzie $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
24.18. $h_{\text{stożka}} = 4R$. **24.19.** Krawędź podstawy $a = \frac{1}{12}(5 - \sqrt{13})k$.
24.20. a) $r = b$, rys. 24.5; b) $r = b$, rys. 24.5. **24.22.** $x/a + y/b = 2$.
24.23. Boki prostokąta $\sqrt{2}a, \sqrt{2}b$.
24.24. Półosie elipsy $a = \frac{1}{2}\sqrt{2}a_1$, $b = \frac{1}{2}\sqrt{2}b_1$. **24.25.** $b = d/\sqrt{3}$.
24.26. Współrzędne wierzchołków prostokąta leżące na paraboli $(\frac{2}{3}a, \mp 2\sqrt{\frac{1}{3}pa})$.
24.27. $h = r/\sqrt{2}$. **24.28.** $F_{\max} = 2e^{-1/2} \approx 1,213$ dla $x = \frac{1}{2}$. **24.30.** $\varphi = \arctg \mu$.

- 24.31. Punkt M , gdzie $d(A, M) = 4$ m. 24.32. $\frac{rhk}{(k-r)(k+2r)}$, gdzie $k = \sqrt{h^2 + r^2}$.
- 24.33. $x = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$. 24.34. $13\sqrt{13}$ m. 24.35. $C\left(\frac{ax_1}{a+b}, 0\right)$.
- 24.36. $\sqrt[3]{\frac{a}{2b}}$ węzłów. 24.37. $v = 2 \cdot \sqrt[3]{100}$ km/h $\approx 9,3$ km/h.
- 24.38. Po upływie $\frac{a(v_1 + v_2 \cos \alpha)}{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha}$ h.

§ 25. FUNKCJE WYPUKŁE, PUNKTY PRZEGIĘCIA, WYRAŻENIA NIEOZNACZONE, ASYMPTOTY

25.1. Dana jest funkcja $f: X_p \rightarrow \mathbf{R}$, $f \in C^0(X_p)$. Z definicji podanej w § 17 dla $n=1$ otrzymujemy:

(1) (f wypukła [wklęsła] na X_p) \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{x_1, x_2 \in X_p} \bigwedge_{\lambda \in \langle 0, 1 \rangle} (f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) [\dots \geq \dots]).$$

Jeżeli w (1) zachodzi nierówność $< [>]$, to mówimy o *wypukłości [wklęsłości] ścisłej*. Jeżeli f jest wypukła [wklęsła], to będziemy mówili, że wykres funkcji f jest *wypukły [wklęsły]*.

T_1 . ($f \in D^1(X_p) \wedge (f$ wypukła [wklęsła] na $X_p)$) \Leftrightarrow (wykres funkcji f leży całkowicie nad [pod] dowolną styczną lub na dowolnej stycznej).

Korzystając z T_1 można dla funkcji $f \in D^1(X_p)$ podać definicję wypukłości [wklęsłości] za pomocą stycznej.

T_2 . ($f' \in D^1(X_p) \wedge (\bigwedge_{x \in \text{int } X_p} f''(x) \geq 0 [f''(x) \leq 0])$) \Leftrightarrow (f wypukła [wklęsła] na X_p). Zastępując symbol $\geq [\leq]$ symbolem $> [<]$ otrzymujemy wypukłość [wklęsłość] ścisłą.

Dana jest funkcja $f: X_p \rightarrow \mathbf{R}$, $f \in C^0(X_p)$, $x_0 \in \text{int } X_p$. Mówimy, że punkt $P_0(x_0, f(x_0))$ jest *punktem przegięcia* wykresu funkcji f (lub funkcji f), jeżeli istnieje takie otoczenie $U(x_0; \eta) \subset X_p$, że na otoczeniu lewostronnym $U^-(x_0; \eta)$ wykres funkcji f jest wypukły [wklęsły] i na otoczeniu prawostronnym $U^+(x_0; \eta)$ wykres funkcji f jest wklęsły [wypukły].

T_3 . Warunkiem koniecznym na to, aby $P_0(x_0, f(x_0))$ był punktem przegięcia wykresu funkcji f jest: $\alpha) f''(x_0) = 0$, $x_0 \in \text{int } X_p$ w przypadku, gdy $f''(x_0)$ istnieje, $\beta)$ nie istnieje $f''(x_0)$.

T_4 (warunek wystarczający). Jeżeli istnieje takie sąsiedztwo $Q(x_0; \eta) \subset X_p$, że $(f' \in D^1(Q(x_0; \eta))) \wedge (\bigwedge_{x \in Q^-(x_0; \eta)} f''(x) < 0 [f''(x) > 0]) \wedge (\bigwedge_{x \in Q^+(x_0; \eta)} f''(x) > 0 [f''(x) < 0])$, to $P_0(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji f .

Uwaga. Jeżeli na sąsiedztwie $Q(x_0; \eta)$ f'' ma stały znak, to w x_0 nie istnieje punkt przegięcia.

25.2. Pojęcie wyrażenia nieoznaczonego wprowadza się w związku z obliczaniem granic funkcji w ich punktach nieciągłości. Otóż:

$\alpha)$ ilorzaz dwóch funkcji f/g w punkcie x_0 , gdy

$$\alpha_1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \vee$$

$$\vee \alpha_2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty \quad (1)$$

nazywamy wyrażeniem nieoznaczonym typu $\frac{0}{0}$ w przypadku α_1) i typu $\frac{\infty}{\infty}$ w przypadku α_2);

β) iloczyn dwóch funkcji fg w punkcie x_0 , gdy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$$

nazywamy wyrażeniem nieoznaczonym typu $0 \cdot \infty$;

γ) różnicę dwóch funkcji $f-g$ w punkcie x_0 , gdy

$$(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty) \vee (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty)$$

nazywamy wyrażeniem nieoznaczonym typu $\infty - \infty$;

δ) wyrażenie f^g w punkcie x_0 , gdy:

$$\delta_1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \vee$$

$$\vee \delta_2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty \vee$$

$$\vee \delta_3) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$

nazywamy wyrażeniem nieoznaczonym: typu 0^0 w przypadku δ_1), typu 1^∞ w przypadku δ_2), typu ∞^0 w przypadku δ_3). W każdym z wymienionych przypadków punkt x_0 może być $+\infty$ lub $-\infty$ oraz rozpatrywane granice mogą być granicami jednostronnymi w punkcie x_0 .

Przy obliczaniu granic nieoznaczoności typów $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$ stosujemy twierdzenie (regułę de L'Hospitala).

T_5 . Jeżeli funkcje f i g określone na pewnym sąsiedztwie $Q(x_0; \eta)$ spełniają założenia:

$$\beta_1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty],$$

$$\beta_2) f, g \in D^1(Q(x_0; \eta)),$$

$$\beta_3) \bigwedge_{x \in Q(x_0; \eta)} (g'(x) \neq 0),$$

$$\beta_4) \text{ istnieje granica } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ (skończona lub nieskończona),}$$

to istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ (odpowiednio skończona lub nieskończona), przy czym

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \left[\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \right].$$

Uwaga 2. Twierdzenie T_5 z odpowiednio zmienionymi założeniami jest również prawdziwe w przypadku, gdy $x \rightarrow \infty$ oraz w przypadku granic jednostronnych w punkcie x_0 .

(1) Przyjmujemy tu umowę, że symbol ∞ oznacza $+\infty$ lub $-\infty$.

Nieoznaczoności typów $0 \cdot \infty$ i $\infty - \infty$ sprowadzamy do nieoznaczoności typu $\frac{0}{0}$ względnie $\frac{\infty}{\infty}$, stosując przekształcenia

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \vee f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

dla typu $0 \cdot \infty$ i przekształcenie

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$$

dla typu $\infty - \infty$.

Nieoznaczoności typów: 0^0 , 1^∞ , ∞^0 sprowadzamy do nieoznaczoności typu $0 \cdot \infty$ stosując przekształcenie

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

oraz korzystając z twierdzenia T₃ § 20.

25.3. Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ [$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$], to prostą $x = x_0$ nazywamy *asymptotą pionową lewostronną* [*prawystronną*] wykresu funkcji f . Jeżeli prosta $x = x_0$ jest jednocześnie asymptotą pionową lewostronną i prawostronną, to nazywamy ją *asymptotą obustronną*. Jeżeli istnieją granice

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \left[m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \right] \wedge n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) \quad \left[n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) \right],$$

to prostą $L: y = mx + n$ nazywamy *asymptotą ukośną* dla $x \rightarrow -\infty$ [dla $x \rightarrow +\infty$] wykresu funkcji f .

Jeżeli prosta L jest jednocześnie asymptotą ukośną dla $x \rightarrow -\infty \wedge$ dla $x \rightarrow +\infty$, to nazywamy ją *asymptotą ukośną*.

Przykłady

25.1. Udowodnić twierdzenie: jeżeli $f: X_p \rightarrow Y \subset \mathbb{R} \wedge f^{-1}: Y \rightarrow X_p$ są funkcjami wzajemnie odwrotnymi, to (f wypukła na $X_p \wedge f$ rosnąca na X_p) \Leftrightarrow (f^{-1} wklęsła na $Y \wedge f^{-1}$ rosnąca na Y).

Dowód \Rightarrow : Niech $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$, gdzie $x_1, x_2 \in X_p$ są dowolne. Z (1) otrzymujemy:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2,$$

więc (funkcja f^{-1} jest rosnąca, por. zadanie 18. 16)

$$f^{-1}(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \geq f^{-1}(f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)) = \lambda f^{-1}(y_1) + (1-\lambda)f^{-1}(y_2) \Rightarrow f^{-1}$$

wklęsła na Y . Podobnie przebiega dowód warunku wystarczającego (\Leftarrow). \square

25.2. Udowodnić twierdzenie: funkcja $f: X_p \rightarrow \mathbf{R}$ wypukła na X_p i różna od stałej na X_p nie może przyjmować wartości największej wewnątrz X_p .

Dowód nie wprost. Niech $f(x_0)$, $x_0 \in \text{int } X_p$ będzie wartością największą funkcji f na X_p . Wynika stąd, że istnieje przedział $(x_1, x_2) \subset X_p \wedge x_0 \in (x_1, x_2) \wedge x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $\lambda \in (0, 1)$ oraz

$$(a) \quad f(x_1) < f(x_0) \wedge f(x_2) < f(x_0).$$

Mnożąc pierwszą nierówność z (a) przez λ , drugą przez $(1-\lambda)$ i dodając te nierówności stronami, otrzymujemy

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) < f(x_0) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2),$$

co przeczy założeniu o wypukłości f . \square

25.3. Znaleźć punkty przegięcia wykresów funkcji określonych wzorami:

a) $h(x) = \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 - x + 1$; b) $p(z) = \sqrt[3]{2z^2 - z^3}$;

c) $k(t) = (t-2)e^{1/(t-2)}$; d) $x(t) = \sqrt{t} \ln t$; e) $m(v) = \frac{\cos v}{\cos 2v}$;

f) $x(t) = Ae^{-kt} \sin \omega t$, $t \geq 0$ ($A > 0$, $k > 0$, $\omega > 0$).

Rozwiązanie. Korzystamy z T_3 i T_4 .

a) Znajdujemy punkty spełniające warunek konieczny (twierdzenie T_3). Otóż

$$h''(x) = 3x^2 - 4 = 3\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \quad x \in \mathbf{R},$$

$h''(x) = 0$, jeżeli $x_{1,2} = \mp \frac{2}{\sqrt{3}} \approx \mp 1,15$; tzn. punkty przegięcia wykresu funkcji h mogą istnieć jedynie w punktach $x_{1,2}$. Z kolei badając znak funkcji h'' na sąsiedztwach punktów $x_{1/2}$ wnosimy, że wykres funkcji h ma punkty przegięcia:

$$P_1\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, h\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right)\right) = P_1\left(\frac{-2}{\sqrt{3}} \approx -1,15, h\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right) \approx -0,07\right),$$

$$P_2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, h\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right) = P_2\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,15, h\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \approx -2,38\right).$$

Uwaga. Można mówić o dwóch rodzajach punktów przegięcia. Mianowicie, gdy druga pochodna zmienia znak z $+$ na $-$ [z na $+$], czyli gdy wykres funkcji h zmienia się z wypukłego na wklęsły, np. punkt P_1 [z wklęsłego na wypukły np. punkt P_2].

b) $p'(z) = \frac{4-3z}{3\sqrt[3]{z(2-z)^2}}$, $z \in \mathbf{R} - \{0, 2\}$, stąd

$$p''(z) = \frac{-8}{9z^{4/3}(2-z)^{5/3}} \neq 0, \quad z \in \mathbf{R} - \{0, 2\}.$$

Punkty $z=0$ i $z=2$, w których funkcja p jest ciągła spełniają warunek konieczny istnienia punktu przegięcia (por. $T_3\beta$), przy czym jeżeli $z < 0$, to $p''(z) < 0$, i jeżeli $z > 0$ (lokalnie).

to $p''(z) < 0$ oraz jeżeli $z < 2$ (lokalnie), to $p''(z) < 0$ i jeżeli $z > 2$, to $p''(z) > 0$. A więc funkcja p ma punkt przegięcia $P(2, 0)$, natomiast dla $z=0$ funkcja p nie ma punktu przegięcia.

$$c) k'(t) = e^{1/(t-2)} \frac{t-3}{t-2}, \quad t \in \mathbb{R} - \{2\}, \text{ stąd}$$

$$k''(t) = e^{1/(t-2)} \frac{1}{(t-2)^3} \neq 0, \quad t \in \mathbb{R} - \{2\}.$$

Zatem w żadnym punkcie nie jest spełniony warunek konieczny istnienia punktu przegięcia, czyli funkcja k nie ma punktów przegięcia.

$$d) x'(t) = \frac{1}{2} t^{-1/2} (\ln t + 2), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x''(t) = \frac{-1}{4} \cdot \frac{1}{t\sqrt{t}} \ln t, \quad t \in \mathbb{R}_+; \quad x''(t) = 0, \text{ jeżeli } t=1,$$

przy czym dla $0 < t < 1$, $x''(t) > 0$ i dla $t > 1$, $x''(t) < 0$. A więc funkcja x ma punkt przegięcia $P(1, 0)$.

e) Funkcja m jest określona i ciągła dla $v \neq \frac{1}{4}\pi + n \cdot \frac{1}{2}\pi$, $n \in \mathbb{C}$ (występujące w dalszym ciągu zadania zmienne n i k będą zawsze przebiegały zbiór liczb całkowitych \mathbb{C});

$$m'(v) = \frac{\sin v (1 + 2 \cos^2 v)}{\cos^2 2v} \quad \text{dla} \quad v \neq \frac{\pi}{4} + n \frac{\pi}{2},$$

$$m''(v) = \frac{4 \cos v}{\cos^3 2v} \left(\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2} - \sin^2 v \right) \left(\frac{2\sqrt{3}-3}{2} + \sin^2 v \right) \quad \text{dla} \quad v \neq \frac{\pi}{4} + n \frac{\pi}{2};$$

$m''(v) = 0$, jeżeli $v_n = \frac{1}{2}\pi + n\pi$, przy czym znak m'' jest taki sam jak znak $\frac{\cos v}{\cos 2v}$, ponieważ

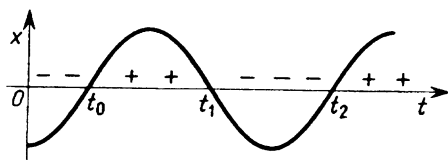
$$\frac{4}{\cos^2 2v} \left(\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2} - \sin^2 v \right) \left(\frac{2\sqrt{3}-3}{2} + \sin^2 v \right) > 0 \quad \text{dla} \quad v \neq \frac{\pi}{4} + n \frac{\pi}{2}.$$

Otóż (lokalnie) w sąsiedztwie punktów v_n mamy: jeżeli $v < v_n$, to $\cos v_n > 0$ dla $n=2k$ i $\cos v_n < 0$ dla $n=2k+1$ oraz jeżeli $v > v_n$, to $\cos v_n < 0$ dla $n=2k$ i $\cos v_n > 0$ dla $n=2k+1$, natomiast $\cos 2v_n < 0$ dla $v < v_n$ i dla $v > v_n$. Zatem funkcja m ma punkty przegięcia $P(v_n, m(v_n))$.

$$f) x'(t) = -Ae^{-kt} \sqrt{\omega^2 + k^2} \sin(\omega t - \varphi), \quad t \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\},$$

$$x''(t) = A(\omega^2 + k^2)e^{-kt} \sin(\omega t - 2\varphi), \quad t \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\},$$

gdzie $\varphi = \arctg(\omega/k) > 0$; $x''(t) = 0$, jeżeli $\sin(\omega t - 2\varphi) = 0$, czyli dla $t_n = (2\varphi + n\pi)/\omega$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (występujące w dalszym ciągu zadania zmienne n i m przebiegać będą zbiór liczb: $0, 1, 2, 3, \dots$). Ponieważ $A(\omega^2 + k^2)e^{-kt} > 0$ dla każdej wartości t , więc znak x''



Rys. 25.1

jest taki sam jak znak $\sin(\omega t - 2\varphi)$ (por. rys. 25.1). Otóż jeżeli $t < t_n$ (lokalnie), to $x''(t) < 0$ dla $n=0, 2, 4, \dots$ i $x''(t) > 0$ dla $n=1, 3, 5, \dots$ i jeżeli $t > t_n$ (lokalnie), to $x''(t) > 0$ dla $n=0, 2, 4, \dots$ i $x''(t) < 0$ dla $n=1, 3, 5, \dots$. Zatem funkcja x ma punkty przegięcia

$$P(t_{2m}, x(t_{2m})) \quad \text{i} \quad Q(t_{2m+1}, x(t_{2m+1})).$$

25.4. Wykazać, że jeżeli funkcja f ma drugą pochodną różną od zera na przedziale $\langle a, b \rangle$, to między dwoma jej punktami ekstremalnymi istnieje co najmniej jeden punkt przegięcia.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że funkcja f ma ekstrema w punktach x_1 i x_2 (np. $x_1 < x_2$). Zatem $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. Jeżeli przyjmiemy $g(x) = f'(x)$, to $g(x_1) = g(x_2) = 0$ oraz istnieje $g'(x) = f''(x)$ dla $a \leq x \leq b$. Funkcja g jest ciągła na przedziale domkniętym $\langle x_1, x_2 \rangle$, zatem przyjmuje na tym przedziale wartość najmniejszą i największą. Ponieważ $g(x_1) = g(x_2) = 0$ oraz istnieją punkty przedziału (x_1, x_2) , dla których $g(x) \neq 0$ (ponieważ $f'(x) \neq 0$), więc co najmniej jedną z wartości (najmniejszą względnie największą) funkcja przyjmuje wewnątrz przedziału (x_1, x_2) , np. dla $x = x_3$. W punkcie tym jest zatem ekstremum funkcji g , czyli $g'(x_3) = 0$ oraz pochodna $g'(x) = f''(x)$ zmienia znak na sąsiedztwie punktu x_3 . A więc punkt $P(x_3, f(x_3))$ jest punktem przegięcia funkcji f . \square

25.5. Znaleźć granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\operatorname{tg}(\beta x)}$ (α i β – parametry); b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - e^{-x+1} - 2x + 2}{x - \sin(x-1) - 1}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$; d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\sqrt{1-x}} - 1}{\sin(x-1)}$; e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1/x)}{\operatorname{arcctg} x}$.

Rozwiązanie. We wszystkich przykładach a) - e) mamy granice wyrażeń nieoznaczonych typu $\frac{0}{0}$. A więc funkcje występujące w przykładach a) - e) spełniają założenie β_1) twierdzenia T_5 . Łatwo sprawdzić, że założenia β_2) i β_3) są również spełnione. Aby więc można było zastosować wzór (2), wystarczy sprawdzić założenie β_4). Mamy

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin(\alpha x)]'}{[\operatorname{tg}(\beta x)]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \cos(\alpha x)}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} \cos(\alpha x) \cos^2(\beta x) = \frac{\alpha}{\beta} \lim_{x \rightarrow 0} k(x), \text{ gdzie}$$

$$\frac{\alpha}{\cos^2(\beta x)}$$

$k \in C^0(\mathbb{R})$.

Stąd $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = k(0) = \cos 0 \cos^2 0 = 1$, czyli $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin(\alpha x)]'}{[\operatorname{tg}(\beta x)]'} = \frac{\alpha}{\beta}$. A więc spełnione jest założenie β_4) twierdzenia T_5 , stąd (wzór (2))

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\operatorname{tg}(\beta x)} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(e^{x-1} - e^{-x+1} - 2x + 2)'}{[x - \sin(x-1) - 1]'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} + e^{-x+1} - 2}{1 - \cos(x-1)}.$$

Po prawej stronie otrzymaliśmy granicę wyrażenia nieoznaczonego typu $\frac{0}{0}$, stosujemy więc jeszcze raz twierdzenie T_5 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(e^{x-1} + e^{-x+1} - 2)'}{[1 - \cos(x-1)]'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - e^{-x+1}}{\sin(x-1)} \left[\frac{0}{0} \right].$$

Umawiamy się, że symbol $\left[\frac{0}{0} \right]$ (lub $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$) będzie oznaczać, że występująca bezpośrednio przed nim granica jest granicą wyrażenia nieoznaczonego typu $\frac{0}{0}$ (lub $\frac{\infty}{\infty}$). Stosujemy zatem trzeci raz twierdzenie T_5 ,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[e^{x-1} - e^{-x+1}]'}{[\sin(x-1)]'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} + e^{-x+1}}{\cos(x-1)} = \frac{e^{1-1} + e^{-1+1}}{\cos(1-1)} = \frac{2}{1} = 2;$$

więc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - e^{-x+1}}{\sin(x-1)} = 2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} + e^{-x+1} - 2}{1 - \cos(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - e^{-x+1} - 2x + 2}{x - \sin(x-1) - 1}.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln(x+1)]'}{[\sqrt{x}]'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = \frac{2\sqrt{0}}{0+1} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(e^{\sqrt{1-x}} - 1)'}{[\sin(x-1)]'} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{\sqrt{1-x}} \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{\cos(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{-e^{\sqrt{1-x}}}{2\cos(x-1)} \right] = \\ &= +\infty \frac{-1}{2} = -\infty = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{\sqrt{1-x}} - 1}{\sin(x-1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sin \frac{1}{x}\right)'}{(\text{arc ctg } x)'} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos \frac{1}{x} \left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\frac{-1}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2+1}{x^2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\cos \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \right] = 1 \cdot 1 = 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\text{arc ctg } x}, \end{aligned}$$

25.6. Znaleźć granice:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\text{ctg } x}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x^2}}{\text{ctg } x}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-1/x}}{\text{ctg } x}; \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}}.$$

Rozwiązanie. We wszystkich przykładach a) - d) mamy granice wyrażeń nieoznaczonych typu $\frac{\infty}{\infty}$, stosujemy więc twierdzenie T₅ (wzór (2)):

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x} \sin x \right) = -1 \cdot 0 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(e^{1/x^2})'}{(\operatorname{ctg} x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x^2} \cdot \frac{-2}{x^3}}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^{1/x^2} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x} \right) = -\infty = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x^2}}{\operatorname{ctg} x}.$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(e^{-1/x})'}{(\operatorname{ctg} x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-1/x} \frac{1}{x^2}}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^{-1/x} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = -\infty = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-1/x}}{\operatorname{ctg} x}.$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)'}{(e^{x^2})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}}.$$

25.7. Znaleźć granice:

a) $\lim_{t \rightarrow 0^+} (\sqrt{t} \ln t)$; b) $\lim_{u \rightarrow 2^+} [(u-2)e^{1/(u-2)}]$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\pi)$;

d) $\lim_{z \rightarrow +\infty} [(z-2)e^{1/(z-2)} - z]$; e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+b)e^{1/x} - x]$.

Rozwiązanie. W przykładach a) - c) mamy granice wyrażeń nieoznaczonych typu $0 \cdot \infty$, w pozostałych przykładach granice wyrażeń nieoznaczonych typu $\infty - \infty$. W każdym więc z przykładów należy najpierw przekształcić funkcję w taki sposób, aby otrzymać granicę wyrażenia nieoznaczonego typu $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$, a następnie stosować twierdzenie T₅.

a) $\lim_{t \rightarrow 0^+} (\sqrt{t} \ln t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{t^{-\frac{1}{2}}} \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. A więc

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(\ln t)'}{(t^{-1/2})'} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1/t}{-\frac{1}{2}t^{-3/2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} (-2\sqrt{t}) = 0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\sqrt{t} \ln t).$$

b) $\lim_{u \rightarrow 2^+} (u-2)e^{1/(u-2)} = \lim_{[0 \cdot \infty] \ u \rightarrow 2^+} \frac{e^{1/(u-2)}}{\frac{1}{u-2}} \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. A więc

$$\lim_{u \rightarrow 2^+} \frac{(e^{1/(u-2)})'}{\left(\frac{1}{u-2}\right)'} = \lim_{u \rightarrow 2^+} \frac{e^{1/(u-2)} \frac{-1}{(u-2)^2}}{\frac{-1}{(u-2)^2}} = \lim_{u \rightarrow 2^+} e^{1/(u-2)} = +\infty = \lim_{u \rightarrow 2^+} [(u-2)e^{1/(u-2)}].$$

Uwaga. Symbol $[0 \cdot \infty]$ pod znakiem równości oznacza, że po lewej stronie znaku równości występuje granica wyrażenia nieoznaczonego typu $0 \cdot \infty$.

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\pi) = \lim_{[\infty \cdot 0]} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\pi}{\frac{1}{x}} \left[\frac{0}{0} \right]. \text{ Stąd}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\pi)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = -1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\pi).$$

d) Podstawiając $z-2=1/y$ oraz korzystając z twierdzenia T_3 § 20, kolejno otrzymujemy:

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} y(z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{z-2} = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{y} e^y - \frac{1}{y} - 2 \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^y - 1}{y} - 2 \right) = -1 = \lim_{z \rightarrow +\infty} [(z-2)e^{1/(z-2)} - z].$$

Podobnie można wykazać, że $\lim_{z \rightarrow -\infty} [(z-2)e^{1/(z-2)} - z] = -1$.

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+b)e^{1/x} - x] &= \lim_{[\infty - \infty]} \left\{ x \left[\left(1 + \frac{b}{x}\right) e^{1/x} - 1 \right] \right\}_{[0 \cdot \infty]} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{b}{x}\right) e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} \left[\frac{0}{0} \right]. \end{aligned}$$

A więc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left[\left(1 + \frac{b}{x}\right) e^{1/x} - 1 \right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-b}{x^2} e^{1/x} + \left(1 + \frac{b}{x}\right) e^{1/x} \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^{1/x} \left(b + 1 + \frac{b}{x} \right) \right] = b + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+b)e^{1/x} - x]. \end{aligned}$$

Podobnie można wykazać, że $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(x+b)e^{1/x} - x] = b + 1$.

25.8. Znaleźć granice:

$$\text{a) } \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{1/t}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow a^-} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a} \right)^{(x-a)^2} \quad (a > 0).$$

Rozwiązanie. W każdym z przypadków a) - c) będziemy korzystali ze wzoru

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)} \quad (f(x) > 0)$$

oraz ze wzoru

$$\lim_{x \rightarrow x_0} e^{\varphi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}$$

(jeżeli istnieje skończona lub nieskończona granica $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$);

$$\text{a) } \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{1/t} = \lim_{[\infty^0] \ t \rightarrow +\infty} e^{(\ln t)/t}. \text{ Ale } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} \left[\frac{\infty}{\infty} \right]; \text{ zatem}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln t)'}{(t)'} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0,$$

czyli

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{1/t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(\ln t)/t} = e^0 = 1.$$

Podobnie można wykazać, że $\lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^{1/t} = 1$.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x} = \lim_{[0^0] \ x \rightarrow 0^+} e^{\sin x \ln \operatorname{ctg} x}. \text{ Ale } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x \ln \operatorname{ctg} x) = \lim_{[0 \cdot \infty] \ x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \operatorname{ctg} x}{\frac{1}{\sin x}} \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

Stąd

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln \operatorname{ctg} x)'}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg} x \frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x \ln \operatorname{ctg} x),$$

czyli $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x} = e^0 = 1$.

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow a^-} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}\right)^{(x-a)^2} = \lim_{[\infty^0] \ x \rightarrow a^-} e^{(x-a)^2 \ln \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}. \text{ Ale}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \left[(x-a)^2 \ln \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a} \right] = \lim_{[0 \cdot \infty] \ x \rightarrow a^-} \frac{\ln \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}{\frac{1}{(x-a)^2}} \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

Stąd

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{\left(\ln \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}\right)'}{\left[\frac{1}{(x-a)^2}\right]'} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a} \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi x}{2a}} \frac{\pi}{2a}}{\frac{-2}{(x-a)^3}} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{\pi(x-a)^3}{-2a \sin \frac{\pi x}{a}} \left[\frac{0}{0} \right],$$

zatem

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{[\pi(x-a)^3]'}{\left[-2a \sin \frac{\pi x}{a}\right]} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{3\pi(x-a)^2}{-2a \cos \frac{\pi x}{a} \cdot \frac{\pi}{a}} = 0 = \lim_{x \rightarrow a^-} \left[(x-a)^2 \ln \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a} \right],$$

czyli $\lim_{x \rightarrow a^-} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a} \right)^{(x-a)^2} = e^0 = 1$.

25.9. Sprawdzić, że istnieje granica $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos x}{x}$ oraz że nie można jej znaleźć za pomocą twierdzenia T_5 .

Rozwiązanie. Funkcje określone wzorami $f(x) = x + \cos x$ i $g(x) = x$ spełniają założenia $\beta_1)$, $\beta_2)$ i $\beta_3)$ twierdzenia T_5 przy $x \rightarrow +\infty$, natomiast granica

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \cos x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sin x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \sin x)$$

nie istnieje, ponieważ nie istnieje granica $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$. Nie jest więc spełnione założenie $\beta_4)$ twierdzenia T_5 , zatem nie można go stosować. Ale

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\cos x}{x} \right) = 1,$$

ponieważ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \cos x \right) = 0$ ($\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ oraz $|\cos x| \leq 1$). Przykład powyższy wskazuje, że twierdzenie T_5 nie zawsze rozstrzyga o istnieniu granicy wyrażenia nieoznaczonego typu $\frac{\infty}{\infty}$.

25.10. Znaleźć asymptoty wykresów funkcji określonych wzorami:

a) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($n \geq 1$ i $a_n \neq 0$);

b) $g(t) = \frac{(t-2)^3}{t^2}$; c) $p(z) = \sqrt[3]{2z^2 - z^3}$;

d) $p(t) = (t-2)e^{1/(t-2)}$; e) $x(u) = \sqrt{u} \ln u$;

f) $g(x) = \arccos \frac{x-1}{2x-1}$; g) $h(u) = (u+b)e^{1/u}$.

Rozwiązanie. W każdym z przykładów a) - g) będziemy korzystali ze wzorów podanych w punkcie 25.3.

a) Ponieważ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, $f \in C^0(\mathbb{R})$, więc nie ma asymptot pionowych. Z kolei,

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 + \frac{a_0}{x} \right) = \operatorname{sgn} a_n (+\infty),$$

podobnie

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \operatorname{sgn} a_n(+\infty) & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \\ \operatorname{sgn} a_n(-\infty) & \text{dla } n \text{ parzystych,} \end{cases}$$

tzn. nie istnieją asymptoty ukośne wykresu funkcji f (wielomianu) dla $n > 1$.

Jeżeli $n = 1$, to asymptotą jest sama prosta $y = a_1x + a_0$, ponieważ

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_1x + a_0}{x} = a_1 \quad \text{i} \quad n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_1x + a_0 - a_1x) = a_0$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_1x + a_0}{x} = a_1 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_1x + a_0 - a_1x) = a_0.$$

b) $g(t) = \frac{(t-2)^3}{t^2}$. Poszukiwanie asymptot pionowych funkcji wymiernych $\frac{W_n}{G_m}$, gdzie W_n i G_m oznaczają wielomiany nie mające wspólnych dzielników, sprowadza się do znalezienia pierwiastków mianownika. Istotnie, jeżeli $G_m(x_0) = 0$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{W_n(x)}{G_m(x)} = \infty$ ($W_n(x_0) \neq 0$), czyli prosta $x = x_0$ jest asymptotą pionową obustronną. W przypadku funkcji g mamy; $t^2 = 0$ dla $t = 0$, stąd

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{(t-2)^3}{t^2} = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(t-2)^3}{t^2} = -\infty,$$

zatem istnieje asymptota pionowa obustronna o równaniu $t = 0$.

Z kolei poszukujemy asymptot ukośnych:

$$m = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(t-2)^3}{t^3} = 1, \quad n = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{(t-2)^3}{t^2} - t \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{-6t^2 + 12t - 8}{t^2} \right] = -6$$

oraz

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{g(t)}{t} = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} (g(t) - t) = -6.$$

Jest więc asymptota ukośna o równaniu $y = t - 6$.

c) Funkcja $p \in C^0(\mathbb{R})$, zatem nie ma asymptot pionowych;

$$m = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{2z^2 - z^3}}{z} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{2}{z} - 1} = -1,$$

$$n = \lim_{z \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{2z^2 - z^3} + z) = \lim_{[\infty - \infty]} \lim_{z \rightarrow +\infty} \left[z \left(1 + \sqrt[3]{\frac{2}{z} - 1} \right) \right]_{[10 \cdot \infty]} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt[3]{\frac{2}{z} - 1}}{\frac{1}{z}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

więc

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \sqrt[3]{\frac{2}{z} - 1}\right)'}{\left(\frac{1}{z}\right)'} &= \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-2}{z^2} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{2}{z} - 1\right)^{-2/3}}{\frac{-1}{z^2}} = \\ &= \frac{2}{3} \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{2}{z} - 1\right)^2}} = \frac{2}{3} = \lim_{z \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{2z^2 - z^3} + z) \end{aligned}$$

oraz

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{p(z)}{z} = -1 \quad \text{i} \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} (p(z) + z) = \frac{2}{3}.$$

Istnieje więc asymptota ukośna o równaniu $y = -z + \frac{2}{3}$.

d) Funkcja $p \in C^0(\mathbf{R} - \{2\})$, a więc granicę niewłaściwą może mieć jedynie w punkcie $t=2$. Jeżeli zatem istnieje asymptota pionowa, to jest nią prosta o równaniu $t=2$. Stąd

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} p(t) = \lim_{t \rightarrow 2^-} [(t-2)e^{1/(t-2)}] = 0 \quad (\lim_{t \rightarrow 2^-} e^{1/(t-2)} = 0),$$

czyli prosta $t=2$ nie jest asymptotą pionową lewostronną oraz (por. przykład 25.7b)

$$\lim_{t \rightarrow 2^+} p(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} [(t-2)e^{1/(t-2)}] = +\infty.$$

Zatem prosta $t=2$ jest asymptotą pionową prawostronną. Z kolei

$$m = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{p(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t-2}{t} e^{1/(t-2)} \right) = 1 \quad \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t-2}{t} = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{1/(t-2)} = 1 \right),$$

$$n = \lim_{t \rightarrow +\infty} [(t-2)e^{1/(t-2)} - t] = -1$$

oraz

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{p(t)}{t} = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} (p(t) - t) = -1$$

(por. przykład 25.7d), czyli istnieje asymptota ukośna o równaniu $y = t - 1$.

e) Funkcja $x \in C^0(\mathbf{R}_+)$, zatem może istnieć tylko jedna asymptota pionowa, a mianowicie asymptota pionowa prawostronna o równaniu $u=0$. Ale $\lim_{u \rightarrow 0^+} (\sqrt{u} \ln u) = 0$ (por. przykład 25.7a), czyli nie ma asymptoty pionowej. Asymptota ukośna może być tylko dla $u \rightarrow +\infty$. Zatem

$$m = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{u} \ln u}{u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{\sqrt{u}} \left[\frac{\infty}{\infty} \right];$$

stąd

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{(\ln u)'}{(\sqrt{u})'} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{u}}{\frac{1}{2\sqrt{u}}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{u}} = 0 = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{u} \ln u}{u}, \quad n = \lim_{u \rightarrow +\infty} (\sqrt{u} \ln u - 0) = +\infty,$$

a więc nie ma asymptoty ukośnej.

f) Funkcja $g \in C^0(X)$, gdzie $X = \left\{ x : \left| \frac{x-1}{2x-1} \right| \leq 1 \right\} = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty \right)$, nie istnieją więc asymptoty pionowe. Z kolei

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arccos \frac{x-1}{2x-1}}{x} = 0 \quad \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos \frac{x-1}{2x-1} = \frac{\pi}{3} \right),$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos \frac{x-1}{2x-1} = \frac{\pi}{3}$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = 0 \wedge \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{\pi}{3},$$

a więc istnieje asymptota pozioma ($m=0$) o równaniu $y = \frac{1}{3}\pi$.

g) Funkcja $h \in C^0(\mathbb{R} - \{0\})$, przy czym

$$\lim_{u \rightarrow 0^-} [(u+b)e^{1/u}] = 0, \quad \lim_{u \rightarrow 0^+} [(u+b)e^{1/u}] = \begin{cases} -\infty, & \text{jeżeli } b < 0, \\ +\infty, & \text{jeżeli } b > 0. \end{cases}$$

Wykres funkcji h ma więc asymptotę pionową prawostronną o równaniu $u=0$. Z kolei

$$m = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{(u+b)e^{1/u}}{u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{b}{u} \right) e^{1/u} \right] = 1.$$

Podobnie

$$n = \lim_{u \rightarrow +\infty} [(u+b)e^{1/u} - u] = b+1$$

(por. przykł. 25.7e) oraz $\lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{h(u)}{u} = 1$ i $\lim_{u \rightarrow -\infty} (h(u) - u) = b+1$. Zatem istnieje asymptota ukośna o równaniu $y = u + b + 1$.

Zadania

25.11. Podać interpretację geometryczną wypukłości [wklęsłości] funkcji.

25.12. Za pomocą definicji (1) sprawdzić, że:

a) funkcja liniowa $f: \mathbb{R} \ni x \rightarrow (ax+b) \in \mathbb{R}$ jest jednocześnie wypukła i wklęsła na \mathbb{R} ;

b) funkcja $g: \mathbb{R} \ni x \rightarrow (x^2+4) \in \mathbb{R}$ jest wypukła na \mathbb{R} ;

c) funkcja $h: \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \ni x \rightarrow (-x^3) \in \mathbb{R}$ jest wklęsła na $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

25.13. Wykazać, że wykresy funkcji określonych wzorami:

a) $f(x) = e^x$; b) $g(x) = x^4$; c) $h(t) = (1 + e^{-t})^3$;

d) $p(u) = e^{2u+3}(u^2 - u + \frac{1}{2})$; e) $m(x) = x^{3x}$;

f) $h(x) = x(\arcsin x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x$

są wypukłe na swoich dziedzinach.

25.14. Wykazać, że wykresy funkcji określonych wzorami:

a) $f(x) = \ln x$; b) $k(x) = \frac{-1}{x^2}$; c) $t(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$;

d) $h(t) = -t \ln t$; e) $p(u) = \ln(u^2 - 1)$

są wklęsłe na swoich dziedzinach.

25.15. Znaleźć przedziały wklęsłości i wypukłości wykresów funkcji określonych wzorami:

a) $f(x) = x^3 - 3x - 2$; b) $g(t) = \frac{t^3}{t^2 - 1}$;

c) $h(u) = u^2 e^{-u}$; d) $p(x) = (x-1)e^{1/(x-1)}$.

25.16. Czy iloczyn dwóch funkcji wypukłych jest zawsze funkcją wypukłą?

25.17. Wykazać, że definicję wypukłości (wzór (1)) można zapisać w postaci

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X_p} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x & f(x) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \geq 0, \quad \text{gdzie } x_1 < x_2 \wedge x \in \langle x_1, x_2 \rangle.$$

25.18. Dane są funkcje $f: X_p \rightarrow \mathbb{R}$, $g: f(X_p) \rightarrow \mathbb{R}$, $g \circ f: X_p \rightarrow \mathbb{R}$.

Wykazać, że:

a) $(f \text{ wypukła} \wedge g \text{ wypukła} \wedge g \text{ rosnąca}) \Rightarrow (g \circ f \text{ wypukła})$;

b) $(f \text{ wklęsła} \wedge g \text{ wypukła} \wedge g \text{ malejąca}) \Rightarrow (g \circ f \text{ wypukła})$;

c) $(f \text{ wklęsła} \wedge g \text{ wklęsła} \wedge g \text{ rosnąca}) \Rightarrow (g \circ f \text{ wklęsła})$;

d) $(f \text{ wypukła} \wedge g \text{ wklęsła} \wedge g \text{ malejąca}) \Rightarrow (g \circ f \text{ wklęsła})$.

25.19. Znaleźć punkty przegięcia krzywych o równaniach:

a) $g(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$; b) $W(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$;

c) $k(t) = \frac{t^3}{t^2 + 3a^2}$ ($a > 0$); d) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$;

e) $x(t) = \sqrt[3]{t^2} e^{-t}$; f) $h(z) = \ln(1 + z^2)$;

g) $m(x) = e^{\sin x}$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$; h) $p(r) = a - \sqrt[3]{r-b}$;

i) $p(t) = (t+1)^3 \sqrt[3]{t^2}$; j) $v(u) = \begin{cases} u \ln(u^2) & \text{dla } u \neq 0, \\ 0 & \text{dla } u = 0. \end{cases}$

25.20. Dla jakich wartości a i b punkt $A(1, 3)$ jest punktem przegięcia krzywej o równaniu $f(x) = ax^3 + bx^2$?

25.21. Wykazać, że krzywa o równaniu $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ ma trzy punkty przegięcia leżące na jednej prostej.

25.22. Wykazać, że punkty przegięcia krzywej o równaniu $f(x) = x \sin x$ leżą na krzywych o równaniach

$$g_{1,2}(x) = \frac{\mp 2x}{\sqrt{4+x^2}}.$$

25.23. Znaleźć granice:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}; \quad \text{b) } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - t - 1}{\cos t + \frac{1}{2}t^2 - 1}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a};$$

$$\text{d) } \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^{a\sqrt{u}} - 1}{\sqrt{\sin bu}} \quad (b > 0); \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{x}}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2}\pi}; \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x - \pi};$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2}\pi}; \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x-3}}{2^x}.$$

25.24. Znaleźć granice

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctgh} x}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1-x)}{\ln[\sin(1-x)]}; \quad \text{c) } \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{\ln(t-a)}{\ln(e^t - e^a)};$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^4 + x - 1}{x^4 + 1}; \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln x}; \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}}; \quad \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}.$$

25.25. Znaleźć granice:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^-} (x \operatorname{ctgh} x); \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x); \quad \text{c) } \lim_{z \rightarrow 1^-} [\ln z \ln(1-z)];$$

$$\text{d) } \lim_{t \rightarrow 0^+} (te^{1/t}); \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow -1^+} [(x+1)^2 \ln(x+1)]; \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} [x(\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x - \pi)];$$

$$\text{g) } \lim_{t \rightarrow +\infty} [(\pi - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t) \ln t]; \quad \text{h) } \lim_{v \rightarrow +\infty} [v(e^{1/v} - 1)]; \quad \text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right);$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right); \quad \text{k) } \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-1)e^{1/(x-1)} - x]; \quad \text{l) } \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+2)e^{1/x} - x].$$

25.26. Znaleźć granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^2}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/\ln(e^x - 1)}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(x+1)]^x$;

d) $\lim_{t \rightarrow 0^+} (\arcsin t)^{\sin t}$; e) $\lim_{x \rightarrow 2^-} (2-u)^{1/\ln(e^{2-u} - 1)}$;

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{1}{2}\pi + \arctg x)^{1/(x+1)}$; g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{e^{-x}}$; h) $\lim_{t \rightarrow 1} t^{1/(1-t)}$;

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x\right)^{1/x}$; j) $\lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\arctg(\pi x/2a)}$; k) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2-x)^{1/\sqrt{x-1}}$;

l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$; ł) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctg x\right)^{x^2}$; m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\tgh x)^{e^x}$;

n) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi^-} (\tgh x)^{2x-\pi}$; o) $\lim_{u \rightarrow 3^-} \left(\frac{1}{3-u}\right)^{\arctg(3-u)}$; p) $\lim_{t \rightarrow 0} (-\ln|t|)^t$ ($|t| < 1$);

r) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$; s) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\cosh x)^{1/x}$; t) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$;

u) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^{1/x}}{e}\right]^{1/x}$; w) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b}\right)^{1/x^2}$.

25.27. Sprawdzić, że istnieją granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$,

oraz że nie można ich obliczyć za pomocą twierdzenia T_5 .

25.28. Znaleźć asymptoty pionowe wykresów funkcji określonych wzorami:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; b) $g(t) = \frac{2t^2}{t^4 - 16}$; c) $h(u) = \frac{u^2 - u + 1}{2u^2 + 3}$;

d) $p(v) = e^{-1/v} + 2$; e) $m(z) = \frac{1}{\sqrt{z-1}}$; f) $t(x) = e^{1/x^2}$;

g) $n(t) = (t-3)e^{1/(t-3)}$ h) $u(x) = \ln(x+4)$.

25.29. Znaleźć wszystkie asymptoty wykresów funkcji określonych wzorami:

a) $f(x) = x - \frac{1}{x}$; b) $h(t) = \frac{t^4}{t^3 - 27}$; c) $p(u) = a + \frac{1}{(u-b)^2}$; d) $g(x) = \frac{x^3 - x + 2}{x^2 - 6}$;

e) $h(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0}$, gdzie liczby x_1, x_2, \dots, x_k ($k \leq n-1$)

są pierwiastkami mianownika funkcji h i $b_{n-1} \neq 0$;

$$\text{f) } u(z) = ze^{1/z}; \quad \text{g) } l(x) = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right); \quad \text{h) } g(t) = 2t + \arctg \frac{1}{2}t;$$

$$\text{i) } y(x) = \frac{1}{e^x - 1}; \quad \text{j) } w(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-a}} \quad (a > 0); \quad \text{k) } r(x) = \frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{2x^2 - 1}.$$

Odpowiedzi

25.11. Wszystkie punkty dowolnego łuku wykresu funkcji leżą pod [nad] odpowiednią cięciwą, lub na [na] cięciwie.

25.15. a) $(-\infty, 0)$ przedział wklęsłości, $(0, +\infty)$ przedział wypukłości;

b) $(-1, 0)$ przedział wypukłości, $(1, +\infty)$ przedział wypukłości, $(-\infty, -1)$ przedział wklęsłości, $(0, 1)$ przedział wklęsłości;

c) $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$ przedział wypukłości, $(2 + \sqrt{2}, +\infty)$ przedział wypukłości, $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ przedział wklęsłości;

d) $(-\infty, 1)$ przedział wklęsłości, $(1, +\infty)$ przedział wypukłości.

25.16. Nie. Np. $x^{2/3} x^{2/3} = x^{4/3}$.

25.19. a) $A(2, 62), B(4, 206)$; b) $A_{1,2}(\mp 1, -\frac{5}{4})$; c) $A(-3a, -\frac{9}{4}a), O(0, 0), C(3a, \frac{9}{4}a)$; d) $A(-2^{-1/3}, -\frac{1}{3}), B(0, -1)$; e) $A(\approx -0,15, \approx 0,34), B(\approx 1,48, 0,30)$;

f) $A(\mp 1, \ln 2)$; g) $A\left(\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}, e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$; h) $A(b, a)$;

i) $A(-1, 0), A_{1,2}\left(\frac{-4 \mp 3\sqrt{3}}{22}, p\left(\frac{-4 \mp 3\sqrt{3}}{22}\right)\right)$; j) $O(0, 0)$.

25.20. $a = -\frac{3}{2}, b = \frac{9}{2}$.

25.23. a) $-\frac{1}{2}$; b) 1; c) $\frac{2}{\sin 2a}$; d) $\frac{a}{\sqrt{b}}$; e) -1; f) 1; g) 0; h) $-\infty$.

25.24. a) 1; b) 1; c) 1; d) -2; e) $+\infty$; f) 0; g) 0.

25.25. a) 1; b) 0; c) 0; d) $+\infty$; e) 0; f) 1; g) 0; h) 1;

i) $\frac{1}{2}$; j) $\frac{1}{2}$; k) 0; l) 3.

25.26. a) 1; b) e ; c) 1; d) 1; e) e ; f) 1; g) 1; h) e^{-1} ; i) $e^{-2/\pi}$;

j) $e^{2/\pi}$; k) 1; l) e ; l) 0; m) 1; n) e ; o) 1; p) 1; r) 1; s) e^{-1} ;

t) $e^{1/6}$; u) $e^{-1/2}$; w) $e^{\frac{1}{2} \ln(a/b) \ln(ab)}$.

25.27. a) 0; b) 1.

25.28. a) $x=0$ as. pionowa obustronna; b) $t=-2$ i $t=2$ as. pionowe obustronne;

c) nie istnieją asymptoty pionowe; d) $v=0$ as. pionowa lewostronna;

e) $z=1$ as. pionowa prawostronna; f) $x=0$ as. pionowa obustronna;

g) $t=3$ as. pionowa prawostronna; h) $x=-4$ as. pionowa prawostronna.

- 25.29. a) $x=0$ as. pionowa obustronna, $y=x$ as. ukośna;
 b) $t=3$ as. pionowa obustronna, $y=t$ as. ukośna;
 c) $u=b$ as. pionowa obustronna, $y=a$ as. pozioma;
 d) $x=\mp\sqrt{6}$ as. pionowe obustronne, $y=x$ as. ukośna;
 e) $x=x_i, i=1, 2, \dots, k$, as. pionowe obustronne, $y=mx+h$ as. ukośna,

gdzie $m = \frac{a_n}{b_{n-1}}$ i $h = \frac{a_{n-1}b_{n-1} - a_n b_{n-2}}{b_{n-1}^2}$;

- f) $z=0$ as. pionowa prawostronna, $y=z+1$ asymptota ukośna;
 g) $x=-1/e$ as. pionowa lewostronna, $y=x+1/e$ as. ukośna;
 h) $y=2t-\frac{1}{2}\pi$ as. ukośna dla $t \rightarrow -\infty$, $y=2t+\frac{1}{2}\pi$ asymptota ukośna dla $t \rightarrow +\infty$;
 i) $x=0$ as. pionowa obustronna, $y=-1$ as. pozioma dla $x \rightarrow -\infty$, $y=0$ as. pozioma dla $x \rightarrow +\infty$;
 j) $x=a$ as. pionowa prawostronna, $y=-x-\frac{1}{2}a$ as. ukośna dla $x \rightarrow -\infty$, $y=x+\frac{1}{2}a$ as. ukośna dla $x \rightarrow +\infty$;
 k) $y=-\frac{1}{2}x$ as. ukośna dla $x \rightarrow -\infty$, $y=\frac{1}{2}x$ as. ukośna dla $x \rightarrow +\infty$.

§ 26. PRZYBLIŻONE ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ

26.1. Dana jest funkcja $f: \mathbf{R} \supset X \rightarrow \mathbf{R}$. Równanie

$$(1) \quad f(x)=0,$$

w którym niewiadomą jest zmienna x , nazywamy *równaniem liczbowym*. Przybliżone rozwiązanie równania (1) składa się z dwóch następujących etapów:

a) znalezienie możliwie małego przedziału, wewnątrz którego znajduje się dokładnie jeden pierwiastek równania (1),

β) znalezienie tego pierwiastka z daną dokładnością.

T₁. Jeżeli $f \in C^0(\langle a, b \rangle) \wedge f(a)f(b) < 0$ oraz f' ma stały znak na przedziale (a, b) , to równanie $f(x)=0$ ma dokładnie jeden pierwiastek $x_0 \in (a, b)$.

26.2. T₂. METODA SIECZNYCH (REGUŁA FALSI). Jeżeli: α_1) równanie (1) ma w przedziale (a, b) dokładnie jeden pierwiastek x_0 , α_2) $f \in C^2(\langle a, b \rangle)$, α_3) pochodne f' i f'' mają stały znak na $\langle a, b \rangle$, to jako pierwsze przybliżenie pierwiastka x_0 przyjmujemy liczbę

$$(2) \quad x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Jeżeli np. $f(x_1)f(b) < 0$, to jako drugie przybliżenie pierwiastka x_0 przyjmujemy liczbę

$$(3) \quad x_2 = x_1 - \frac{(b-x_1)f(x_1)}{f(b)-f(x_1)},$$

przy czym wzór (3) otrzymujemy ze wzoru (2) zastępując x_1 przez x_2 oraz a przez x_1 .

Ogólnie, $(n+1)$ -sze przybliżenie pierwiastka x_0 otrzymujemy ze wzoru rekurencyjnego

$$(4) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{(b-x_n)f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}, \quad n=1, 2, \dots$$

(jeżeli $f'(x)f''(x) > 0$) względnie ze wzoru

$$(5) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{(a-x_n)f(x_n)}{f(a)-f(x_n)}, \quad n=1, 2, \dots$$

(jeżeli $f'(x)f''(x) < 0$), gdzie liczba x_1 określona jest wzorem (2).

Kres górny błędu bezwzględnego przybliżenia x_n określony jest wzorem

$$(6) \quad |x_n - x_0| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad \text{gdzie} \quad m = \inf_{\langle a, b \rangle} |f'(x)|.$$

26.3. T_3 . METODA STYCZNYCH (METODA NEWTONA). Przyjmując założenia twierdzenia T_2 , mamy następujące wzory rekurencyjne dla przybliżeń pierwiastków x_0 równania (1):

$$(7) \quad x'_{n+1} = x'_n - \frac{f(x'_n)}{f'(x'_n)}, \quad n=1, 2, \dots,$$

gdzie

$$(8) \quad x'_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \quad (\text{jeżeli } f'(x)f''(x) > 0),$$

$$(9) \quad x'_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \quad (\text{jeżeli } f'(x)f''(x) < 0),$$

przy czym $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = x_0$. Kres górny błędu bezwzględnego przybliżenia x'_n określony jest wzorem (6).

26.4. Metoda kombinowana. Jeżeli funkcja f spełnia założenia twierdzenia T_2 , to korzystając jednocześnie z metody siecznych i metody stycznych, otrzymujemy tzw. *metodę kombinowaną* przybliżonego rozwiązywania równania (1). Załóżmy np., że $f'(x)f''(x) > 0$. Wartości przybliżone x_1 i x'_1 pierwiastka x_0 obliczamy korzystając ze wzorów (2) i (8), przy czym udowadnia się, że $a < x_1 < x_0 < x'_1 < b$. Przy następnym kroku zastępujemy we wzorach (2) i (8) liczby a i b przez x_1 i x'_1 , otrzymując wzory

$$(10) \quad x_2 = x_1 - \frac{(x'_1 - x_1)f(x_1)}{f(x'_1) - f(x_1)}, \quad x'_2 = x'_1 - \frac{f(x'_1)}{f'(x'_1)}.$$

Ogólnie, mając wartości przybliżone x_n i x'_n , między którymi zawarty jest pierwiastek x_0 , przechodzimy do następnej pary wartości przybliżonych, korzystając ze wzorów

$$(11) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{(x'_n - x_n)f(x_n)}{f(x'_n) - f(x_n)}, \quad x'_{n+1} = x'_n - \frac{f(x'_n)}{f'(x'_n)}.$$

W metodzie kombinowanej otrzymujemy zatem przybliżone pierwiastki z niedomiarem i z nadmiarem, które dążą do pierwiastka z różnych stron. Wielkość $|x'_n - x_n|$ określa błąd przybliżenia. Jeżeli np. mamy znaleźć pierwiastek x_0 z dokładnością do $\varepsilon > 0$, to znajdujemy takie n , aby $|x'_n - x_n| < \varepsilon$, przy czym jako przybliżenie wygodnie jest wtedy wziąć liczbę $\xi = \frac{1}{2}(x'_n + x_n)$.

Przykłady

26.1. Sprawdzić, że równanie

$$x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$$

(a)

ma dokładnie jeden pierwiastek w przedziale $(3, 4)$ oraz obliczyć go z dokładnością do 0,01.

Rozwiązanie. Zastosujemy metodę siecznych. Przyjmując $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$, kolejno otrzymujemy: $f(3) = 27 - 18 - 12 - 7 = -10 < 0$, $f(4) = 4^3 - 2 \cdot 4^2 - 16 - 7 = 9 > 0$, $f(3)f(4) < 0$; $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 = 3(x + \frac{2}{3})(x - 2)$, czyli $f'(x) > 0$ dla $3 \leq x \leq 4$; $f''(x) = 6x - 4 = 6(x - \frac{2}{3}) > 0$ dla $3 \leq x \leq 4$, tzn. funkcja f spełnia założenia twierdzenia T_2 .

Korzystamy ze wzoru (2)

$$x_1 = 3 - \frac{(4-3)f(3)}{f(4)-f(3)} = 3 + \frac{10}{19} = 3 + 0,52\dots,$$

a więc pisząc dwa pierwsze miejsca po przecinku mamy $x_1 = 3,52$. W celu określenia błędu zauważmy, że $m = \inf_{(3,4)} |f'(x)| = 3 \cdot 9 - 4 \cdot 3 - 4 = 11$ oraz $f(x_1) = f(3,52) = -2,246592$, stąd (wzór (6))

$$\frac{|f(x_1)|}{m} = \frac{2,246592}{11} > 0,01,$$

czyli pierwsze przybliżenie x_1 nie gwarantuje żądanej dokładności. Znajdujemy więc drugie przybliżenie x_2 (wzór 3)),

$$x_2 = 3,52 - \frac{0,48 \cdot f(3,52)}{f(4) - f(3,52)} = 3,52 + \frac{1,07836416}{11,246592} = 3,52 + 0,09 = 3,61.$$

Korzystając ponownie ze wzoru (6) stwierdzamy, że błąd jeszcze jest większy od 0,01. Zatem (korzystamy ze wzoru (4), ponieważ $f'(x)f''(x) > 0$)

$$x_3 = 3,61 - \frac{0,39 \cdot f(3,61)}{f(4) - f(3,61)} = 3,61 + \frac{0,17874441}{9,458319} = 3,61 + 0,0188\dots = 3,63.$$

Ponieważ zaokrągliliśmy z nadmiarem, mogłoby się zdarzyć, że $x_3 > x_0$ (x_0 poszukiwany pierwiastek) co jednak nie zachodzi, gdyż $f(3,63) = -0,041653$. Korzystając ze wzoru (6) otrzymujemy

$$|x_3 - x_0| = x_0 - x_3 < \frac{0,041}{11} < 0,004 < 0,01.$$

Stąd $3,630 < x_0 < 3,634$, czyli poszukiwany pierwiastek $x_0 = 3,63$ z błędem mniejszym od 0,004.

26.2. Znaleźć pierwiastek x_0 równania (a) (przykład 26.1) z dokładnością do 0,01, korzystając z metody stycznych.

Rozwiązanie. Ponieważ $f'(x)f''(x) > 0$ dla $3 \leq x \leq 4$ (por. przykład 26.1), korzystamy więc ze wzoru (8). Otóż

$$x'_1 = 4 - \frac{f(4)}{f'(4)} = 4 - \frac{9}{28} = 4 - 0,32\dots = 3,7.$$

W celu obliczenia błędu pierwiastka x'_1 korzystamy ze wzoru (6),

$$|x'_1 - x_0| < \frac{|f(x_1)|}{m} = \frac{|f(3,7)|}{11} = \frac{1,473}{11} < 0,14,$$

tzn. dokładność jest niewystarczająca. Stosujemy więc wzór (7) dla $n=1$,

$$x'_2 = 3,7 - \frac{f(3,7)}{f'(3,7)} = 3,7 - \frac{1,473}{22,27} = 3,7 - 0,066\dots = 3,634,$$

przy czym (wzór (6))

$$|x'_2 - x_0| < \frac{|f(3,634)|}{11} = \frac{0,042}{11} < 0,004 < 0,01.$$

Czyli $3,630 < x_0 < 3,634$, a więc $x_0 = 3,63$ z żadaną dokładnością.

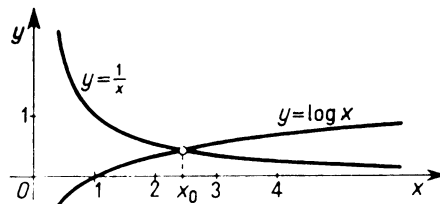
Zauważmy, że otrzymanie tego samego wyniku metodą siecznych (por. przykład 26.1) wymagało znalezienia trzeciego przybliżenia.

26.3. Wykazać, że równanie

$$x \log_{10} x = 1$$

(a)

ma dokładnie jeden pierwiastek oraz znaleźć go z dokładnością do 0,0001, korzystając z metody stycznych.



Rys. 26.1

Rozwiązanie. Korzystamy z wykresów funkcji określonych wzorami $g(x) = \log_{10} x$ i $h(x) = 1/x$ (rys. 26.1). Otóż przekształcając równanie (a) do postaci $\log_{10} x = 1/x$ stwierdzamy, że pierwiastkiem równania (a) będzie odcięta x_0 punktu przecięcia wykresów funkcji g i h . Z rysunku wydaje się, że równanie (a) ma dokładnie jeden pierwiastek zawarty w przedziale (2, 3). Istotnie, niech $f(x) = x \log_{10} x - 1$. Stąd $f(2) = -0,39793 \dots < 0$, $f(3) =$

$=0,43136 \dots > 0$ oraz

$$f'(x) = \log_{10} x + \frac{1}{x} x \frac{1}{\ln 10} = \log_{10} x + \log_{10} e > 0 \quad \text{dla} \quad 2 \leq x \leq 3,$$

$$f''(x) = \frac{1}{x \ln 10} > 0 \quad \text{dla} \quad 2 \leq x \leq 3.$$

A więc w przedziale $(2, 3)$ istnieje dokładnie jeden pierwiastek równania (a) (por. twierdzenie T_1), przy czym $f'(x)f''(x) > 0$. Zauważmy dalej, że funkcja h jest malejąca, a funkcja g jest rosnąca w przedziale $(0, +\infty)$, przy czym $\log_{10} 2 < \frac{1}{2}$ i $\log_{10} 3 > \frac{1}{3}$ ($\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 < 1$, czyli $\log_{10} 2 < \frac{1}{2}$; $\log_{10} 27 = 3 \log_{10} 3 > 1$, czyli $\log_{10} 3 > \frac{1}{3}$). Wynika stąd, że w przedziałach $(0, 2)$ i $(3, +\infty)$ równanie (a) nie ma pierwiastków, czyli że posiada dokładnie jeden pierwiastek x_0 zawarty w przedziale $(2, 3)$. W celu znalezienia jego przybliżenia korzystamy najpierw ze wzoru (8) ($f'(x)f''(x) > 0$),

$$x'_1 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{0,43136}{0,91141} = 3 - 0,473 \dots;$$

weźmy $x'_1 = 3 - 0,47 = 2,53$. Aby określić błąd (wzór (6)) przyjmujemy, że $m = \inf_{(2,3)} |f'(x)| = 0,7$; stąd

$$\frac{|f(x_1)|}{m} = \frac{|f(2,53)|}{0,7} = \frac{0,019894}{0,7} > 0,02,$$

czyli dokładność jest niewystarczająca. Znajdujemy więc drugie przybliżenie (wzór (7) dla $n=1$),

$$x'_2 = 2,53 - \frac{f(2,53)}{f'(2,53)} = 2,53 - \frac{0,019894}{0,83741} = 2,53 - 0,02375 \dots;$$

weźmy $x'_2 = 2,53 - 0,0237 = 2,5063$ i oszacujmy błąd; $f(2,5063) = 0,000096 \dots$, czyli

$$|x'_2 - x_0| < \frac{0,000096}{0,7} < 0,0002,$$

a więc $2,5061 < x_0 < 2,5063$ ($x'_2 > x_0$). Zatem $x_0 = 2,5062 \pm 0,0001$.

26.4. Znaleźć wszystkie pierwiastki równania

$$(a) \quad 2x^3 - x^2 - 7x + 5 = 0$$

z dokładnością do 0,001, korzystając z metody kombinowanej.

Rozwiązanie. Przyjmując $f(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 5$ otrzymujemy: $f(-2) = -1$, $f(-1) = 9$, $f(0) = 5$, $f(1) = -1$, $f(2) = 3$. Zatem istnieją dokładnie trzy pierwiastki x_1^* , x_2^* , x_3^* równania (a), przy czym $-2 < x_1^* < -1$, $0 < x_2^* < 1$ i $1 < x_3^* < 2$.

α_1) W przedziale $\langle -2, -1 \rangle$ mamy $f'(x) = 6x^2 - 2x - 7 > 0$, $f''(x) = 12x - 2 < 0$, czyli $f'(x)f''(x) < 0$. (W tym przypadku udowadnia się, że $a < x'_1 < x_0 < x_1 < b$). Korzystamy

ze wzorów (9) i (2),

$$x'_1 = -2 - \frac{-1}{21} = -1,952\dots, \quad x_1 = -1 - \frac{9}{9 - (-1)} = -1,9.$$

Zaokrąglając wartość x'_1 w stronę wartości mniejszych, otrzymujemy liczbę $-1,96 < x_1^*$. Jeżeli zaokrąglimy natomiast w stronę wartości większych, tzn. w stronę pierwiastka, otrzymujemy liczbę $-1,95$. Ale $f(-1,95) = 0,01775 > 0$, a więc w tym przypadku przekroczyliśmy pierwiastek ($f'(x) > 0$). Jest to korzystne, ponieważ pozwala zwięzić przedział zawierający pierwiastek x_1^* . Otóż odrzucamy pierwiastek z nadmiarem $x_1 = -1,9$ i przyjmujemy $x_1 = -1,95$, czyli $-1,96 < x_1^* < -1,95$. Ponieważ $|x_1 - x'_1| = |-1,95 + 1,96| = 0,01 > 0,001$, korzystamy ze wzorów (11) (dla $n=1$); $f(-1,96) = -0,180672$, $f'(-1,96) = 19,9696$,

$$x'_2 = -1,96 + \frac{0,180672}{19,9696} = -1,96 + 0,00904\dots = -1,95095\dots,$$

$$x_2 = -1,95 - \frac{0,01 \cdot 0,01775}{0,01775 + 0,180672} = -1,95 - 0,00089\dots = -1,95089\dots$$

Stąd $|x_2 - x'_2| = 0,00009$, czyli $x_1^* = \frac{1}{2}[-1,95095 + (-1,95089)] = -1,9509$ z dokładnością do $\frac{1}{2} \cdot 0,00009 = 0,000045 < 0,001$.

α_2) W przedziale $\langle 0, 1 \rangle$ pochodna $f'(x) < 0$, natomiast pochodna f'' zmienia znak i równa się zero w punkcie $x = \frac{1}{6}$. Należy więc zwięzić przedział zawierający pierwiastek x_2^* . Otóż $f(0,5) = 1,5 > 0$, zatem $0,5 < x_2^* < 1$, przy czym $f''(x) > 0$ w przedziale $\langle 0,5, 1 \rangle$. Korzystamy więc ze wzoru (9),

$$x'_1 = 0,5 + \frac{1,5}{6,5} = 0,7307 \approx 0,74, \quad x_1 = 1 - \frac{0,5}{2,5} = 0,80.$$

Zaokrąglenie pierwiastka x'_1 z nadmiarem (w stronę pierwiastka) nie doprowadziło do przekroczenia pierwiastka x_2^* , ponieważ $f(0,74) = 0,082848 > 0$. Stąd dalej

$$x'_2 = 0,74 + \frac{0,082848}{5,1944} = 0,755\dots, \quad x_2 = 0,80 - \frac{0,01296}{0,298848} = 0,756\dots,$$

a więc $0,755 \dots < x_2^* < 0,756$, czyli $x_2^* = 0,755$ z błędem $0,0005$.

α_3) W przedziale $\langle 1, 2 \rangle$ pochodna $f''(x) > 0$, natomiast pochodna f' zmienia znak i równa jest zero w punkcie $x = \frac{1 + \sqrt{43}}{6} \approx 1,26$. Ale $f(1,5) = -1$, czyli $1,5 < x_3^* < 2$, przy czym w przedziale $\langle 1,5, 2 \rangle$ $f'(x) > 0$. Korzystamy więc ze wzoru (8),

$$x_1 = 1,5 + \frac{1}{8} \approx 1,6, \quad x'_1 = 2 - \frac{3}{13} \approx 1,7.$$

Zaokrąglając pierwiastek x'_1 nie przekroczyliśmy pierwiastka x_3^* , ponieważ $f(1,7) = 0,036 > 0$. Stąd dalej

$$x_2 = 1,6 + \frac{0,0568}{0,604} = 1,6 + 0,094\dots = 1,694\dots,$$

$$x_2' = 1,7 - \frac{0,036}{6,94} = 1,7 - 0,005\dots = 1,694\dots,$$

a więc $x_3^* = 1,694$ z dokładnością do 0,001.

Zadania

26.5. Wykazać, że równanie $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ ma jeden pierwiastek pojedynczy w przedziale $(0, 1)$ oraz znaleźć ten pierwiastek z dokładnością do 0,1, korzystając z twierdzenia T₇ § 20.

26.6. Wykazać, że równanie $x^4 + 3x^2 - x - 2 = 0$ ma dokładnie dwa pierwiastki rzeczywiste pojedyncze i znaleźć je z dokładnością do 0,1, korzystając z twierdzenia T₇ § 20.

26.7. Znaleźć z dokładnością do 0,01 pierwiastek równania $x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$ należący do przedziału $\langle 0, 1 \rangle$, korzystając z twierdzenia T₇ § 20.

26.8. Stosując metodę siecznych znaleźć z dokładnością do 0,001 pierwiastki następujących równań:

a) $x^3 - 6x + 2 = 0$; b) $x^4 - x - 1 = 0$; c) $\cos x = x^2$.

26.9. Stosując metodę stycznych znaleźć pierwiastki równań:

a) $x^2 + 1/x^2 = 10x$ z dokładnością do 0,001;

b) $2^x = 4x$ z dokładnością do 10^{-5} ;

c) $x^3 - 2x - 5 = 0$ w przedziale $\langle 2, 2,1 \rangle$ z dokładnością do 10^{-10} .

26.10. Z dokładnością do 0,001 znaleźć trzy pierwsze pierwiastki dodatnie równania $\operatorname{tg} x = x$.

26.11. Wykazać, że tzw. *równanie Keplera* $x = \varepsilon \sin x + a$, gdzie $0 < \varepsilon < 1$ ma dokładnie jeden pierwiastek oraz znaleźć ten pierwiastek z dokładnością do 0,001, jeżeli $\varepsilon = 0,538$ i $a = 1$.

26.12. Stosując metodę kombinowaną znaleźć dwa pierwiastki rzeczywiste równania $x^4 - 3x^2 + 75x - 10\,000 = 0$ z dokładnością do 0,00001 należące odpowiednio do przedziałów $\langle -11, -10 \rangle$ i $\langle 9, 10 \rangle$.

26.13. Wykazać, że równanie $x^5 - x - 0,2 = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek dodatni oraz znaleźć go z dokładnością do 0,0005, stosując metodę kombinowaną.

Odpowiedzi

26.5. $0,1 < x < 0,2$.

26.6. $x_1 = -0,65$, $x_2 = 0,85$.

26.7. 0,86.

26.8. a) $x_1 = -2,602$, $x_2 = 0,340$, $x_3 = 2,262$;

b) $x_1 = -0,724$, $x_2 = 1,221$; c) $x_{1,2} = \mp 0,824$.

26.9. a) $x_1 = 0,472$, $x_2 = 9,999$; b) $x_1 = 4$ dokładnie, $x_2 = 0,30990$; c) 2,0945514815.

26.10. $x_1 = 4,493$, $x_2 = 7,725$, $x_3 = 10,904$, **26.11.** $1,537 < x < 1,538$.

26.12. $x_1 = -10,260964$, $x_2 = 9,88600$. **26.13.** $x = 1,045$.

§ 27. BADANIE ZMIENNOŚCI FUNKCJI, WYKRESY FUNKCJI

27.1. Badanie funkcji określonych wzorem $y=f(x)$. Przy badaniu funkcji korzystamy z wiadomości podanych w paragrafach 17 - 26, przy czym wygodnie jest podzielić badanie na kilka etapów ⁽¹⁾.

A. Badamy te własności funkcji, które wynikają tylko z jej wzoru ⁽²⁾, a więc:

- a₁) dziedzinę,
- a₂) ciągłość funkcji,
- a₃) granice funkcji na końcach przedziałów określoności,
- a₄) punkty przecięcia wykresu funkcji z osiami układu (o ile łatwo je wyznaczyć),
- a₅) asymptoty pionowe i ukośne.

B. Badamy te własności funkcji, które wynikają z jej pierwszej i drugiej pochodnej, a więc:

- b₁) monotoniczność, czyli przedziały stałego znaku f' ,
- b₂) ekstrema,
- b₃) wklęsłość i wypukłość, czyli przedziały stałego znaku f'' ,
- b₄) punkty przegięcia.

C. Sporządzamy tabelkę ⁽³⁾ zmienności funkcji.

D. Na podstawie tabelki szkicujemy wykres.

Uwaga 1. Przy badaniu danych funkcji nie zawsze trzeba uwzględniać wszystkie wymienione wyżej punkty.

Uwaga 2. W punkcie A wyznaczamy czasem szczególne własności funkcji, jak np. parzystość, nieparzystość, okresowość, względnie znajdujemy dodatkowe wartości funkcji w pewnych punktach.

Uwaga 3. W punkcie B badamy czasem granice (względnie granice jednostronne) pochodnych w pewnych punktach.

Przykłady

27.1. Zbadać funkcje określone wzorami:

$$\text{a) } h(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - x + 1; \quad \text{b) } g(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3};$$

$$\text{c) } u(t) = (t-2)e^{1/(t-2)}; \quad \text{d) } x(t) = \sqrt{t} \ln t; \quad \text{e) } p(z) = \sqrt[3]{2z^2 - z^3};$$

$$\text{f) } k(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}; \quad \text{g) } g(y) = \arccos \frac{y-1}{2y-1}; \quad \text{h) } p(v) = v^v;$$

i) $h(u) = (u+b)e^{1/u}$; j) $x(t) = Ae^{-kt} \sin \omega t$, $t \geq 0$ ($A > 0$, $k > 0$, $\omega > 0$),
oraz narysować ich wykresy.

⁽¹⁾ Można oczywiście stosować inny schemat badania funkcji.

⁽²⁾ Nie korzystamy z pochodnych.

⁽³⁾ Tabelka nie jest konieczna, ale bardzo ułatwia sporządzenie wykresu.

Rozwiązanie. a) $h(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - x + 1$;

A. Dziedzina $X = \mathbb{R}$, $h \in C^0(\mathbb{R})$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$, wykres funkcji

h nie ma żadnych asymptot (por. przykład 25.10a).

B. $h'(x) = x^3 - 4x - 1$, $x \in X$. Aby znaleźć pierwiastki pochodnej należy rozwiązać równanie

$$(a) \quad x^3 - 4x - 1 = 0.$$

Ponieważ dzielniki wyrazu wolnego, czyli liczby ∓ 1 nie są pierwiastkami równania (a), więc należy znaleźć pierwiastki przybliżone (por. § 26) Otóż łatwo stwierdzić, że istnieją trzy pierwiastki po jednym w każdym z przedziałów $\langle -2, -1,5 \rangle$, $\langle -0,5, 0,1 \rangle$ i $\langle 2, 2,5 \rangle$, które znajdujemy korzystając np. z metody stycznych. Zatem $x_1 = -1,86$, $x_2 = -0,25$, $x_3 = 2,11$. Z kolei

$$h''(x) = 3x^2 - 4 = 3\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \quad x \in X, \quad h''(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x_{4,5} = \mp \frac{2}{\sqrt{3}} = \mp 1,16;$$

$$h''(-1,86) = 3[(-1,86)^2 - \frac{4}{3}] > 0,$$

czyli dla $x = -1,86$ jest minimum $y_{\min} = h(-1,86) = -1,07$, $h''(-0,25) = 3[(-0,25)^2 - \frac{4}{3}] < 0$, czyli w punkcie $x = -0,25$ funkcja h ma maksimum $y_{\max} = h(-0,25) = 1,13$, $h''(2,11) = 3[(2,11)^2 - \frac{4}{3}] > 0$, a więc w punkcie $x = 2,11$ jest minimum $y_{\min} = h(2,11) = -4,09$. Liczby $x_{4,5}$ są odciętymi punktów przegięcia $P_1(-2/\sqrt{3}, -0,07)$ i $P_2(2/\sqrt{3}, -2,38)$ (por. 25.3a).

C. Tabela

x	$-\infty$	$-1,86$	$-1,15$	$-0,25$	0	$1,15$	$2,11$	$+\infty$				
$h(x)$	$+\infty$	$-1,07$	$-0,07$	$1,13$	1	$-2,38$	$-4,09$	$+\infty$				
$h'(x)$	$-$	0	$+$	$2,07$	$+$	0	-1	$-4,07$	$-$	0	$+$	$+$
$h''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
przebieg												

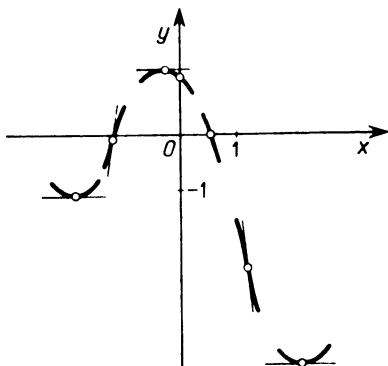
Uwaga 1. W tabelce umieściliśmy dodatkowo wartości $h'(-1,16) = 2,07$, $h'(0) = -1$, $h'(1,16) = -4,07$ określające kierunki stycznych do wykresu w punktach przegięcia oraz w punkcie przecięcia wykresu z osią Oy .

Uwaga 2. Znaki pierwszej i drugiej pochodnej ustalamy korzystając ze znalezionych pochodnych h' i h'' , które wygodnie jest przekształcić do postaci iloczynowej.

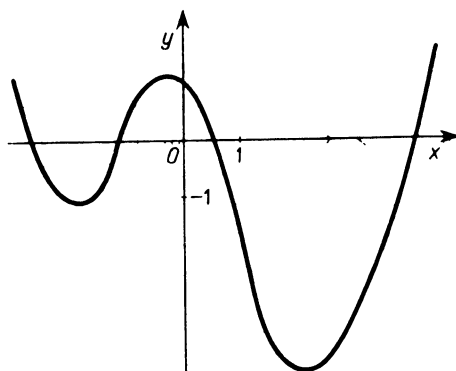
Uwaga 3. W ostatnim wierszu „przebieg” wprowadziliśmy umowne symbole, które oznaczają:

- funkcję rosnącą i wklęsłą,
- funkcję rosnącą i wypukłą,
- funkcję malejącą i wklęsłą,
- funkcję malejącą i wypukłą,
- maksimum funkcji,
- minimum funkcji,
- punkty przegięcia funkcji (wykresu funkcji).

D. Wykres funkcji sporządzamy, korzystając przede wszystkim z tabelki (punkt C). Otóż rysujemy najpierw asymptoty (o ile istnieją), a następnie wyróżnione punkty wykresu (otrzymujemy je korzystając z pierwszego i drugiego wiersza tabelki) oraz części wykresu



Rys. 27.1



Rys. 27.2

w sąsiedztwie tych punktów, względnie części wykresu i odcinki stycznych w punktach wyróżnionych (rys. 27.1). Z kolei, korzystając z ostatniego wiersza tabelki („przebieg”), kreślimy krzywą ciągłą przez punkty wyróżnione (rys. 27.2).

$$b) g(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3};$$

A. Dziedzina $x = \mathbf{R} - \{1, 3\}$, $g \in C^0(X)$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3} = 1 \wedge \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1,$$

tzn. istnieje asymptota pozioma o równaniu $y = 1$ (granica w nieskończoności jest skończona), a więc nie istnieją inne asymptoty ukośne (asymptotę poziomą traktujemy jako przypadek szczególny asymptoty ukośnej). Granice jednostronne w punktach $x = 1$ i $x = 3$ (końce przedziałów określoności) łatwo znajdziemy na podstawie dalszych rozważań. Ogólnie, dla funkcji wymiernych pierwiastki mianownika (o ile istnieją i nie są jednocześnie pierwiastkami licznika) są końcami przedziałów określoności funkcji, przy czym w każdym z nich funkcja posiada jednostronne granice niewłaściwe, których znaki łatwo ustalamy na podstawie przedziałów monotoniczności (tabelka). Wynika stąd w szczególności, że taka funkcja wymierna ma asymptoty pionowe obustronne (por. § 25) o równaniach $x = x_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, gdzie liczby x_i , $i = 1, 2, \dots, k$ są pierwiastkami mianownika funkcji wymiernej. Z kolei $g(0) = \frac{1}{3}$; asymptoty pionowe obustronne: $x = 1$ i $x = 3$.

$$B. g'(x) = \frac{-4(x-x_1)(x-x_2)}{(x^2-4x+3)^2}, \quad x \in X, \quad \text{gdzie } x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,62, \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,62,$$













$(g'(x)=0 \Leftrightarrow x=x_1 \vee x=x_2)$. Następnie $g''(x)=4 \frac{2x^3-3x^2-6x+11}{(x^2-4x+3)^3}$, $x \in X$, $g''(x)=0$, jeżeli

$$(a) \quad 2x^3-3x^2-6x+11=0.$$

Łatwo sprawdzić, że równanie (a) nie posiada pierwiastków wymiernych, natomiast ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty x_0 zawarty w przedziale $\langle -2, -1,5 \rangle$, przy czym $2x^3-3x^2-6x+11 < 0$ dla $x < x_0$ i $2x^3-3x^2-6x+11 > 0$ dla $x > x_0$.

Korzystając np. z metody stycznych znajdujemy: $x_0 \approx -1,86$. W punktach x_1 i x_2 funkcja g ma ekstrema, ponieważ w sąsiedztwie tych punktów pochodna g' zmienia znak, przy czym $y_{\min}=g(x_1)=\sqrt{5}-2 \approx 0,24$, $y_{\max}=g(x_2)=-\sqrt{5}-2 \approx -4,24$, natomiast punkt x_0 jest odcięta punktu przegięcia $P(\approx -1,86, \approx 0,33)$.

C. Tabela

x	$-\infty$	$-1,86$	$-0,62$	0	1	$1,62$	3	$+\infty$				
$g(x)$	1	$0,33$	$0,24$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	$-\infty$	$-4,24$	$-\infty$	$+\infty$	1		
$g'(x)$	$-$	$-0,09$	$-$	0	$+$	$\frac{4}{9}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$g''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
przebieg												

Uwaga. Kreski pionowe pod liczbami 1 i 3 oznaczają, że badana krzywa ma asymptoty pionowe o równaniach $x=1$ i $x=3$, przy czym z tabelki wynika natychmiast, że

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = +\infty,$$

w tabelce oznaczamy następująco:

	1		3		
...	+	+	-	-	...
...	+	+	-	-	...

D. Wykres (rys. 27.3).

c) $u(t) = (t-2)e^{1/(t-2)}$;

A. Dziedzina $T = \mathbb{R} - \{2\}$, $u \in C^0(T)$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t-2)e^{1/(t-2)} = +\infty,$$

$$\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{1/(t-2)} = 1 \right) \quad \text{oraz} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = -\infty.$$

Liczba $t=2$, dla której funkcja u jest nieciągła, jest końcem przedziałów określoności funkcji u . Zatem

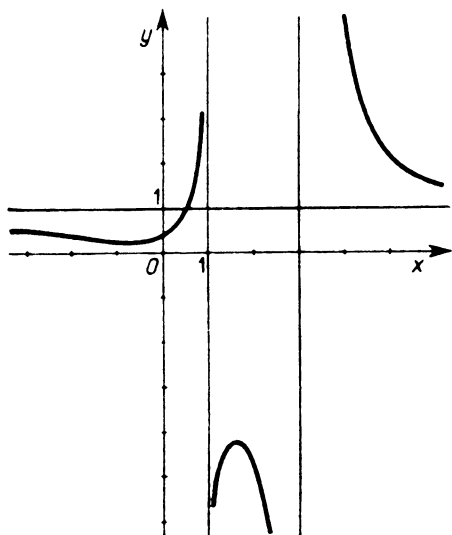
$$\lim_{t \rightarrow 2^-} u(t) = \lim_{t \rightarrow 2^-} (t-2)e^{1/(t-2)} = 0$$

($\lim_{t \rightarrow 2^-} e^{1/(t-2)} = 0$) oraz $\lim_{t \rightarrow 2^+} u(t) = +\infty$ (por. 25.7b), czyli istnieje asymptota pionowa prawostronna o równaniu $t=2$; $u(0) = -2e^{-1} = \frac{-2}{\sqrt{e}} \approx -1,21$; wykres funkcji u ma asymptotę ukośną o równaniu $y=t-1$ (por. 25.10d).

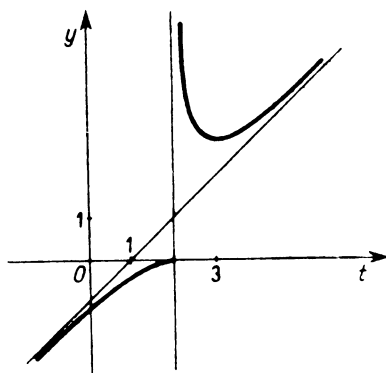
B. $u'(t) = e^{1/(t-2)} \frac{t-3}{t-2}$, $t \in T$, ($u'(t) = 0 \Leftrightarrow t=3$), $u''(t) = e^{1/(t-2)} \frac{1}{(t-2)^3} \neq 0$, dla $t \in T$;
 $y_{\min} = u(3) = e$ (por. 24.1b); nie ma punktów przegięcia (por. 25.3c).

C. Tabela

t	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
$u(t)$	$-$	$-1,21$	0	$+\infty$	$+\infty$
$u'(t)$	$+$	$+$	0	$-$	$+$
$u''(t)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
przebieg	\curvearrowright	\curvearrowright	\curvearrowright	\curvearrowleft	\curvearrowright



Rys. 27.3



Rys. 27.4

Uwaga. W celu dokładniejszego narysowania wykresu funkcji w otoczeniu lewostronnym punktu $t=2$, znajdujemy granicę $\lim_{t \rightarrow 2^-} u'(t) = \lim_{t \rightarrow 2^-} \left(\frac{t-3}{t-2} e^{1/(t-2)} \right)$. Wystarczy znaleźć granicę

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{e^{1/(t-2)}}{t-2} = \lim_{\left[\frac{0}{0} \right]} \frac{1}{t-2} \frac{1}{e^{-1/(t-2)}} \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

Ale

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{\left(\frac{1}{t-2}\right)'}{\left(e^{-1/(t-2)}\right)'} = \lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{\frac{-1}{(t-2)^2}}{e^{-1/(t-2)} \cdot \frac{1}{(t-2)^2}} = \lim_{t \rightarrow 2^-} (-e^{1/(t-2)}) = 0,$$

skąd

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} \left(\frac{t-3}{t-2} \cdot e^{1/(t-2)}\right) = (-1) \cdot 0 = 0,$$

a więc styczna lewostronna do wykresu funkcji w punkcie $t=2$ ma położenie poziome.

D. Wykres (rys. 27.4).

d) $x(t) = \sqrt{t} \ln t$; dziedzina $T = \mathbf{R}_+$, $x \in C^0(T)$;

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = 0 \text{ (por. 25.7a)}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\sqrt{t} \ln t) = +\infty;$$

$x(1) = 0$; badana krzywa nie ma żadnych asymptot (por. 25.10e).

B. $x'(t) = \frac{1}{2} t^{-1/2} (\ln t + 2) = \frac{\ln(e^2 t)}{2\sqrt{t}}$, $t \in T$, ($x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = e^{-2}$). Z kolei $x''(t) = \frac{-1}{4} \cdot \frac{\ln t}{t\sqrt{t}}$, $t \in T$, ($x''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$), $x''(e^{-2}) = -\frac{1}{4} e^3 \ln e^{-2} > 0$, a więc funkcja x ma minimum $y_{\min} = x(e^{-2}) = -2/e \approx -0,74$. Punkt $P(1, 0)$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji x (por. 25.3d).

C. Tabela

t	0	e^{-2}	1	$+\infty$
$x(t)$	0	-0,74	0	$+\infty$
$x'(t)$	$-\infty$	-	0	+
$x''(t)$	+	+	+	0
przebieg	\	\	∩	∩

Uwaga. Zbadaliśmy dodatkowo granicę

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x'(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^2 t)}{2\sqrt{t}} = -\infty,$$

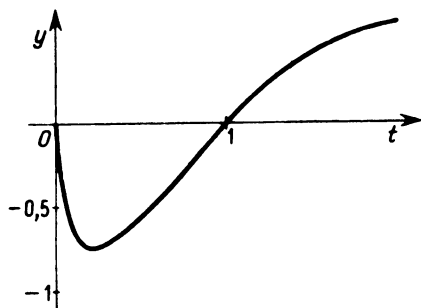
a więc styczna prawostronna do krzywej w punkcie $t=0$ jest prostopadła do osi Ot .

D. Wykres (rys. 27.5).

e) $p(z) = \sqrt[3]{2z^2 - z^3}$;A. Dziedzina $Z = \mathbf{R}$, $p \in C^0(Z)$,

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} p(z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{2z^2 - z^3} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(z^3 \sqrt{\frac{2}{z} - 1}\right) = -\infty$$

$\left(\lim_{z \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{2}{z} - 1} = -1\right)$ oraz $\lim_{z \rightarrow -\infty} p(z) = +\infty$; $p(0) = 0$, $p(2) = 0$. Nie ma asymptot pionowych, istnieje natomiast asymptota ukośna o równaniu $y = -z + \frac{2}{3}$ (por. 25.10c).



Rys. 27.5

B. $p'(z) = \frac{4-3z}{3\sqrt[3]{z(2-z)^2}}$, $z \in Z - \{0, 2\}$, $p'(z) = 0$, jeżeli $z = \frac{4}{3}$. Z kolei $p''(z) = \frac{-8}{9} \frac{1}{\sqrt[3]{z^4(2-z)^3\sqrt{(2-z)^2}}}$, $z \in Z - \{0, 2\}$, punkty $z=0$ i $z=2$ spełniają warunek konieczny istnienia ekstremum oraz istnienia punktu przegięcia, przy czym

$$p'(0^-) = \lim_{z \rightarrow 0^-} \frac{p(z) - p(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{2z^2 - z^3}}{z} = \lim_{z \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{\frac{2}{z}} - 1 = -\infty,$$

$$p'(0^+) = +\infty,$$

$$p'(2^-) = \lim_{z \rightarrow 2^-} \frac{p(z) - p(2)}{z - 2} = \lim_{z \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt[3]{2z^2 - z^3}}{z - 2} = \lim_{z \rightarrow 2^-} \frac{-\sqrt[3]{z^2(z-2)}}{z - 2} =$$

$$= -\lim_{z \rightarrow 2^-} \sqrt[3]{\frac{z^2}{(z-2)^2}} = -\infty = p'(2^+) = p'(2),$$

więc styczne w punktach o odciętych $z=0$ i $z=2$ są prostopadłe do osi Oz . Z kolei $y_{\max} = p(\frac{4}{3}) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{4} \approx 1,07$, $y_{\min} = p(0) = 0$ (por. 24.1a); punkt przegięcia $P(2, 0)$ (por. 25.3b).

C. Tabelka

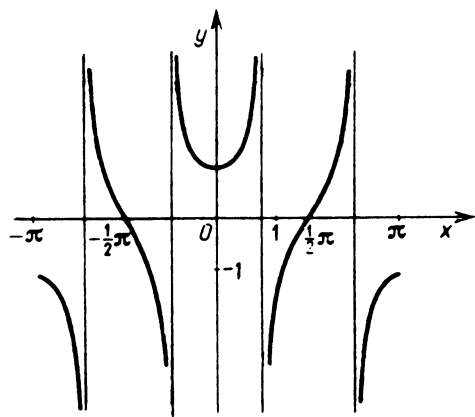
z	$-\infty$	0	$\frac{4}{3}$	2	$+\infty$
$p(z)$	$+\infty$	0	$1,07$	0	$-\infty$
$p'(z)$	$-$	$-\infty$ $+\infty$	0	$-$ $-\infty$	$-\infty$ $-$ $-$
$p''(z)$	$-$	$-$ $-$	$-$	$-$	$+$ $+$
przebieg	↘ ↘		↗ ↗		↘ ↘ ↘

D. Wykres (rys. 27.6)

f) $k(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}$;

D. Wykres (rys. 27.7).

Uwaga. Wykres podaliśmy w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$ korzystając z parzystości funkcji k .



Rys. 27.7

$$g) g(y) = \arccos \frac{y-1}{2y-1};$$

A. Dziedzina $Y = \left\{ y \in \mathbb{R} : \left| \frac{y-1}{2y-1} \right| \leq 1 \right\} = (-\infty, 0) \cup \langle \frac{1}{2}, +\infty \rangle$, $g \in C^0(Y)$; $g(0) = 0$.
 $g(\frac{1}{2}) = \pi$,

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \arccos \frac{y-1}{2y-1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \arccos \frac{1 - \frac{1}{y}}{2 - \frac{1}{y}} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\pi$$

oraz $\lim_{y \rightarrow -\infty} g(y) = \frac{1}{2}\pi$, czyli istnieje asymptota pozioma o równaniu $z = \frac{1}{2}\pi$ ($z = g(y)$).

Innych asymptot wykres funkcji g nie ma.

$$B. g'(y) = \frac{-|2y-1|}{(2y-1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3y^2-2y}} = \begin{cases} \frac{1}{(2y-1)\sqrt{3y^2-2y}} < 0 & \text{dla } y < 0, \\ \frac{-1}{(2y-1)\sqrt{3y^2-2y}} < 0 & \text{dla } y > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

oraz $\lim_{y \rightarrow 0^-} g'(y) = -\infty$ i $\lim_{y \rightarrow \frac{1}{2}^+} g'(y) = -\infty$. Wynika stąd, że na przedziale $(-\infty, 0)$ funkcja g przyjmuje wartość najmniejszą dla $y=0$, tzn. $0 = g(0)$, a na przedziale $\langle \frac{1}{2}, +\infty \rangle$ funkcja g przyjmuje wartość największą w punkcie $y = \frac{1}{2}$, a więc $\pi = g(\frac{1}{2})$, przy czym styczne jedno-

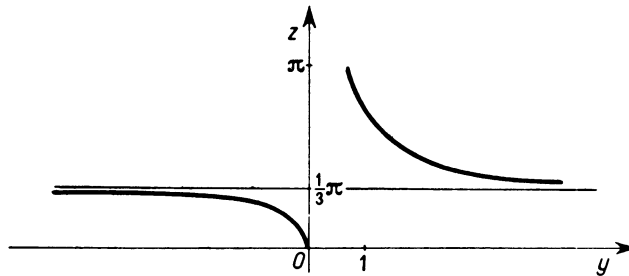
stronne w punktach $y=0$ i $y=\frac{2}{3}$ są pionowe. Z kolei

$$g''(y) = \mp \frac{12y^2 - 9y + 1}{(2y-1)^2(3y^2-2y)^{3/2}}$$

(dla $y < 0$ bierzemy znak „-”, dla $y > \frac{2}{3}$ znak „+”); $g''(y) < 0$ dla $y < 0$ oraz $g''(y) > 0$ dla $y > \frac{2}{3}$.

C. Tabelka

y	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$g(y)$	$\frac{1}{3}\pi$	0	π	$\frac{1}{3}\pi$
$g'(y)$	-	-	$-\infty$	-
$g''(y)$	-	-	+	+
przebieg				



Rys. 27.8

D. Wykres (rys. 27.8).

h) $p(v) = v^v$;

A. Dziedzina $V = \mathbf{R}_+$, $p \in C^0(V)$;

$$\lim_{v \rightarrow 0^+} p(v) = \lim_{v \rightarrow 0^+} v^v = e^{\lim_{v \rightarrow 0^+} (v \ln v)} = 1, \quad \lim_{v \rightarrow +\infty} p(v) = \lim_{v \rightarrow +\infty} e^{v \ln v} = +\infty;$$

wykres funkcji p nie ma asymptot pionowych,

$$m = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{p(v)}{v} = \lim_{v \rightarrow +\infty} v^{v-1} = +\infty, \text{ czyli nie ma asymptoty ukośnej.}$$

B. $p'(v) = (v^v)' = v^v (\ln v + 1)$, $v \in V$;

$$p''(v) = v^v \left[(\ln v + 1)^2 + \frac{1}{v} \right], \quad v \in V;$$

$p'(v) = 0$, jeżeli $v = e^{-1}$, $p''(v) > 0$ dla każdego $v \in V$, zatem

$$y_{\min} = p(e^{-1}) = \frac{1}{\sqrt[e]{e}} \approx 0,7.$$

C. Tabelka

v	0	e^{-1}			$+\infty$
$p(v)$	1	0,7			$+\infty$
$p'(v)$	$-\infty$	-	0	+	+
$p''(v)$	+		+		+
przebieg	↘ ↘		↖ ↖	↗ ↗	↗ ↗

Uwaga. Dodatkowo obliczyliśmy, że $\lim_{v \rightarrow 0^+} p(v) = \lim_{v \rightarrow 0^+} [v^v(\ln v + 1)] = -\infty$, czyli styczna prawostronna w punkcie $v=0$ jest styczną pionową.

D. Wykres (rys. 27.9).

i) $h(u) = (u + b)e^{1/u}$;

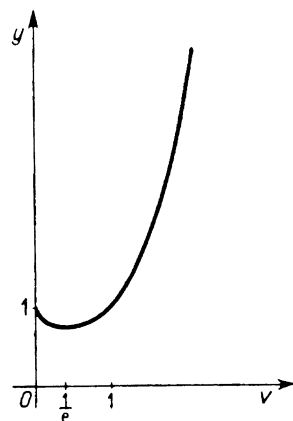
A. Dziedzina $U = \mathbf{R} - \{0\}$, $h \in C^0(U)$,

$$\lim_{u \rightarrow 0^-} h(u) = 0,$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} h(u) = \begin{cases} -\infty & \text{dla } b < 0, \\ +\infty & \text{dla } b > 0, \end{cases}$$

zatem istnieje asymptota pionowa prawostronna o równaniu $u=0$; $\lim_{u \rightarrow +\infty} h(u) = +\infty$ oraz $\lim_{u \rightarrow -\infty} h(u) = -\infty$.

Krzywa ma asymptotę ukośną o równaniu $y = u + 1 + b$ (por. 25.10g).



Rys. 27.9

B. $h'(u) = \frac{e^{1/u}}{u^2} (u^2 - u - b)$, $u \in U$, $h'(u) = 0$, jeżeli

(a) $u^2 - u - b = 0$,

czyli dla $u_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{4b+1})$.

Rozpatrzmy trzy przypadki:

α) $b < -\frac{1}{4}$. Wówczas nie istnieją pierwiastki rzeczywiste równania (a), przy czym $h'(u) > 0$ dla każdego $u \in U$.

β) $b = -\frac{1}{4}$. To $u_{1,2} = \frac{1}{2}$, przy czym $h'(u) > 0$ dla wszystkich $u \in U$ i $u \neq \frac{1}{2}$, a więc w punkcie $u = \frac{1}{2}$ nie ma ekstremum.

γ) $b > -\frac{1}{4}$. Istnieją dwa pierwiastki rzeczywiste $u_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{4b+1})$, przy czym jest $y_{\max} = h(u_1)$ i $y_{\min} = h(u_2)$. Z kolei

$$h''(u) = \frac{e^{1/u}}{u^4} [(2b+1)u + b], \quad u \in U,$$

$h''(u) = 0$, jeżeli $u = \frac{-b}{2b+1}$ ($b \neq -\frac{1}{2}$). Łatwo stwierdzamy, że wykres funkcji h ma punkt

przebiegania $P\left(\frac{-b}{2b+1}, \frac{2b^2}{1+2b} e^{-\frac{1+2b}{b}}\right)$. W szczególności, dla $b = -\frac{1}{4}$ jest $u = \frac{1}{2}$ oraz punkt

przebiega $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^2 \approx 1,9)$. Znajdziemy dodatkowo granicę

$$\lim_{u \rightarrow 0^-} h'(u) = \lim_{u \rightarrow 0^-} \left[\frac{e^{1/u}}{u^2} (u^2 - u - b) \right].$$

Otóż

$$\lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/u}}{u^2} = \lim_{\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]} \frac{1/u^2}{e^{-1/u}} \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

Zatem

$$\lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{(1/u^2)'}{(e^{-1/u})'} = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{-2/u^3}{e^{-1/u} \cdot \frac{1}{u^2}} = -2 \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/u}}{u} = -2 \lim_{\left[\begin{smallmatrix} \infty \\ 0 \end{smallmatrix} \right]} \frac{1}{u} \left[\frac{\infty}{\infty} \right];$$

stąd

$$\lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\left(\frac{1}{u} \right)'}{(e^{-1/u})'} = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{-1/u^2}{e^{-1/u} \cdot \frac{1}{u^2}} = - \lim_{u \rightarrow 0^-} e^{1/u} = 0 = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/u}}{u^2}.$$

Czyli $\lim_{u \rightarrow 0^-} h'(u) = 0 \cdot (-b) = 0$.

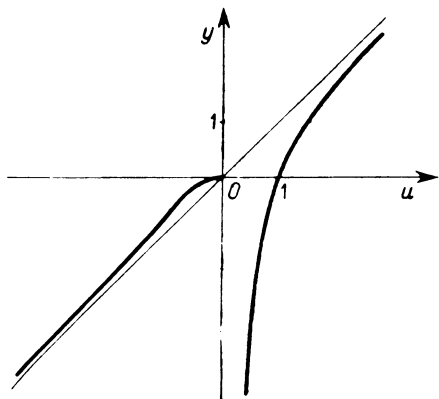
C. Tabelka. Uwzględnimy trzy przypadki, np. $\alpha_1) b = -1$, $\alpha_2) b = -\frac{1}{2}$ i $\alpha_3) b = 2$.

b	u	$-\infty$	-2	-1	$-0,4$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
-1	$h(u)$	$-\infty$		$-0,74$		0	$-\infty$		0		$+\infty$
	$h'(u)$	$+$	$+$	$+$		0	$+$	$+$	e	$+$	$+$
	$h''(u)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
	przebieg	\nearrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow		\nearrow		\nearrow		\nearrow
-1/2	$h(u)$	$-\infty$				0	$-\infty$	0	$1,85$		$+\infty$
	$h'(u)$	$+$	$+$	$+$		0	$+$	0	$+$		$+$
	$h''(u)$	$-$	$-$	$-$		$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
	przebieg	\nearrow		\nearrow		\nearrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow
2	$h(u)$	$-\infty$	0	$0,3$	$0,13$	0	$+\infty$			$6,6$	$+\infty$
	$h'(u)$	$+$	$0,6$	0	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
	$h''(u)$	$-$	$-$		0	$+$	$+$		$+$	$+$	$+$
	przebieg	\nearrow	\nearrow	\curvearrowright	\curvearrowright	\curvearrowright	\curvearrowright	\curvearrowright	\curvearrowright	\curvearrowright	\curvearrowright

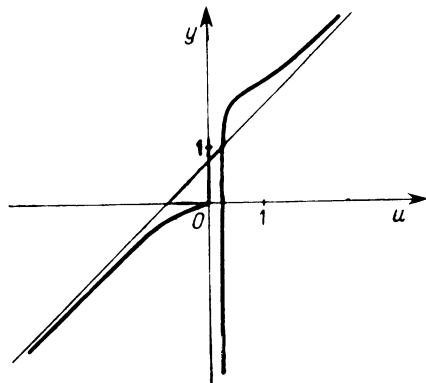
D. Wykres (rysunki 27.10, 27.11, 27.12).

j) $x(t) = A e^{-kt} \sin \omega t$;

A. Dziedzina $T = \langle 0, +\infty \rangle$, $x \in C^0(T)$; $x(t_n) = 0$ dla $t_n = n\pi/\omega$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (w dalszym ciągu występująca w zadaniu zmienna n będzie przebiegać zbiór liczb: $0, 1, 2, \dots$;



Rys. 27.10



Rys. 27.11

w przeciwnym przypadku oddzielnie to zaznaczmy), w szczególności $x(0)=0$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [(A \sin \omega t) e^{-kt}] = 0,$$

ponieważ

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-kt} = 0 \quad (k > 0) \wedge |A \sin \omega t| \leq 1, \quad t \in T.$$

Wykres funkcji x posiada więc asymptotę poziomą dla $t \rightarrow +\infty$ o równaniu $y=0$. Asymptoty pionowe nie istnieją.

B. $x'(t) = -A \sqrt{\omega^2 + k^2} e^{-kt} \sin(\omega t - \varphi)$, $t \in T$,
gdzie

(a) $\varphi = \arctg \frac{\omega}{k} > 0$;

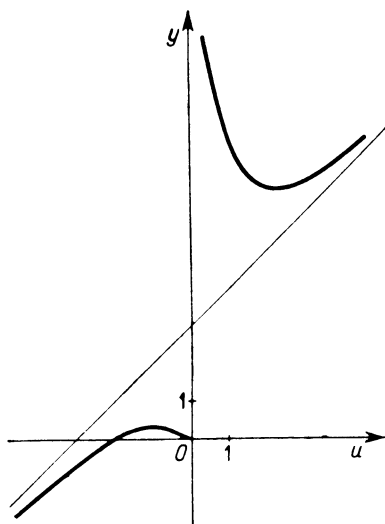
$x''(t) = A(\omega^2 + k^2) e^{-kt} \sin(\omega t - 2\varphi)$, $t \in T$, gdzie liczba φ określona jest wzorem (a); $x'(t)=0$, jeżeli $t_n^* = (n\pi + \varphi)/\omega$, $y_{\max} = x(t_{2n}^*)$ i $y_{\min} = x(t_{2n+1}^*)$ (por. 24.1c) $x''(t)=0$, jeżeli $t'_n = (n\pi + 2\varphi)/\omega$, punkty przegięcia $P(t'_{2n}, x(t'_{2n}))$ i $Q(t'_{2n+1}, x(t'_{2n+1}))$ (por. 25.3f). Przed podaniem tabelki ustalimy wzajemne położenia punktów t_n , t_n^* , t'_n . Otóż

$$t_n = n \frac{\pi}{\omega} < t_n^* = n \frac{\pi}{\omega} + \frac{\varphi}{\omega} < t'_n = n \frac{\pi}{\omega} + \frac{2\varphi}{\omega},$$

czyli między punktami przecięcia wykresu funkcji x z osią Ot występuje zawsze najpierw ekstremum, a potem punkt przegięcia.

Z kolei zauważmy, że

$$|x(t)| = |Ae^{-kt} \sin \omega t| = Ae^{-kt} |\sin \omega t| \leq Ae^{-kt} \quad (|\sin \omega t| \leq 1),$$



Rys. 27.12

czyli $-Ae^{-kt} \leq x(t) \leq Ae^{-kt}$. A więc wykres funkcji x leży między wykresami funkcji określonych wzorami $\varphi_1(t) = -Ae^{-kt}$ i $\varphi_2(t) = Ae^{-kt}$, przy czym $x(t) = Ae^{-kt}$ dla $t_n = (\frac{1}{2}\pi + n\pi)/\omega$, $n=0, 2, 4, \dots$ oraz $x(t) = -Ae^{-kt}$ dla $t_n = (\frac{1}{2}\pi + n\pi)/\omega$, $n=1, 3, 5, \dots$, czyli punkty A_n o odciętych t_n są wspólnymi punktami wykresu funkcji x i wykresów funkcji φ_1 ($n=1, 3, 5, \dots$) i φ_2 ($n=0, 2, 4, \dots$). Zauważmy ponadto, że

$$\begin{aligned} x'(t_n) &= -Ae^{-kt_n}[-\omega \cos(\omega t_n) + k \sin(\omega t_n)] = \\ &= -kAe^{-kt_n} \sin(\omega t_n) = (-1)^{n+1} kAe^{-kt_n} = \\ &= \begin{cases} -kAe^{-kt_{2n}} = \varphi_2'(t_{2n}), \\ kAe^{-kt_{2n+1}} = \varphi_1'(t_{2n+1}), \end{cases} \end{aligned}$$

α więc w punktach A_n wykres funkcji x ma wspólne styczne z wykresami funkcji φ_2 ($n=0, 2, 4, \dots$) i φ_1 ($n=1, 3, 5, \dots$) (mówimy, że wykres funkcji x jest styczny do wykresów funkcji φ_1 i φ_2 w punktach A_n).

Punkty (na osi Ot) $t_n = n \frac{\pi}{\omega} + \frac{\pi}{2\omega}$ są środkami odcinków o końcach t_n i t_{n+1} , przy czym $t_n^* < t_n$, ponieważ zawsze $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$; natomiast $t_n < t_n'$, jeżeli $\omega > k$ i $t_n' < t_n$, jeżeli $\omega < k$. Istotnie, jeżeli $\omega > k$ [$\omega < k$], to $\varphi = \arctg(\omega/k) > \frac{1}{4}\pi$ [$\varphi < \frac{1}{4}\pi$], czyli

$$2\varphi > \frac{1}{2}\pi \quad [2\varphi < \frac{1}{2}\pi], \quad \text{zatem} \quad \frac{2\varphi}{\omega} > \frac{\pi}{2\omega} \quad \left[\frac{2\varphi}{\omega} < \frac{\pi}{2\omega} \right],$$

a więc

$$t_n' = \frac{2\varphi}{\omega} + n\pi > n\pi + \frac{\pi}{2\omega} = t_n \quad \left[t_n' = \frac{2\varphi}{\omega} + n\pi < n\pi + \frac{\pi}{2\omega} = t_n \right].$$

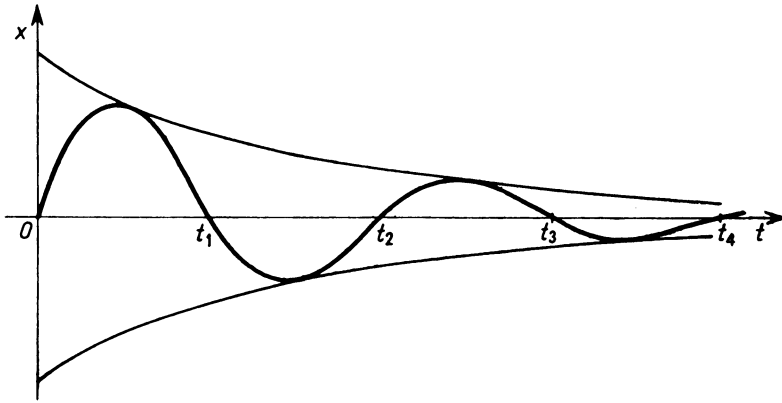
Geometrycznie oznacza to, że punkty ekstremalne wykresu leżą zawsze „na lewo” od punktów A_n (w każdym z przedziałów $\langle t_n, t_{n+1} \rangle$), natomiast punkty przegięcia wykresu w przypadku gdy $\omega > k$ [$\omega < k$] leżą „na prawo” [„na lewo”] od punktów A_n (w każdym z przedziałów $\langle t_n, t_{n+1} \rangle$).

C. Tabelka

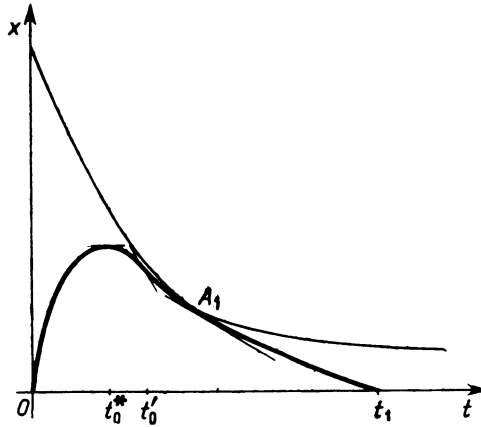
	t	0	t_0^*	t_0	t_0'	t_1	t_1^*	t_1	t_1'	t_2	t_2^*	t_2	t_2'	$t_3 \dots$	t_n	t_n^*	t_n	t_n'	$t_n \dots$
$\omega > k$	$x(t)$	0				0				0				0	0				...
	$x'(t)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	...	0				...
	$x''(t)$	-	-		0	+	+		0	-		-	0	+	...				0
	przebieg														...				
$\omega < k$	t	0	t_0^*	t_0	t_0'	t_1	t_1^*	t_1	t_1'	t_2	t_2^*	t_2	t_2'	$t_3 \dots$	t_n	t_n^*	t_n	t_n'	$t_n \dots$
	$x(t)$	0				0				0				0	0				...
	$x'(t)$	+	0	-	-		0	+	+		0	-	-	...	0				...
	$x''(t)$	-	-	0	+		+	0	-	-		0	+	...				0	...
przebieg													

D. Wykres (rys. 27.13 i rys. 27.14).

Uwaga. W przypadku $\omega < k$ podaliśmy wykres tylko w przedziale $\langle 0, t_1 \rangle$.



Rys. 27.13



Rys. 27.14

Zadania

27.2. Zbadać funkcje określone wzorami:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 5$; b) $g(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 2t + 3$;

c) $h(u) = u^3 - 3u - 2$; d) $f(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2$;

e) $k(z) = (z+2)^2(z-1)^3$; f) $p(t) = t + 1/t$;

g) $y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$; h) $d(u) = \frac{u^2 + 1}{u^2 - 4}$; i) $k(t) = \frac{1}{t} + \frac{2t}{t^2 - 1}$;

$$\text{j)} w(z) = \frac{z^3}{z^2 - 2}; \quad \text{k)} f(v) = \frac{(v-1)^3}{(v+1)^2};$$

$$\text{l)} W(t) = \frac{t^3 + 1}{t^3 - 1}; \quad \text{ł)} h(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{10}{3x^2} + \frac{1}{1-x};$$

$$\text{m)} t(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3}; \quad \text{n)} p(u) = (u-3)\sqrt{u}; \quad \text{o)} m(t) = (t+1)^3 \sqrt[3]{t^2};$$

$$\text{p)} u(z) = \sqrt{\frac{z^3}{z-a}} \quad (a > 0); \quad \text{r)} z(x) = (x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3};$$

$$\text{s)} x(z) = \frac{10\sqrt[3]{(z-1)^2}}{z^2 + 9}; \quad \text{t)} a(x) = e^{-x^2}; \quad \text{u)} b(u) = ue^{u^3};$$

$$\text{w)} z(h) = h^2 e^{-h^2}; \quad \text{x)} t(x) = \frac{x^3}{e^x}; \quad \text{y)} f(a) = \frac{e^a}{1+a};$$

$$\text{z)} d(t) = e^{2t-t^2}; \quad \text{a}_1) x(t) = \sqrt[3]{t^2} e^{-t};$$

$$\text{b}_1) k(p) = pe^{1/p}; \quad \text{c}_1) r(x) = (x^2 + 2)e^{-x^2}; \quad \text{d}_1) l(z) = e^{1/(z^2 - 4z + 3)};$$

$$\text{e}_1) c(a) = a^2 \ln a; \quad \text{f}_1) n(x) = \ln(x^2 - 1); \quad \text{g}_1) s(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}};$$

$$\text{h}_1) t(b) = \frac{b}{\ln b}; \quad \text{i}_1) f(p) = \ln\left(e + \frac{1}{p}\right); \quad \text{j}_1) w(y) = \ln \sinh y;$$

$$\text{k}_1) u(c) = \sin c \sin 2c; \quad \text{l}_1) p(r) = \frac{\sin r}{\sin(r + \frac{1}{4}\pi)}; \quad \text{ł}_1) p(x) = \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x;$$

$$\text{m}_1) z(a) = 2a - \operatorname{tg} a; \quad \text{n}_1) g(x) = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x; \quad \text{o}_1) p(x) = \operatorname{arc} \sin \frac{2x}{1+x^2};$$

$$\text{p}_1) A(t) = \operatorname{arc} \cos \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \text{r}_1) z(t) = a \operatorname{arc} \sin \frac{t}{a} - \sqrt{a^2 - t^2} \quad (a > 0);$$

$$\text{s}_1) k(t) = |t|e^{-|t-1|}; \quad \text{t}_1) F(t) = |t|^{1/t};$$

$$\text{u}_1) B(x) = (1+x)^{1/x} \quad (x > -1); \quad \text{w}_1) f(x) = \frac{\sin x}{x};$$

$$\text{x}_1) S(t) = Ae^{-kt} \cos \omega t \quad (t \geq 0, A > 0, k > 0, \omega > 0)$$

oraz narysować ich wykresy.

Odpowiedzi (1)

27.2. a) $X = \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $f(0) = -5$, $f'(x) > 0$ dla $x \in X$,

p. przeg. (2) $P(1, -1)$;

b) $T = \mathbb{R}$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = -\infty$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty$, $g(0) = 3$, $y_{\max} = g(-1) = \frac{25}{6}$, $y_{\min} = g(2) = -\frac{1}{3}$, p. przeg. $P(\frac{1}{2}, \frac{23}{12})$;

c) $U = \mathbb{R}$, $\lim_{u \rightarrow -\infty} h(u) = -\infty$, $\lim_{u \rightarrow +\infty} h(u) = +\infty$, $h(0) = -2$, $h(2) = 0$, $y_{\max} = h(-1) = 0$, $y_{\min} = h(1) = -4$, p. przeg. $P(0, -2)$;

d) $T = \mathbb{R}$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$, $f(\mp\sqrt{6}) = 0$, $y_{\max} = f(0) = 0$, $y_{\min} = f(\mp\sqrt{3}) = -\frac{9}{4}$, p. przeg. $P_1(-1, -\frac{5}{4})$, $P_2(1, -\frac{5}{4})$, wykres jest symetryczny względem osi Oy ;

e) $Z = \mathbb{R}$, $\lim_{z \rightarrow -\infty} k(z) = -\infty$, $\lim_{z \rightarrow +\infty} k(z) = +\infty$, $k(0) = -4$, $y_{\max} = k(-2) = 0$, $y_{\min} = k(-0,8) \approx -8,4$, p. przeg. $P_1(-1,53, \approx -3,58)$, $P_2(-0,07, \approx -4,56)$, $P_3(1, 0)$;

f) $T = \mathbb{R} - \{0\}$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} p(t) = -\infty$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = +\infty$, as. pion. obus. (3) $t = 0$, as. uk. $y = t$, $y_{\max} = p(-1) = -2$, $y_{\min} = p(1) = 2$, wykres symetryczny względem początku układu;

g) $X = \mathbb{R} - \{0\}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$, as. pion. obus. $x = 0$, $y_{\min} = y(1) = \frac{1}{2}$, p. przeg. $P(-\sqrt[3]{2}, 0)$;

h) $U = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, as. pion. obus.: $u = \mp 2$, as. poz. $y = 1$, $y_{\max} = d(0) = -\frac{1}{4}$;

i) $T = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$, as. pion. obus.: $t = 0$, $t = \mp 1$, as. poz. $y = 0$, $k(\mp\frac{1}{3}\sqrt{3}) = 0$, $k'(t) < 0$ dla $t \in T$, p. przeg.: $P_1(t_1, k(t_1))$, gdzie $-\frac{1}{3}\sqrt{3} < t_1 < -\frac{1}{2}$, $P_2(t_2, k(t_2))$, gdzie $\frac{1}{2} < t_2 < \frac{1}{3}\sqrt{3}$;

j) $Z = \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, as. pion. obus.: $z = \mp\sqrt{2}$, $\lim_{z \rightarrow -\infty} w(z) = -\infty$, $\lim_{z \rightarrow +\infty} w(z) = +\infty$, as. uk. $y = z$, $y_{\max} = w(-\sqrt{6}) = -\frac{3}{2}\sqrt{6}$, $y_{\min} = w(\sqrt{6}) = \frac{3}{2}\sqrt{6}$, p. przeg. $O(0, 0)$, wykres symetryczny względem początku układu;

k) $V = \mathbb{R} - \{-1\}$, as. pion. obus. $v = -1$, $\lim_{v \rightarrow -\infty} f(v) = -\infty$, $\lim_{v \rightarrow +\infty} f(v) = +\infty$, as. uk. $y = v - 5$, $f(0) = -1$, $y_{\max} = f(-5) = -\frac{27}{2}$, p. przeg. $P(1, 0)$;

l) $T = \mathbb{R} - \{1\}$, as. pion. obus. $t = 1$, as. poz. $y = 1$, $W(-1) = 0$, p. przeg.: $P_1(-2^{-1/3}, -\frac{1}{3})$, $P_2(0, -1)$;

ł) $X = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$, as. pion. obus.: $x = 0$ i $x = \mp 1$, as. poz. $y = 0$, $h(\mp\frac{1}{4}\sqrt{10}) = 0$, p. przeg. $P_1(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{8}{3})$, $P_2(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{8}{3})$, wykres symetryczny względem osi Oy ;

m) $X = \mathbb{R} - \{-1\}$, as. pion. obus. $x = -1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} t(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} t(x) = +\infty$, as. uk. $y = x - 3$, $y_{\min} = t(0) = 0$, $y_{\max} = t(-4) = -\frac{256}{27}$;

n) $U = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $\lim_{u \rightarrow +\infty} p(u) = +\infty$, $p(0) = 0$, $y_{\min} = p(1) = -2$, $\lim_{u \rightarrow 0^+} p'(u) = -\infty$, $p''(u) > 0$ dla $0 < u < +\infty$;

(1) W odpowiedzi uwzględniamy tylko pewne dane o funkcji.

(2) Przyjmujemy skróty: p. przeg. – punkt przegięcia lub punkty przegięcia.

(3) Przyjmujemy skróty: as. – asymptota, poz. – pozioma, pion. – pionowa, uk. – ukośna, praw. – prawostronna, lew. – lewostronna, obus. – obustronna.

o) $T = \mathbb{R}$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} m(t) = -\infty$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} m(t) = +\infty$, p. przeg. $P(-1, 0)$, $y_{\min} = m(0) = 0$ (ostrze), $y_{\max} = m(-\frac{2}{11}) = 2^{2/3} \cdot 3^6 \cdot 11^{-11/3}$,

p. przeg. $P_1\left(\frac{-4-3\sqrt{3}}{22}, m\left(\frac{-4-3\sqrt{3}}{22}\right)\right)$, $P_2\left(\frac{-4+3\sqrt{3}}{22}, m\left(\frac{-4+3\sqrt{3}}{22}\right)\right)$;

p) $Z = (-\infty, 0) \cup (a, +\infty)$, as. pion. praw. $z = a$, $u(0) = 0$, $\lim_{z \rightarrow -\infty} u(z) = +\infty$, $\lim_{z \rightarrow +\infty} u(z) = +\infty$, as. uk. dla $z \rightarrow -\infty$: $y = -z - \frac{1}{2}a$, as. uk. dla $z \rightarrow +\infty$: $y = z + \frac{1}{2}a$,
 $\lim_{z \rightarrow 0^-} u'(z) = 0$, $y_{\min} = u(\frac{3}{2}a) = \frac{3}{2}\sqrt{3}a$;

r) $X = \mathbb{R}$, as. poz. $y = 0$, p. przeg. $O(0, 0)$, $y_{\min} = z(-1) = -\sqrt[3]{4}$ (ostrze), $y_{\max} = z(1) = \sqrt[3]{4}$ (ostrze), wykres jest symetryczny względem początku układu;

s) $Z = \mathbb{R}$, as. poz. $y = 0$, $x(0) = \frac{10}{9}$, $y_{\max} = x(-\frac{3}{2}) = \frac{4}{9}\sqrt[3]{50}$, $y_{\min} = x(1) = 0$ (ostrze), $y_{\max} = x(3) = \frac{5}{9}\sqrt[3]{4}$, p. przeg. $P_1(z_1, x(z_1))$, gdzie $z_1 \in (-4, -3)$, $P_2(z_2, x(z_2))$, gdzie $z_2 \in (3, 4)$;

t) $X = \mathbb{R}$, as. poz. $y = 0$, $y_{\max} = a(0) = 1$, p. przeg. $P_1\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, $P_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$;

u) $U = \mathbb{R}$, as. poz. dla $u \rightarrow -\infty$: $y = 0$, $\lim_{u \rightarrow +\infty} b(u) = +\infty$, $b(0) = 0$, $y_{\min} = b\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{3}}\right) \approx -0,45$, p. przeg. $P(-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \approx -0,3)$;

w) $H = \mathbb{R}$, as. poz. $y = 0$, $y_{\min} = z(0) = 0$, $y_{\max} = z(\mp 1) = 1/e$, $h_{1/2} = \mp \frac{1}{2}(\sqrt{5 + \sqrt{17}})$, $h_{3/4} = \mp \frac{1}{2}(\sqrt{5 - \sqrt{17}})$ odcięte punktów przegięcia wykresu;

x) $X = \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} t(x) = -\infty$, as. poz. dla $x \rightarrow +\infty$: $y = 0$, $y_{\max} = t(3) = 27/e^3$, p. przeg. $O(0, 0)$, $P_1(3 - \sqrt{3}, t(3 - \sqrt{3}))$, $P_2(3 + \sqrt{3}, t(3 + \sqrt{3}))$;

y) $A = \mathbb{R} - \{-1\}$, as. pion. obus. $a = -1$, as. poz. dla $a \rightarrow -\infty$: $y = 0$, $\lim_{a \rightarrow +\infty} f(a) = +\infty$, $y_{\min} = f(0) = 1$;

z) $T = \mathbb{R}$, as. poz. $y = 0$, $d(0) = 1$, $y_{\max} = d(1) = e$, p. przeg.:

$$P_1(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}, \approx 1,65), \quad P_2(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}, \approx 1,65);$$

a₁) $T = \mathbb{R}$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = +\infty$, as. poz. dla $t \rightarrow +\infty$: $y = 0$, $y_{\min} = x(0) = 0$ (ostrze), $y_{\max} = x(\frac{3}{2}) \approx 0,39$, p. przeg.:

$$P_1(\frac{1}{3}(2 - \sqrt{6}), \approx 0,34), \quad P_2(\frac{1}{3}(2 + \sqrt{6}), \approx 0,3);$$

b₁) $P = \mathbb{R} - \{0\}$, as. pion. praw. $p = 0$, $\lim_{p \rightarrow -\infty} k(p) = -\infty$, $\lim_{p \rightarrow +\infty} k(p) = +\infty$, $\lim_{p \rightarrow 0^-} k(p) = 0$, $\lim_{p \rightarrow 0^-} k'(p) = 0$, $y_{\min} = k(1) = e$, as. uk. $y = p + 1$;

c₁) $X = \mathbb{R}$, as. poz. $y = 0$, $y_{\max} = r(0) = 2$, p. przeg.: $P_1(-1, 3/e)$, $P_2(1, 3/e)$, wykres symetryczny względem osi Oy ;

d₁) $Z = \mathbb{R} - \{1, 3\}$, as. pion. lew. $z = 1$, $\lim_{z \rightarrow 1^+} l(z) = 0$, as. pion. praw. $z = 3$, $\lim_{z \rightarrow 3^-} l(z) = 0$, as. poz. $y = 1$, $\lim_{z \rightarrow 1^+} l'(z) = +\infty$, $\lim_{z \rightarrow 3^-} l'(z) = -\infty$, $y_{\max} = l(2) = 1/e$;

e₁) $A = \mathbf{R}_+$, $\lim_{a \rightarrow 0^+} c(a) = 0$, $\lim_{a \rightarrow 0^+} c'(a) = 0$, $\lim_{a \rightarrow +\infty} c(a) = +\infty$, $c(1) = 0$, $y_{\min} = c(e^{-1/2}) = -1/(2e)$, p. przeg. $P(e^{-3/2}, -3/(2e^3))$;

f₁) $X = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, as. pion. lew. $x = -1$, as. pion. praw. $x = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} n(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} n(x) = +\infty$, $n(\mp\sqrt{2}) = 0$;

g₁) $X = \mathbf{R}_+$, as. pion. praw. $x = 0$, as. poz. dla $x \rightarrow +\infty: y = 0$, $s(1) = 0$, $y_{\max} = s(e^2) = 2/e$, p. przeg. $P(e^{8/3}, 8/(3e^3\sqrt{e}))$;

h₁) $B = (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $\lim_{b \rightarrow 0^+} t(b) = 0$, $\lim_{b \rightarrow 0^+} t'(b) = 0$, as. pion. obus. $b = 1$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t(b) = +\infty$, $y_{\min} = t(e) = e$, p. przeg. $P(e^2, \frac{1}{2}e^2)$;

i₁) $P = (-\infty, -e^{-1}) \cup (0, +\infty)$, as. pion. lew. $p = -1/e$, as. pion. praw. $p = 0$, as. poz. $y = 1$, $f(1/(1-e)) = 0$;

j₁) $Y = \mathbf{R}_+$, as. pion. praw. $y = 0$, $\lim_{y \rightarrow +\infty} w(y) = +\infty$, as. uk. dla $y \rightarrow +\infty: z = y - \ln 2$ ($z = w(y)$), $w(\ln(1 + \sqrt{2})) = 0$;

k₁) $C = \mathbf{R}$, funkcja okresowa o okresie 2π , funkcja parzysta, $y_{\max} = u(\arccos \frac{1}{2}\sqrt{3}) = \frac{4}{9}\sqrt{3}$, $y_{\max} = u(\pi) = 0$, $y_{\min} = u(\arccos(-\frac{1}{3}\sqrt{3})) = -\frac{4}{9}\sqrt{3}$, $y_{\min} = u(0) = 0$, p. przeg. $P_1(\frac{1}{2}\pi, 0)$, $P_2(\arcsin \frac{1}{3}\sqrt{2}, \frac{4}{27}\sqrt{7})$, $P_3(\pi - \arcsin \frac{1}{3}\sqrt{2}, -\frac{4}{27}\sqrt{7})$;

l₁) Dziedzina $R_1 = \{r \in \mathbf{R}: r \neq k\pi - \frac{1}{4}\pi, k \in \mathbf{C}\}$, funkcja okresowa o okresie π , as. pion. obus. $r = k\pi - \frac{1}{4}\pi, k \in \mathbf{C}$, $p(k\pi) = 0, k \in \mathbf{C}$, $p'(r) > 0$ dla $r \in R_1$, p. przeg. $P(k\pi + \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\sqrt{2}), k \in \mathbf{C}$;

ł₁) $X = \mathbf{R}$, funkcja okresowa o okresie 2π , funkcja parzysta, $p(\mp \arccos \frac{1 - \sqrt{3}}{2}) = 0$, $y_{\min} = p(0) = \frac{1}{2}$, $y_{\min} = p(\mp\pi) = -\frac{1}{2}$, $y_{\max} = p(\mp\frac{1}{2}\pi) = \frac{3}{4}$, p. przeg.

$$P_1\left(-\arccos \frac{1 - \sqrt{33}}{8}, \approx -0,44\right), \quad P_2\left(-\arccos \frac{1 + \sqrt{33}}{8}, \approx 0,63\right),$$

$$P_3\left(\arccos \frac{1 + \sqrt{33}}{8}, \approx 0,63\right), \quad P_4\left(\arccos \frac{1 - \sqrt{33}}{8}, \approx 0,44\right);$$

m₁) $A = \{a \in \mathbf{R}: a \neq (2k+1)\frac{1}{2}\pi, k \in \mathbf{C}\}$, as. pion. obus. $a = (2k+1)\frac{1}{2}\pi, k \in \mathbf{C}$, $z(0) = 0$, $z(\approx \mp 0,37\pi) = 0$, $y_{\max} = z(\frac{1}{2}\pi + k\pi) = \frac{1}{2}\pi - 1 + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$, $y_{\min} = z(-\frac{1}{2}\pi - k\pi) = -(\frac{1}{2}\pi - 1 + 2k\pi), k \in \mathbf{C}$, p. przeg. $P(2k\pi, 4k\pi)$, $Q((2k+1)\pi, 2(2k+1)\pi), k \in \mathbf{C}$, wykres symetryczny względem początku układu;

n₁) $X = \mathbf{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, as. uk. dla $x \rightarrow -\infty: y = -\frac{1}{2}\pi x - 1$, as. uk. dla $x \rightarrow +\infty: y = \frac{1}{2}\pi x - 1$, $y_{\min} = g(0) = 0$, wykres symetryczny względem osi Oy ;

o₁) $X = \mathbf{R}$, as. poz. $y = 0$, $y_{\min} = p(-1) = -\frac{1}{2}\pi$ (ostrze), $y_{\max} = p(1) = \frac{1}{2}\pi$ (ostrze), p. przeg. $O(0, 0)$, wykres symetryczny względem początku układu;

p₁) $T = \mathbf{R}$, as. poz. $y = \pi$, $y_{\min} = A(0) = 0$ (ostrze), wykres symetryczny względem osi Oy ;

r₁) $T = \langle -a, a \rangle$, $z(-a) = -\frac{1}{2}\pi a$, $z(a) = \frac{1}{2}\pi a$, $z(0) = -a$, $z'(t) > 0$ dla $|t| < a$, $z''(t) > 0$ dla $|t| < a$, $\lim_{t \rightarrow -a^+} z'(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow a^-} z'(t) = +\infty$;

$s_1)$ $T = \mathbf{R}$, as. poz. $y=0$, $y_{\max} = k(-1) = e^{-2}$, $y_{\min} = k(0) = 0$, $k'(0^-) = -e^{-1}$, $k'(0^+) = e^{-1}$, punkt $O(0, 0)$ – punkt kątowy, $y_{\max} = k(1) = 1$, $k'(1^-) = 2$, $k'(1^+) = 0$, punkt $P_2(1, 1)$ – punkt kątowy, p. przeg. $P_1(-2, 2e^{-3})$, $O(0, 0)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(2, 2e^{-1})$;

$t_1)$ $T = \mathbf{R} - \{0\}$, $\lim_{t \rightarrow 0^-} F(t) = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = 0$, as. pion. lew. $t=0$, as. poz. $y=1$, $y_{\min} = F(-e) \approx 0,69$, $y_{\max} = F(e) \approx 1,44$, p. przeg. $P_1(t_1, F(t_1))$, gdzie $t_1 \in (-e^{1,55}, -e^{1,5})$, $P_2(t_2, F(t_2))$, gdzie $t_2 \in (e^{-1}, 1)$, $P_3(t_3, F(t_3))$, gdzie $t_3 \in (e^{1,45}, e^{1,5})$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} F'(t) = 0$;

$u_1)$ $X = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, as. pion. praw. $x = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0} B(x) = e$, as. poz. dla $x \rightarrow +\infty$: $y=1$, $B'(x) < 0$ dla $x \in X$, $B''(x) > 0$ dla $x \in X$;

$w_1)$ $X = \mathbf{R} - \{0\}$, funkcja parzysta, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, as. poz. $y=0$, $f(k\pi) = 0$, $k \in \mathbf{N}$, $y_{\min} = f(x_k)$ dla $k=1, 3, 5, \dots$, $y_{\max} = f(x_k)$ dla $k=2, 4, 6, \dots$, gdzie liczby x_k dla $k \in \mathbf{N}$ są pierwiastkami równania $\operatorname{tg} x - x = 0$, przy czym $k\pi < x_k < k\pi + \frac{1}{2}\pi$ dla $k=1, 2, 3, \dots$, w każdym z przedziałów (x_k, x_{k+1}) dla $k \in \mathbf{N}$ i $(0, x_1)$ krzywa ma po jednym punkcie przecięcia,

$\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ dla $x \in X$;

$x_1)$ $T = \langle 0, +\infty \rangle$, $S(0) = A$, as. poz. dla $t \rightarrow +\infty$: $y=0$, $S(t_n) = 0$, gdzie $t_n = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{n\pi}{\omega}$

dla $n=0, 1, 2, \dots$, $y_{\min} = S\left(\frac{n\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega}\right)$ dla $n=1, 3, 5, \dots$, $y_{\max} = S\left(\frac{n\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega}\right)$ dla $n=2, 4, 6, \dots$ p. przeg.: $P(t'_n, S(t'_n))$ dla $n=0, 2, 4, \dots$ i dla $k < \omega$, $P(t'_n, S(t'_n))$ dla $n=2, 4, 6, \dots$ i dla $k \geq \omega$, $Q(t'_n, S(t'_n))$ dla $n=1, 3, 5, \dots$, gdzie $t'_n = (\frac{1}{2}\pi + n\pi - 2\varphi)/\omega$, $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(k/\omega)$, $-Ae^{-kt} \leq S(t) \leq Ae^{-kt}$ dla $t \in T$.

§ 28. BADANIE ZMIENNOŚCI FUNKCJI OKREŚLONYCH PARAMETRYCZNIE

28.1. Jeżeli dane są funkcje $x: \mathbf{R} \supset T \ni t \rightarrow x(t) \in \mathbf{R}$, $y: \mathbf{R} \supset T \ni t \rightarrow y(t) \in \mathbf{R}$, to przy pewnych założeniach o funkcjach x i y , zbiór $W = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: x = x(t) \wedge y = y(t), t \in T\}$ nazywamy *krzywą określoną parametrycznie* oraz równania

$$(1) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in T$$

nazywamy *równaniami parametrycznymi krzywej*.

Jeżeli pochodna x' [y'] jest stałego znaku na $T_1 \subset T$, to badanie krzywej o równaniach (1) można sprowadzić do badania funkcji określonej wzorem

$$(2) \quad f(x) = (y \circ g)(x) = y(g(x)), \quad x \in X_1 \quad [h(y) = (x \circ k)(y) = x(k(y)), \quad y \in Y_1],$$

gdzie $g = x^{-1}$, $k = y^{-1}$, przy czym

$$(3) \quad f'_x(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad \left[h'_y(y) = \frac{x'(t)}{y'(t)} \right],$$

$$(4) \quad f''_x(x) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{x'^3(t)} \quad \left[h''_y(y) = \frac{y'(t)x''(t) - x'(t)y''(t)}{y'^3(t)} \right].$$

Jeżeli $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$, to punkt $P_0(x(t_0), y(t_0))$ nazywamy *punktem osobliwym krzywej* o równaniach (1), przy czym jeżeli $[x''(t_0)]^2 + [y''(t_0)]^2 > 0$, to punkt osobliwy P_0 nazywamy *punktem zwrotu*. Równanie stycznej do krzywej (1) w jej punkcie zwrotu P_0 ma postać

$$(5) \quad y''(t_0)[x - x(t_0)] - x''(t_0)[y - y(t_0)] = 0.$$

Asymptoty krzywej (1) znajdujemy następująco: jeżeli w pewnym punkcie $t = t_0$ (lub dla $t \rightarrow \infty$)

$$(6) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \infty \quad [\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \infty] \quad \text{i} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = g \quad [\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a],$$

to prosta $y = g$ [$x = a$] jest asymptotą poziomą [pionową] krzywej (1); jeżeli $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \infty$ i $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \infty$ oraz istnieją skończone granice

$$(7) \quad m = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} \wedge n = \lim_{t \rightarrow t_0} [y(t) - mx(t)],$$

to prosta $y = mx + n$ jest asymptotą ukośną krzywej (1).

Aby więc zbadać i wykreślić krzywą o równaniach (1), należy znaleźć:

- α_1) dziedziny funkcji x i y ,
- α_2) wszystkie jej asymptoty,
- α_3) przedziały stałego znaku pochodnych x' i y' ,
- α_4) punkty zwrotu,
- α_5) pochodne określone wzorami (3) i (4),

a następnie korzystać z metod badania funkcji podanych w § 27.

28.2. Badanie funkcji określonych równaniem

$$(8) \quad r = r(\varphi), \quad \varphi \in \Phi,$$

gdzie r i φ oznaczają współrzędne biegunowe (por. § 9), można sprowadzić do badania funkcji określonych parametrycznie (punkt 28.1). Otóż w układzie $Oxy \sim Or\varphi$ (por. § 9) mamy $x = r \cos \varphi$ i $y = r \sin \varphi$, a więc

$$(9) \quad x = r(\varphi) \cos \varphi = x(\varphi), \quad y = r(\varphi) \sin \varphi = y(\varphi), \quad \varphi \in \Phi,$$

czyli równania postaci (1). W przypadku gdy pochodna x' ma stały znak na pewnym zbiorze $\Phi_1 \subset \Phi$, to z równań (9) otrzymujemy $y = y[p(x)] = f(x)$, gdzie $p = x^{-1}$, przy czym

$$(10) \quad f'_x(x) = \frac{r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi}{r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi},$$

$$(11) \quad f''_x(x) = \frac{r^2(\varphi) + 2[r'(\varphi)]^2 - r(\varphi)r''(\varphi)}{[r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi]^3}.$$

Jeżeli $\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} r(\varphi) = +\infty$ i jeżeli istnieje asymptota $y = mx + n$ krzywej (8) w układzie $Oxy \sim Or\varphi$, to

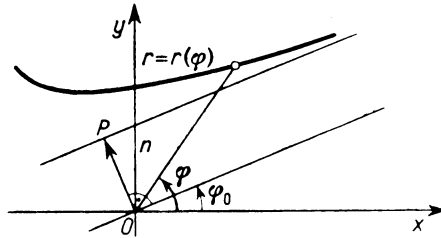
$$(12) \quad m = \operatorname{tg} \varphi_0 \quad \text{i} \quad n = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \frac{r(\varphi) \sin(\varphi - \varphi_0)}{\cos \varphi_0},$$

lub

$$(13) \quad p = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} [r(\varphi) \sin(\varphi - \varphi_0)],$$

gdzie p oznacza miarę wektora \overline{OP} prostopadłego do asymptoty (rys. 28.1). W przypadku gdy istnieje granica

$$(14) \quad \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} r(\varphi) = a,$$



Rys. 28.1

to krzywa (8) posiada koło asymptotyczne o równaniu

$$(15) \quad r = a.$$

W szczególności, jeżeli $a=0$, to krzywa ma punkt asymptotyczny w biegunie.

Przykłady

28.1. Zbadać krzywe określone równaniami parametrycznymi:

$$a) \ x(t) = 2t - t^2, \ y(t) = 3t - t^3; \quad b) \ x(t) = \frac{2+t^2}{1+t^2}, \ y(t) = \frac{t^3}{1+t^2};$$

$$c) \ x(t) = \frac{t}{1-t^2}, \ y(t) = \frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}; \quad d) \ x(t) = t \ln t, \ y(t) = \frac{\ln t}{t}$$

oraz narysować ich wykresy.

Rozwiązanie. a) $x(t) = 2t - t^2, \ y(t) = 3t - t^3$;

α_1) Dziedzina $T = \mathbf{R}$, $x, y \in C^0(T)$, punkty przecięcia z osiami układu: $O(0, 0)$ dla $t=0$, $A_1(0, -2)$ dla $t=2$, $A_2(2\sqrt{3}-3, 0)$ dla $t=\sqrt{3}$, $A_3(-2\sqrt{3}-3, 0)$ dla $t=-\sqrt{3}$.

$$\alpha_2) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \left(\frac{2}{t} - 1 \right) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = -\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[t^3 \left(\frac{3}{t^2} - 1 \right) \right] = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = +\infty.$$

Zatem krzywa nie ma asymptot poziomych i pionowych. Z kolei, korzystając ze wzoru (7) otrzymujemy

$$m = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3t - t^3}{2t - t^2} = +\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = -\infty,$$

czyli badana krzywa nie ma również asymptot ukośnych.

α_3) $x'(t) = 2 - 2t = 2(1 - t)$, $y'(t) = 3(1 - t)(1 + t)$, zatem dla $T_1: -\infty < t < 1$, $x'(t) > 0$ oraz dla $T_2: 1 < t < +\infty$, $x'(t) < 0$.

α_4) $x'(t) = 0$ dla $t_1 = 1$, $y'(t) = 0$ dla $t_{1,2} = \pm 1$, $x''(t) = -2$, $y''(t) = -6t$, czyli $x''(1) = -2 \neq 0$ i $y''(1) = -6 \neq 0$, a więc punkt $P_1(x(1), y(1)) = P_1(1, 2)$ jest punktem zwrotu krzywej, przy czym $1 = x_{\max} = x(1)$ i $2 = y_{\max} = y(1)$. Równanie stycznej w punkcie P_1 ma postać (por. wzór (5)) $-6(x - 1) + 2(y - 2) = 0$, czyli $3x - y - 1 = 0$.

α_5) Ponieważ na przedziałach T_1 i T_2 pochodna x' ma stały znak, będziemy badali funkcję f (por. wzór (2)). Otóż korzystając ze wzorów (3) i (4), otrzymujemy

$$(a) \quad f'_x(x) = \frac{3}{2}(t + 1),$$

$$(a_1) \quad f''_x(x) = \frac{3}{4(1-t)} \quad \text{dla} \quad t \neq 1.$$

Zatem $f'_x(x) = 0$, jeżeli $t = -1$, przy czym $[f''_x(x)]_{t=-1} = \frac{3}{8} > 0$, a więc dla $t = -1$ jest $f_{\min} = y_{\min} = y(-1) = -2$ przy $x = x(-1) = -3$. Z kolei, $f''_x(x) \neq 0$ dla $t \neq 1$, zatem krzywa nie ma punktów przegięcia. Dla $-\infty < t < 1$ jest $f''_x(x) > 0$, a więc badana krzywa jest wypukła oraz dla $1 < t < +\infty$ jest $f''_x(x) < 0$, czyli krzywa jest wklęsła. Przed podaniem wykresu krzywej, sporządzimy tabelkę.

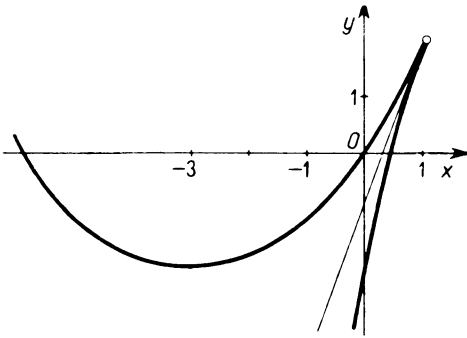
Tabelka

t	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow -2\sqrt{3}-3$	$\nearrow -3$	$\nearrow 0$	$\nearrow 1$	$\searrow 2\sqrt{3}-3$	$\searrow 0$	$\searrow -\infty$
$y(t)$	$+\infty$	0	-2	0	2	0	-2	$-\infty$
$x'(t)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f'_x(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''_x(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$		$-$	$-$	$-$
przebieg	\searrow	\searrow	\smile	\nearrow	\nearrow	\searrow	\searrow	\searrow

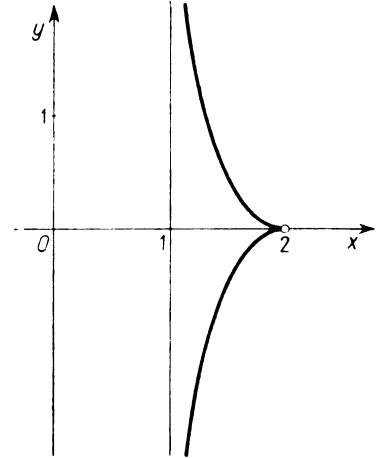
Uwaga. W rubryce „przebieg” strzałki końcowe oznaczają, że krzywa jest rosnąca i wklęsła, ale dla rosnących wartości parametru t zmienna x maleje.

Korzystając z tabelki szkicujemy wykres (por. rys. 28.2).

$$b) \quad x(t) = \frac{2+t^2}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{t^3}{1+t^2};$$



Rys. 28.2



Rys. 28.3

α_1) Dziedzina $T = \mathbb{R}$, $x, y \in C^0(\mathbb{R})$, punkty przecięcia z osiami układu: $A_1(2, 0)$ dla $t=0$.

$$\alpha_2) \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2+t^2}{1+t^2} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3}{1+t^2} = +\infty,$$

$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = -\infty$, istnieje więc asymptota pionowa prawostronna ($x(t) > 1$ dla $t \in T$) o równaniu $x=1$ (por. wzór (6)). Innych asymptot krzywa nie ma.

α_3) $x'(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}$, $y'(t) = \frac{t^2(t^2+3)}{(1+t^2)^2}$, zatem dla $T_1 = (-\infty, 0)$ jest $x'(t) > 0$ oraz dla $T_2 = (0, +\infty)$ jest $x'(t) < 0$.

$$\alpha_4) x'(t) = 0 \text{ dla } t=0, \quad y'(t) = 0 \text{ dla } t=0, \quad x''(t) = \frac{2(3t^2-1)}{(1+t^2)^3}, \quad y''(t) = \frac{2t(3-t^2)}{(1+t^2)^3}, \quad t \in T.$$

Stąd $x''(0) = -2 \neq 0$, $y''(0) = 0$, tzn. punkt $P_1(2, 0)$ dla $t=0$ jest punktem zwrotu badanej krzywej, przy czym $2 = x_{\max} = x(0)$, natomiast funkcja y nie ma ekstremum w punkcie $t=0$, ponieważ $y'(t) > 0$ dla każdego $t \in T$. Styczna do krzywej w punkcie zwrotu P_1 ma równanie $0(x-2) + 2(y-0) = 0$, czyli $y=0$, a więc jest osią Ox .

α_5) Ponieważ na przedziałach T_1 i T_2 pochodna x' ma stały znak, będziemy badali funkcję f (por. wzór (2)). Korzystając ze wzorów (3) i (4), otrzymujemy

$$(b) \quad f'_x(x) = -\frac{1}{2}t(t^2+3),$$

$$(b_1) \quad f''_x(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{(1+t^2)^3}{t} \quad \text{dla } t \neq 0.$$

Ze wzorów (b) i (b₁) wynika, że badana krzywa dla $t \neq 0$ nie ma ekstremów i punktów przegięcia.

Tabelka

t	$-\infty$				0				$+\infty$
$x(t)$	1	↗		↗	2	↘		↘	1
$y(t)$	$-\infty$				0				$+\infty$
$x'(t)$	+	+	+	+	0	-	-	-	-
$f'_x(x)$	+	+	+	+	0	-	-	-	-
$f''_x(x)$	-	-	-	-		+	+	+	+
przebieg		↗		↗	>		↘		↘

Korzystając z tabelki sporządzamy wykres (rys. 28.3).

$$c) \quad x(t) = \frac{t}{1-t^2}, \quad y(t) = \frac{t(1-2t^2)}{1-t^2};$$

α_1) Dziedzina $T = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, punkty przecięcia z osiami układu:
 $O(0, 0)$ dla $t=0$, $A_{1,2}(\mp\sqrt{2}, 0)$ dla $t = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\alpha_2) \quad \lim_{t \rightarrow -1^-} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -1^+} x(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow 1^-} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow 1^+} x(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -1^-} y(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -1^+} y(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow 1^-} y(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow 1^+} y(t) = +\infty, \quad \text{stąd (por. wzór (7))}$$

$$m = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{\frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}}{\frac{t}{1-t^2}} = \lim_{t \rightarrow -1} (1-2t^2) = -1,$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{t \rightarrow -1} \left[\frac{t(1-2t^2)}{1-t^2} + \frac{t}{1-t^2} \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t(1-2t^2+1)}{1-t^2} = \lim_{t \rightarrow -1} 2t = -2 \end{aligned}$$

oraz

$$m = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{y(t)}{x(t)} = -1, \quad n = \lim_{t \rightarrow 1} [y(t) + x(t)] = 2.$$

Badana krzywa ma zatem asymptoty ukośne o równaniach $y = -x \mp 2$.

Z kolei

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{1-t^2} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-2t^3+t}{1-t^2} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = -\infty,$$

czyli krzywa ma asymptotę pionową obustronną o równaniu $x=0$.

$$\alpha_3) x'(t) = \frac{t^2+1}{(1-t^2)^2}, \quad y'(t) = \frac{2t^4-5t^2+1}{(1-t^2)^2}; \quad \text{zatem } x'(t) > 0 \text{ na przedziałach:}$$

$$T_1 = (-\infty, -1), \quad T_2 = (-1, 1), \quad T_3 = (1, +\infty).$$

$\alpha_4)$ Pochodna x' jest różna od zera dla wszystkich $t \in T$, czyli nie istnieją punkty zwrotu badanej krzywej.

$\alpha_5)$ Ponieważ na przedziałach T_1 , T_2 i T_3 pochodna x' ma stały znak, będziemy badali funkcję f (por. wzór (2)).

W tym celu znajdujemy

$$x''(t) = \frac{2t(t^2+3)}{(1-t^2)^3}, \quad y''(t) = \frac{-2t(t^2+3)}{(1-t^2)^3}$$

oraz (por. wzory (3) i (4))

$$(c_1) \quad f'_x(x) = \frac{2t^4 - 5t^2 + 1}{1 + t^2},$$

$$(c_2) \quad f''_x(x) = \frac{4t(t^2+3)(t^2-1)^3}{(1+t^2)^3}.$$

Stąd $f'_x(x) = 0$, jeżeli

$$(c_3) \quad 2t^4 - 5t^2 + 1 = 0$$

Równanie (c_3) ma cztery pierwiastki

$$t_{1,2} = \mp \frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2} \approx \mp 0,47, \quad t_{3,4} = \mp \frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2} \approx \mp 1,51,$$

przy czym:

$$f_{\min} = y_{\min} = y(t_1) \approx -0,34 \quad \text{dla} \quad x(t_1) \approx -0,6,$$

$$f_{\max} = y_{\max} = y(t_2) \approx 0,34 \quad \text{dla} \quad x(t_2) \approx 0,6,$$

$$f_{\max} = y_{\max} = y(t_3) \approx -4,2 \quad \text{dla} \quad x(t_3) \approx 1,2,$$

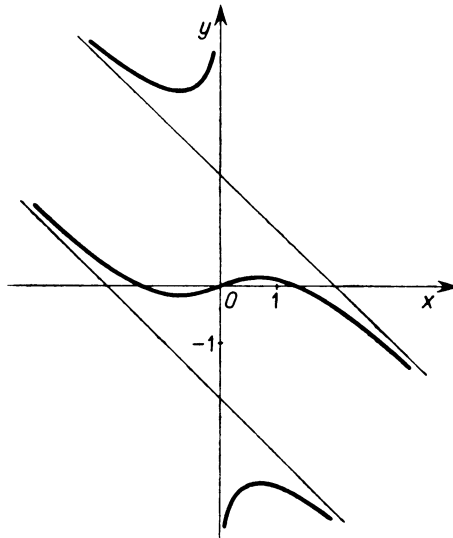
$$f_{\min} = y_{\min} = y(t_4) \approx 4,2 \quad \text{dla} \quad x(t_4) \approx -1,2.$$

Z kolei $f''_x(x) = 0$ dla $t = 0$, przy czym jeżeli $-1 < t < 0$, to $f''_x(x) > 0$ oraz jeżeli $0 < t < 1$, to $f''_x(x) < 0$, a więc badana krzywa ma punkt przegięcia $O(0, 0)$ dla $= 0$.

Tabela

t	$-\infty$	t_3	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	t_1	0	t_2	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	t_4	$+\infty$			
$x(t)$	0	$1,2$	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$-0,6$	0	$0,6$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	$-\infty$	$-1,2$	0
$y(t)$	$-\infty$	$-4,2$	$-$	$-\infty$	$+\infty$	0	$-0,34$	0	$0,34$	0	$-\infty$	$+\infty$	$4,2$	$+\infty$
$x'(t)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'_x(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	-1	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f''_x(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
przebieg	\curvearrowright	\curvearrowleft	\curvearrowright	\curvearrowleft	\curvearrowright	\curvearrowleft	\curvearrowright	\curvearrowleft	\curvearrowright	\curvearrowleft	\curvearrowright	\curvearrowleft	\curvearrowright	\curvearrowleft

Korzystając z tabelki sporządzamy wykres (rys. 28.4).



Rys. 28.4

d) $x(t) = t \ln t, y(t) = \frac{\ln t}{t};$

α_1) Dziedzina $T = \mathbb{R}_+$, punkty przecięcia z osiami układu: dla $t=1$ punkt $O(0, 0)$.

α_2) $\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (t \ln t) = 0$ (por. 25.25b), $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{t} = -\infty$, istnieje więc asymptota pionowa lewostronna o równaniu $x=0$;

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t \ln t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} \left[\frac{\infty}{\infty} \right],$$

skąd

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln t)'}{(t)'} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1/t}{1} = 0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t},$$

czyli badana krzywa ma asymptotę poziomą dla $x \rightarrow +\infty$ o równaniu $y=0$. Innych asymptot krzywa nie ma.

$$\alpha_3) \quad x'(t) = \ln t + 1 = \ln(et), \quad y'(t) = \frac{1}{t^2} \ln \frac{e}{t}; \quad \text{stąd } x'(t) > 0 \text{ na przedziale } T_1 = \langle e^{-1}, +\infty \rangle$$

oraz $x'(t) < 0$ na przedziale $T_2 = (0, e^{-1})$.

$\alpha_4)$ $x'(t) = 0$, jeżeli $t = e^{-1}$, $y'(t) = 0$, jeżeli $t = e$, czyli krzywa nie ma punktów osobliwych.

$\alpha_5)$ Z punktu α_3 wnosimy, że na przedziałach T_1 i T_2 możemy badać funkcję f (por. wzór (2)). Zauważmy jednak, że na otoczeniu punktu $t = e^{-1}$ pochodna x' nie ma stałego znaku, natomiast pochodna y' np. na przedziale $T_3 = (0, e)$ jest dodatnia. Na przedziale T_3 należy więc rozpatrywać funkcję h (por. wzór (2)). W tym celu znajdujemy

$$x''(t) = \frac{1}{t}, \quad y''(t) = \frac{2 \ln t - 3}{t^3}$$

oraz (por. wzory (3) i (4))

$$(e_1) \quad f'_x(x) = \frac{\ln(e/t)}{t^2 \ln(et)},$$

$$(e_2) \quad f''_x(x) = \frac{2 \ln^2 t - 4}{t^3 [\ln(et)]^3} = \frac{2(\ln t + \sqrt{2})(\ln t - \sqrt{2})}{t^3 [\ln(et)]^3},$$

$$(e_3) \quad h'_y(y) = \frac{t^2 \ln(et)}{1 - \ln t},$$

$$(e_4) \quad h''_y(y) = \frac{-2t^3}{\ln^3 \frac{e}{t}} (\ln t + \sqrt{2})(\ln t - \sqrt{2}).$$

Zatem $f'_x(x) = 0$, jeżeli $t = e \in T_1$, przy czym $[f''_x(x)]_{t=e} = \frac{2-4}{e^3 2^3} < 0$, a więc zachodzi maksimum $f_{\max} = y_{\max} = y(e) = 1/e \approx 0,37$ dla $x = x(e) = 2,718$. Z kolei $h'_y(y) = 0$, jeżeli

$t = e^{-1} \in T_3$ oraz $[h''_y(y)]_{t=e^{-1}} = \frac{-2}{e^3} (1-2) > 0$, a więc zachodzi minimum $h_{\min} = x_{\min} =$

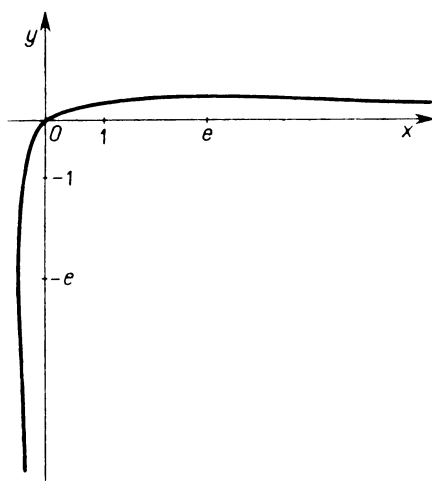
$= x(e^{-1}) = \frac{1}{e} \ln e^{-1} \approx -0,37$ dla $y = y(e^{-1}) = -e$. Ze wzoru (e₄) wnosimy, że na sąsiedztwie punktu $t = e^{-1}$ pochodna h''_y jest dodatnia, czyli dla $t = e^{-1}$ krzywa nie ma punktu przegięcia. Jeżeli więc istnieją punkty przegięcia, to znajdziemy je korzystając

ze wzoru (e₂). Otóż $f''_x(x)=0$, jeżeli $t_1=e^{-\sqrt{2}}$ i $t_2=e^{\sqrt{2}}$, przy czym na sąsiedztwie tych punktów pochodna f''_x zmienia znak. Zatem badana krzywa ma punkty przegięcia $P_1(x(e^{-\sqrt{2}}), y(e^{-\sqrt{2}}))=P_1(\approx -0,34, \approx -5,82)$ i $P_2(x(e^{\sqrt{2}}), y(e^{\sqrt{2}}))=P_2(\approx 5,82, \approx 0,34)$.

Tabela

t	0	$e^{-\sqrt{2}}$	e^{-1}	1	e	$e^{\sqrt{2}}$	$+\infty$						
$x(t)$	0	\searrow -0,34	\searrow -0,37	\nearrow 0	\nearrow e	\nearrow 5,82	\nearrow $+\infty$						
$y(t)$	$-\infty$	\nearrow -5,82	\nearrow -e	\nearrow 0	\nearrow 0,37	\searrow 0,34	\searrow 0						
$x'(t)$	-	-	-	0	+	+	+						
$y'(t)$			+	+	+	0	...						
$f'_x(x)$	-	-	-	-	+	1	+	+	0	-	-	-	-
$f''_x(x)$	-	-	0	+	-	-	-	-	-	0	+	+	
$h'_y(y)$...	-	-	0	+	+	+	+	...			
$h''_y(y)$...	0	+	+	+	+	+	+	...			
przebieg $f(x)$		\curvearrowright	\curvearrowright	\curvearrowright		\curvearrowleft	\curvearrowleft	\curvearrowleft	\curvearrowleft	\curvearrowleft		\curvearrowleft	
przebieg $h(y)$...	\curvearrowright	\curvearrowright	\curvearrowright		...					

Wykres (rys. 28.5).



Rys. 28.5

28.2. Zbadać funkcje w układzie współrzędnych biegunowych $Or\varphi$, określone wzorami:

a) $r(\varphi) = \frac{a}{\varphi}$, $\varphi > 0$ ($a > 0$) (spirala hiperboliczna); b) $r(\varphi) = \frac{\varphi}{\varphi - 1}$, $\varphi > 1$

oraz narysować ich wykresy.

Rozwiązanie. a) Z warunków zadania wynika, że

$$r(\varphi) = \frac{a}{\varphi} > 0 \quad \text{dla } \varphi > 0; \quad \lim_{\varphi \rightarrow 0^+} r(\varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow 0^+} \frac{a}{\varphi} = +\infty,$$

$$p = \lim_{\varphi \rightarrow 0^+} [r(\varphi) \sin(\varphi - 0)] = \lim_{\varphi \rightarrow 0^+} \frac{a \sin \varphi}{\varphi} = a \lim_{\varphi \rightarrow 0^+} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = a.$$

Wynika stąd, że krzywa ma asymptotę o równaniu $y = a$ (por. wzór (12) i (13)) w układzie $Oxy \sim Or\varphi$. Z kolei $\lim_{\varphi \rightarrow +\infty} r(\varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \frac{a}{\varphi} = 0$, czyli spirala hiperboliczna ma punkt asymptotyczny pokrywający się z biegunem (por. wzór (14)). Ponieważ $r'(\varphi) = \frac{-a}{\varphi^2} < 0$, więc r jest funkcją malejącą argumentu φ . Pisząc równanie krzywej w postaci parametrycznej

$$(a) \quad x(\varphi) = \frac{a \cos \varphi}{\varphi}, \quad y(\varphi) = \frac{a \sin \varphi}{\varphi},$$

stwierdzamy, że znak pochodnej $x'(\varphi) = -a \frac{\varphi \sin \varphi + \cos \varphi}{\varphi^2}$ jest stały na nieskończenie wielu przedziałach Φ_k , $k = 1, 2, \dots$, na których funkcja określona wzorem $k(\varphi) = \varphi \sin \varphi + \cos \varphi$ ma stały znak. Na każdym z tych przedziałów istnieje funkcja określona wzorem $y = y[p(x)] = f(x)$, gdzie p jest funkcją odwrotną funkcji x (por. (a)), przy czym (por. wzory (10) i (11))

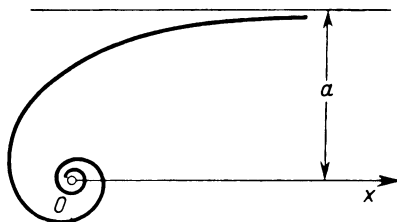
$$(a_1) \quad f'_x(x) = \frac{\sin \varphi - \varphi \cos \varphi}{\cos \varphi + \varphi \sin \varphi}$$

oraz

$$(a_2) \quad f''_x(x) = \frac{-\varphi^4}{a(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi)^3} = \frac{-\varphi^4}{a[k(\varphi)]^3}.$$

Ze wzoru (a₁) wynika, że badana krzywa ma w każdym z przedziałów Φ_k ekstremum, na przemian minimum i maksimum. Natomiast ze wzoru (a₂) wnosimy, że spirala hiperboliczna nie ma punktów przegięcia oraz że na każdym z przedziałów Φ_k ma stałą wypukłość, będąc na przemian wypukłą i wklęsłą. Na podstawie otrzymanych danych sporządzamy wykres (rys. 28.6).

b) $r(\varphi) = \frac{\varphi}{\varphi - 1}$, $\varphi > 1$; ponieważ $\varphi > 1$, to $r(\varphi) > 0$;



Rys. 28.6

$$\lim_{\varphi \rightarrow 1^+} r(\varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow 1^+} \frac{\varphi}{\varphi - 1} = +\infty,$$

$$p = \lim_{\varphi \rightarrow 1^+} [r(\varphi) \sin(\varphi - 1)] = \lim_{\varphi \rightarrow 1^+} \left[\varphi \frac{\sin(\varphi - 1)}{\varphi - 1} \right] = 1 \cdot 1 = 1.$$

Badana krzywa ma więc asymptotę tworzącą z osią biegunową kąt $\alpha = 1$ rad i oddaloną od bieguna o jednostkę długości. Z kolei

$$\lim_{\varphi \rightarrow +\infty} r(\varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \frac{\varphi}{\varphi - 1} = 1,$$

a więc krzywa ma koło asymptotyczne o środku w biegunie i promieniu 1.

Równania parametryczne krzywej mają postać

$$(b) \quad x = x(\varphi) = \frac{\varphi \cos \varphi}{\varphi - 1}, \quad y = y(\varphi) = \frac{\varphi \sin \varphi}{\varphi - 1},$$

skąd

$$x'(\varphi) = \frac{\varphi \sin \varphi - \varphi^2 \sin \varphi - \cos \varphi}{(\varphi - 1)^2} = \frac{k(\varphi)}{(\varphi - 1)^2}.$$

Znak pochodnej x' jest stały w nieskończenie wielu przedziałach Φ_k , $k = 1, 2, \dots$, zatem na każdym z tych przedziałów istnieje funkcja określona wzorem $y = y[p(x)] = f(x)$, gdzie p jest funkcją odwrotną funkcji x , przy czym

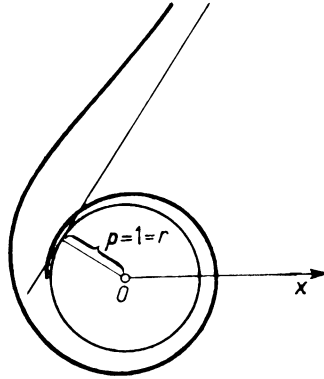
$$(b_1) \quad f'_x(x) = \frac{\sin \varphi - \varphi(\varphi - 1) \cos \varphi}{\cos \varphi + \varphi(\varphi - 1) \sin \varphi},$$

$$(b_2) \quad f''_x(x) = \frac{(\varphi - 1)^3(\varphi^3 - \varphi^2 - 2)}{(\varphi \sin \varphi - \varphi^2 \sin \varphi - \cos \varphi)^3} = \frac{(\varphi - 1)^3}{[k(\varphi)]^3} (\varphi^3 - \varphi^2 - 2).$$

Ze wzoru (b₁) wynika, że badana krzywa ma nieskończenie wiele ekstremów, na przemian minimów i maksimów. Natomiast o punktach przegięcia krzywej będziemy wnioskowali ze wzoru (b₂). Otóż $f''_x(x) = 0$, jeżeli

$$(b_3) \quad \varphi^3 - \varphi^2 - 2 = 0.$$

Łatwo stwierdzić, że równanie (b₃) ma dokładnie jeden pierwiastek φ_0 należący do przedziału (1, 2), który w przybliżeniu wynosi $\varphi_0 = 1,75$, przy czym dla $\varphi = \varphi_0$ krzywa ma punkt przegięcia. Również ze wzoru (b₂) wynika, że na przedziałach Φ_k pochodna f'_x ma stały znak, zatem wykres krzywej ma na każdym z przedziałów Φ_k stałą wypukłość. Korzystając z otrzymanych danych oraz z poniższej tabelki, rysujemy wykres (rys. 28.7).



Rys. 28.7

Tabela

φ	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	1,75	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π
$r(\varphi)$	4,25	2,8	2,3	1,7	1,5	1,3	1,27	1,22	1,19	1,15	1,07

Zadania

28.3. Zbadać krzywe określone równaniami parametrycznymi:

a) $x(t) = t^2 - 2t$, $y(t) = t^2 + 2t$; b) $x(t) = t^3 + 3t + 1$, $y(t) = t^3 - 3t + 1$;

c) $x(t) = \frac{t^2 + 1}{4(1-t)}$, $y(t) = \frac{t}{t+1}$; d) $x(t) = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}$, $y(t) = \frac{t}{t^4 + 1}$;

e) $x(t) = \frac{t^2}{t-1}$, $y(t) = \frac{t}{t^2 - 1}$; f) $x(t) = \frac{(t+2)^2}{t+1}$, $y(t) = \frac{(t-2)^2}{t-1}$;

g) $x(t) = te^t$, $y(t) = te^{-t}$; h) $x(t) = t + e^{-t}$, $y(t) = 2t + e^{-2t}$;

i) $x(t) = a(\sinh t - t)$, $y(t) = a(\cosh t - 1)$ ($a > 0$);

j) $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$ ($a > 0$);

k) $x(t) = a \cos^3 t$, $y(t) = a \sin^3 t$ ($a > 0$)

oraz narysować ich wykresy.

28.4. Zbadać funkcje określone wzorami w układzie współrzędnych biegunowych $O\rho\varphi$:

$$\text{a) } r(\varphi) = a\varphi \text{ dla } \varphi \geq 0 \text{ (} a > 0 \text{);} \quad \text{b) } r(\varphi) = \frac{1}{\varphi - \frac{1}{4}\pi} \text{ dla } \varphi > \frac{1}{4}\pi;$$

$$\text{c) } r(\varphi) = e^{a\varphi} \text{ (} a > 0 \text{);}$$

$$\text{d) } r(\varphi) = a + b \cos \varphi \text{ (} 0 < a \leq b \text{);} \quad \text{e) } r(\varphi) = \sqrt{\pi/\varphi}$$

oraz narysować ich wykresy.

Odpowiedzi

28.3. a) $T = \mathbf{R}$, punkty przecięcia z osiami układu: $O(0, 0)$, $A_1(0, 8)$, $A_2(8, 0)$, $x_{\min} = x(1) = -1$ dla $y(1) = 3$, $y_{\min} = y(-1) = -1$ dla $x(-1) = 3$;

b) $T = \mathbf{R}$, $y_{\min} = y(1) = -1$ dla $x(1) = 5$, $y_{\max} = y(-1) = 3$ dla $x(-1) = -3$, p. przeg. $P(x(0), y(0)) = P(1, 1)$;

c) $T = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$, $A(\frac{1}{4}, 0)$ – punkt przecięcia z osią Ox , as.: $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $x_{\max} = x(1 + \sqrt{2})$ dla $y(1 + \sqrt{2})$, $x_{\min} = x(1 - \sqrt{2})$ dla $y(1 - \sqrt{2})$, p. przeg. $P(x(t_0), y(t_0))$, gdzie $-0,6 < t_0 < -0,5$;

d) $T = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$, $A(-1, 0)$ – punkt przecięcia z osią Ox , as.: $y = \mp \frac{1}{2}$, $y_{\max} = y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ dla $x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $y_{\min} = y\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ dla $x\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$, $x_{\max} = x(0) = -1$ dla $y(0) = 0$, $x_{\min} = 1$, gdy $t \rightarrow \infty$, dla $y = 0$, p. przeg. $P(x(\mp t_0), y(\mp t_0))$, gdzie $\frac{1}{\sqrt{3}} < t_0 < 1$;

e) $T = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$, $O(0, 0)$ – punkt przecięcia z osiami układu, as.: $y = 0$, $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$, $x_{\max} = x(0) = 0$ dla $y(0) = 0$, $x_{\min} = x(2) = 4$ dla $y(2) = \frac{3}{4}$, p. przeg. $P(x(\approx -0,32), y(\approx -0,32)) = P(\approx -0,08, \approx 0,3)$;

f) $T = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$, as.: $x = \frac{9}{2}$, $y = -\frac{9}{2}$, $x - y = 6$; dla $t = 0$ punkt zwrotu, przy czym $x_{\min} = x(0) = 4$ i $y_{\max} = y(0) = -4$, równanie stycznej w punkcie zwrotu $x + y = 0$, $y_{\min} = y(2) = 0$ dla $x(2) = \frac{16}{3}$, $x_{\max} = x(-2) = 0$ dla $y(-2) = -\frac{16}{3}$;

g) $T = \mathbf{R}$, $O(0, 0)$ – punkt przecięcia z osiami układu, $x = 0$ – as. pion. lew., $y = 0$ – as. poz. dla $x \rightarrow +\infty$: $x_{\min} = x(-1) = -1/e$ dla $y(-1) = -e$, $y_{\max} = y(1) = 1/e$ dla $x(1) = e$, p. przeg.: $P_1(x(-\sqrt{2}), y(-\sqrt{2}))$, $P_2(x(\sqrt{2}), y(\sqrt{2}))$;

h) $T = \mathbf{R}$, as. dla $x \rightarrow +\infty$: $y = 2x$, dla $t = 0$ punkt zwrotu $(1, 1)$, przy czym $x_{\min} = x(0) = 1$, $y_{\min} = y(0) = 1$, równanie stycznej w punkcie zwrotu $4x - y - 3 = 0$;

i) $T = \mathbf{R}$, dla $t = 0$ punkt zwrotu $O(0, 0)$, przy czym $y_{\min} = y(0) = 0$, $x(0) = 0$, styczna w punkcie zwrotu $x = 0$, krzywa jest symetryczna względem osi Oy i wszędzie wklęsła;

j) $T = \mathbf{R}$, dla $t_k = 2k\pi$, $k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$ punkty zwrotu, przy czym $y_{\max} = y(t_k) = 0$ dla $x(t_k) = 2ak\pi$, w punkcie zwrotu styczne prostopadłe do osi Ox , $y_{\max} = y(t'_k) = 2a$, gdzie $t'_k = (2k + 1)\pi$, $k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$ dla $x(t'_k) = (2k + 1)\pi a$;

k) $T = \mathbf{R}$, $x(t + 2k\pi) = x(t)$, $y(t + 2k\pi) = y(t)$, $k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$, dla $t = 0$ punkt zwrotu, przy czym $x_{\max} = x(0) = a$ dla $y(0) = 0$, dla $t = \frac{1}{2}\pi$ punkt zwrotu, przy czym $y_{\max} = y(\frac{1}{2}\pi) = a$ dla $x(\frac{1}{2}\pi) = 0$, dla $t = \pi$ punkt zwrotu, przy czym $x_{\min} = x(\pi) = -a$ dla $y(\pi) = 0$, dla $t = \frac{3}{2}\pi$ punkt zwrotu, przy czym $y_{\min} = y(\frac{3}{2}\pi) = -a$ dla $x(\frac{3}{2}\pi) = 0$, w punktach zwrotu dla parametrów $t = 0$ i $t = \pi$ styczną jest oś Ox , w punktach zwrotu dla parametrów $t = \frac{1}{2}\pi$ i $t = \frac{3}{2}\pi$ styczną jest oś Oy .

28.4. a) $\Phi = \langle 0, +\infty \rangle$, $r(0) = 0$, istnieje nieskończenie wiele ekstremów, nie istnieją punkty przegięcia;

b) $\Phi = \langle \frac{1}{4}\pi, +\infty \rangle$, as. dla $x \rightarrow +\infty$: $y = x + \sqrt{2}$ w układzie $Oxy \sim Or\varphi$, biegun jest punktem asymptotycznym, istnieje nieskończenie wiele ekstremów, nie istnieją punkty przegięcia;

c) $\Phi = \mathbf{R}$, biegun jest punktem asymptotycznym dla $\varphi \rightarrow -\infty$, istnieje nieskończenie wiele ekstremów, nie istnieją punkty przegięcia;

d) $\Phi = \langle -\alpha, \alpha \rangle$, gdzie $\alpha = \arccos(-a/b)$, krzywa zamknięta symetryczna względem osi biegunowej, $r_{\max} = r(0) = a + b$, $r(\mp\alpha) = 0$;

e) $\Phi = \mathbf{R}_+$, oś biegunowa jest asymptotą, biegun jest punktem asymptotycznym, istnieje nieskończenie wiele ekstremów, dla $\varphi = \frac{1}{2}$ punkt przegięcia.

§ 29. POCHODNE CZĄSTKOWE. RÓŻNICZKOWALNOŚĆ

29.1. Weźmy funkcję $f: \mathbf{R}^n \supset A \rightarrow \mathbf{R}$, gdzie A jest zbiorem otwartym. *Pochodną cząstkową funkcji f w punkcie $x_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in A$ względem zmiennej $x_j, j = 1, 2, \dots, n$, którą oznaczamy $f'_{x_j}(x_0)$, lub $\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{x=x_0}$ nazywamy granicę*

$$(1) \quad \lim_{x_j \rightarrow x_{0j}} \frac{f(x_{01}, \dots, x_{0, j-1}, x_j, x_{0, j+1}, \dots, x_{0n}) - f(x_{01}, \dots, x_{0n})}{x_j - x_{0j}} = \\ = \lim_{x_j \rightarrow x_{0j}} \frac{\varphi_j(x_j) - \varphi_j(x_{0j})}{x_j - x_{0j}} = f'_{x_j}(x_0),$$

gdzie $\varphi_j(x_j) = f(x_{01}, \dots, x_{0, j-1}, x_j, x_{0, j+1}, \dots, x_{0n}), j = 1, 2, \dots, n$, tzn. φ_j jest funkcją jednej zmiennej otrzymaną z f przez ustalenie wszystkich zmiennych $x_i \neq x_j$. Na przykład dla $n = 3$ albo $n = 2$ mamy

$$(2) \quad f'_y(x_0, y_0, z_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0},$$

$$(3) \quad f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{x - x_0}.$$

Z (3) wynika, że $f'_x(x_0, y_0)$ jest współczynnikiem kierunkowym stycznej do krzywej przecięcia wykresu funkcji f z płaszczyzną $y = y_0$. Jeżeli dla każdego punktu $P \in B \subset A$ istnieje pochodna $f'_{x_j}(x)$, to otrzymujemy funkcję $g = f'_{x_j}: B \rightarrow \mathbf{R}$.

W przypadku, gdy istnieje $g'_{x_i}(x_0)$, to nazywamy ją *pochodną cząstkową rzędu drugiego funkcji f względem zmiennych x_j i x_i w punkcie x_0* i oznaczamy

$$f''_{x_j x_i}(x_0) = g'_{x_i}(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)_{x=x_0}.$$

Jeżeli $j \neq i$, to $f''_{x_j x_i}(x_0)$ nazywamy *pochodną cząstkową mieszaną*, gdy $i = j$ przyjmujemy umowny zapis $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

T₁. (twierdzenie o pochodnych mieszanych):

$$(istnieją $f''_{x_j x_i}, f''_{x_i x_j}$ ciągle w x_0) \Rightarrow f''_{x_j x_i}(x_0) = f''_{x_i x_j}(x_0).$$

Ogólnie, jeżeli istnieje pochodna cząstkowa rzędu $k-1$ $h = f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{k-1}}}(i_1, i_2, \dots, i_{k-1})$ tworzą dowolny zbiór $k-1$ liczb z liczb $1, 2, \dots, n$ funkcji f na $C \subset A \subset \mathbb{R}^n$, to pochodną $h'_{x_{i_k}}(x_0)$ ($1 \leq i_k \leq n$) nazywamy *pochodną cząstkową rzędu k funkcji f względem zmiennych $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{k-1}}, x_{i_k}$ w punkcie x_0* i oznaczamy

$$f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}^{(k)}(x_0) = \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \right)_{x=x_0}.$$

Jeżeli wśród liczb i_1, i_2, \dots, i_k istnieją co najmniej dwie różne, to pochodną cząstkową nazywamy *pochodną mieszaną*. Twierdzenie T₁ jest również prawdziwe w przypadku pochodnych rzędu k .

29.2. Niech będą dane przestrzenie euklidesowe \mathbb{R}^n i \mathbb{R}^m o bazach standardowych $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^n, (\mathbf{k}_i)_{i=1}^m$, zbiór otwarty $E \subset \mathbb{R}^n$ oraz $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}_0 \in E$, gdzie $\mathbf{h} + \mathbf{x}_0 \in E$.

Mówimy, że odwzorowanie $F: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalne w \mathbf{x}_0 , jeżeli istnieje odwzorowanie liniowe $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ takie, że dla każdego $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in E$

$$(4) \quad \Delta F = F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}_0) = L_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{h}) + \mathbf{r}(\mathbf{h}),$$

gdzie $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|\mathbf{r}(\mathbf{h})|}{|\mathbf{h}|} = 0$ (tzn. $\mathbf{r}(\mathbf{h})$ jest nieskończenie mała rzędu wyższego niż \mathbf{h}).

Zauważmy, że $|\mathbf{r}(\mathbf{h})|$ oznacza normę (tzn. długość) wektora $\mathbf{r}(\mathbf{h}) \in \mathbb{R}^m$ oraz $\Delta F, L_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{h}) \in \mathbb{R}^m$. Z podanej definicji wynika, że przyrost ΔF rozkłada się na część liniową względem \mathbf{h} oraz na resztę \mathbf{r} .

Odwzorowanie $L_{\mathbf{x}_0}$ nazywamy *pochodną odwzorowania F w \mathbf{x}_0* i oznaczamy $F'(\mathbf{x}_0)$. Wartość odwzorowania $L_{\mathbf{x}_0}$ dla danego $\mathbf{h} \in E$ nazywamy *różniczką* (lub *różniczką zupełną*) odwzorowania F w \mathbf{x}_0 dla przyrostu \mathbf{h} i oznaczamy $dF(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$. Jeżeli F jest różniczkowalne dla każdego $\mathbf{x} \in E$, to mówimy, że F jest różniczkowalne na E i odwzorowanie $F': E \ni \mathbf{x} \rightarrow F'(\mathbf{x}) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ nazywamy *pochodną odwzorowania F* .

Jeżeli funkcje $f_i: E \rightarrow \mathbb{R}, i=1, 2, \dots, m$ są współrzędnymi odwzorowania F , tzn. $F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m f_i(\mathbf{x})\mathbf{k}_i, \mathbf{x} \in E$, to pochodna $F'(\mathbf{x})$ będąca odwzorowaniem liniowym może być utożsamiona (por. § 10) z macierzą (tzw. *macierzą Jacobiego*):

$$(5) \quad B = \left[\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right]_{m \times n} = [a(\mathbf{x})_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Jeżeli $m=n$, to $\det B=J$ nazywamy *Jakobianem odwzorowania F* (lub *Jakobianem układu funkcji $f_i, i=1, 2, \dots, m$*).

Różniczka $dF(x, h)$ zgodnie z definicją określona jest wzorem

$$\mathbf{R}^m \ni dF(x, h) = L_x(h) = \left[\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right]_{m \times n} [h_j]_{n \times 1} = [c_k]_{m \times 1},$$

gdzie $c_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_i} h_i$, tzn. $dF(x, h) = \sum_{i=1}^m c_i \mathbf{k}_i$. W przypadku odwzorowania $f: \mathbf{R}^n \supset E \rightarrow \mathbf{R}$, tzn. funkcji rzeczywistej n zmiennych rzeczywistych mamy

$$(6) \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = L_{x_0}(h) + r(h),$$

gdzie $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|r(h)|}{|h|} = 0$.

Pochodną $f'(x)$ określoną przez macierz wierszową

$$B_{1 \times n} = [f'_{x_1}(x), f'_{x_2}(x), \dots, f'_{x_n}(x)]$$

nazywamy *gradientem* funkcji f w x i oznaczamy $\text{grad } f(x)$. Zwykle $\text{grad } f(x)$ interpretujemy jako wektor, tzn. $\text{grad } f(x) = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x) \mathbf{e}_i$. Różniczka

$$df(x, h) = L_x(h) = [f'_{x_i}(x)]_{1 \times n} [h_i]_{n \times 1} = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x) h_i = \text{grad } f(x) \bullet h.$$

Ze wzoru (6) wynikają wzory:

$$(7) \quad \Delta f \approx df(x, h),$$

$$(8) \quad \Delta_u = \sum_{i=1}^n |f'_{x_i}(x)| \Delta_{x_i},$$

gdzie Δ_u jest maksymalnym błędem bezwzględny wartości funkcji $f(x)$ przy danych maksymalnych błędach Δ_{x_i} zmiennych $x_i, i=1, 2, \dots, n$.

29.3. Uogólnieniem pochodnej cząstkowej jest pochodna kierunkowa. Niech $f: \mathbf{R}^n \supset A \rightarrow \mathbf{R}$, A – zbiór otwarty,

$$x_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}.$$

Jeżeli istnieje granica

$$(9) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\mathbf{v}) - f(x_0)}{t}, \quad t \in \mathbf{R},$$

($x_0 + t\mathbf{v}$ oznacza punkt o współrzędnych $x_{0i} + tv_i, i=1, 2, \dots, n$), to nazywamy ją *pochodną kierunkową funkcji f w punkcie x_0 w kierunku wektora \mathbf{v}* i oznaczamy $\nabla_{\mathbf{v}} f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right)_{x=x_0}$

W szczególności, jeżeli $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{in})$, to $\nabla_{\mathbf{e}_i} f(x_0) = f'_{x_i}(x_0), i=1, 2, \dots, n$. Jeżeli f jest różniczkowalna na $A \subset \mathbf{R}^n$, to wyprowadza się wzór (por. przykład 29.3)

$$(10) \quad \nabla_{\mathbf{v}} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbf{v}_i = \text{grad } f(x) \bullet \mathbf{v}.$$

Przykłady

29.1. Znaleźć wskazane pochodne cząstkowe funkcji określonych wzorami:

a) $g(x, y, z) = x^{y^z}$, $x, y \in \mathbf{R}_+$, g'_x, g'_y, g''_{xyz} ;

b) $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n + x_1 x_2^2 x_3^3 \dots x_n^n$, $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$h'_{x_1}, h''_{x_1 x_n}, h^{(n)}_{x_1 x_2 \dots x_n}, \frac{\partial^n h}{\partial x_n^n}.$$

Rozwiązanie. Ze wzoru (1) wynika, że przy znajdowaniu pochodnych cząstkowych wszystkie zmienne, oprócz zmiennej względem której znajdujemy pochodną, traktujemy jako stałe.

a) Korzystamy ze wzorów: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $x \in \mathbf{R}_+$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $(a^x)' = a^x \ln a$, $x \in \mathbf{R}$.

$$g'_x = y^z x^{y^z-1}, \quad g'_y = \ln x \cdot x^{y^z} \cdot z y^{z-1}, \quad g'_z = \ln x \cdot x^{y^z} \cdot \ln y \cdot y^z,$$

$$g''_{xy} = (g'_x)'_y = z y^{z-1} x^{y^z-1} + y^z \ln x \cdot x^{y^z-1} \cdot z y^{z-1} = \\ = z y^{z-1} x^{y^z-1} (1 + y^z \ln x),$$

$$g''_{xyz} = (g''_{xy})'_z = y^{z-1} x^{y^z-1} (1 + y^z \ln x) + z \ln y \cdot y^{z-1} x^{y^z-1} (1 + y^z \ln x) + \\ + z y^{z-1} \ln x \cdot x^{y^z-1} \ln y \cdot y^z (1 + y^z \ln x) + z y^{z-1} x^{y^z-1} \ln x \ln y \cdot y^z;$$

b) $h'_{x_1} = x_2 x_3 \dots x_n + x_2^2 x_3^3 \dots x_n^n$,

$$h''_{x_1 x_n} = (h'_{x_1})'_{x_n} = x_2 x_3 \dots x_{n-1} + n x_2^2 x_3^3 \dots x_n^{n-1},$$

$$h''_{x_1 x_2} = x_3 x_4 \dots x_n + 2 x_2 x_3^3 \dots x_n^n,$$

$$h'''_{x_1 x_2 x_3} = x_4 x_5 \dots x_n + 2 \cdot 3 x_2 x_3^2 x_4^4 \dots x_n^n,$$

$$h^{(n)}_{x_1 x_2 \dots x_n} = 1 + n! x_2 x_3^2 x_4^3 \dots x_{n-1}^{n-2} x_n^{n-1}, \quad \frac{\partial^n h}{\partial x_n^n} = n! x_1 x_2^2 x_3^3 \dots x_{n-1}^{n-1}.$$

29.2. Dane jest odwzorowanie $F: \mathbf{R}^n \ni \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{R}^n$ określone wzorem

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \prod_{k=i}^n x_k \mathbf{e}_i,$$

gdzie $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^n$ jest bazą standardową w \mathbf{R}^n . Znaleźć macierz Jacobiego pochodnej F' w \mathbf{x} oraz Jakobian odwzorowania F w $\mathbf{x}_0 = (2, 2, \dots, 2)$.

Rozwiązanie. Współrzędne odwzorowania F określone są wzorami:

$$f_i(\mathbf{x}) = \prod_{k=i}^n x_k, \text{ tzn.}$$

$$f_1(\mathbf{x}) = x_1 x_2 \dots x_n, \quad f_2(\mathbf{x}) = x_2 x_3 \dots x_n, \quad \dots, \quad f_{n-1}(\mathbf{x}) = x_{n-1} x_n, \quad f_n(\mathbf{x}) = x_n,$$

stąd (na mocy (5))

$$B = \left[\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right]_{n \times n} = \begin{bmatrix} x_2 x_3 \dots x_n & x_1 x_3 \dots x_n & \dots & x_1 x_2 \dots x_{n-1} \\ 0 & x_3 x_4 \dots x_n & \dots & x_2 x_3 \dots x_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Z kolei korzystając z zadania 6.34, otrzymujemy (wyznacznik równa się iloczynowi elementów na przekątnej):

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}) &= \det B = x_2 x_3 \dots x_n x_3 x_4 \dots x_n \dots x_n 1 = \\ &= x_2 x_3^2 x_4^3 \dots x_{n-1}^{n-2} x_n^{n-1} \Rightarrow J(\mathbf{x}_0) = 2^1 2^2 2^3 \dots 2^{n-1} = 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}. \end{aligned}$$

29.3. Udowodnić twierdzenie: jeżeli $f: \mathbf{R}^n \supset A \rightarrow \mathbf{R}$ jest funkcją różniczkowalną w x , to istnieje pochodna $\nabla_v f(x)$ w każdym kierunku (tzn. dla każdego wektora $v \in \mathbf{R}^n - \{0\}$) i

$$\nabla_v f(x) = f'(x) \bullet v = \text{grad } f(x) \bullet v.$$

Dowód. Z definicji różniczkowalności funkcji f otrzymujemy

$$(a) \quad f(x + tv) - f(x) = f'(x) \bullet (tv) + r(tv),$$

gdzie $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|r(tv)|}{|tv|} = 0$. Dzieląc obie strony równości (a) przez t mamy

$$\frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = \frac{f'(x) \bullet (tv)}{t} + \frac{r(tv)}{t}.$$

Ale

$$\frac{f'(x) \bullet (tv)}{t} = \frac{t(f'(x) \bullet v)}{t} = f'(x) \bullet v$$

oraz

$$\begin{aligned} \frac{|r(tv)|}{|t|} &= \frac{|r(tv)| |v|}{|tv|} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|r(tv)|}{|t|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|r(tv)| |v|}{|tv|} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(tv)}{t} = 0. \end{aligned}$$

Stąd

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(f'(x) \bullet v + \frac{r(tv)}{t} \right) = f'(x) \bullet v. \quad \square$$

Z udowodnionego twierdzenia wynika w szczególności, że z różniczkowalności funkcji w punkcie wynika istnienie wszystkich pochodnych cząstkowych w tym punkcie.

29.4. Dane jest funkcja $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x=y=0, \\ \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{dla } x^2 + y^2 > 0. \end{cases}$$

Wykazać, że: a) istnieją f'_x, f'_y na \mathbf{R}^2 ; b) funkcje f'_x i f'_y nie są ciągłe w $O(0, 0)$; c) f nie jest różniczkowalna w $O(0, 0)$.

Rozwiązanie.

$$\text{a) } f'_x(x, y) = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f'_y(x, y) = \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{dla } x^2 + y^2 > 0,$$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0;$$

b) Niech $x = y = \frac{1}{n}$, skąd $\lim_{n \rightarrow \infty} x = \lim_{n \rightarrow \infty} y = 0$. Ale

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f'_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{n^4}}{\frac{4}{n^4}} = \frac{1}{2} \neq 0 = f'_x(0, 0),$$

tzn. że f'_x nie jest ciągła w $O(0, 0)$.

Podobnie, niech $x = \frac{2}{n}$, $y = \frac{1}{n}$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} x = \lim_{n \rightarrow \infty} y = 0$, ale

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f'_y(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \left(\frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right)}{\left(\frac{5}{n^2} \right)^2} = \frac{12}{25} \neq 0 = f'_y(0, 0).$$

c) Przypuśćmy, że f jest różniczkowalna w $O(0, 0)$. Przyjmując we wzorze (6) $x_0(0, 0)$, $h(\Delta x, \Delta y)$ oraz $r(h) = |h| r_1(h)$, gdzie $\lim_{h \rightarrow 0} r_1(h) = 0$ (jest to zawsze możliwe, ponieważ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|r(h)|}{|h|} = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| |r_1(h)|}{|h|} = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} r_1(h) = 0), \text{ otrzymujemy}$$

$$\text{(c) } \Delta f(0, 0) = \frac{\Delta x^2 \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} r_1(\Delta x, \Delta y).$$

Przyjmując np. $\Delta x = \Delta y > 0$, z (c) otrzymujemy

$$\frac{1}{2}\Delta x = \sqrt{2}\Delta x r_1(\Delta x, \Delta x) \Rightarrow r_1(\Delta x, \Delta x) = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

a więc funkcja r_1 nie dąży do zera, gdy $\Delta x \rightarrow 0$, co daje sprzeczność.

29.5. Znaleźć różniczkę $d^k f$, jeżeli $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n e^{ix_i}$.

Rozwiązanie. Jeżeli funkcja $f: \mathbf{R}^n \supset A \rightarrow \mathbf{R}$ jest różniczkowalna na A , to jej różniczka $df = \text{grad } f(x) \bullet \mathbf{h} = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x) h_i$ przy stałym przyroście $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ jest funkcją n zmiennych $g = df: \mathbf{R}^n \supset A \rightarrow \mathbf{R}$. Jeżeli funkcja g jest różniczkowalna w $x \in A$, to jej różniczkę w tym punkcie dla przyrostu \mathbf{h} nazywamy drugą różniczką, lub różniczką drugiego rzędu funkcji f i oznaczamy $d^2 f(x, \mathbf{h}) = dg(x, \mathbf{h})$.

Zakładając, że $f \in C^2(A)$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} d^2 f(x, \mathbf{h}) &= \text{grad}(\text{grad } f(x) \bullet \mathbf{h}) \bullet \mathbf{h} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n f'_{x_j} h_j \right)'_{x_i} h_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f''_{x_i x_j} h_i h_j = \mathbf{h}^T \mathbf{H}(x) \mathbf{h}, \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{h} = [h_1, h_2, \dots, h_n]_{n \times 1}$, $\mathbf{H}(x) = [a_{ij}]_{n \times n}$ $\wedge a_{ij} = f''_{x_i x_j}(x)$, tzn. druga różniczka jest formą kwadratową zmiennych h_i (por. § 10). Podobnie definiujemy różniczki rzędu trzeciego, czwartego itp. Ogólnie, jeżeli $f \in C^k(A)$, $A \subset \mathbf{R}^n$, to różniczka rzędu k dla przyrostu \mathbf{h}

$$d^k f(x, \mathbf{h}) = d(d^{k-1} f(x, \mathbf{h})),$$

przy czym udowadnia się wzór

$$\begin{aligned} d^k f(x, \mathbf{h}) &= \sum_{i_k=1}^n \left(\sum_{i_{k-1}=1}^n \dots \sum_{i_1=1}^n f^{(k-1)}_{x_{i_{k-1}} x_{i_{k-2}} \dots x_{i_1}}(x) h_{i_{k-1}} h_{i_{k-2}} \dots h_{i_1} \right)'_{x_{i_k}} h_{i_k} = \\ &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} f^{(k)}_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}(x) h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k}. \end{aligned}$$

W przypadku funkcji f danej w przykładzie mamy

$$\begin{aligned} df &= \sum_{i_1=1}^n \left(\sum_{i=1}^n e^{ix_i} \right)'_{x_{i_1}} h_{i_1} = \sum_{i=1}^n i e^{ix_i} h_i, \\ d^2 f &= \sum_{i_2=1}^n \left(\sum_{i=1}^n i e^{ix_i} h_i \right)'_{x_{i_2}} h_{i_2} = \sum_{i=1}^n i^2 e^{ix_i} h_i^2. \end{aligned}$$

Ogólnie przypuszczamy, że $d^k f = \sum_{i=1}^n i^k e^{ix_i} h_i^k$.

Istotnie, korzystając z twierdzenia o indukcji matematycznej mamy: dla $k=1$ wzór jest prawdziwy; zakładamy prawdziwość wzoru dla $k-1$, stąd

$$d^k f = d(d^{k-1} f) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n i^{k-1} e^{ix_i} h_i^{k-1} \right)'_{x_j} h_j = \sum_{m=1}^n m^k e^{mx_m} h_m^k.$$

29.6. Znaleźć przybliżenie liczby $(1,02)^{3,01}$ i oszacować błąd tego przybliżenia.

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzorów (7) i (8). Otóż niech $f(x, y) = x^y$ oraz $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, $\Delta x = 0,02$, $\Delta y = 0,01$. Stąd

$$A = (1,02)^{3,01} = (1 + 0,02)^{3 + 0,01} \approx 1^3 + 3 \cdot 1^{3-1} \cdot 0,02 + \ln 1 \cdot 1^3 \cdot 0,01 = 1 + 0,06 = 1,06.$$

Zadania

29.7. Znaleźć wskazane pochodne cząstkowe funkcji określonych wzorami:

- a) $R(u, t) = \ln(u^2 + Aut + t^2)$, R'_u , R'_t ; b) $D(x, t) = Rb\sqrt{kx^2 - Rt^2}$, D'_x , D''_{tt} ;
 c) $p(t, v) = me^{kt^2 + rv}$, p'_{tv} , p''_{vv} ; d) $w(R, T) = (AR)^{\sqrt{a^2 - 4AT^2}}$, w''_{TT} ;
 e) $A(w, \gamma) = \sqrt{w^2 - 2Rw\gamma} + \ln(aw + b\gamma)$, A''_{ww} , $A''_{\gamma\gamma}$.

29.8. Znaleźć wskazane pochodne cząstkowe funkcji określonych wzorami:

- a) $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, u'_x , u'_z ; b) $u(x, y, r) = \left(\frac{x}{y}\right)^r$, u'_x , u'_y , u'_r ;
 c) $p(x, y, z) = e^{xyz}$, p'''_{xyz} ; d) $P(x, y, z, u) = (xy)^{zu}$, P'_x , P'_y , P'_z , P'_u ;
 e) $z(x_1, x_2, \dots, x_n) = a^{\sqrt{x_1 x_2 \dots x_n}}$, z'_{x_1} ;
 f) $z(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{4(n-1)!} x_1^2 x_2^2 x_3 \dots x_{n-1} x_n^{n-1}$, $\frac{\partial^n z}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_n^{n-2}}$;
 g) $f(x, y) = x^k y^m$, $k, m \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^{k+m} f}{\partial x^k \partial y^m}$.

29.9. Dana jest funkcja określona wzorem $u(z, t) = z^3 t^4 + z^2 t^3$. Znaleźć $\frac{u'_z + u'_t}{u''_z + u''_t}$ dla $z = 1$ i $t = 3$.

29.10. Sprawdzić równości:

a) $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$, jeżeli $z = z(x, y) = xy + xe^{y/x}$;

b) $u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0$, jeżeli $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$;

c) $u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = x - t$, jeżeli $u(x, t) = 2x - 5xt + \frac{1}{2}xt^2 - \frac{1}{6}t^3$;

d) $f'_{x_1 x_1} + f'_{x_2 x_2} + \dots + f'_{x_n x_n} = 0$, jeżeli

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}}.$$

29.11. Znaleźć jacobiany układów funkcji określonych wzorami:

- a) $x(r, \varphi) = r \cos \varphi$, $y(r, \varphi) = r \sin \varphi$;
 b) $x(r, \varphi, z) = r \cos \varphi$, $y(r, \varphi, z) = r \sin \varphi$, $z(r, \varphi, z) = z$;
 c) $x(r, \varphi, \gamma) = r \sin \varphi \cos \gamma$, $y(r, \varphi, \gamma) = r \sin \varphi \sin \gamma$, $z(r, \varphi, \gamma) = r \cos \varphi$;
 d) $u(x, y, z) = xyz$, $v(x, y, z) = xy - xyz$, $w(x, y, z) = y - xy$.

29.12. Znaleźć pochodne odwzorowań:

- a) $f: \mathbf{R}^n \ni \mathbf{x} \rightarrow |\mathbf{x}|^2 \in \mathbf{R}$; b) $g: \mathbf{R}^n \ni \mathbf{x} \rightarrow |\mathbf{x}| \in \mathbf{R}$;
 c) $h: \mathbf{R}^n - \{0\} \ni \mathbf{x} \rightarrow \frac{c}{|\mathbf{x}|} \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$;
 d) $F: \mathbf{R}^n \ni \mathbf{x} \rightarrow A_{n \times n} \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, gdzie $A_{n \times n} = [a_{ij}]_{n \times n}$, $\mathbf{x} = [x_i]_{n \times 1}$.

29.13. Znaleźć pochodne odwzorowań:

- a) $g: \mathbf{R} \ni t \rightarrow (a \cos t, a \sin t, bt) \in \mathbf{R}^3$;
 b) $f: \mathbf{R}^2 \ni (u, v) \rightarrow (u \cos v, u \sin v, 2v^2) \in \mathbf{R}^3$;
 c) $h: \mathbf{R}^3 \ni (u, v, t) \rightarrow (uvt, uv e^t) \in \mathbf{R}^2$;
 d) $k: \mathbf{R} \ni t \rightarrow (t, t^2, t^3, \dots, t^n) \in \mathbf{R}^n$;
 e) $p: \mathbf{R}^2 \ni (u, v) \rightarrow (u, uv, uv^2, \dots, uv^{n-1}) \in \mathbf{R}^n$;
 f) $w: \mathbf{R}^n \ni (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x_1^n, x_2^n, \dots, x_n^n) \in \mathbf{R}^n$;
 g) $t: \mathbf{R}^n \ni (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x_1 x_2 \dots x_n, x_2 x_3 \dots x_n, \dots, x_n, x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \in \mathbf{R}^{n+1}$.

29.14. Dane jest odwzorowanie $F: \mathbf{R}^n \ni \mathbf{x} \rightarrow (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2) \in \mathbf{R}^n$. Znaleźć $F'(\mathbf{x})$ oraz Jakobian odwzorowania F .

29.15. Znaleźć pochodną odwzorowania będącego rzutem stereograficznym (por. zadanie 18.33).

29.16. Znaleźć pochodną oraz Jakobian odwzorowania będącego inwersją (por. zadanie 18.30).

29.17. Znaleźć pochodną odwzorowania określonego wzorem

$$T: \mathbf{R}^n \ni \mathbf{x} \rightarrow \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\sqrt{1 + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}} \in \mathbf{R}^n,$$

gdzie $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$.

29.18. Znaleźć pochodną odwzorowania określonego wzorem

$$T: \mathbf{R}^n - \{\mathbf{x}_0\} \ni \mathbf{x} \rightarrow \left(\mathbf{x}_0 + \frac{r^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right) \in \mathbf{R}^n - \{\mathbf{x}_0\}$$

(inwersja o środku w \mathbf{x}_0 i promieniu r).

29.19. Znaleźć Jakobian odwzorowania sferycznego (por. zadanie 18.26d).

29.20. Wykazać, że funkcja określona wzorem

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{dla } xyz = 0 \\ 0 & \text{dla } xyz \neq 0 \end{cases}$$

ma pochodne cząstkowe f'_x, f'_y, f'_z w $O(0, 0, 0)$, ale nie jest ciągła w $O(0, 0, 0)$.

29.21. Dana jest funkcja określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{dla } x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{dla } x = y = 0. \end{cases}$$

Wykazać, że $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

29.22. Dana jest funkcja określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = y = 0 \\ \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Wykazać, że istnieje pochodna kierunkowa $\nabla_v f(0, 0)$ w dowolnym kierunku $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, ale f nie jest różniczkowalna w $O(0, 0)$.

29.23. Dana jest funkcja określona wzorem $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wykazać, że a) istnieją f'_x, f'_y na \mathbb{R}^2 ; b) funkcje f'_x i f'_y nie są ciągłe w $O(0, 0)$; c) f nie jest różniczkowalna w $O(0, 0)$.

29.24. Dane jest odwzorowanie $f: \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow (e^x \cos y, e^x \sin y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Znaleźć $f(\mathbb{R}^2)$ (obraz \mathbb{R}^2); b) wykazać, że Jakobian odwzorowania f jest różny od zera na \mathbb{R}^2 , ale odwzorowanie nie jest wzajemnie jednoznaczne na \mathbb{R}^2 .

29.25. Wykazać, że jeżeli odwzorowanie $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalne w $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, to jest w tym punkcie ciągłe.

29.26. Obliczyć pochodne kierunkowe funkcji określonych wzorami:

- $f(x, y) = x^4 + y^4 + 2xy + 1$ w punkcie $P(1, 2)$ w kierunku wektora $\mathbf{v} = (3, -1)$;
- $g(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ w punkcie $A(1, 1)$ w kierunku wektora dwusiecznej kąta pierwszej ćwiartki układu Oxy ;
- $h(x, y) = 2x^2 - 3y^2$ w punkcie $C(1, 0)$ w kierunku wektora tworzącego z osią Ox kąt 120° ;
- $u(x, y, z) = xy^2 + z^3 - xyz$ w punkcie $B(1, 1, 2)$ w kierunku wektora $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$;
- $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ w punkcie $x_0(1, 2, \dots, n)$ w kierunku wektora $\mathbf{v} = (1, 1, \dots, 1)$.

29.27. Wykazać, że pochodna kierunkowa funkcji określonej wzorem $f(x, y) = \frac{y^2}{x}$, $x \neq 0$ w dowolnym punkcie elipsy $2x^2 + y^2 = a^2$ w kierunku dowolnego wektora normalnej do elipsy w tym punkcie równa się zeru.

29.28. Wykazać, że pochodna kierunkowa funkcji $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

w dowolnym punkcie x i w kierunku wektora $v=(1, 1, \dots, 1)$ jest równa zeru.

29.29. Wykazać, (nie korzystając z pojęcia pochodnej kierunkowej, por. przykład 29.3), że jeżeli funkcja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, jest różniczkowalna w $x_0 \in \mathbb{R}^n$, to istnieją $f'_i(x_0)$, $i=1, 2, \dots, n$.

29.30. Znaleźć:

a) df , jeżeli $f(x, y) = y^x$;

b) dg , jeżeli $g(u, v) = \arctg \frac{u+v}{1-uv}$; c) dh , jeżeli $h(r, t) = \arcsin \frac{r}{t}$;

d) du , jeżeli $u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

e) $df(P, h)$, jeżeli $f(x, y) = e^{xy}$, $P(1, 1)$, $h(\frac{3}{20}, \frac{1}{10})$;

f) $dg(A, h)$, gdzie $g(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$, $A(3, 4)$, $h(\frac{1}{10}, \frac{1}{3})$;

g) $df(P)$, gdzie $f(x, y, z) = \sqrt[3]{\frac{x}{y}}$, $P(1, 1, 1)$;

h) df , jeżeli $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$;

i) $df(x_0)$, jeżeli $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e^{2x_i}$, $x_0(0, 0, \dots, 0)$;

j) $dg(x_0, h_0)$, jeżeli $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sin x_i$, $x_0(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi, \dots, \frac{1}{4}\pi)$, $h_0(1, 1, \dots, 1)$;

k) d^2u , jeżeli $u(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2}$;

l) d^4u , jeżeli $u(x, y, z) = x^4 + 3x^3y + z^4 - x^2y + z^3$;

ł) d^6f , jeżeli $f(x, y) = \cos x \cosh y$; m) $d^n u$, jeżeli $u(x, y) = g(x)h(y)$.

29.31. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^k(D)$. Wyprowadzić wzór

$$d^k f(x, h) = d^k f((x, y), (dx, dy)) = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-m} \partial y^m} dx^{k-m} dy^m$$

(przyjmujemy umowę $\partial y^0 = 1, \partial x^0 = 1$).

29.32. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^k(E)$. Wyprowadzić wzór

$$d^k f(x, h) = \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_n \\ (k_1 + k_2 + \dots + k_n = k)}} \frac{k!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} dh_1^{k_1} dh_2^{k_2} \dots dh_n^{k_n}$$

(przyjmujemy umowę $\partial x_i^0 = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$).

29.33. Długość wysokości stożka $h = 30$ cm, promień podstawy $r = 10$ cm. O ile zmieni się objętość stożka, jeżeli powiększyć długość wysokości o 3 mm i zmniejszyć promień o 1 mm?

29.34. Promień podstawy stożka obrotowego równa się $(10,2 \mp 0,1)$ cm, a tworząca $(44,6 \pm 0,1)$ cm. Znaleźć objętość stożka i podać dokładność wyniku.

29.35. O ile zmieni się długość przekątnej i pole prostokąta o długościach boków $a = 6$ m i $b = 8$ m, jeżeli długość boku a zwiększymy o 2 mm, długość boku b zmniejszymy o 5 mm.

29.36. Obliczyć przybliżenie liczby $(1,04)^{2,02}$.

29.37. Znaleźć przybliżenia liczb:

a) $\sqrt{(1,02)^3 + (1,97)^3}$; b) $\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$; c) $\frac{(1,03)^2}{\sqrt[3]{0,98} \sqrt[4]{(1,05)^3}}$.

29.38. Promienie podstaw stożka ściętego wynoszą $R = 30$ cm, $r = 20$ cm, a długość wysokości $h = 40$ cm. Jak zmieni się objętość stożka, jeżeli zwiększymy: R o 3 mm, r o 4 mm i h o 2 mm?

29.39. Okres wahadła oblicza się za pomocą wzoru $T = 2\pi \sqrt{l/g}$, gdzie l oznacza długość wahadła, a g przyspieszenie ziemskie. Znaleźć błąd względny δ_T przy danych błędach względnych δ_l i δ_g .

29.40. Do obliczania pola S trójkąta za pomocą boku a i kątów B i C stosujemy wzór

$$S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin(B+C)}.$$

Znaleźć błąd względny δ_S , jeżeli dane są błędy względne δ_a , δ_B i δ_C .

Odpowiedzi

29.7. a) $R'_u = \frac{2u + At}{u^2 + Aut + t^2}$, $R'_t = \frac{Au + 2t}{u^2 + Aut + t^2}$;

b) $D'_x = \frac{Rbkx}{\sqrt{kx^2 - Rt^2}}$, $D''_n = \frac{-R^2bkx^2}{(kx^2 - Rt^2)^{3/2}}$;

c) $p''_{uv} = 2mrkt e^{kt^2 + rv}$, $p''_{vv} = mr^2 e^{kt^2 + rv}$;

$$d) w''_{TT} = \frac{-4A \ln AR (AR)^{\sqrt{a^2 - 4AT^2}}}{(a^2 - 4AT^2)^{3/2}} [a^2 - 4A \ln AR \cdot T^2 \sqrt{a^2 - 4AT^2}];$$

$$e) A''_{ww} = \frac{-R^2 \gamma^2}{(w^2 - 2R\gamma w)^{3/2}} - \frac{a^2}{(aw + b\gamma)^2}, \quad A''_{\gamma\gamma} = - \left[\frac{R^2 w^2}{(w^2 - 2R\gamma w)^{3/2}} + \frac{b^2}{(aw + b\gamma)^2} \right].$$

$$29.8. a) u'_x = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}, \quad u'_z = -z(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2};$$

$$b) u'_x = \frac{r}{x} \left(\frac{x}{y} \right)^r, \quad u'_y = \frac{-r}{y} \left(\frac{x}{y} \right)^r, \quad u'_r = \left(\frac{x}{y} \right)^r \ln \frac{x}{y};$$

$$c) p'''_{xyz} = (x^2 y^2 z^2 + 3xyz + 1) e^{xyz};$$

$$d) P'_x = yzu(xy)^{zu-1}, \quad P'_y = xzu(xy)^{zu-1}, \quad P'_z = u(xy)^{zu} \ln(xy), \\ P'_u = z(xy)^{zu} \ln(xy);$$

$$e) z'_{x_i} = \frac{1}{2} \ln a x_i^{-1/2} (x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n)^{1/2} a^{\sqrt{x_1 x_2 \dots x_n}};$$

$$f) \frac{\partial^n z}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_n^{n-2}} = x_1 x_2 \dots x_n; \quad g) \frac{\partial^{k+m} f}{\partial x^k \partial y^m} = k! m!.$$

$$29.9. \frac{8}{1971}. \quad 29.11. a) r; \quad b) r; \quad c) r^2 \sin \varphi; \quad d) xy^2.$$

$$29.12. a) f'(x) = 2x = 2[x_1, x_2, \dots, x_n], \quad x \in \mathbf{R}^n;$$

$$b) g'(x) = \frac{x}{|x|} = \left[\frac{x_1}{|x|}, \frac{x_2}{|x|}, \dots, \frac{x_n}{|x|} \right]_{1 \times n} \quad \text{dla } x \in \mathbf{R}^n - \{0\};$$

$$c) h'(x) = \frac{-cx}{|x|^3} = \left[\frac{-cx_1}{|x|^3}, \frac{-cx_2}{|x|^3}, \dots, \frac{-cx_n}{|x|^3} \right]_{1 \times n}, \quad x \in \mathbf{R}^n - \{0\};$$

$$d) F'(x) = A_{n \times n} \quad \text{dla } x \in \mathbf{R}^n.$$

$$29.13. a) \begin{bmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ b \end{bmatrix}; \quad b) \begin{bmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \\ 0 & 4v \end{bmatrix};$$

$$c) \begin{bmatrix} vt & ut & uv \\ ve^t & ue^t & uve^t \end{bmatrix}; \quad d) \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \\ \vdots \\ nt^{n-1} \end{bmatrix}; \quad e) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & u \\ v^2 & 2uv \\ \vdots & \vdots \\ v^{n-1} & (n-1)uv^{n-2} \end{bmatrix};$$

$$f) \begin{bmatrix} nx_1^{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & nx_2^{n-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & nx_n^{n-1} \end{bmatrix};$$

$$g) \begin{bmatrix} x_2 x_3 \dots x_n & x_1 x_3 \dots x_n & \dots & x_1 x_2 \dots x_{n-1} \\ 0 & x_3 x_4 \dots x_n & \dots & x_2 x_3 \dots x_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & x_3 x_4 \dots x_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & \dots & 2x_n \end{bmatrix}$$

$$29.14. F'(x) = 2 \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{bmatrix},$$

$$J = \det F'(x) = 2^n \begin{vmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix} = 2^n x_1 x_2 \dots x_n.$$

$$29.15. F'(x) = r \begin{bmatrix} \frac{1}{r-x_{n+1}} & 0 & \dots & 0 & \frac{x_1}{(r-x_{n+1})^2} \\ 0 & \frac{1}{r-x_{n+1}} & \dots & 0 & \frac{x_2}{(r-x_{n+1})^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{r-x_{n+1}} & \frac{x_n}{(r-x_{n+1})^2} \end{bmatrix}_{n \times (n+1)}$$

$$29.16. G'(x) = r^2 \begin{bmatrix} \frac{|x|^2 - 2x_1^2}{|x|^4} & x_1 \frac{-2x_2}{|x|^4} & \dots & x_1 \frac{-2x_n}{|x|^4} \\ x_2 \frac{-2x_1}{|x|^4} & \frac{|x|^2 - 2x_2^2}{|x|^4} & \dots & x_2 \frac{-2x_n}{|x|^4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n \frac{-2x_1}{|x|^4} & x_n \frac{-2x_2}{|x|^4} & \dots & \frac{|x|^2 - 2x_n^2}{|x|^4} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$J = \frac{-r^{2n}}{|x|^{2n}}.$$

$$29.17. T'(x) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1 + |x - x_0|^2 - (x_1 - x_{01})^2}{(1 + |x - x_0|^2)^{3/2}} & -\frac{(x_1 - x_{01})(x_2 - x_{02})}{(1 + |x - x_0|^2)^{3/2}} & \dots & -\frac{(x_1 - x_{01})(x_n - x_{0n})}{(1 + |x - x_0|^2)^{3/2}} \\ -\frac{(x_2 - x_{02})(x_1 - x_{01})}{(1 + |x - x_0|^2)^{3/2}} & \frac{1 + |x - x_0|^2 - (x_2 - x_{02})^2}{(1 + |x - x_0|^2)^{3/2}} & \dots & -\frac{(x_2 - x_{02})(x_n - x_{0n})}{(1 + |x - x_0|^2)^{3/2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{(x_n - x_{0n})(x_1 - x_{01})}{(1 + |x - x_0|^2)^{3/2}} & \dots & \dots & \frac{1 + |x - x_0|^2 - (x_n - x_{0n})^2}{(1 + |x - x_0|^2)^{3/2}} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

29.18. Por. zad. 29.16, gdzie zamiast x_i należy podstawić $x_i - x_{0i}$.

29.19. $J = u^{n-1} \cos v_2 \cos^2 v_3 \dots \cos^{n-2} v_{n-1}$.

29.24. a) $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$; b) $J = e^{2x} \neq 0$ na \mathbb{R}^2 , ale dla punktów $(x, y + 2k\pi) \in \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{C}$, f nie jest wzajemnie jednoznaczne.

29.26. a) -10 ; b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; c) -2 ; d) 10 ; e) $n(n+1)$.

29.30. a) $y^{x-1}(y \ln y dx + x dy)$; b) $\frac{du}{1+u^2} + \frac{dv}{1+v^2}$;

c) $\frac{|t|}{t^2} \frac{tdr - rdt}{\sqrt{t^2 - r^2}}$; d) $\frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; e) $\frac{1}{2}e$; f) $0,08$; g) $dx - dy$;

h) $2 \sum_{i=1}^n x_i dx_i$; i) $dx_1 + dx_2 + \dots + dx_n$; j) $\frac{\sqrt{2}}{32}(8 + \pi)\pi n$;

k) $\frac{2z}{(x^2 + y^2)^3} \left[(3x^2 - y^2)dx^2 + 8xy dx dy + (3y^2 - x^2)dy^2 - \frac{2(x^2 + y^2)}{z}(x dx + y dy) dz \right]$;

l) $24(dx^4 + 3dx^3 dy + dz^4)$;

l) $-[dx^6 - 15dx^4 dy^2 + 15dx^2 dy^4 - dy^6] \cos x \cosh y -$
 $-2dx dy [3dx^4 - 10dx^2 dy^2 + 3dy^4] \sin x \sinh x$;

m) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g(x)^{(n-k)} h(y)^{(k)} dx^{n-k} dy^k$.

29.33. $\approx 31,4 \text{ cm}^3$.

29.34. $(4730 \mp 100) \text{ cm}^3$.

29.35. $\approx 2,8 \text{ mm}$, $\approx 140 \text{ cm}^2$.

29.36. $\approx 1,08$.

29.37. a) $\approx 2,95$; b) $\approx 0,502$; c) $\approx 1,055$.

29.38. Zwiększy się o $\approx 2575 \text{ cm}^3$.

29.39. $\frac{1}{2}(\delta_l + \delta_g)$.

29.40. $\delta_s = \frac{2\delta_a}{a} + \frac{\delta_b \sin C}{\sin B \sin(B+C)} + \frac{\delta_c \sin B}{\sin C \sin(B+C)}$.

§ 30. POCHODNE SUPERPOZYCJI ODWZOROWAŃ. FUNKCJE UWIKŁANE

30.1. T_1 . Jeżeli odwzorowanie $F: \mathbb{R}^n \supset E \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie E zbiór otwarty, jest różniczkowalne na E oraz odwzorowanie $G: V \rightarrow \mathbb{R}^k$, gdzie $V \subset \mathbb{R}^m$ zbiór otwarty i $V \supset F(E)$ jest różniczkowalne na V , to odwzorowanie $H = G \circ F$ (superpozycja) jest różniczkowalne na E i

$$(1) \quad (G \circ F)'(\mathbf{x}) = G'(F(\mathbf{x})) F'(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in E.$$

Dla każdego $\mathbf{x} \in E$ pochodne $F'(\mathbf{x})$, $G'(F(\mathbf{x}))$, $(G \circ F)'(\mathbf{x})$ są przekształceniami liniowymi (por. § 29), a więc można je utożsamiać z macierzami (przy ustalonych bazach), przy czym superpozycji odwzorowań liniowych odpowiada iloczyn macierzy. Wynika stąd, że (1) może być napisany w postaci macierzowej. Istotnie, korzystając ze wzoru (5) § 29, z § 10

oraz z definicji mnożenia macierzy otrzymujemy

$$(2) \quad \left[\frac{\partial h_l(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right]_{k \times n} = \left[\frac{\partial g_l(\mathbf{y})}{\partial y_i} \right]_{k \times m} \left[\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right]_{m \times n},$$

gdzie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (y_1, y_2, \dots, y_m) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \in \mathbf{R}^m,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z} = (\mathbf{G} \circ \mathbf{F})(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x}) &= ((g_1 \circ \mathbf{F})(\mathbf{x}), (g_2 \circ \mathbf{F})(\mathbf{x}), \dots, (g_k \circ \mathbf{F})(\mathbf{x})) = \\ &= (g_1(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})), g_2(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})), \dots, g_k(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))) = \\ &= (h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_k(\mathbf{x})) \in \mathbf{R}^k, \end{aligned}$$

tzn. $f_i: E \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$ są współrzędnymi odwzorowania \mathbf{F} , $g_l: V \rightarrow \mathbf{R}$, $l = 1, 2, \dots, k$ są współrzędnymi odwzorowania \mathbf{G} oraz $h_l = g_l \circ \mathbf{F}: E \rightarrow \mathbf{R}$ są współrzędnymi odwzorowania $\mathbf{H} = \mathbf{G} \circ \mathbf{F}$.

Z (2) otrzymujemy

$$(3) \quad \frac{\partial h_l(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_l(\mathbf{y})}{\partial y_i} \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j},$$

$$l = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, n \text{ oraz } \mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Z (3) w szczególności otrzymujemy wzory na pochodne funkcji złożonych:

1° $\mathbf{F}: \mathbf{R}^n \supset E \rightarrow \mathbf{R}^m$, $g: \mathbf{R}^m \supset V \rightarrow \mathbf{R}$, gdzie $V \supset \mathbf{F}(E)$, $h = g \circ \mathbf{F}: E \rightarrow \mathbf{R}$, gdzie $h(\mathbf{x}) = g(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$

$$(4) \quad \frac{\partial h}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

2° $\mathbf{F}: \mathbf{R} \supset E \rightarrow \mathbf{R}^m$, $g: \mathbf{R}^m \supset V \rightarrow \mathbf{R}$, $V \supset \mathbf{F}(E)$, $h = g \circ \mathbf{F}: E \rightarrow \mathbf{R}$, gdzie $h(t) = g(f_1(t), \dots, f_m(t))$,

$$(5) \quad h' = \frac{dh}{dt} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_i} \frac{df_i}{dt}.$$

3° W przypadku 1° dla $m = n = 2$, mamy $h(x, y) = g(\underbrace{\varphi(x, y)}_u, \underbrace{\psi(x, y)}_v)$,

$$(6) \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

30.2. Funkcja uwikłana. Niech $F: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \supset X \times Y \ni (x, y) \rightarrow F(x, y) \in \mathbf{R}$, gdzie $x(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$. Jeżeli istnieje taka funkcja $f: X \supset X_1 \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}$, że $\bigwedge_{x \in X_1} F(x, f(x)) = 0$, to f nazywamy *funkcją uwikłaną* określoną równaniem $F(x, y) = 0$.

T_2 . Jeżeli: 1° $F \in C^1(U((x_0, y_0); \eta)) \wedge F'_y((x_0, y_0)) \neq 0$,

2° $F(x_0, y_0) = 0$,

to równanie $F(x, y) = 0$ wyznacza funkcję $f \in C^1(U_1(x_0; \eta_1))$ taką, że $f(x_0) = y_0$ i

$$(7) \quad f'_{x_i}(x_0) = -\frac{F'_{x_i}(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

W szczególności dla $n=1$ otrzymujemy funkcję uwikłaną $f: \mathbb{R} \supset U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ określoną równaniem $F(x, y)=0$ i taką, że $y_0=f(x_0)$ oraz

$$(8) \quad f'(x_0) = - \frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Jeżeli dla $n=1$, równanie $F(x, y)=0$ określa funkcję uwikłaną f oraz

$$(9) \quad (F(x_0, y_0)=0) \wedge (F'_x(x_0, y_0)=0) \wedge (F'_y(x_0, y_0) \neq 0),$$

$$(10) \quad f''(x_0) = - \frac{F''_{xx}(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} \neq 0,$$

to istnieje $y_{\min}=f(x_0)=y_0$ [$y_{\max}=f(x_0)=y_0$], gdy $f''(x_0)>0$ [$f''(x_0)<0$].

Przykłady

30.1. Dane są odwzorowania $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ określone wzorami:

$$y=f(x) = \sum_{i=1}^{m-1} a_{ii} x_i \mathbf{k}_i + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n a_{mj} x_j^2 \right) \mathbf{k}_m$$

$$(z=g(y)) \Leftrightarrow (Z_{k \times 1} = B_{k \times m} Y_{m \times 1}),$$

gdzie $a_{ii}, a_{mj} \in \mathbb{R}$ i B dane. Znaleźć f' , g' oraz $(g \circ f)'$.

Rozwiązanie. Korzystamy § 29, z T_1 i ze wzoru (2). Odwzorowania f i g są różniczkowalne na swoich dziedzinach, ponieważ g jest odwzorowaniem liniowym, natomiast współrzędne odwzorowania f są funkcjami elementarnymi, stąd $g' = B = [b_{ij}]_{k \times m}$ oraz

$$f'(x) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{m-1, m-1} & \dots & 0 \\ a_{m1} x_1 & a_{m2} x_2 & \dots & a_{m, m-1} x_{m-1} & \dots & a_{mn} x_n \end{bmatrix} = A_{m \times n}.$$

$$(g \circ f)'(x) = BA(x) =$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} a_{11} + b_{1m} a_{m1} x_1 & b_{12} a_{22} + b_{1m} a_{m2} x_2 & \dots & b_{1m} a_{mn} x_n \\ b_{21} a_{11} + b_{2m} a_{m1} x_1 & b_{22} a_{22} + b_{2m} a_{m2} x_2 & \dots & b_{2m} a_{mn} x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} a_{11} + b_{km} a_{m1} x_1 & b_{k2} a_{22} + b_{km} a_{m2} x_2 & \dots & b_{km} a_{mn} x_n \end{bmatrix}_{k \times n}$$

30.2. Dane są odwzorowania $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ określone wzorami:

$$y=f(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n a_{1i} x_i^2 \right) \mathbf{k}_1 + \sum_{i=2}^n a_{ii} x_i \mathbf{k}_i,$$

$$(z=g(y)) \Leftrightarrow (Z=CY),$$

gdzie $a_{1i}, a_{ii} \in \mathbb{R}$, $i=1, 2, \dots, n$, $C=[\delta_{ij} b_{ij}]_{n \times n}$ dane. Znaleźć Jakobian odwzorowania $g \circ f$.

Rozwiązanie. Jeżeli $f' = A_{n \times n}$, $g' = B_{n \times n}$, to Jakobian odwzorowania $g \circ f$ $J = \det(BA) = \det B \cdot \det A$. Ale

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \dots & a_{1n}x_n \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\det A = a_{11}x_1 a_{22} \dots a_{nn},$$

$$B = C = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\det B = b_{11} b_{22} \dots b_{nn},$$

$$\text{stąd } J = x_1 \prod_{i=1}^n a_{ii} b_{ii}.$$

30.3. Dane jest równanie

$$(a) \quad x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy} = 0$$

o niewiadomej funkcji określonej wzorem $z = f(x, y)$. Wprowadzając nowe zmienne u i v określone wzorami $u = y/x$, $v = y$ znaleźć funkcję f spełniającą równanie (a).

Rozwiązanie. Skorzystamy ze wzorów na pochodne cząstkowe funkcji złożonych. Otóż, jeżeli $z = f(x, y) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) = F(u, v)$ oraz równania $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ można rozwiązać względem zmiennych u i v , tzn. $u = \varphi_1(x, y)$, $v = \psi_1(x, y)$ (jest to możliwe, jeżeli $J = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix} \neq 0$), to

$$z'_x = f'_x = F'_u u'_x + F'_v v'_x, \quad z'_y = f'_y = F'_u u'_y + F'_v v'_y,$$

oraz

$$z'_u = F'_u = f'_x x'_u + f'_y y'_u, \quad z'_v = F'_v = f'_x x'_v + f'_y y'_v,$$

przy czym $F(\varphi_1(x, y), \psi_1(x, y)) = f(x, y) = z$. Podobnie znajdujemy pochodne rzędu drugiego. Mamy więc

$$z''_x = F'_u u''_x + F'_v v''_x = F'_u \frac{-y}{x^2} + F'_v \cdot 0 = -\frac{y}{x^2} F'_u,$$

$$z''_{xx} = \left(-\frac{y}{x^2}\right)'_x F'_u + \left(-\frac{y}{x^2}\right) (F'_u)'_x = \frac{2y}{x^3} F'_u - \frac{y}{x^2} \left(F''_{uu} \frac{-y}{x^2} + F''_{uv} \cdot 0\right) = \frac{2y}{x^3} F'_u + \frac{y^2}{x^4} F''_{uu},$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(-\frac{y}{x^2}\right)'_y F'_u - \frac{y}{x^2} (F'_u)'_y = -\frac{1}{x^2} F'_u - \frac{y}{x^2} \left(F''_{uv} \frac{1}{x} + F''_{vv}\right),$$

$$z'_y = F'_u \frac{1}{x} + F'_v,$$

$$z''_{yy} = \frac{1}{x} \left(F''_{uu} \frac{1}{x} + F''_{uv} \right) + F''_{vu} \frac{1}{x} + F''_{vv},$$

skąd

$$\begin{aligned} & x^2 \left(\frac{2y}{x^3} F'_u + \frac{y^2}{x^4} F''_{uu} \right) + 2xy \left(-\frac{F'_u}{x^2} - \frac{y}{x^3} F''_{uu} - \frac{y}{x^2} F''_{uv} \right) + \\ & + y^2 \left(\frac{1}{x^2} F''_{uu} + \frac{1}{x} F''_{uv} + F''_{vu} \frac{1}{x} + F''_{vv} \right) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & F''_{vv} = 0 \Rightarrow F'_v = g(u) \quad (\text{ponieważ } g'_v(u) = 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow & F(u, v) = vg(u) + h(u) \quad (\text{ponieważ } (vg(u) + h(u))'_v = g(u)), \end{aligned}$$

gdzie g i h są dowolnymi funkcjami klasy C^2 . Wynika stąd, że funkcja określona wzorem

$$z = f(x, y) = F\left(\frac{y}{x}, y\right) = yg\left(\frac{y}{x}\right) + h\left(\frac{y}{x}\right),$$

gdzie g i h są dowolnymi funkcjami klasy C^2 , spełnia równanie (a).

Uwaga. Zakładaliśmy, że funkcje f , φ i ψ są funkcjami klasy C^2 .

30.4. Dane jest równanie

$$(a) \quad x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$$

o niewiadomej funkcji określonej wzorem $z = f(x, y)$ oraz wzory na zamianę zmiennych

$$(a_1) \quad x = t, \quad y = \frac{t}{1+tu}, \quad z = \frac{t}{1+tv},$$

gdzie $v = \psi(t, u)$.

Korzystając ze wzorów na pochodne cząstkowe funkcji złożonych, znaleźć funkcje f spełniające równanie (a).

Rozwiązanie. Mając wyrażenie różniczkowe

$$A = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots\right),$$

gdzie $z = f(x, y)$, oraz mając wzory: $x = g(u, v, w)$, $y = h(u, v, w)$, $z = k(u, v, w)$, gdzie u i v nowe zmienne niezależne, a $w = r(u, v)$ oraz g , h , k i r spełniają odpowiednie założenia, możemy przekształcić wyrażenie A wprowadzając zmienne u , v i w . W tym celu wyrażamy

pochodne $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ za pomocą u , v i w , korzystając z równości

$$\frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) = \frac{\partial k}{\partial u} + \frac{\partial k}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) = \frac{\partial k}{\partial v} + \frac{\partial k}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v}$$

otrzymanych przez kolejne różniczkowanie względem u i v funkcji f i k . Podobnie wyrażamy

pochodne $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ itd.

W naszym zadaniu $u=t$, $v=u$, $w=v$ oraz

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{(1+tu)^2},$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{1}{(1+tv)^2}, \quad \frac{\partial k}{\partial v} = \frac{-t^2}{(1+tv)^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{-t^2}{(1+tu)^2}, \quad \frac{\partial h}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial u} = 0.$$

Stąd

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{1}{(1+tu)^2} = \frac{1}{(1+tv)^2} - \frac{t^2}{(1+tv)^2} \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} \frac{-t^2}{(1+tu)^2} = \frac{-t^2}{(1+tv)^2} \frac{\partial v}{\partial u}, \end{array} \right.$$

zatem

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{(1+tv)^2} \left(1 - t^2 \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial u} \right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(1+tu)^2}{(1+tv)^2} \frac{\partial v}{\partial u}.$$

Podstawiając znalezione pochodne $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ do (a), mamy $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$. Otrzymane równanie

spełnia każda funkcja określona wzorem $v = \varphi(u)$, gdzie φ jest dowolną funkcją klasy C^1 na pewnym zbiorze. Aby znaleźć funkcje f zmiennych x i y spełniające równanie (a) ko-

korzystamy ze wzoru $z = \frac{t}{1+tv}$. W tym celu wyrażamy nowe zmienne t , u i v za pomocą

starych zmiennych x , y i z , mianowicie:

$$t = x, \quad u = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \quad v = \frac{1}{z} - \frac{1}{x},$$

stąd poszukiwane funkcje

$$z = f(x, y) = \frac{x}{1 + x\varphi\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)},$$

gdzie φ jest dowolną funkcją.

Uwaga. Przykład można rozwiązać inną metodą. Korzystając ze wzorów $t = x$, $u = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$ traktujemy x i y jako zmienne niezależne; wówczas zmienna v zależy od x i y za pomocą zmiennych t i u . Różniczkując wzór $v = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$ względem x i względem y , otrzymujemy

$$-\frac{1}{z^2} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{x^2} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial u} \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{1}{z^2} \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial u} \frac{1}{y^2},$$

a stąd

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial v}{\partial u} \right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y^2} \frac{\partial v}{\partial u} \quad \text{itd.}$$

30.5. Niech $f: \mathbb{R}^n \supset E \rightarrow \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f różniczkowalna jest *funkcją dodatnio jednorodną stopnia $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$* , jeżeli

$$(a) \quad \bigwedge_{\mathbf{x} \in E} \bigwedge_{t \in \mathbb{R}_+} (f(t\mathbf{x}) = t^\alpha f(\mathbf{x})).$$

Udowodnić wzór (wzór Eulera)

$$(b) \quad (f'(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{x} = \alpha f(\mathbf{x})) \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n f'_{x_i}(\mathbf{x}) x_i = \alpha f(\mathbf{x}) \right)$$

$$(f'(\mathbf{x}) = \text{grad } f(\mathbf{x}) = (f'_{x_1}(\mathbf{x}), f'_{x_2}(\mathbf{x}), \dots, f'_{x_n}(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^n).$$

Dowód. Funkcja F określona wzorem $F(t) = f(t\mathbf{x})$ jest funkcją złożoną $F = f \circ g$, gdzie

$$g: \mathbb{R}_+ \ni t \rightarrow (g_1(t) = tx_1, g_2(t) = tx_2, \dots, g_n(t) = tx_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Korzystając zatem ze wzoru (5), otrzymujemy

$$(f \circ g)'(t) = F' = \frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(t\mathbf{x}) x_i = f'(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{x}$$

oraz

$$\frac{d}{dt} (t^\alpha f(\mathbf{x})) = \alpha t^{\alpha-1} f(\mathbf{x}).$$

Stąd, na mocy (a) i podstawiając $t = 1$, mamy $f'(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{x} = \alpha f(\mathbf{x})$. \square

30.6. Znaleźć ekstrema funkcji uwikłanej określonej równaniem

$$x^4 + y^4 = x^2 + y^2.$$

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzorów (9) i (10). Niech $F(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2$, wówczas $F'_x = 4x^3 - 2x$, $F'_y = 4y^3 - 2y$, skąd $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$, $2x^3 - x = 0$. Znalezione układ

ma następujące rozwiązania:

$$O(0, 0), \quad P_1(0, -1), \quad P_2(0, 1), \quad P_3\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, y_1\right),$$

$$P_4\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, y_2\right), \quad P_5\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, y_1\right), \quad P_6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, y_2\right),$$

gdzie $y_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$. Łatwo sprawdzić, że tylko dla punktu $O(0, 0)$ pochodna F'_y równa się zero, dla pozostałych punktów sprawdzamy warunek (10). Zatem

$$y'' = -\frac{F''_{xx}}{F'_y} = -\frac{6x^2 - 1}{y(2y^2 - 1)},$$

skąd kolejno otrzymujemy:

$$\text{dla punktu } P_1 \quad y'' = -1, \quad \text{czyli } y_{\max} = \varphi(0) = -1,$$

$$\text{dla punktu } P_2 \quad y'' = 1, \quad \text{czyli } y_{\min} = \varphi(0) = 1,$$

$$\text{dla punktu } P_3 \quad y'' < 0, \quad \text{czyli } y_{\max} = \varphi\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}},$$

$$\text{dla punktu } P_4 \quad y'' > 0, \quad \text{czyli } y_{\min} = \varphi\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}},$$

$$\text{dla punktu } P_5 \quad y'' < 0, \quad \text{czyli } y_{\max} = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}},$$

$$\text{dla punktu } P_6 \quad y'' > 0, \quad \text{czyli } y_{\min} = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}.$$

30.7. Zakładając, że równanie

$$(a) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, v) = 0, \quad \text{gdzie } v = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

oraz $F \in C^2 \wedge F'_v \neq 0$ na $E \subset \mathbb{R}^n$ wyznacza funkcję uwikłaną określoną wzorem $x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in V \subset \mathbb{R}^{n-1}$, znaleźć f'_{x_1} .

Rozwiązanie. Traktując lewą stronę równania (a) jako funkcję złożoną zmiennych x_1, x_2, \dots, x_{n-1} oraz różniczkując stronami (a) względem zmiennej x_1 , mamy

$$F'_{x_1} \cdot 1 + F'_v(1 + f'_{x_1}) = 0 \Rightarrow f'_{x_1} = -1 - \frac{F'_{x_1}}{F'_v}.$$

Podobnie, różniczkując stronami otrzymane równanie względem zmiennej x_1 , mamy

$$F''_{x_1x_1} + F''_{x_1v}(1+f'_{x_1}) + (F''_{vx_1} + F''_{vv}(1+f'_{x_1}))(1+f'_{x_1}) + F'_v f'_{x_1x_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''_{x_1x_1} = -\frac{1}{F'_v} (F''_{x_1x_1} + (1+f'_{x_1}))(2F''_{x_1v} + F''_{vv}(1+f'_{x_1})),$$

gdzie $f'_{x_1} = -1 - \frac{F'_{x_1}}{F'_v}$.

Zadania

30.8. Dane są funkcje: $g: \mathbf{R} \ni t \rightarrow (\varphi(t), \psi(t)) \in \mathbf{R}^2$, $f: \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow f(x, y) \in \mathbf{R}^{(1)}$.

Znaleźć $\frac{d(f \circ g)}{dt}$, jeżeli

a) $f(x, y) = x^y$; b) $\varphi(t) = 3t^2$, $\psi(t) = \sqrt{t^2 + 1}$, $f(x, y) = \ln \sin \frac{x}{\sqrt{y}}$.

30.9. Sprawdzić równości:

a) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = xy + u$, jeżeli $u = f(x, y) = xy + x \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$;

b) $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{v-u}{u^2+v^2}$, jeżeli $z = f(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$,

$$x = \varphi(u, v) = u + v, \quad y = \psi(u, v) = u - v.$$

30.10. Sprawdzić wzór Eulera (por. przykład 30.5) dla funkcji określonych wzorami:

a) $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$; b) $g(x, y) = \arctg \frac{x}{y}$;

c) $u(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{x}{y}$; d) $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j$;

e) $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sin \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}}$.

30.11. Wykazać, że jeżeli $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ jest przekształceniem liniowym określonym wzorem $Y = AX$ oraz $g: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^k$ jest przekształceniem liniowym określonym wzorem $Z = BY$, to $f' = A$, $g' = B$ oraz $(g \circ f)' = BA$.

30.12. Dane są odwzorowania: $f: \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow f(x, y) \in \mathbf{R}$, $g: \mathbf{R} \ni t \rightarrow (\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \in \mathbf{R}^3$. Znaleźć $(g \circ f)'(x, y)$, jeżeli:

a) $f(x, y) = xy$, $\varphi(t) = t^3$, $\psi(t) = t^2$, $\chi(t) = t$;

b) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\varphi(t) = t$, $\psi(t) = t^2$, $\chi(t) = t^3$;

c) $f(x, y) = ax + by$, $\varphi(t) = \sin t$, $\psi(t) = \cos t$, $\chi(t) = t$.

(¹) W zadaniu 30.8 i w następnych zakładamy, że występujące w nich funkcje złożone istnieją i są klasy C^2 .

30.13. Dane są odwzorowania: $f: \mathbf{R}^3 \ni (x, y, z) \rightarrow f(x, y, z) \in \mathbf{R}$, $g: \mathbf{R} \ni t \rightarrow (\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \in \mathbf{R}^3$.

Znaleźć $(g \circ f)'(x, y, z)$ oraz Jakobian odwzorowania $g \circ f$, jeżeli:

$$f(x, y, z) = x + 2y + 3z, \quad \varphi(t) = t, \quad \psi(t) = 4t, \quad \chi(t) = t^2.$$

30.14. Dane są odwzorowania:

$$f: \mathbf{R}^3 \ni (x, y, z) \rightarrow (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)) \in \mathbf{R}^3,$$

$$g: \mathbf{R}^3 \ni (u, v, w) \rightarrow (g_1(u, v, w), g_2(u, v, w), g_3(u, v, w)) \in \mathbf{R}^3.$$

Znaleźć: $(g \circ f)'(x, y, z)$ oraz Jakobian odwzorowania $g \circ f$, jeżeli:

a) $f_1(x, y, z) = x \cos y$, $f_2(x, y, z) = x \sin y$, $f_3(x, y, z) = z$;

$$g_1(u, v, w) = uvw, \quad g_2(u, v, w) = uv - uvw, \quad g_3(u, v, w) = v - uv;$$

b) $f_1(x, y, z) = x \cos y$, $f_2(x, y, z) = x \sin y$, $f_3(x, y, z) = z$,

$$g_1(u, v, w) = u \sin v \cos w, \quad g_2(u, v, w) = u \sin v \sin w, \quad g_3(u, v, w) = u \cos v;$$

c) $f_1(x, y, z) = x \sin y \cos z$, $f_2(x, y, z) = x \sin y \sin z$, $f_3(x, y, z) = x \cos y$,

$$g_1(u, v, w) = \cos u, \quad g_2(u, v, w) = \sin u \cos v, \quad g_3(u, v, w) = \sin u \sin v \cos w,$$

dla $x = 1$, $y = z = \frac{1}{2}\pi$.

30.15. Dane są odwzorowania: $f: \mathbf{R}^n \supset E \rightarrow \mathbf{R}^m$ ($m > n$), $g: \mathbf{R}^m \supset F \rightarrow \mathbf{R}^k$, $m > k > n$, $E = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$, $F = f(E)$ określone wzorami:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\frac{1}{2}x_1^2, \frac{1}{2}x_2^2, \dots, \frac{1}{2}x_n^2, x_n, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^m,$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) = (\ln y_1, \ln y_2, \dots, \ln y_{k-1}, \ln y_k + y_{k+1} + \dots + y_m) \in \mathbf{R}^k.$$

Znaleźć: a) $(g \circ f)'(\mathbf{x})$; b) $(g \circ f)'(\mathbf{x}_0)$, gdzie $\mathbf{x}_0 = (2, 2, \dots, 2)$.

30.16. Dane są odwzorowania: $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ określone wzorami:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\frac{1}{2}x_1^2, x_1x_2, \dots, x_1x_n),$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) = (e^{y_1 y_n}, e^{y_2 y_n}, \dots, e^{\frac{1}{2}y_n^2}).$$

Znaleźć:

a) $(g \circ f)'(\mathbf{x})$; b) Jakobian odwzorowania $g \circ f$;

c) Jakobian odwzorowania $g \circ f$ w punkcie $\mathbf{x}_0 = (1, 1, \dots, 1)$.

30.17. Udowodnić wzór Eulera (por. przykład 30.5) dla odwzorowania $f: \mathbf{R}^n \supset E \rightarrow \mathbf{R}^m$.

30.18. Korzystając ze wzoru (6) (por. 3°), znaleźć:

a) h''_{xx} ; b) h''_{xy} ; c) h''_{yy} .

30.19. Dane są funkcje złożone:

a) $h=f \circ g$, gdzie $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, $f: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$, tzn.

$$(f \circ g)(\mathbf{x})=f(g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n,$$

b) $f=p \circ \varphi$, gdzie $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^m$, $p: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$, tzn.

$$(p \circ \varphi)(t)=p(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)).$$

Znaleźć: a) $\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}$; b) $\frac{d^2 f}{dt^2}$.

30.20. Przyjmując nowe zmienne u i v (względnie u i v i t) rozwiązać równania:

a) $z'_x = z'_y$, $z=f(x, y)$, jeżeli $u=x+y$, $v=x-y$;

b) $yz'_x - xz'_y = 0$, $z=f(x, y)$, jeżeli $u=x$, $v=x^2+y^2$;

c) $az'_x + bz'_y = 1$, $a \neq 0$, $z=f(x, y)$, jeżeli $u=x$, $v=ay-bx$;

d) $xz'_x + yz'_y = z$, $z=f(x, y)$, jeżeli $u=x$, $v=\frac{y}{x}$;

e) $z''_{xx} + z''_{yy} - 2z''_{xy} = 0$, $z=f(x, y)$, jeżeli $u=x+y$, $v=y-2x$;

f) $z''_{xx} - yz''_{yy} = \frac{1}{2}z'_y$, $z=f(x, y)$, $y > 0$, $u=x-2\sqrt{y}$, $v=x+2\sqrt{y}$;

g) $x^2w''_{xx} + y^2w''_{yy} + z^2w''_{zz} + 2xyw''_{xy} + 2xzw''_{xz} + 2yzw''_{yz} = 0$,

$$w=h(x, y, z), \text{ jeżeli } u=\frac{y}{x}, v=\frac{z}{x}, t=y-z.$$

30.21. Przyjmując nowe zmienne u i v , względnie u , v i t przekształcić równania:

a) $xz'_x + \sqrt{1+y^2}z'_y = xy$, $z=f(x, y)$, jeżeli $u=\ln x$, $v=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$;

b) $(x+y)z'_x - (x-y)z'_y = 0$, $z=f(x, y)$, jeżeli $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\arctg\frac{y}{x}$;

c) $xz'_x + yz'_y = \frac{x}{z}$, $z=f(x, y)$, jeżeli $u=2x-z^2$, $v=\frac{y}{z}$;

d) $(x+z)z'_x + (y+z)z'_y = x+y+z$, $z=f(x, y)$, jeżeli $u=x+z$, $v=y+z$;

e) $(y+z+w)w'_x + (x+z+w)w'_y + (x+y+w)w'_z = x+y+z$, $w=f(x, y, z)$, jeżeli $e^u=x-w$, $e^v=y-w$, $e^t=z-w$.

30.22. Przyjmując nowe zmienne niezależne u i v względnie u , v i t przekształcić równania:

a) $2z''_{xx} + z''_{xy} - z''_{yy} + z'_x + z'_y = 0$, $z=f(x, y)$, jeżeli $u=x+2y+2$, $v=x-y-1$;

b) $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$, $z=f(x, y)$, jeżeli $u=\frac{x}{x^2+y^2}$, $v=-\frac{y}{x^2+y^2}$;

c) $z''_{xx} + z''_{yy} + m^2z = 0$, $z=f(x, y)$, jeżeli $x=e^u \cos v$, $y=e^u \sin v$;

d) $xz''_{xx} - yz''_{yy} = 0$, $z = f(x, y)$ ($x > 0 \wedge y > 0$), jeżeli $x = (u+v)^2$, $y = (u-v)^2$;

e) $x^2 w''_{xx} + y^2 w''_{yy} + z^2 w''_{zz} + yz w''_{yz} + xz w''_{xz} + xy w''_{xy} = 0$, $w = f(x, y, z)$, jeżeli $x = uv$, $y = vt$, $z = tu$.

30.23. Dana jest funkcja f określona wzorem $z = f(x, y)$, $(x, y) \in E$ i $f \in C^2(E)$. Przyjmując wzory na zamianę zmiennych (tzn. zmiennych x, y i z na t, u i v): $t = \frac{\partial z}{\partial x}$, $u = \frac{\partial z}{\partial y}$, $v = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z$ (zakładamy, że $z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 \neq 0$), wykazać, że przekształcenie odwrotne jest symetryczne, tzn. $x = \frac{\partial v}{\partial t}$, $y = \frac{\partial v}{\partial u}$, $z = t \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial u} - v$.

30.24. Dana jest funkcja f określona wzorem

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E \quad \text{i} \quad f \in C^2(E).$$

Przyjmując wzory na zamianę zmiennych (tzn. zmiennych x_1, x_2, \dots, x_n, z na t_1, t_2, \dots, t_n, v):

$$t_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad v = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} - z$$

oraz zakładając, że wyznacznik $H = \det [f''_{x_i x_j}]_{n \times n} \neq 0$ na E , wykazać, że przekształcenie odwrotne jest symetryczne, tzn. $x_i = \frac{\partial v}{\partial t_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $z = \sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial v}{\partial t_i} - v$.

30.25. Dana jest funkcja $2n$ zmiennych określona wzorem

$$z = \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (u_1, u_2, \dots, u_n, x_1, x_2, \dots, x_n) \in E \subset \mathbb{R}^{2n}$$

dotąd jednorodna stopnia drugiego względem zmiennych x_1, x_2, \dots, x_n , dla której $H = \det [\varphi''_{x_i x_j}]_{n \times n} \neq 0$ na E . Za pomocą przekształcenia $t_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ wprowadzamy nowe zmienne niezależne t_1, t_2, \dots, t_n zamiast zmiennych x_1, x_2, \dots, x_n . Wykazać, że

$$\text{a) } \frac{\partial \psi}{\partial t_i} = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \text{b) } \frac{\partial \psi}{\partial u_i} = -\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

30.26. Dane jest równanie

$$\text{(a)} \quad x^2 + 4y^2 - 4 = 0.$$

Niech $f: \langle -2, 2 \rangle \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$ oznacza funkcję wyznaczoną równaniem (a).

1° Ile funkcji f określa równanie (a)?

2° Ile funkcji f ciągłych określa równanie (a)?

3° Ile funkcji f ciągłych określa równanie (a), jeżeli

a) $f(2) = 0$; b) $f(-1) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$; c) $f(0) = 1$?

30.27. Znaleźć pierwsze pochodne funkcji uwikłanych określonych równaniami:

a) $x^3y - xy^3 = a^4$, gdzie a jest parametrem; b) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$;

c) $\arctg \frac{x+y}{a} - \frac{y}{a} = 0$ dla $y=x$ (a jest parametrem).

30.28. Znaleźć drugie pochodne w punkcie $(0, 1)$ funkcji uwikłanych określonych równaniami:

a) $x^2 - xy + y^2 = 1$; b) $x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$.

30.29. Dane jest równanie $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (a - parametr). Znaleźć pierwiastek równania $y'(x) = 0$.

30.30. Dane jest równanie $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$. Znaleźć y''' w punkcie $(1, 1)$.

30.31. Wykazać, że z równania $a + b(x+y) + cxy = m(x-y)$ wynika równanie

$$\frac{dx}{a + 2bx + cx^2} = \frac{dy}{a + 2by + cy^2}.$$

30.32. Znaleźć ekstrema funkcji uwikłanych określonych równaniami:

a) $y^2 - 2yx^2 + 4x - 3 = 0$; b) $x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$; c) $x^3 + y^3 - 6xy = 0$;

d) $xy^2 - x^2y = 2a^3$ (a - parametr); e) $x^4 + y^2 - 4xy = 0$.

U w a g a. W zadaniach 30.27 - 30.32 chodzi o funkcje uwikłane $f: \mathbb{R} \supset X \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$ określone odpowiednimi równaniami.

30.33. Załóżmy, że równanie $x^2 + y^2 + z^2 = k(ax + by + cz)$ (gdzie k jest funkcją różniczkowalną oraz a, b, c są parametrami) określa funkcję zwikłaną f . Wykazać, że

$$(cy - bz) f'_x + (az - cx) f'_y = bx - ay.$$

30.34. Znaleźć pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu funkcji f określonej równaniem $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$

30.35. Dana jest funkcja uwikłana f określona równaniem $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$. Znaleźć f''_{xx}, f''_{xy} i f''_{yy} dla $x=1, y=-2$ i $z=1$.

U w a g a. W zadaniach 30.33 - 30.35 chodzi o funkcje uwikłane $f: \mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \rightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}$ określone odpowiednimi równaniami.

30.36. Znaleźć dz i d^2z funkcji $f: \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ określonych równaniami:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$, a - stała; b) $xyz - x - y - z = 0$.

30.37. Znaleźć f'_x, f'_y i f''_{xx} funkcji uwikłanej $f: \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ określonej równaniem $F(x, u, v) = 0$, gdzie $u = x + y, v = x + y + z$.

30.38. Znaleźć $f''_{x_1x_2}$ funkcji uwikłanej $f: \mathbb{R}^{n-1} \supset V \ni x \rightarrow x_n = f(x) \in \mathbb{R}$ określonej równaniem

$$F(x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_n) = 0.$$

Odpowiedzi

$$30.8. \text{ a) } yx^{y-1}\varphi' + x^y \ln x \psi'; \quad \text{ b) } \frac{3t}{2\sqrt{t^2+1}} \frac{3t^2+4}{t^2+1} \operatorname{ctg} \frac{3t^2}{\sqrt{t^2+1}}.$$

$$30.12. \text{ a) } \begin{bmatrix} 3x^2y^3 & 3x^3y^2 \\ 2xy^2 & 2x^2y \\ y & x \end{bmatrix}; \quad \text{ b) } \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 4x(x^2+y^2) & 4y(x^2+y^2) \\ 6x(x^2+y^2)^2 & 6y(x^2+y^2)^2 \end{bmatrix};$$

$$\text{ c) } \begin{bmatrix} a \cos(ax+by) & b \cos(ax+by) \\ -a \sin(ax+by) & -b \sin(ax+by) \\ a & b \end{bmatrix}.$$

$$30.13. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 2(x+2y+3z) & 4(x+2y+3z) & 6(x+2y+3z) \end{bmatrix}, \quad J=0.$$

$$30.14. \text{ a) } \begin{bmatrix} xz \sin 2y & x^2z \cos 2y & x^2 \sin y \cos y \\ x(1-z) \sin 2y & x^2(1-z) \cos 2y & -x^2 \sin y \cos y \\ \sin y(1-2x \cos y) & x(\cos y - x \cos 2y) & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \frac{1}{2}x^3 \sin 2y;$$

$$\text{ b) } \begin{bmatrix} \cos w(\sin v \cos y + u \cos v \sin y) & x \cos w(u \cos v \cos y - \sin v \sin y) & -u \sin v \sin w \\ \sin w(\sin v \cos y + u \cos v \sin y) & x \sin w(u \cos v \cos y - \sin v \sin y) & u \sin v \cos w \\ \cos v \cos y - u \sin v \sin y & -x(\cos v \sin y + u \sin v \cos y) & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie $u = x \cos y$, $v = x \sin y$, $w = z$, $J = x^3 \cos^2 y \sin(x \sin y)$;

$$\text{ c) } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos 1 \\ 0 & 0 & -\sin 1 \end{bmatrix}, \quad J=0.$$

$$30.15. \text{ a) } \begin{bmatrix} \frac{2}{x_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{2}{x_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{2}{x_n} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{x_n} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{x_n} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{x_n} + m - k \end{bmatrix}, \quad \text{ b) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} + m - k \end{bmatrix}.$$

$$30.16. \text{ a) } \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1^2 x_n e^{\frac{1}{2}x_1^2 x_n} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2}x_1^3 e^{\frac{1}{2}x_1^2 x_n} \\ 2x_1 x_2 x_n e^{x_1^2 x_2 x_n} & x_1^2 x_n e^{x_1^2 x_2 x_n} & \dots & 0 & x_1^2 x_2 e^{x_1^2 x_2 x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2x_1 x_{n-1} x_n e^{x_1^2 x_{n-1} x_n} & 0 & \dots & x_1^2 x_n e^{x_1^2 x_{n-1} x_n} & x_1^2 x_{n-1} e^{x_1^2 x_{n-1} x_n} \\ x_1 x_n^2 e^{\frac{1}{2}x_1^2 x_n^2} & 0 & \dots & 0 & x_1^2 x_n e^{\frac{1}{2}x_1^2 x_n^2} \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } x_1^{2n} x_n^n e^{x_1^2 x_n} \left(\frac{1}{2}(x_1 + x_n) + x_2 + \dots + x_{n-1} \right); \quad \text{c) } e^{n-1}.$$

$$30.17. f'(x) \bullet x = \alpha f(x).$$

$$30.18. \text{ a) } g''_{uv}(u'_x)^2 + 2g''_{uv} u'_x v'_x + g''_{vv}(v'_x)^2 + g'_u u''_{xx} + g'_v v''_{xx};$$

$$\text{b) } g''_{uv} u'_x u'_y + g''_{uv}(u'_x v'_y + u'_y v'_x) + g''_{vv} v'_x v'_y + g'_u u''_{xy} + g'_v v''_{xy};$$

$$\text{c) } g''_{uu}(u'_y)^2 + 2g''_{uv} u'_y v'_y + g''_{vv}(v'_y)^2 + g'_u u''_{yy} + g'_v v''_{yy}.$$

$$30.19. \text{ a) } \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_k} \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_i \partial x_j};$$

$$\text{b) } \frac{d^2 f}{dt^2} = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 p}{\partial y_i \partial y_j} \frac{dy_i}{dt} \frac{dy_j}{dt} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{d^2 y_i}{dt^2}.$$

$$30.20. \text{ a) } z = \varphi(x+y); \quad \text{b) } z = \varphi(x^2+y^2); \quad \text{c) } z = \frac{x}{a} + \varphi(ay-bx);$$

$$\text{d) } z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right); \quad \text{e) } z = \varphi(x+y) + \psi(y-2x);$$

$$\text{f) } z = \varphi(x-2\sqrt{y}) + \psi(x+2\sqrt{y}); \quad \text{g) } w = (y-z)\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

W każdym z punktów a) - g) funkcja φ względnie funkcje φ i ψ są dowolne.

$$30.21. \text{ a) } z'_u + z'_v = e^u \sinh v; \quad \text{b) } z'_u = z'_v;$$

$$\text{c) } z'_v = \frac{z}{v} \cdot \frac{z^2 + u}{z^2 - u}; \quad \text{d) } (z-v)z'_u + (z-u)z'_v = u + v - z;$$

$$\text{e) } w'_u + w'_v + w'_t + 3w + e^u + e^v + e^t = 0.$$

$$30.22. \text{ a) } 3z''_{uv} + z'_u = 0; \quad \text{b) } z''_{uu} + z''_{vv} = 0; \quad \text{c) } z''_{uu} + z''_{vv} + m^2 e^{2u} z = 0;$$

$$\text{d) } z''_{uv} + \frac{1}{u^2 - v^2} (vz'_u - uz'_v) = 0; \quad \text{e) } t^2 w''_{tt} + u^2 w''_{uu} + v^2 w''_{vv} = 0.$$

30.25. Wsk. Funkcje dodatnio jednorodne określa się również względem podzbiorów zbioru zmiennych niezależnych, przy czym również jest prawdziwy wzór Eulera. Zauważyć, że $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$ jest funkcją jednorodną stopnia pierwszego oraz $\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}$ jest funkcją jednorodną stopnia drugiego względem zmiennych x_1, x_2, \dots, x_n .

30.26. 1° nieskończenie wiele; 2° dwie; 3° a) dwie, b) jedną, c) jedną.

$$30.27. \text{ a) } y' = \frac{3x^2y - y^3}{3xy^2 - x^3}; \quad \text{ b) } y' = \frac{ye^{xy} - ye^x - e^y}{xe^y + e^x - xe^{xy}}; \quad \text{ c) } y' = \frac{a^2}{4x^2}.$$

$$30.28. \text{ a) } y'' = -\frac{3}{4}; \quad \text{ b) } y'' = -\frac{2}{3}.$$

$$30.29. x = \sqrt[3]{2a}. \quad 30.30. y''' = \frac{1}{3}.$$

$$30.32. \text{ a) } y_{\min} = \varphi(-\frac{1}{2}) = -2; \quad \text{ b) } y_{\max} = \varphi(1) = 0, \quad y_{\min} = \varphi(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2};$$

$$\text{ c) } y_{\max} = \varphi(2\sqrt[3]{2}) = 2\sqrt[3]{4}; \quad \text{ d) } y_{\max} = \varphi(a) = 2a \text{ dla } a < 0, \quad y_{\min} = \varphi(a) = 2a \text{ dla } a > 0;$$

$$\text{ e) } y_{\max} = \varphi(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}, \quad y_{\min} = \varphi(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}.$$

$$30.34. f'_x = f'_y = -1, \quad f''_{xx} = f''_{xy} = f''_{yy} = 0. \quad 30.35. f''_{xx} = -\frac{2}{3}, \quad f''_{xy} = -\frac{1}{3}, \quad f''_{yy} = -\frac{394}{125}.$$

$$30.36. \text{ a) } dz = \frac{-1}{z}(xdx + ydy), \quad d^2z = \frac{-1}{z^3}((x^2 + z^2)dx^2 + 2xy dx dy + (y^2 + z^2)dy^2);$$

$$\text{ b) } dz = \frac{-1}{1-xy}((1-yz)dx + (1-xz)dy), \quad d^2z = \frac{-2}{(1-xy)^2}(y(1-yz)dx^2 + \\ + (x+y-z(1+xy))dx dy + x(1-xz)dy^2).$$

$$30.37. f'_x = -\frac{1}{F'_v}(F'_x + F'_u + F'_v), \quad f'_y = -\frac{1}{F'_v}(F'_u + F'_v), \quad f''_{xx} = -\frac{1}{F'_v} (F''_v(F''_{xx} + 2F''_{xu} + F''_{uv})) - \\ - 2(F'_x + F'_u)F'_v(F''_{xv} + F''_{uv}) + (F'_x + F'_u)^2 F''_{vv}.$$

$$30.38. f''_{x_1 x_2} = -\frac{1}{F'_n} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=2}^{n-1} F''_{ji} + (1+f'_{x_2}) \sum_{j=1}^{n-1} F''_{jn} + (1+f'_{x_1}) \left(\sum_{k=2}^{n-1} F''_{nk} + F''_{nn}(1+f'_{x_1}) \right) \right), \quad \text{gdzie}$$

F'_i oznacza pochodną cząstkową funkcji F względem i -tej zmiennej, F''_{ij} oznacza pochodną cząstkową rzędu drugiego względem zmiennych „ i ” i „ j ”,

$$f'_{x_1} = -\left(1 + \frac{1}{F'_n} \sum_{i=1}^{n-1} F'_i\right), \quad f'_{x_2} = -\left(1 + \frac{1}{F'_n} \sum_{j=2}^{n-1} F'_j\right).$$

§ 31. WZÓR TAYLORA. EKSTREMA FUNKCJI n ZMIENNYCH

31.1. Wzór Taylora. Jeżeli $f: \mathbf{R}^n \supset E \rightarrow \mathbf{R}$, E obszar otwarty, $f \in C^m(E)$, $a, a+h \in E$, to istnieje taki punkt $c = a + \theta h$, $\theta \in (0, 1)$, że

$$(1) \quad f(a+h) = f(a) + \frac{df(a, h)}{1!} + \frac{d^2f(a, h)}{2!} + \dots + \frac{d^{m-1}f(a, h)}{(m-1)!} + \frac{d^m f(c, h)}{m!}.$$

Uwaga. We wzorze (1) często podstawiamy $x = a + h \Rightarrow h = x - a$.

Niech $f: \mathbf{R}^n \supset E \rightarrow \mathbf{R}$, E zbiór otwarty, $f \in C^0(E)$, $a \in E$. Mówimy, że f ma w punkcie a minimum [maksimum] lokalne, jeżeli

$$(2) \quad \bigvee_{Q(a; \eta) \subset E} \bigwedge_{x \in Q(a; \eta)} ((f(a) < f(x)) [f(a) > f(x)]).$$

Mówimy, że f ma ekstremum lokalne w a (lub że a jest punktem ekstremalnym funkcji f), jeżeli f ma minimum lokalne, albo f ma maksimum lokalne. Często będziemy opuszczali słowo „lokalne”.

T_1 (warunek konieczny istnienia ekstremum). Jeżeli f ma ekstremum lokalne w punkcie a i jest różniczkowalna w tym punkcie, to

$$(\text{grad } f(a) = \mathbf{0}) \Leftrightarrow (f'_{x_i}(a) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n).$$

T_1 nie jest warunkiem wystarczającym dla istnienia ekstremum (por. przykład 31.2a).

Dana jest funkcja $f: \mathbf{R}^n \supset U(a; \eta) \rightarrow \mathbf{R}$, $a + h \in U(a; \eta)$.

Niech: $1^\circ f \in C^2(U(a; \eta))$, $2^\circ \text{grad } f(a) = \mathbf{0}$, 3° forma kwadratowa $d^2f(a, h)$ (por. przykład 29.5) jest dodatnio określona, $4^\circ d^2f(a, h)$ jest ujemnie określona, $5^\circ d^2f(a, h)$ nie jest określona, $6^\circ d^2f(a, h)$ jest półokreślona.

T_2 . Jeżeli prawdziwe są koniunkcje: $\alpha) 1^\circ \wedge 2^\circ \wedge 3^\circ$, to f ma minimum lokalne w a ; $\beta) 1^\circ \wedge 2^\circ \wedge 4^\circ$, to f ma maksimum lokalne w a ; $\gamma) 1^\circ \wedge 2^\circ \wedge 5^\circ$, to f nie ma ekstremum lokalnego w a ; $\delta) 1^\circ \wedge 2^\circ \wedge 6^\circ$, to f może mieć ekstremum lokalne w a , albo f może nie mieć ekstremum lokalnego w a .

Uwaga 1. W przypadku δ) korzystamy najczęściej z definicji ekstremum, tzn. badamy znak przyrostu Δf (por. przykład 31.3).

Uwaga 2. Określoność formy $d^2f(a, h)$ badamy metodami podanymi w § 10.

W przypadku funkcji dwóch zmiennych mamy:

$$1^\circ f \in C^2(U((x_0, y_0); \eta)), \quad 2^\circ f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0,$$

$$3^\circ (f''_{xx}(x_0, y_0) > 0) \wedge W(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0,$$

$$4^\circ (f''_{xx}(x_0, y_0) < 0) \wedge W(x_0, y_0) > 0, \quad 5^\circ W(x_0, y_0) < 0,$$

$$6^\circ W(x_0, y_0) = 0.$$

W celu znalezienia wartości najmniejszej i największej (mówimy też ekstremum absolutnego lub ekstremum globalnego) funkcji ciągłej $f: \mathbf{R}^n \supset E \rightarrow \mathbf{R}$ na obszarze domkniętym i ograniczonym E (wartości te zawsze istnieją, por. T_6 § 20) znajdujemy wartości u_1, u_2, \dots funkcji f w punktach stacjonarnych (dla których $\text{grad } f(x) = \mathbf{0}$) oraz wartość najmniejszą u_* i wartość największą u^* funkcji f na brzegu obszaru E . Najmniejsza [największa] z liczb $u_*, u^*, u_1, u_2, \dots$ jest najmniejszą [największą] wartością funkcji f na obszarze E .

31.2. Ekstrema warunkowe. Niech będą dane funkcje $f: \mathbf{R}^n \supset X_1 \rightarrow \mathbf{R}$, $g_i: \mathbf{R}^n \supset X_2 \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$ ($m < n$), gdzie $X_2 \cap X_1 \neq \emptyset$, przy czym funkcje g_i są liniowo niezależne, tzn. rząd

$$\mathbf{R} \left[\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right]_{m \times n} = m, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

(rzęd macierzy Jacobiego). Niech dalej $X_3 = \{x \in \mathbb{R}^n: g_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m\}$ i $X_3 \cap X_1 = X \neq \emptyset$. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $a \in X$ *ekstremum lokalne warunkowe*, związane warunkami

$$(3) \quad g_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

jeżeli funkcja $f|X$ (*obcięcie*) ma w a ekstremum lokalne.

Nie będziemy dokładnie formułować twierdzeń dotyczących ekstremów warunkowych, podamy tylko pewne uwagi. W przypadku gdy z układu (3) można efektywnie wyrugować m zmiennych, problem sprowadza się do ekstremum bez warunków, funkcji $(n-m)$ zmiennych. W przypadku ogólnym stosujemy metodę mnożników Lagrange'a. W tym celu określamy funkcję pomocniczą $F: X_2 \cap X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$(4) \quad F(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x),$$

gdzie λ_i (*mnożniki Lagrange'a*) są parametrami. Następnie rozwiązujemy układ $(n+m)$ równań (warunek konieczny):

$$(5) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0, j = 1, 2, \dots, n \right) \wedge (g_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m)$$

z $(n+m)$ niewiadomymi $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Współrzędne $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}$ występujące w rozwiązaniu układu (5) tworzą punkt $x_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ (punkt stacjonarny) spełniający warunek konieczny dla istnienia ekstremum warunkowego funkcji f przy warunkach (2). Warunek wystarczający otrzymujemy, badając określoność formy kwadratowej $d^2F(x, h)$, w punkcie x_0 dla parametrów $\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0m}$ spełniających wraz z x_0 układ (5). Przyrosty $h_k, k = 1, 2, \dots, n$ spełniają ponadto układ liniowy równań

$$(6) \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i(x_0)}{\partial x_j} h_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Z liniowej niezależności funkcji g_i wynika, że z układu (6) możemy wyznaczyć liniowo m zmiennych h_i za pomocą pozostałych $(n-m)$ zmiennych h_j . W konsekwencji forma $d^2F(x_0, h)$ będzie formą kwadratową $(n-m)$ zmiennych.

Przykłady

31.1. Napisać wzór Taylora funkcji określonych wzorami:

a) $f(x, y) = e^x \arctg y, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ w punkcie $P_0(1, 1)$ dla $m=2$;

b) $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln(1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n),$

$$x \in V = \{x: 1 + \sum_{i=1}^n x_i > 0\} \text{ w punkcie } O(0, 0, \dots, 0).$$

Rozwiązanie. Ponieważ $f \in C^m(\mathbb{R}^2)$ i $g \in C^m(V), m = 1, 2, \dots$, można więc stosować wzór (1).

a) Dla $n=m=2$ możemy (1) napisać w postaci

$$(a) \quad f(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}(f''_{xx}(P')(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(P')(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(P')(y - y_0)^2),$$

gdzie $P'(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0))$, $\theta \in (0, 1)$.

$$\text{Stąd: } f'_x = e^x \operatorname{arc} \operatorname{tg} y, \quad f'_y = \frac{e^x}{1 + y^2}, \quad f''_{xx} = e^x \operatorname{arc} \operatorname{tg} y, \quad f''_{xy} = \frac{e^x}{1 + y^2}, \quad f''_{yy} = \frac{-2ye^x}{(1 + y^2)^2}, \text{ zatem}$$

$$e^x \operatorname{arc} \operatorname{tg} y = \frac{1}{4}\pi e + \frac{1}{4}\pi e(x - 1) + \frac{1}{2}e(y - 1) + \frac{1}{2} \left\{ e^{1 + \theta(x - 1)} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(1 + \theta(y - 1))(x - 1)^2 + \right. \\ \left. + 2 \frac{e^{1 + \theta(x - 1)}}{1 + (1 + \theta(y - 1))^2} (x - 1)(y - 1) + \frac{-2(1 + \theta(y - 1))e^{1 + \theta(x - 1)}}{(1 + (1 + \theta(y - 1))^2)^2} (y - 1)^2 \right\}, \quad \theta \in (0, 1).$$

b) Kolejno znajdujemy

$$dg = \frac{1}{\varphi(x)} h_1 + \frac{1}{\varphi(x)} h_2 + \dots + \frac{1}{\varphi(x)} h_n,$$

gdzie $\varphi(x) = 1 + x_1 + \dots + x_n$ oraz $\varphi'_{x_i}(x) = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$;

$$d^2g = \sum_{i=1}^n \left(\frac{h_1 + h_2 + \dots + h_n}{\varphi(x)} \right)'_{x_i} h_i = \frac{-1}{(\varphi(x))^2} (h_1 + h_2 + \dots + h_n)^2 = \\ = \frac{(-1)^{2+1}}{(\varphi(x))^2} (h_1 + h_2 + \dots + h_n)^2.$$

Łatwo wykazać indukcyjnie, że

$$d^k g = \frac{(-1)^{k+1}}{(\varphi(x))^k} (k-1)! (h_1 + h_2 + \dots + h_n)^k.$$

Ponieważ

$$d^k g((0, 0, \dots, 0), h) = (-1)^{k+1} (k-1)! (h_1 + h_2 + \dots + h_n)^k$$

oraz $h = x - 0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, więc (por. (1))

$$\ln(1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n - \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 + \\ + \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^3 + \dots + \frac{(-1)^m}{m-1} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^{m-1} + \\ + \frac{(-1)^{m+1}}{m} \frac{1}{(1 + \theta(x_1 + \dots + x_n))^m} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^m, \quad \theta \in (0, 1).$$

31.2. Znaleźć ekstrema funkcji określonych wzorami:

a) $h(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$; b) $g(x, y) = \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{4}xy^4 + 3x + 2$;

c) $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$,

$$(x, y, z) \in V = \{(x, y, z) : (x > 0) \wedge (y > 0) \wedge (z > 0)\}.$$

Rozwiązanie. Korzystamy z T_2 .

$$\begin{aligned} \text{a) } (h'_x = e^{x-y}(x^2 + 2x - 2y^2), h'_y = -e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 4y)) &\Rightarrow \\ &\Rightarrow (x^2 + 2x - 2y^2 = 0, x^2 - 2y^2 + 4y = 0). \end{aligned}$$

Rozwiązując otrzymany układ, znajdujemy $O(0, 0)$, $P(-4, -2)$. Z kolei

$$\begin{aligned} h''_{xx} &= e^{x-y}(x^2 + 4x - 2y^2 + 2), & h''_{xy} &= -e^{x-y}(x^2 + 2x - 2y^2 + 4y), \\ h''_{yy} &= e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 8y - 4), \end{aligned}$$

skąd $W(0, 0) = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-4) - (-1 \cdot 0)^2 = -8 < 0$, czyli w $O(0, 0)$ ekstremum nie istnieje oraz

$$(W(-4, -2) = 8e^{-4} > 0) \wedge (h''_{xx}(-4, -2) = -6e^{-2} < 0) \Rightarrow z_{\max} = h(-4, -2) = 8e^{-2}.$$

$$\text{b) } (g'_x = x^4 + \frac{1}{4}y^4 + 3, g'_y = xy^3) \Rightarrow (x^4 + \frac{1}{4}y^4 + 3 = 0, xy^3 = 0).$$

Otrzymany układ nie ma rozwiązań, ponieważ dla $x=0 \vee y=0$ pierwsze równanie jest sprzeczne, a więc funkcja g nie ma ekstremów (por. T_1).

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(f'_x = 1 - \frac{1}{4} \frac{y^2}{x^2}, f'_y = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2}, f'_z = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} \right) &\Rightarrow \\ &\Rightarrow (4x^2 - y^2 = 0, y^3 - 2xz^2 = 0, z^3 - y = 0). \end{aligned}$$

Otrzymany układ ma dokładnie jedno rozwiązanie: $(\frac{1}{2}, 1, 1) \in V$.

Warunek wystarczający sprawdzamy, badając określoność różniczki $d^2f(x, h)$ (por. T_2) za pomocą badania znaków minorów głównych (por. § 10) macierzy $H = [f''_{x_i x_j}]_{3 \times 3}$ w punkcie $P_0(\frac{1}{2}, 1, 1)$. Mianowicie:

$$f''_{xx} = \frac{y^2}{2x^3} \Rightarrow f''_{xx}(P_0) = 4,$$

$$f''_{xy} = -\frac{y}{2x^2} \Rightarrow f''_{xy}(P_0) = -2, \quad f''_{xz} = 0,$$

$$f''_{yy} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} \Rightarrow f''_{yy}(P_0) = 3, \quad f''_{yz} = \frac{-2z}{y^2} \Rightarrow f''_{yz}(P_0) = -2,$$

$$f''_{zz} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \Rightarrow f''_{zz}(P_0) = 6,$$

skąd $A_1 = 4 > 0$,

$$A_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0, \quad A_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 32 > 0,$$

a więc istnieje $u_{\min} = f(P_0) = 4$.

31.3. Znaleźć odległość punktu $A(0, 1, 0)$ od powierzchni $y=xz$.

Rozwiązanie. Biejący punkt powierzchni $P(x, xz, z)$. Stąd

$$d(A, P) = \sqrt{(x-0)^2 + (xz-1)^2 + (z-0)^2} = g(x, z), \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2.$$

Należy więc znaleźć najmniejszą wartość funkcji g na \mathbb{R}^2 . Ponieważ $\lim_{(x, z) \rightarrow (\infty, \infty)} g(x, z) = +\infty$, wystarczy znaleźć wartości ekstremalne funkcji g na \mathbb{R}^2 i wziąć najmniejszą z nich. W szczególności, jeżeli g ma dokładnie jedno ekstremum minimum na \mathbb{R}^2 , to będzie to jednocześnie wartość najmniejsza. Funkcja odległości (w szczególności g) ma zawsze wartości nieujemne, zatem $(g \text{ ma min}) \Leftrightarrow (g^2 \text{ ma min})$. Stąd

$$f(x, z) = g^2(x, z) = x^2 + (xz-1)^2 + z^2, \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2.$$

Postępujemy podobnie jak w przykładzie 31.2;

$$(f'_x = 2x + 2z(xz-1), f'_z = 2z + 2x(xz-1)) \Rightarrow (x + z(xz-1) = 0, z + x(xz-1) = 0).$$

Otrzymany układ ma dokładnie jedno rozwiązanie $x=z=0$, stąd punkt $O(0, 0)$. Z kolei $f''_{xx} = 2 + 2z^2$, $f''_{xz} = 2(2xz-1)$, $f''_{zz} = 2 + 2x^2$, $W(0, 0) = 2 \cdot 2 - (-2)^2 = 0$. Otrzymaliśmy przykład 6° (por. T_2), w którym T_2 nie rozstrzyga problemu istnienia ekstremum. Korzystamy z definicji ekstremum, tzn. badamy znak przyrostu $\Delta f = f(0+h, 0+k) - f(0, 0)$. Otóż

$$\Delta f = h^2 + k^2 + (hk-1)^2 - 1 = (h-k)^2 + h^2 k^2 > 0$$

dla $h^2 + k^2 > 0$, tzn. istnieje sąsiedztwo punktu $O(0, 0)$, na którym $f(x, z) > f(0, 0)$, a więc $u_{\min} = f(0, 0) = 1 = d_{\min}$.

31.4. Znaleźć ekstrema funkcji uwikłanej $f: \mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \Rightarrow (z = f(x, y)) \in \mathbb{R}$ określonej równaniem

$$(a) \quad x^4 + y^4 + z^4 - 2(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Rozwiązanie. Z twierdzenia T_1 (warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego) oraz z T_2 § 30 wynika, że współrzędne punktów, dla których zachodzi warunek konieczny, spełniają warunki

$$(a_1) \quad F(x, y, z) = 0, \quad F'_x(x, y, z) = 0, \quad F'_y(x, y, z) = 0, \quad F'_z(x, y, z) \neq 0,$$

przy czym w przypadku istnienia ekstremum liczba $z_0 = f(x_0, y_0)$ wyznaczona z (a_1) jest wartością ekstremalną funkcji f . Warunek wystarczający istnienia ekstremum określa T_2 , przy czym pochodne $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$ znajdujemy metodami podanymi w § 30 (por. przykład 30.7).

W rozwiązywanym przykładzie mamy:

$$F'_x = 4x^3 - 4x, \quad F'_y = 4y^3 - 4y, \quad F'_z = 4z^3 - 4z,$$

skąd

$$(a_2) \quad x(x+1)(x-1) = 0, \quad y(y-1)(y+1) = 0, \quad x^4 + y^4 + z^4 - 2(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Dwa pierwsze równania układu (a_2) mają dziewięć rozwiązań: $O(0, 0)$, $P_1(-1, -1)$, $P_2(-1, 1)$, $P_3(1, -1)$, $P_4(1, 1)$, $Q_1(-1, 0)$, $Q_2(1, 0)$, $Q_3(0, -1)$, $Q_4(0, 1)$, dla których z trzeciego równania układu (a_2) znajdujemy pierwiastki z . Otóż dla $O(0, 0)$ mamy

$$(z^4 - 2z^2 = 0) \Leftrightarrow (z = -\sqrt{2} \vee z = 0 \vee z = \sqrt{2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (O_1(0, 0, -\sqrt{2}), O_2(0, 0, 0), O_3(0, 0, \sqrt{2})) - \text{rozwiązania układu } (a_2);$$

dla P_i , $i = 1, 2, 3, 4$:

$$(z^4 - 2z^2 - 2 = 0) \Leftrightarrow (z = -\sqrt{1+\sqrt{3}} \vee z = \sqrt{1+\sqrt{3}}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (P_{ij}(P_i, \mp\sqrt{1+\sqrt{3}}), i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2)$$

dalsze osiem rozwiązań układu (a_2) ;

dla Q_i , $i = 1, 2, 3, 4$ otrzymujemy

$$Q_{ij}(Q_i, \mp\sqrt{1+\sqrt{2}}), i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2$$

pozostałe osiem rozwiązań układu (a_2) .

Z kolei $F'_z(O_2) = 0$, $F'_z(O_1) = 4(-\sqrt{2}) \cdot 1 \neq 0$, $F'_z(O_3) = 4\sqrt{2} \cdot 1 \neq 0$ oraz podobnie $F'_x(P_{ij}) \neq 0$ i $F'_z(Q_{ij}) \neq 0$, dla $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2$, tzn. osiemnaście punktów: O_1 , O_3 , P_{ij} , Q_{ij} spełnia warunek konieczny istnienia ekstremum. W celu sprawdzenia warunku wystarczającego znajdujemy drugie pochodne cząstkowe funkcji f . Różniczkując kolejno względem zmiennych x i y równanie $F(x, y, z) = 0$, $F \in C^2(D)$, otrzymujemy:

$$F'_x + F'_z f'_x = 0, \quad F'_y + F'_z f'_y = 0,$$

$$F''_{xx} + F''_{xz} f'_x + f''_{xx} F'_z + f'_x (F''_{zx} + F''_{zz} f'_x) = 0,$$

$$F''_{xy} + F''_{xz} f'_y + f''_{xy} F'_z + f'_x (F''_{zy} + F''_{zz} f'_y) = 0,$$

$$F''_{yy} + F''_{yz} f'_y + f''_{yy} F'_z + f'_y (F''_{zy} + F''_{zz} f'_y) = 0.$$

W punktach spełniających warunek konieczny mamy $f'_x = f'_y = 0$, skąd

$$f''_{xx} = -\frac{F''_{xx}}{F'_z}, \quad f''_{xy} = -\frac{F''_{xy}}{F'_z}, \quad f''_{yy} = -\frac{F''_{yy}}{F'_z},$$

a więc wyróżnik (por. T_2)

$$W = \frac{1}{F_z'^2} (F''_{xx} F''_{yy} - F''_{xy}^2).$$

W naszym przykładzie mamy: $F''_{xx} = 4(3x^2 - 1)$, $F''_{xy} = 0$, $F''_{yy} = 4(3y^2 - 1)$, skąd: dla punktów O_1 i O_3

$$\left(W = \frac{16}{(\mp 4\sqrt{2})^2} > 0 \right) \wedge \left(f''_{xx} = \frac{-(-4)}{\mp\sqrt{2}} \right) \Rightarrow (z_{\max} = f_1(0, 0) = -\sqrt{2}, z_{\min} = f_2(0, 0) = \sqrt{2});$$

dla punktów P_{ij}

$$\left(W = \frac{16 \cdot 4}{(\mp 4\sqrt{1+\sqrt{3}}\sqrt{3})^2} > 0 \right) \wedge \left(f''_{xx} = \frac{-4 \cdot 2}{\mp 4\sqrt{1+\sqrt{3}}\sqrt{3}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z_{\max} = f_3(P_i) = \sqrt{1+\sqrt{3}}, i=1, 2, 3, 4 \text{ oraz } z_{\min} = f_4(P_i) = -\sqrt{1+\sqrt{3}}, i=1, 2, 3, 4);$$

dla punktów Q_{ij}

$$\left(W = \frac{16 \cdot 2 \cdot (-1)}{(\mp 4\sqrt{1+\sqrt{2}}\sqrt{2})^2} < 0 \right) \Rightarrow$$

\Rightarrow (w punktach Q_{ij} ekstrema nie istnieją).

Uwaga. Przy rozwiązywaniu zadania można było skorzystać z parzystości i symetrii funkcji F względem wszystkich zmiennych.

31.5. Korzystając z metody najmniejszych kwadratów znaleźć trójmian określony wzorem $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ dla danych wartości: $x_0 = -3$, $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $y_0 = 4$, $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$, $y_4 = 3$.

Rozwiązanie. Podamy najpierw niezbędne wiadomości teoretyczne. Niech dana będzie funkcja $F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, która w różnych między sobą punktach x_i , $i=0, 1, \dots, m$ przyjmuje wartości $y_i = F(x_i)$, $i=0, 1, \dots, m$. Należy znaleźć takie przybliżenie funkcji F za pomocą wielomianu co najwyżej stopnia n ($n < m$) określonego wzorem

$$(a) \quad f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

aby funkcja $(n+1)$ zmiennych określona wzorem

$$(a_1) \quad g(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^m (a_0 + a_1x_i + \dots + a_nx_i^n - y_i)^2$$

miała minimum. Taką metodę przybliżenia funkcji F wielomianem g nazywamy *metodą najmniejszych kwadratów*. W metodzie tej chodzi więc o znalezienie minimum funkcji $(n+1)$ zmiennych. Z T_1 otrzymujemy

$$(a_2) \quad \frac{\partial g}{\partial a_i} = 0, \quad i=0, 1, \dots, m,$$

tzn. układ $(n+1)$ równań liniowych z $(n+1)$ niewiarymymi. Można udowodnić, że układ (a_2) (tzw. *układ normalny Gaussa*) ma zawsze dokładnie jedno rozwiązanie, w którym g przyjmuje minimum. W przypadku $n=2$ otrzymujemy: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$,

$$\begin{aligned} g(a_0, a_1, a_2) &= \sum_{i=0}^m (a_2x_i^2 + a_1x_i + a_0 - y_i)^2, \\ g'_{a_0} &= 2 \sum_{i=0}^m (a_2x_i^2 + a_1x_i + a_0 - y_i)x_i^0 = \\ &= 2 \left(\left(\sum_{i=0}^m x_i^0 \right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^m x_i \right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^m x_i^2 \right) a_2 - \sum_{i=0}^m x_i^0 y_i \right), \end{aligned}$$

podobnie

$$g'_{a_1} = 2 \left(\left(\sum_{i=0}^m x_i \right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^m x_i^2 \right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^m x_i^3 \right) a_2 - \sum_{i=0}^m x_i y_i \right),$$

$$g'_{a_2} = 2 \left(\left(\sum_{i=0}^m x_i^2 \right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^m x_i^3 \right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^m x_i^4 \right) a_2 - \sum_{i=0}^m x_i^2 y_i \right).$$

Przyjmując oznaczenia $S_j = \sum_{i=0}^m x_i^j$ dla $j=0, 1, 2, 3, 4$, $T_j = \sum_{i=0}^m x_i^j y_i$ dla $j=0, 1, 2$, możemy układ (a_2) dla przypadku $n=2$ napisać w postaci

$$S_0 a_0 + S_1 a_1 + S_2 a_2 = T_0,$$

$$(a_3) \quad S_1 a_0 + S_2 a_1 + S_3 a_2 = T_1,$$

$$S_2 a_0 + S_3 a_1 + S_4 a_2 = T_2.$$

Układ (a_3) jest układem Cramera, który rozwiązujemy korzystając ze wzorów § 6.

Uwaga. Współczynniki S_j i T_j wygodnie jest obliczać z następującego schematu $S_0 = m+1$

x	x^2	x^3	x^4	y	xy	x^2y
x_0	x_0^2	x_0^3	x_0^4	y_0	$x_0 y_0$	$x_0^2 y_0$
x_1	x_1^2	x_1^3	x_1^4	y_1	$x_1 y_1$	$x_1^2 y_1$
x_2	x_2^2	x_2^3	x_2^4	y_2	$x_2 y_2$	$x_2^2 y_2$
...
x_m	x_m^2	x_m^3	x_m^4	y_m	$x_m y_m$	$x_m^2 y_m$
S_1	S_2	S_3	S_4	T_0	T_1	T_2

W rozwiązywanym przykładzie mamy $S_0 = m+1 = 5+1 = 6$ oraz

x	x^2	x^3	x^4	y	xy	x^2y
-3	9	-27	81	4	-12	36
-2	4	-8	16	1	-2	4
-1	1	-1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	3	6	12
-3	19	-27	115	9	-7	53

stąd

$$6a_0 - 3a_1 + 19a_2 = 9,$$

$$-3a_0 + 19a_1 - 27a_2 = -7,$$

$$19a_0 - 27a_1 + 115a_2 = 53.$$

Rozwiązaniem otrzymanego układu są liczby $a_0 = -\frac{1}{7}$, $a_1 = \frac{25}{56}$, $a_2 = \frac{231}{392}$, a więc trójmian określony jest wzorem

$$f(x) = \frac{231}{392} x^2 + \frac{25}{56} x - \frac{1}{7}.$$

31.6. Znaleźć wartości najmniejsze i największe funkcji określonych wzorami:

a) $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$ na $D = \{(x, y) : (0 \leq x \leq \pi) \wedge (0 \leq y \leq \pi)\}$;

b) $g(x, y, z) = xe^{-(x^2+y^2+z^2)}$ na $V = \{(x, y, z) : (x^2 + y^2 + z^2 \leq 1) \wedge (z \geq 0)\}$.

Rozwiązanie. a) Znajdujemy najpierw punkty stacjonarne, a więc

$$(\text{grad } f(x, y) = \mathbf{0}) \Leftrightarrow (\cos x - \cos(x+y) = 0, \quad \cos y - \cos(x+y) = 0).$$

Stąd $P_1(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi) \in \text{int } D$ oraz $u_1 = f(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$. Następnie znajdujemy wartość najmniejszą v_* i wartość największą v^* funkcji f na brzegu obszaru D , tzn. na zbiorze (będącym sumą czterech odcinków)

$$U = \{(x, y) : (x=0 \wedge y \in \langle 0, \pi \rangle) \vee (x=\pi \wedge y \in \langle 0, \pi \rangle) \vee (x \in \langle 0, \pi \rangle \wedge y=0) \vee (x \in \langle 0, \pi \rangle \wedge y=\pi)\}.$$

Łatwo sprawdzić, że $v_* = 0 = f(x, 0) = f(0, y)$, $v^* = 2 = f(\pi, \frac{1}{2}\pi) = f(\frac{1}{2}\pi, \pi)$. Stąd poszukiwane liczby $u_* = 0$, $u^* = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

b) Znajdujemy najpierw punkty stacjonarne funkcji g na $\text{int } V$, a więc

$$(\text{grad } g(x, y, z) = \mathbf{0}) \Leftrightarrow (e^{-(x^2+y^2+z^2)}(1-2x^2) = 0, \\ -2xye^{-(x^2+y^2+z^2)} = 0, \quad -2xz e^{-(x^2+y^2+z^2)} = 0).$$

Stąd $P_1(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0) \in V$, $P_2(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0) \in V$ oraz $u_1 = g(P_1) = \frac{-1}{\sqrt{2}e}$, $u_2 = g(P_2) = \frac{1}{\sqrt{2}e}$.

Z kolei znajdujemy wartość najmniejszą i największą funkcji g na brzegu obszaru V , tzn. na zbiorze

$$U = \{(x, y, z) : (x^2 + y^2 + z^2 = 1) \wedge (z \geq 0) \vee (x^2 + y^2 \leq 1) \wedge (z = 0)\}.$$

Dla punktów zbioru $U_1 = \{(x, y, z) : (x^2 + y^2 + z^2 = 1) \wedge (z \geq 0)\}$ funkcja g może być zapisana wzorem

$$g(x, y, z) = g_1(x, y) = xe^{-1},$$

$$(x^2 + y^2 \leq 1) \Leftrightarrow (-1 \leq x \leq 1) \wedge (-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}),$$

skąd wartość najmniejsza dla $x = -1$, $u_3 = g_1(-1, 0) = -\frac{1}{e}$, wartość największa dla $x = 1$, $u_4 = g_1(1, 0) = \frac{1}{e}$. Dla punktów zbioru

$$U_2 = \{(x, y, z) : (x^2 + y^2 \leq 1) \wedge (z = 0)\},$$

mamy

$$g(x, y, z) = g_2(x, y) = xe^{-(x^2+y^2)},$$

skąd

$$(g_2)'_x = e^{-(x^2+y^2)}(1-2x^2), \quad (g_2)'_y = -2xye^{-(x^2+y^2)}.$$

Punkty spełniające warunek $\text{grad } g_2(x, y) = \mathbf{0}$ prowadzą do wartości $u_1 = f(P_1) = \frac{-1}{\sqrt{2}e}$,

$u_2 = f(P_2) = \frac{1}{\sqrt{2e}}$. Z kolei na brzegu dziedziny funkcji g_2 otrzymujemy wartości $u_3 = -\frac{1}{e}$

i $u_4 = \frac{1}{e}$. Stąd wartość najmniejsza funkcji f na V : $u_* = \min\left(\frac{-1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{-1}{e}, \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$

oraz wartość największa $u^* = \frac{1}{e}$.

31.7. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji określonej wzorem $f(x, y) = \frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y$ przy warunku $x^2 + y^2 = 1$.

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzorów (4) i (5):

$$F(x, y) = \frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + \lambda(x^2 + y^2 - 1), \quad F'_x = \frac{1}{a} + 2\lambda x, \quad F'_y = \frac{1}{b} + 2\lambda y,$$

skąd

$$\frac{1}{a} + 2\lambda x = 0, \quad \frac{1}{b} + 2\lambda y = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Otrzymany układ ma rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-|ab|}{a\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y_1 = \frac{-|ab|}{b\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2|ab|},$$

$$x_2 = \frac{|ab|}{a\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y_2 = \frac{|ab|}{b\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{-2|ab|},$$

ozn. istnieją dwa punkty $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$, w których funkcja f może mieć ekstrema warunkowe. Z kolei znajdujemy różniczkę rzędu drugiego funkcji F w punktach $P_i(x_i, y_i)$, dla parametrów λ_i , $i = 1, 2$:

$$F''_{xx} = 2\lambda, \quad F''_{yy} = 2\lambda, \quad F''_{xy} = F''_{yx} = 0,$$

skąd

$$L = d^2F(Q_i, h) = 2\lambda_i(h_1^2 + h_2^2), \quad i = 1, 2.$$

Układ (6) redukuje się do jednego równania

$$2 \frac{\mp |ab|}{a\sqrt{a^2 + b^2}} h_1 + 2 \frac{\mp |ab|}{b\sqrt{a^2 + b^2}} h_2 = 0,$$

z którego otrzymujemy $h_2 = -\frac{b}{a}h_1$ dla punktów P_i , $i = 1, 2$. Zatem

$$L = 2\lambda_1 \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right) h_1^2 > 0 \quad \text{oraz} \quad L = 2\lambda_2 \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right) h_1^2 < 0,$$

tnz. forma kwadratowa L jest dodatnio określona w punkcie Q_1 , a więc w P_1 jest minimum

$$z_{\min} = f(x_1, y_1) = \frac{-|ab|}{a^2 b^2} \sqrt{a^2 + b^2}$$

oraz w P_2 jest maksimum

$$z_{\max} = f(x_2, y_2) = \frac{|ab|}{a^2 b^2} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Uwaga. Przykład można również rozwiązać rugując jedną z niewiadomych i sprowadzając zagadnienie do znalezienia ekstremów funkcji jednej zmiennej.

31.8. Znaleźć pole elipsy będącej przekrojem walca eliptycznego $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ płaszczyzną

$H: Ax + By + Cz = 0, ABC \neq 0.$

Rozwiązanie. Z warunku $ABC \neq 0$ wynika, że płaszczyzna H nie jest równoległa do żadnej osi układu, a więc w przekroju istotnie otrzymujemy elipsę. Z kolei z symetrii walca względem początku układu wynika, że środkiem tej elipsy jest początek układu. Ponieważ pole elipsy $S = \pi a_1 b_1$, gdzie a_1, b_1 są półosiami elipsy, wystarczy znaleźć iloczyn $a_1 b_1$. Kwadraty a_1^2 i b_1^2 znajdziemy jako wartości najmniejszą i wartość największą funkcji określonej wzorem

$$f(x, y, z) = d^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

przy warunkach

$$(a) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad Ax + By + Cz = 0.$$

Z treści geometrycznej zadania wynika, że funkcja f ma dokładnie jedno minimum i dokładnie jedno maksimum, będące jednocześnie odpowiednio wartością najmniejszą i wartością największą funkcji f na zbiorze punktów będącym częścią wspólną dziedziny funkcji f i zbioru punktów określonych warunkami (a). Problem sprowadziliśmy więc do znalezienia ekstremów warunkowych funkcji f przy warunkach (a). Stosuje my metodę mnożników Lagrange'a. Łatwo sprawdzić, że równania (a) są niezależne (rzęd macierzy Jacobiego jest równy 2) zatem

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \alpha \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) + 2\beta(Ax + By + Cz)$$

(w celu uproszczenia rachunków napisaliśmy 2β zamiast β), stąd

$$F'_x = 2x + 2\alpha \frac{x}{a^2} + 2\beta A, \quad F'_y = 2y + 2\alpha \frac{y}{b^2} + 2\beta B, \quad F'_z = 2z + 2\beta C.$$

Z kolei należy rozwiązać układ równań:

$$(a) \quad \begin{cases} x + \alpha \frac{x}{a^2} + \beta A = 0, & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \\ y + \alpha \frac{y}{b^2} + \beta B = 0, \\ z + \beta C = 0, & Ax + By + Cz = 0. \end{cases}$$

Mnożąc pierwsze równanie przez x , drugie przez y , trzecie przez z (oczywiście $x \cdot y \cdot z \neq 0$) i dodając stronami tak otrzymane równania, mamy

$$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + \beta (Ax + By + Cz) = 0.$$

Korzystając z równania czwartego i piątego, otrzymujemy:

$$d^2 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -d^2,$$

zatem

$$(a_1) \quad \begin{cases} x = -\beta \frac{Aa^2}{a^2 - d^2}, \\ y = -\beta \frac{Bb^2}{b^2 - d^2}, \\ z = -\beta C. \end{cases}$$

Z ostatniego równania układu (a) i z (a₁) wynika, że

$$(a_2) \quad \frac{A^2 a^2}{a^2 - d^2} + \frac{B^2 b^2}{b^2 - d^2} + C^2 = 0.$$

Zauważmy, że nie musimy znajdować pierwiastków układu (a), tzn. punktów spełniających warunek konieczny, jak również nie musimy sprawdzać warunku wystarczającego (wynika on z warunków geometrycznych zadania), ponieważ pierwiastki równania (a₂) o zmiennej d^2 dają bezpośrednio wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f , tzn. liczby a_1^2 i b_1^2 . Przekształcając (a₂) otrzymujemy

$$C^2 d^4 - (A^2 a^2 + B^2 b^2 + C^2 a^2 + C^2 b^2) d^2 + a^2 b^2 (A^2 + B^2 + C^2) = 0,$$

stąd

$$a_1^2 b_1^2 = d_1^2 d_2^2 = \frac{a^2 b^2 (A^2 + B^2 + C^2)}{C^2},$$

zatem poszukiwane pole elipsy

$$S = \pi \frac{|ab| \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{|C|}.$$

Zadania**31.9.** Napisać wzór Taylora funkcji określonych wzorami:

a) $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ w punkcie $P_0(-2, 1)$ dla $n > 2$;

b) $f(x, y) = e^x \sin y$, w $O(0, 0)$ dla $n = 3$;

c) $g(x, y) = x^y$ w $P_0(e, 1)$ dla $n = 2$;

d) $h(x, y, z) = x^2 e^y \cos z$ w $Q_0(1, 0, \frac{1}{2}\pi)$ dla $n = 2$;

e) $k(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_n^n$ w $p(1, 1, \dots, 1)$;

f) $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n 2^{x_i}$ w $O(0, 0, \dots, 0)$;

g) $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = e^{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$, w $q(1, 1, \dots, 1)$.

31.10. Stosując wzór Taylora dla $n = 2$ znaleźć przybliżenia liczb:

a) $\sqrt{1,03} \sqrt[3]{0,98}$; b) $(0,95)^{2,01}$.

31.11. Znaleźć ekstrema funkcji określonych wzorami:

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$; b) $u(x, y) = x^3 y^2 (a - x - y)$;

c) $g(u, v) = u^2 + uv + v^2 + \frac{a^3}{u} + \frac{a^3}{v}$ ($u > 0, v > 0$); d) $p(u, r) = \frac{1 + u - r}{\sqrt{1 + u^2 + r^2}}$;

e) $z(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$, gdzie $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$;

f) $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$; g) $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$;

h) $t(x, y, z) = xyz(4 - x - y - z)$;

i) $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ ($x > 0, y > 0, z > 0$);

j) $p(u, v, w) = uv^2 w^3 (a - u - 2v - 3w)$ ($a > 0$);

k) $w(x, y, z, u) = xy^2 z^3 u^4 (1 - x - 2y - 3z - 4u)$;

l) $p(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}$.

31.12. Znaleźć najmniejsze i największe wartości funkcji określonych wzorami:

a) $f(x, y) = x^2 - y^2$ na kole $x^2 + y^2 \leq 4$;

b) $g(x, y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ na obszarze $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$;

c) $k(x, y) = x^2 y(4 - x - y)$ na trójkącie, którego boki leżą na prostych:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 6;$$

d) $z(x, y) = x^2 - xy + y^2$ na obszarze $D: |x| + |y| \leq 1$; e) $u(x, y) = x e^{x(1+y^2)^2}$ na \mathbf{R}^2 ;

f) $u(x, y, z) = x + y + z$ na obszarze $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$;

g) $m(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ na kuli $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 100\}$;

h) $p(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=1}^4 \sin x_i - \sin \sum_{i=1}^4 x_i$ na $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_i \in \langle 0, \pi \rangle, i = 1, 2, 3, 4\}$.

31.13. Na płaszczyźnie Oxy znaleźć punkt $P(x, y)$, dla którego suma kwadratów odległości od trzech prostych $x=0$, $y=0$ i $x-y+1=0$ jest najmniejsza.

31.14. Na płaszczyźnie Oxy znaleźć punkt $P(x, y)$, dla którego suma kwadratów odległości od stałych punktów $P_i(x_i, y_i)$, $i=1, 2, \dots, n$, jest najmniejsza.

31.15. Liczbę dodatnią a przedstawić w postaci sumy takich trzech składników dodatnich, aby ich iloczyn był największy.

31.16. Jaki trójkąt o danym obwodzie $2p$ ma ekstremalne pole?

31.17. Znaleźć długość najkrótszego odcinka dzielącego trójkąt na dwie figury o równych polach, jeżeli końce tego odcinka leżą na dwóch bokach trójkąta o długościach a i b i jeżeli kąt między tymi bokami jest γ .

31.18. Jaki czworokąt wypukły o danych długościach boków a , b , c i d ma ekstremalne pole?

31.19. W trójkącie o długościach boków a , b i c znaleźć punkt, dla którego suma kwadratów odległości od trzech boków jest najmniejsza.

31.20. Jakie muszą być kąty trójkąta wpisanego w koło o promieniu R , aby obwód trójkąta był największy?

31.21. Na okręgu o promieniu r opisać trójkąt o najmniejszym polu.

31.22. Jakie największe pole może mieć czworokąt wpisany w koło o promieniu R , jeżeli jeden z jego kątów wynosi α .

31.23. Znaleźć takie zewnętrzne wymiary otwartej skrzynki (bez pokrywki) w kształcie prostopadłościanu o danej grubości ścianek a i objętości V , aby na zbudowanie skrzynki zużyć najmniejszą ilość materiału.

31.24. W półkule o promieniu R wpisać prostopadłościan o ekstremalnej objętości.

31.25. Znaleźć trójkąt o danym obwodzie $2p$, który obracając się dookoła jednego ze swoich boków tworzy bryłę o największej objętości.

31.26. W stożek kołowy o promieniu podstawy R i długości wysokości h wpisać prostopadłościan o największej objętości.

31.27. Z drutu o długości 144 cm wykonać modele czterech sześciątów tak, aby suma pól ich ścian była ekstremalna.

31.28. Znaleźć odległość punktu $A(0, 3, 0)$ od powierzchni $y=xz$.

31.29. Znaleźć odległość punktu $O(0, 0, 0)$ od powierzchni $z(x, y)=1/xy$.

31.30. Przez punkt $A(a, b, c)$ poprowadzić taką płaszczyznę, aby objętość czworokątnika utworzonego przez tę płaszczyznę i płaszczyzny układu $Oxyz$ była najmniejsza (zakładamy, że $abc \neq 0$).

31.31. Znaleźć prostopadłościan o stałej objętości V mający: a) najmniejszy obwód; b) najmniejszą powierzchnię całkowitą.

31.32. W elipsoidę $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ wpisać prostopadłościan o największej objętości.

31.33. Wykazać, że funkcja określona wzorem $f(x, y) = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ ma nieskończenie wiele wartości maksymalnych oraz że nie ma żadnej wartości minimalnej.

31.34. Na powierzchni sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ znaleźć taki punkt, dla którego suma kwadratów odległości od punktów $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, jest najmniejsza.

31.35. Udowodnić nierówność:
$$\bigwedge_{x, y \in \mathbb{R}} x e^{x(1+y^2)^2} \geq -e^{-1}.$$

31.36. Dany jest układ n punktów materialnych $A_i(x_i, y_i, z_i)$, o masach m_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Znaleźć współrzędne punktu S , względem którego moment bezwładności układu jest najmniejszy.

31.37. Znaleźć odległość prostej $L: x = 2 - 3t, y = 7 + 2t, z = 6 + 2t$ od paraboloidy $z = 4 - x^2 - y^2$. Jakie punkty prostej i paraboloidy są najbliższe?

31.38. Znaleźć odległość prostej $L: x = 4 - t, y = 1 + 2t, z = -1 + 2t$ od paraboloidy $z = x^2 + y^2$. Jakie punkty prostej i paraboloidy są najbliższe?

31.39. Znaleźć odległość prostej $L: x = 1 + t, y = t, z = 0$ od stożka $x^2 + (y - 1)^2 = z^2$. Jakie punkty prostej i stożka są najbliższe?

31.40. Znaleźć odległość prostej $L: x = 1 - t, y = 6 + 2t, z = -3 - 2t$ od sfery $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$. Jakie punkty prostej i sfery są najbliższe?

31.41. Na dodatniej półosi Ox znajdują się cztery punkty materialne o masach proporcjonalnych do odległości od początku układu (współczynnik proporcjonalności k). Przy jakich masach moment bezwładności układu tych punktów względem początku układu jest ekstremalny, jeżeli suma odległości wszystkich punktów od początku układu jest stała i równa a ?

31.42. Udowodnić, że układ (a_3) w przykładzie 31.5 jest układem Cramera (por. § 6) oraz że dla rozwiązania $a_0 = \alpha, a_1 = \beta, a_2 = \gamma$ tego układu funkcja g określona wzorem (a_1) (przykład 31.5) przyjmuje minimum.

31.43. Dane są liczby: $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4; y_0 = 0, y_1 = 1, y_2 = 3, y_3 = 5$, przy czym zakładamy, że liczby te z wystarczającą dokładnością opisane są za pomocą funkcji określonej wzorem $y = ax + b$. Znaleźć współczynniki a i b , korzystając z metody najmniejszych kwadratów.

31.44. Dane są wyniki pomiarów

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Wyrównać te wyniki za pomocą funkcji określonej wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, korzystając z metody najmniejszych kwadratów.

31.45. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji określonych wzorami:

a) $f(x, y) = xy^2$, jeżeli $x + y = 1$;

b) $f(x, y) = x^2 + y^2$, jeżeli $bx + ay = ab$;

c) $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, jeżeli $x^2 + y^2 = 1$;

d) $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, jeżeli $x - y = \frac{1}{4}\pi$.

31.46. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji określonych wzorami:

a) $f(x, y, z) = x + y + 2z$, jeżeli $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

b) $f(x, y, z) = xy^3z^3$, jeżeli $x + 2y + 3z = a$ ($x, y, z \in \mathbf{R}_+ \wedge a > 0$);

c) $f(x, y, z) = x^m y^n z^p$, jeżeli $x + y + z = a$, $m, n, p, a \in \mathbf{R}_+$.

31.47. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji określonych wzorami:

a) $g(x, y, z) = xyz$, jeżeli $x + y + z = 5$, $xy + xz + yz = 8$;

b) $h(x, y, z) = xyz$, jeżeli $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

c) $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, jeżeli $x + \sqrt{2}y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($a > b > c > 0$).

31.48. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji określonych wzorami:

a) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$, jeżeli $\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} = 1$, $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$;

b) $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^3$, jeżeli $\sum_{i=1}^n x_i = a$, $a > 0$;

c) $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x_i}$, jeżeli $\sum_{i=1}^n b_i x_i = 1$, $a_i > 0$, $b_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

31.49. Udowodnić nierówność $\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$, dla $n \geq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$.**31.50.** Znaleźć ekstrema formy kwadratowej,

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji}), \quad \text{jeżeli} \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1.$$

31.51. Korzystając z ekstremów warunkowych wykazać prawdziwość wzorów:

a) $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ – odległość punktu $P_0(x_0, y_0)$ od prostej $Ax + By + C = 0$;

b) $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ – odległość punktu $Q_0(x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $Ax + By + Cz + D = 0$;

c) $d = \frac{|\overline{PQ} \times v|}{|v|}$ – odległość punktu Q od prostej

$$L: r = \overline{OP} + tv, \quad P \in L, \quad t \in \mathbf{R}, \quad v \parallel L;$$

d) $d = \frac{|\overline{P_1 P_2} \bullet (v_1 \times v_2)|}{|\overline{v_1} \times \overline{v_2}|}$ – odległość dwóch prostych nierównoległych

$$L_1: \mathbf{r} = \overline{OP}_1 + t\mathbf{v}_1, \quad P_1 \in L_1, \quad \mathbf{v}_1 \parallel L_1, \quad t \in \mathbf{R},$$

$$L_2: \mathbf{r} = \overline{OP}_2 + u\mathbf{v}_2, \quad P_2 \in L_2, \quad \mathbf{v}_2 \parallel L_2, \quad u \in \mathbf{R}.$$

31.52. Obliczyć pole przekroju elipsoidy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ płaszczyzną $mx + ny + pz = 0$, gdzie $m^2 + n^2 + p^2 = 1$.

31.53. Na elipsoidzie $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ znaleźć punkty najbliżej i najdalej oddalone od płaszczyzny $3x + 4y + 12z = 288$.

31.54. Znaleźć półosie elipsy będącej przekrojem powierzchni elipsoidy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ z płaszczyzną $bx + my + nz = 0$.

Odpowiedzi

31.9. a) $1 - (x+2)^2 + 2(x+2)(y-1) + 3(y-1)^2$;

b) $y + xy + \frac{1}{6}e^{\theta x}(x^3 \sin \theta y + 3x^2 y \cos \theta y - 3xy^2 \sin \theta y - y^3 \cos \theta y)$;

c) $x + e(y-1) + \frac{1}{2}((1 + \theta(y-1))\theta(y-1)(e + \theta(x-e)^{\theta(y-1)-1}))(x-e)^2 +$
 $+ (e + \theta(x-e))^{\theta(y-1)}(1 + (1 + \theta(y-1)) \ln(e + \theta(x-e)))(x-e)(y-1) +$
 $+ \ln^2(e + \theta(x-e))(e + \theta(x-e))^{1 + \theta(y-1)}(y-1)^2$;

d) $-(z - \frac{1}{2}\pi) + \frac{1}{2}e^{\theta y}(-2 \sin(\theta(z - \frac{1}{2}\pi))(x-1)^2 - 4(1 + \theta(x-1)) \sin(\theta(z - \frac{1}{2}\pi)) \cdot (x-1)y -$
 $- 4(1 + \theta(x-1)) \cos(\theta(z - \frac{1}{2}\pi))(x-1)(z - \frac{1}{2}\pi) -$
 $- 2(1 + \theta(x-1)) \cos(\theta(z - \frac{1}{2}\pi))y(z - \frac{1}{2}\pi) - (1 + \theta(x-1)) \sin(\theta(z - \frac{1}{2}\pi))y^2 +$
 $+ (1 + \theta(x-1)) \sin(\theta(z - \frac{1}{2}\pi))(z - \frac{1}{2}\pi)^2)$;

e) $1 + (x_1 - 1) + n(x_n - 1) + \frac{1}{2}n(n-1)(x_n - 1)^2 + \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)(x_n - 1)^3 + \dots$
 $\dots + n(x_n - 1)^{n-1} + (x_n - 1)^n$;

f) $n + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\ln^i 2}{i!} \sum_{j=1}^n x_j^i + \frac{\ln^m 2}{m!} \sum_{i=1}^n 2^{\theta x_i} x_i^m$, gdzie $h = x$;

g) $e^n \left(1 + \alpha + \frac{1}{2!} \alpha^2 + \dots + \frac{1}{(m-1)!} \alpha^{m-1} + \frac{1}{m!} e^{\theta \alpha} \alpha^m \right)$,

gdzie $\alpha = (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \dots + (x_n - 1)$.

W każdym z punktów b) - g) $\theta \in (0, 1)$.

31.10. a) $\approx 1,0068$; b) $\approx 0,9024$.

31.11. a) $z_{\min} = f(1, 0) = -1$; b) $u_{\max} = u(\frac{1}{2}a, \frac{1}{3}a) = \frac{1}{432} a^6$;

c) $g_{\min} = g\left(\frac{a}{\sqrt[3]{3}}, \frac{a}{\sqrt[3]{3}}\right) = 3\sqrt[3]{3} a^2$; d) $p_{\max} = p(1, -1) = \sqrt{3}$;

e) $z_{\max} = z(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{6}\pi) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$; f) $g_{\min} = g(1, 2) = 7 - 10 \ln 2 \approx 0,0685$;

g) $h_{\min} = h(-1, -2, 3) = -14$; h) $t_{\max} = t(1, 1, 1) = 1$;

i) $f_{\min} = f(\frac{1}{2}, 1, 1) = 4$; j) $p_{\max} = p(\frac{1}{7}a, \frac{1}{7}a, \frac{1}{7}a) = (\frac{1}{7}a)^7$;

k) $w_{\max} = w(\frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}) = 11^{11}$;

l) $p_{\min} = p(1, 1, \dots, 1) = 2n$, $p_{\max} = p(-1, -1, \dots, -1) = -2n$.

31.12. a) -4 i 4 ; b) -3 i 17 ; c) -64 i 4 ; d) 0 i 1 ;

e) $-e^{-1}$, wartość największa nie istnieje;

f) $-\frac{1}{2}$ i $1 + \sqrt{2}$; g) 0 i 300 ; h) 0 i $5 \sin \frac{3}{4}\pi$.

31.13. $P(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. 31.14. $P\left(\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n), \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n)\right)$.

31.15. $a = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}a$.

31.16. Równoboczny. 31.17. $d = \sqrt{2ab} \sin \frac{1}{2}\gamma$.

31.18. Czworokąt, na którym można opisać okrąg.

31.19. Punkt leży wewnątrz trójkąta w odległości: $\frac{2Sa}{a^2 + b^2 + c^2}$ od boku o długości a ,

$\frac{2Sb}{a^2 + b^2 + c^2}$ od boku o długości b , $\frac{2Sc}{a^2 + b^2 + c^2}$ od boku o długości c , gdzie S jest polem trójkąta.

31.20. Po 60° . 31.21. Trójkąt równoboczny.

31.22. $S_{\max} = 2R^2 \sin \alpha$. 31.23. $2a + \sqrt[3]{2V}$, $a + \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$, $a + \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$.

31.24. Długości krawędzi: $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{R}{\sqrt{3}}$.

31.25. Długości boków trójkąta: $\frac{1}{2}p$, $\frac{3}{4}p$, $\frac{3}{4}p$.

31.26. Długości krawędzi: $\frac{2}{3}\sqrt{2}R$, $\frac{2}{3}\sqrt{2}R$, $\frac{1}{3}h$.

31.27. Wszystkie sześciany są przystające o długości krawędzi 3 cm.

31.28. $\sqrt{5}$. 31.29. $\sqrt{3}$. 31.30. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$.

31.31. a) Sześcian; b) sześcian.

31.32. Wymiary prostopadłościanu $2a/\sqrt{3}$, $2b/\sqrt{3}$, $2c/\sqrt{3}$.

31.34. $P\left(\frac{1}{A} \sum_{i=1}^n x_i, \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n y_i, \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n z_i\right)$, gdzie $A = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n z_i\right)^2}$.

31.35. Por. zadanie 31.12e.

31.36. Wsk. *Momentem bezwładności układu punktów A_i względem punktu P nazywamy liczbę $\sum_{i=1}^n m_i d_i^2$, gdzie $d_i = d(P, A_i)$. $S\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^n x_i m_i, \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n y_i m_i, \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n z_i m_i\right)$, gdzie $m = \sum_{i=1}^n m_i$.*

31.37. $d=6$, $(5, 5, 4) \in L$, $(1, 1, 2)$ punkt paraboloidy.

31.38. $d=3$, $(3, 3, 1) \in L$, $(1, 1, 2)$ punkt paraboloidy.

31.39. $d=1$, $(1, 0, 0) \in L$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ punkt stożka.

31.40. $d=2$, $(3, 2, 1) \in L$, $(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ punkt sfery.

31.41. Masy równe i równe $\frac{1}{4}ka$. 31.43. $a=1,7$, $b=-2$.

$$31.44. f(x) = \frac{6}{7\pi^2} (7 - 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3})x^2 + \frac{1}{70\pi} (120\sqrt{2} + 111\sqrt{3} - 105)x + \frac{1}{420} (56 - 8\sqrt{2} + -27\sqrt{3}).$$

31.45. a) $z_{\min} = f(1, 0) = 0$, $z_{\max} = f(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{4}{27}$;

b) $z_{\max} = f\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right) = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$;

c) $z_{\min} = \lambda_1$, $z_{\max} = \lambda_2$, gdzie λ_1 i λ_2 są pierwiastkami równania $(A-\lambda)(C-\lambda) - B^2 = 0$ i $\lambda_1 < \lambda_2$;

d) $z_{\text{extr}} = f(\frac{1}{8}\pi + k\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{8}\pi + k\frac{1}{2}\pi)$, $k \in \mathbb{C}$, przy czym z_{\max} dla k parzystych i z_{\min} dla k nieparzystych.

31.46. a) $u_{\min} = f(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}) = -2\sqrt{\frac{3}{2}}$,

$$u_{\max} = f(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}) = 2\sqrt{\frac{3}{2}};$$

b) $u_{\max} = f(\frac{1}{6}a, \frac{1}{6}a, \frac{1}{6}a) = (\frac{1}{6}a)^6$;

c) $u_{\max} = f\left(\frac{ma}{\alpha}, \frac{na}{\alpha}, \frac{pa}{\alpha}\right) = \frac{a^\alpha m^m n^n p^p}{a^\alpha}$, gdzie $\alpha = m + n + p$.

31.47. a) $u_{\min} = 4$ dla dowolnych dwóch zmiennych równych 2 i trzeciej zmiennej równej 4, $u_{\max} = \frac{112}{7}$ dla dowolnych dwóch zmiennych równych $\frac{4}{3}$ i trzeciej zmiennej równej $\frac{7}{3}$;

b) $u_{\min} = \frac{-1}{3\sqrt{6}}$ dla dowolnych dwóch zmiennych równych $\frac{1}{\sqrt{6}}$ i trzeciej zmiennej równej $\frac{-2}{\sqrt{6}}$, $u_{\max} = \frac{1}{3\sqrt{6}}$ dla dowolnych dwóch zmiennych równych $\frac{-1}{\sqrt{6}}$ i trzeciej zmiennej równej $\frac{2}{\sqrt{6}}$;

c) $u_{\min} = \lambda_1$ i $u_{\max} = \lambda_2$, gdzie λ_1 i λ_2 są pierwiastkami równania

$$4\lambda^2 - \left(\frac{3}{a^2} + \frac{3}{b^2} + \frac{3}{c^2}\right)\lambda + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{a^2c^2} + \frac{1}{a^2b^2} = 0 \quad \text{i} \quad \lambda_1 < \lambda_2.$$

31.48. a) $u_{\min} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2}\right)^{-1}$ dla $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

gdzie $x_j = \frac{1}{a_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2}\right)^{-1}$, $j=1, 2, \dots, n$;

b) $u_{\min} = \frac{a^3}{n^2}$ dla $x_i = \frac{a}{n}$, $i=1, 2, \dots, n$;

c) $u_{\min} = \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{a_k b_k}\right)^2$, dla $x_i = \sqrt{\frac{a_i}{b_i}} \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{a_k b_k}\right)^{-1}$, $i=1, 2, \dots, n$.

31.49. Wsk. Zbadać ekstremum funkcji określonej wzorem $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^n + y^n)$ przy warunku $x + y = a$.

31.50. $u_{\text{extr}} = \lambda$, gdzie λ jest pierwiastkiem równania charakterystycznego $\det(A - \lambda I) = 0$, przy czym $A = [a_{ij}]_{n \times n}$.

31.52. $\frac{\pi abc}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2 n^2 + c^2 p^2}}$. **31.53.** $P_1(9, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}), P_2(-9, -\frac{1}{8}, -\frac{3}{8})$.

31.54. Wsk. Por. przykład 31.8. Kwadraty długości półosi elipsy są pierwiastkami równania zmiennej t :

$$(k^2 a^2 + m^2 b^2 + n^2 c^2)t^2 - (k^2 a^2(b^2 + c^2) + m^2 b^2(a^2 + c^2) + n^2 c^2(a^2 + b^2))t + a^2 b^2 c^2(k^2 + m^2 + n^2) = 0.$$

RACHUNEK CAŁKOWY

§ 32. FUNKCJA PIERWOTNA, CAŁKA NIEOZNACZONA

32.1. Weźmy funkcję $f: \mathbf{R} \supset X_p \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}$. Funkcję $F: X_p \rightarrow \mathbf{R}$ różniczkowalną na X_p nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji f na X_p , jeżeli $\bigwedge_{x \in X_p} F'(x) = f(x)$. Jeżeli $X_p = \langle a, b \rangle$, to $F'(a) = F'(a^+)$ i $F'(b) = F'(b^-)$.

Całką nieoznaczoną (nieokreśloną) funkcji f na X_p , którą oznaczamy $\int f(x) dx$, nazywamy zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f na X_p . Udowadnia się (por. zadanie 23.26), że

$$(1) \quad \left(\int f(x) dx = F(x) + C \right) \Leftrightarrow \left(\int dF(x) = F(x) + C \right),$$

gdzie F jest jakąkolwiek funkcją pierwotną funkcji f , a C jest stałą dowolną (*stałą całkowania*).

T₁. Jeżeli $f \in C^0(X_p)$, to istnieje funkcja pierwotna funkcji f na X_p .

Wzory podstawowe ⁽¹⁾

$$(I) \quad \int 0 dx = C,$$

$$(II) \quad \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1),$$

$$(III) \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$(IV) \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$(V) \quad \int e^x dx = e^x + C,$$

$$(VI) \quad \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$(VII) \quad \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$(VIII) \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$(IX) \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$(X) \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C,$$

$$(XI) \quad \int \frac{-dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x + C,$$

$$(XII) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + C,$$

⁽¹⁾ Nie będziemy oddzielnie wskazywać przedziałów, w których znajdujemy funkcje pierwotne (całki nieoznaczone).

$$(XIII) \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C, \quad (XIV) \int \sinh x dx = \cosh x + C,$$

$$(XV) \int \cosh x dx = \sinh x + C, \quad (XVI) \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + C,$$

$$(XVII) \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{ctgh} x + C,$$

$$(XVIII) \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsinh} x + C = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C,$$

$$(XIX) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh} x + C = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C.$$

Wzory ogólne. Jeżeli $f, g \in C^0(X_p) \wedge a, b \in \mathbf{R}$, to

$$(2) \quad \int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx.$$

Całkowanie przez podstawienie (zmiana zmiennych)

T₂. Jeżeli $\varphi, \varphi' \in C^0(X_p) \wedge f \in C^0(\varphi(X_p))$, to

$$(3) \quad \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(t) dt, \quad \text{gdzie } t = \varphi(x).$$

T₃. Jeżeli $\varphi, \varphi' \in C^0(X_p) \wedge \varphi$ różnowartościowa $\wedge f \in C^0(\varphi(X_p))$, to

$$(4) \quad \int f(t) dt = \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx, \quad \text{gdzie } x = \varphi^{-1}(t).$$

Całkowanie przez części.

T₄. Jeżeli $f, g, f', g' \in C^0(X_p)$, to

$$(5) \quad \left(\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\int g(x)df(x) = f(x)g(x) - \int f(x)dg(x) \right).$$

Jeżeli istnieje funkcja pierwotna F funkcji f i $0 \neq a \in \mathbf{R}$, to

$$(6) \quad \int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C.$$

32.2. Jeżeli w (1) funkcja podcałkowa f jest zależna od parametru $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, to oznaczając $J_n = \int f(x) dx$, można dla pewnych funkcji f wyrazić J_n wzorem rekurencyjnym, tzn. wzorem określającym całkę J_n za pomocą całek J_k , $k < n$. Przy całkowaniu funkcji wymiernych, tzn. funkcji określonych wzorem $f(x) = \frac{W_n(x)}{G_m(x)}$, $n < m$ (jeżeli $n \geq m$, to $\frac{W_n(x)}{G_m(x)} = H_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{G_m(x)}$ $k < m$), korzystamy z twierdzenia o rozkładzie funkcji wymiernej właściwej (tzn. $n < m$) na ułamki proste oraz z wyniku przykładu 32.10.

32.3. Całki typu $\int R(\sin x, \cos x) dx$, gdzie R jest funkcją wymierną, można zawsze sprowadzić do całek funkcji wymiernych, stosując podstawienie $u = \operatorname{tg} \frac{1}{2} x$, $-\pi < x < \pi$.

Przypadki szczególne:

$$(7) \quad \int R_1(\sin x) \cos x dx,$$

$$(8) \quad \int R_2(\cos x) \sin x dx,$$

$$(9) \quad \int R_3(\sin^2 x, \sin x \cos x, \cos^2 x) dx,$$

gdzie R_1 , R_2 i R_3 są funkcjami wymiernymi, sprowadzamy do całek funkcji wymiernych, stosując podstawienia: $u = \sin x$ w przypadku (7), $u = \cos x$ w przypadku (8) i $u = \operatorname{tg} x$ w przypadku (9).

W szczególności, całka $\int \sin^m x \cos^k x dx$, gdzie m i k są liczbami całkowitymi, jest typu (7), jeżeli k jest liczbą nieparzystą, typu (8), jeżeli m jest liczbą nieparzystą oraz typu (9), w przypadku gdy liczby m i k są parzyste.

Całki typu $\int \sin^m x \cos^k x dx$ można również znajdować, korzystając ze wzorów rekurencyjnych (por. przykład 32.9b oraz zadanie 32.27).

Całkowanie funkcji zawierających funkcje hiperboliczne przeprowadzamy podobnie jak całkowanie funkcji trygonometrycznych, przy czym korzystamy m.in. ze wzorów

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1),$$

$$\sinh x \cosh x = \frac{1}{2} \sinh 2x$$

oraz z przykładu 32.9c i zadania 32.27f, g, h.

32.4. Całkę typu

$$(10) \quad \int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{w_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{w_2}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{w_k} \right] dx,$$

gdzie R jest funkcją wymierną, $w_1, w_2, \dots, w_k \in \mathbf{W}$ oraz $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, przekształcamy do całki funkcji wymiernej, stosując podstawienie

$$(11) \quad \frac{ax+b}{cx+d} = u^n,$$

gdzie liczba n jest najmniejszą wspólną wielokrotną mianowników liczb w_1, w_2, \dots, w_k .

Całkę typu

$$(12) \quad \int x^r (a + bx^s)^p dx,$$

gdzie $r, s, p \in \mathbf{W}$ można sprowadzić do całki funkcji wymiernej jedynie w trzech następujących przypadkach:

a) Jeżeli p jest liczbą całkowitą, wówczas podstawiamy

$$(13) \quad x = u^k,$$

gdzie k jest wspólnym mianownikiem ułamków r i s .

β) Jeżeli $\frac{r+1}{s}$ jest liczbą całkowitą, wówczas podstawiamy

$$(14) \quad a + bx^s = u^n,$$

gdzie n jest mianownikiem ułamka p .

γ) Jeżeli $\frac{r+1}{s} + p$ jest liczbą całkowitą, wówczas podstawiamy

$$(15) \quad ax^{-s} + b = u^n,$$

gdzie n jest mianownikiem ułamka p .

Całkę typu

$$(16) \quad \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx,$$

gdzie R jest funkcją wymierną, przekształcamy do całki funkcji wymiernej, stosując podstawienia (Eulera)

$$(17) \quad \begin{aligned} \sqrt{ax^2 + bx + c} &= \pm \sqrt{a}x + u, & \text{jeżeli } a > 0, \\ \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} &= |x-x_1|u, & \text{jeżeli } b^2 - 4ac > 0. \end{aligned}$$

Uwaga. Podstawienia Eulera stosujemy rzadko, ponieważ prowadzą one na ogół do długich i uciążliwych rachunków.

Pewne przypadki szczególne całek typu (16) i stosunkowo krótsze metody ich całkowania rozpatrujemy poniżej.

Całkę typu

$$(18) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{Y}}$$

znajdujemy, przekształcając trójmian $A = ax^2 + bx + c$ do postaci kanonicznej oraz korzystając ze wzorów (XII), (XVIII) i (XIX), względnie korzystając bezpośrednio z wyprowadzonych wzorów (por. przykład 32.15).

Całkę typu

$$(19) \quad \int \frac{W_n(x)}{\sqrt{Y}} dx,$$

gdzie W_n jest wielomianem stopnia n , znajdujemy stosując wzór

$$(20) \quad \int \frac{W_n(x)}{\sqrt{Y}} dx = G_{n-1}(x)\sqrt{Y} + A \int \frac{dx}{\sqrt{Y}},$$

gdzie G_{n-1} jest wielomianem stopnia $n-1$, którego współczynniki oraz stałą A znajdujemy metodą współczynników nieoznaczonych (por. przykład 32.16).

Zauważmy, że całka występująca po prawej stronie wzoru (20) jest typu (18).

Całkę typu

$$(21) \quad \int \frac{W_n(x) dx}{(x-\alpha)^k \sqrt{Y}},$$

gdzie $k > n$ (w przypadku gdy $n \geq k$ należy najpierw podzielić wielomian W_n przez $(x-\alpha)^k$) przekształcamy do całki typu (20), stosując podstawienie

$$(22) \quad z = \frac{1}{x-\alpha}.$$

Do całek typów

$$(23) \quad \int R_1(x, \sqrt{a^2-x^2}) dx,$$

$$(24) \quad \int R_2(x, \sqrt{a^2+x^2}) dx,$$

$$(25) \quad \int R_3(x, \sqrt{x^2-a^2}) dx,$$

wygodnie jest czasem stosować podstawienia

$$x = a \sin t \quad \text{lub} \quad x = a \operatorname{tgh} t \quad (\text{w przypadku (23)}),$$

$$x = a \operatorname{tg} t \quad \text{lub} \quad x = a \sinh t \quad (\text{w przypadku (24)}),$$

$$x = \frac{a}{\cos t} \quad \text{lub} \quad x = a \cosh t \quad (\text{w przypadku (25)}).$$

32.5. W przykładzie 32.17 omówimy całkowanie różnych typów funkcji, których całki nieoznaczone (funkcje pierwotne) są funkcjami elementarnymi. W każdym z przykładów przez odpowiednie przekształcenie lub podstawienie sprowadzimy badaną całkę do typów rozpatrzonych w punktach 32.1 - 32.4.

Nie należy jednak sądzić, że wszystkie funkcje ciągłe mają funkcje pierwotne będące funkcjami elementarnymi. Z T_1 wynika, że każda funkcja ciągła posiada funkcję pierwotną, ale tylko dla pewnych typów funkcji (m.in. omówionych w 32.1 - 32.4) istnieją ich funkcje pierwotne wyrażające się przez funkcje elementarne. Natomiast w przypadku ogólnym funkcja pierwotna funkcji ciągłej nie jest funkcją elementarną, przy czym całki nieoznaczone takich funkcji nazywamy *całkami nieelementarnymi*. W szczególności, ważną klasę całek nieelementarnych stanowią tzw. *całki eliptyczne*. Udowadnia się, że np. całki:

$$\int e^{x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{e^x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int R[x, \sqrt{g(x)}] dx,$$

gdzie g jest wielomianem trzeciego lub czwartego stopnia, a R jest funkcją wymierną swoich argumentów, są całkami nieelementarnymi⁽¹⁾.

⁽¹⁾ W pewnych przypadkach szczególnych całki $\int R[x, \sqrt{g(x)}] dx$ mogą wyrażać się przez funkcje elementarne. Np.

$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} + C.$$

Przykłady

32.1. Znaleźć całki:

$$\text{a) } \int \frac{e^x - 4 \cdot 3^x + a^x - b^x}{3^x} dx; \quad \text{b) } \int \text{ctg}^2 x dx;$$

$$\text{c) } \int \frac{x^4}{1+x^2} dx; \quad \text{d) } \int \frac{\cosh 2x}{\sinh^2 x \cosh^2 x} dx.$$

Rozwiązanie. We wszystkich przykładach a)-d) po przekształceniu funkcji podcałkowej stosujemy wzory podstawowe oraz wzory ogólne;

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{e^x - 4 \cdot 3^x + a^x - b^x}{3^x} dx &= \int \left[\left(\frac{e}{3} \right)^x - 4 + \left(\frac{a}{3} \right)^x - \left(\frac{b}{3} \right)^x \right] dx = \\ &= \left(\ln \frac{e}{3} \right)^{-1} \left(\frac{e}{3} \right)^x - 4x + \left(\ln \frac{a}{3} \right)^{-1} \left(\frac{a}{3} \right)^x - \left(\ln \frac{b}{3} \right)^{-1} \left(\frac{b}{3} \right)^x + C; \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int \text{ctg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = -\text{ctg} x - x + C;$$

$$\text{c) } \int \frac{x^4}{1+x^2} dx = \int \frac{x^4 - 1 + 1}{1+x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x^2+1} + x^2 - 1 \right) dx = \text{arc tg} x + \frac{1}{3}x^3 - x + C;$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int \frac{\cosh 2x}{\sinh^2 x \cosh^2 x} dx &= \int \frac{\cosh^2 x + \sinh^2 x}{\sinh^2 x \cosh^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sinh^2 x} + \frac{1}{\cosh^2 x} \right) dx = \\ &= \text{tgh} x - \text{ctgh} x + C. \end{aligned}$$

32.2. Korzystając ze wzoru (1), znaleźć całki:

$$\text{a) } \int e^{ax} dx; \quad \text{b) } \int \sin bx dx; \quad \text{c) } \int \cos kx dx; \quad \text{d) } \int (ax+b)^\alpha dx \quad (a \neq 0).$$

Rozwiązanie.

$$\text{a) } \int e^{ax} dx = \int \frac{1}{a} (e^{ax})' dx = \frac{1}{a} \int d(e^{ax}) = \frac{1}{a} e^{ax} + C;$$

$$\text{b) } \int \sin bx dx = \int \left(\frac{-1}{b} \right) (\cos bx)' dx = \frac{-1}{b} \int d(\cos bx) = \frac{-1}{b} \cos bx + C;$$

$$\text{c) } \int \cos kx dx = \int \frac{1}{k} (\sin kx)' dx = \frac{1}{k} \int d(\sin kx) = \frac{1}{k} \sin kx + C;$$

d) Rozróżnimy dwa przypadki: dla $\alpha \neq -1$ mamy

$$\begin{aligned} \int (ax+b)^\alpha dx &\stackrel{\Delta}{=} \int \frac{1}{a(\alpha+1)} [(ax+b)^{\alpha+1}]' dx = \\ &= \frac{1}{a(\alpha+1)} \int d[(ax+b)^{\alpha+1}] = \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{a(\alpha+1)} + C; \end{aligned}$$

dla $\alpha = -1$ mamy

$$\begin{aligned}\int (ax+b)^{-1} dx &= \int \frac{dx}{ax+b} = \int \frac{1}{a} (\ln |ax+b|)' dx = \\ &= \frac{1}{a} \int d(\ln |ax+b|) = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C.\end{aligned}$$

32.3. Znaleźć całki:

a) $\int u^2 \sinh u du$; b) $\int x^5 \ln^2 x dx$; c) $\int e^{at} \cos kt dt$; d) $\int xe^{2x} \cos 3x dx$.

Rozwiązanie. W każdym z przykładów a)-d) stosujemy wzór (5). Zauważmy, że korzystanie ze wzoru (5) jest wtedy celowe, jeżeli potrafimy przekształcić funkcję podcałkową do postaci $f'(x)g(x)$ w taki sposób, aby można było znaleźć całkę $\int f'(x)g'(x)dx$. Pewne wskazówki, jak postępować, podamy w trakcie rozwiązywania przykładów.

$$\begin{aligned}\text{a) } \int u^2 \sinh u du &= \int u^2 (\cosh u)' du = u^2 \cosh u - 2 \int u \cosh u du = \\ &= u^2 \cosh u - 2 \int u (\sinh u)' du = u^2 \cosh u - 2(u \sinh u - \int 1 \cdot \sinh u du) = \\ &= u^2 \cosh u - 2u \sinh u + 2 \cosh u + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } \int x^5 \ln^2 x dx &= \int \left(\frac{x^6}{6}\right)' \ln^2 x dx = \frac{1}{6} x^6 \ln^2 x - \frac{1}{6} \int x^6 \cdot 2 \ln x \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^6 \ln^2 x}{6} - \frac{1}{3} \int \left(\frac{x^6}{6}\right)' \ln x dx = \\ &= \frac{1}{6} x^6 \ln^2 x - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} x^6 \ln x - \frac{1}{6} \int x^6 \frac{1}{x} dx \right) = \\ &= \frac{x^6}{108} (18 \ln^2 x - 6 \ln x + 1) + C.\end{aligned}$$

Uwaga. W całkach typu $\int f_n(x)p(x)dx$, gdzie f_n jest wielomianem stopnia n , a p jest jedną z funkcji określonych wzorami: $y = \sin ax$, $y = \cos kx$, $y = a^{mx}$, $\sinh lx$, $\cosh cx$ przyjmujemy, że $f_n(x) = g(x)$ oraz $p(x) = f'(x)$ (por. wzór (5)). Natomiast dla całek typu $\int f_n(x) \ln^k x dx$ (k – liczba naturalna) przyjmujemy $f_n(x) = f'(x)$ oraz $\ln^k x = g(x)$.

$$\begin{aligned}\text{c) } \int e^{at} \cos kt dt &= \int \left(\frac{e^{at}}{a}\right)' \cos kt dt = \frac{e^{at}}{a} \cos kt - \int \frac{e^{at}}{a} (-\sin kt) k dt = \\ &= \frac{e^{at}}{a} \cos kt + \frac{k}{a} \int \left(\frac{e^{at}}{a}\right)' \sin kt dt = \\ &= \frac{e^{at}}{a} \cos kt + \frac{k}{a} \left(\frac{e^{at}}{a} \sin kt - \int \frac{e^{at}}{a} \cos kt \cdot k dt \right) = \\ &= \frac{e^{at}}{a^2} (a \cos kt + k \sin kt) - \frac{k^2}{a^2} \int e^{at} \cos kt dt.\end{aligned}$$

Zauważmy, że po prawej stronie otrzymaliśmy poszukiwaną całkę ze współczynnikiem różnym od jedności, stąd

$$\int e^{at} \cos kt \, dt = \frac{e^{at}}{k^2 + a^2} (a \cos kt + k \sin kt) + C.$$

d) $I = \int x e^{2x} \cos 3x \, dx$; skorzystamy z wyniku zadania poprzedniego. Otóż

$$e^{2x} \cos 3x = \left[\frac{e^{2x}}{9+4} (2 \cos 3x + 3 \sin 3x) \right]',$$

stąd

$$I = \int x \left[\frac{e^{2x}}{13} (2 \cos 3x + 3 \sin 3x) \right]' dx =$$

$$= x \frac{e^{2x}}{13} (2 \cos 3x + 3 \sin 3x) - \frac{1}{13} \int 1 \cdot (2e^{2x} \cos 3x + 3e^{2x} \sin 3x) dx =$$

$$= x \frac{e^{2x}}{13} (2 \cos 3x + 3 \sin 3x) - \frac{2}{13} \cdot \frac{e^{2x}}{13} (2 \cos 3x + 3 \sin 3x) - \frac{3}{13} \cdot \frac{e^{2x}}{13} (2 \sin 3x - 3 \cos 3x) + C,$$

przy czym całkę $\int e^{2x} \sin 3x \, dx$ znaleźliśmy (por. zadanie 32.20n), korzystając z całki

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C.$$

32.4. Znaleźć całki:

a) $\int x e^{-x^2} dx$; b) $\int r \sqrt{R^2 - r^2} dr$; c) $\int e^{\sqrt{t}} dt$.

Rozwiązanie. Stosujemy wzór (3), a więc należy dobrać takie podstawienie $u = \varphi(x)$, aby całka $\int f(u) du$ była łatwa do znalezienia;

a) $\int x e^{-x^2} dx$; niech $u = \varphi(x) = -x^2$, stąd $du = (-x^2)' dx = -2x dx$, czyli $x dx = -\frac{1}{2} du$, zatem

$$\int x e^{-x^2} dx = \int e^u \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{1}{2} e^u + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

b) $I = \int r \sqrt{R^2 - r^2} dr$; $u = \varphi(r) = R^2 - r^2 \Rightarrow r dr = -\frac{1}{2} du$, stąd

$$I = \int \sqrt{u} \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C = -\frac{1}{3} (R^2 - r^2)^{3/2} + C.$$

c) $I = \int e^{\sqrt{t}} dt$; $u = \varphi(t) = \sqrt{t}$, $u^2 = t$, $dt = 2u du$, zatem

$$I = \int e^u 2u du = 2 \int (e^u)' u du = 2(ue^u - \int e^u 1 du) = 2(ue^u - e^u) + C = 2e^{\sqrt{t}}(\sqrt{t} - 1) + C.$$

32.5. Udowodnić wzory:

(a)
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C,$$

(b)
$$\int f^{\alpha}(x) f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$$

Rozwiązanie. Niech $u=f(x)$, stąd $du=f'(x)dx$, czyli

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C$$

oraz

$$\int f^\alpha(x) f'(x) dx = \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$$

32.6. Znaleźć całki:

a) $\int \operatorname{ctg} x dx$; b) $\int \frac{dt}{t(\ln t + a)}$; c) $\int \frac{3x+5}{x^2+1} dx$;

d) $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} dx$, gdzie $b^2-4ac < 0 \wedge a > 0$;

e) $\int \frac{\ln^5 x}{x} dx$; f) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x + 3}}{\cos^2 x} dx$; g) $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{2x^2+7}}$.

Rozwiązanie. Korzystać będziemy m.in. ze wzorów przykładu 32.5.

a) $\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C$;

b) $\int \frac{dt}{t(\ln t + a)} = \int \frac{1/t}{\ln t + a} dt = \ln|\ln t + a| + C$;

c) $\int \frac{3x+5}{x^2+1} dx = \int \left(\frac{3x}{x^2+1} + \frac{5}{x^2+1} \right) dx = 3 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + 5 \int \frac{dx}{x^2+1} =$
 $= \frac{3}{2} \ln(x^2+1) + 5 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C$;

d) $I = \int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} dx$. Ponieważ

$$ax^2+bx+c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2} \right] \wedge 4ac-b^2 > 0,$$

więc $0 < \frac{4ac-b^2}{4a^2} = k^2$, czyli

$$I = \frac{1}{a} \int \frac{px+q}{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + k^2} dx = \frac{1}{a} I_1.$$

Podstawiamy $x + \frac{b}{2a} = ku$, $dx = k du$, skąd

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int \frac{pku - \frac{bp}{2a} + q}{k^2u^2 + k^2} k du = \frac{1}{k} \int \left(\frac{pku}{u^2 + 1} + \frac{q - \frac{bp}{2a}}{u^2 + 1} \right) du = \\
 &= \frac{1}{k} p \frac{1}{2} k \ln(u^2 + 1) + \frac{2aq - bp}{2ak} \operatorname{arctg} u + C_1 = \\
 &= \frac{p}{2} \ln \frac{4a}{4ac - b^2} (ax^2 + bx + c) + \frac{2aq - bp}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C_1,
 \end{aligned}$$

zatem

$$I = \frac{p}{2a} \ln(ax^2 + bx + c) + \frac{2aq - bp}{a\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C,$$

gdzie $C = \frac{C_1}{a} + \frac{p}{2a} \ln \frac{4a}{4ac - b^2}$.

Uwaga. Korzystając z wyprowadzonego wzoru można bezpośrednio podać odpowiedź w przykładzie c).

$$e) I = \int \frac{\ln^5 x}{x} dx = \int (\ln x)^5 (\ln x)' dx = \frac{(\ln x)^6}{6} + C;$$

$$f) \int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x + 3}}{\cos^2 x} dx = \int (\operatorname{tg} x + 3)^{1/3} (\operatorname{tg} x)' dx = \frac{3}{4} (\operatorname{tg} x + 3)^{4/3} + C;$$

$$\begin{aligned}
 g) \int \frac{x}{\sqrt[3]{2x^2 + 7}} dx &= \frac{1}{4} \int (2x^2 + 7)^{-1/3} (2x^2 + 7)' dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} (2x^2 + 7)^{2/3} + C = \\
 &= \frac{3}{8} (2x^2 + 7)^{2/3} + C.
 \end{aligned}$$

32.7. Znaleźć całki:

$$a) \int x \operatorname{arctg} x dx; \quad b) \int \frac{x}{\sin^2 x} dx; \quad c) \int \frac{x \operatorname{arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad d) \int \operatorname{arccos} \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx.$$

Rozwiązanie. Korzystać będziemy m.in. ze wzoru (5);

$$\begin{aligned}
 a) \int x \operatorname{arctg} x dx &= \int \left(\frac{x^2}{2} \right)' \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{-1}{x^2 + 1} dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C;
 \end{aligned}$$

$$b) \int \frac{x}{\sin^2 x} dx = \int x (-\operatorname{ctg} x)' dx = -x \operatorname{ctg} x - \int 1 (-\operatorname{ctg} x) dx = -x \operatorname{ctg} x + \ln |\sin x| + C;$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int (-\sqrt{1-x^2})' \arcsin x dx = \\ &= -\sqrt{1-x^2} \arcsin x - \int (-\sqrt{1-x^2}) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} \arcsin x + x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int \arccos \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx &= \int (x)' \arccos \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx = \\ &= x \arccos \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \int x \left(\arccos \sqrt{\frac{x}{x+1}} \right)' dx = \\ &= x \arccos \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx = x \arccos \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{1}{2} I, \end{aligned}$$

gdzie $I = \int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$; podstawiamy $x = u^2$, stąd $dx = 2u du$, czyli

$$I = \int \frac{2u^2 du}{u^2+1} = 2 \int \frac{u^2+1-1}{u^2+1} du = 2(u - \arctg u) + C_1,$$

zatem

$$\int \arccos \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx = x \arccos \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \sqrt{x} - \arctg \sqrt{x} + C.$$

32.8. Znaleźć całki:

a) $\int \sin^2 ax dx, a \neq 0$; b) $\int \cos^2 bx dx, b \neq 0$;

c) $\int \sin mx \sin nx dx (m \neq |n|)$;

Rozwiązanie. Korzystać będziemy z tożsamości trygonometrycznych;

$$\text{a) } \int \sin^2 ax dx = \int \frac{1 - \cos 2ax}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2a} \sin 2ax \right) + C.$$

$$\text{b) } \int \cos^2 bx dx = \int \frac{1 + \cos 2bx}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2b} \sin 2bx \right) + C.$$

c) $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$, stąd

$$\int \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m-n} \sin(m-n)x - \frac{1}{m+n} \sin(m+n)x \right] + C.$$

32.9. Znaleźć wzory rekurencyjne dla całek:

a) $\int x^n a^x dx$; b) $\int \cos^n x dx$; c) $\int \operatorname{ctgh}^n x dx$; d) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

W każdym z przykładów a)-d) $n = 1, 2, 3, \dots$

Rozwiązanie. a) Mamy

$$I_n = \int x^n a^x dx = \int x^n \left(\frac{a^x}{\ln a} \right)' dx = \frac{x^n a^x}{\ln a} - \frac{n}{\ln a} \int x^{n-1} a^x dx = \frac{x^n a^x}{\ln a} - \frac{n}{\ln a} I_{n-1},$$

skąd wzór

$$I_n = \int x^n a^x dx = \frac{x^n a^x}{\ln a} - \frac{n}{\ln a} I_{n-1}.$$

$$\text{Np. } I_4 = \int x^4 e^x dx = \frac{x^4 e^x}{\ln e} - \frac{4}{\ln e} I_3 = x^4 e^x - 4(x^3 e^x - 3I_2) = x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12(x^2 e^x - 2I_1).$$

Ale $I_1 = \int x e^x dx = e^x(x-1) + C_1$, skąd

$$\int x^4 e^x dx = e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + C.$$

b) $I_n = \int \cos^n x dx = \int \cos^{n-1} x \cos x dx = \int \cos^{n-1} x (\sin x)' dx = \cos^{n-1} x \sin x - \int (n-1) \cos^{n-2} x (-\sin x) \sin x dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)(I_{n-2} - I_n)$, skąd

$$I_n = \int \cos^n x dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

$$\text{Np. } I_6 = \int \cos^6 x dx = \frac{1}{6} \sin x \cos^5 x + \frac{6-1}{6} I_4 = \frac{1}{6} \sin x \cos^5 x + \frac{5}{6} \left(\frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{4} I_2 \right).$$

Ale $I_2 = \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2} \sin 2x) + C_1$, skąd

$$\int \cos^6 x dx = \frac{1}{6} \sin x \cos^5 x + \frac{5}{24} \sin x \cos^3 x + \frac{5}{32}(2x + \sin 2x) + C.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } I_n &= \int \operatorname{ctgh}^n x dx = \int \operatorname{ctgh}^{n-2} x \frac{\cosh^2 x}{\sinh^2 x} dx = \int \left(\frac{\operatorname{ctgh}^{n-2} x}{\sinh^2 x} + \operatorname{ctgh}^{n-2} x \right) dx = \\ &= I_{n-2} + \int (\operatorname{ctgh} x)^{n-2} (-\operatorname{ctgh} x)' dx = I_{n-2} - \frac{1}{n-1} \operatorname{ctgh}^{n-1} x \end{aligned}$$

dla $n > 1$ (por. przykład 32.5 wzór (b)); ostatecznie

$$I_n = I_{n-2} - \frac{1}{n-1} \operatorname{ctgh}^{n-1} x \quad (n > 1).$$

Np. $\int \operatorname{ctgh}^4 x dx = I_2 - \frac{1}{3} \operatorname{ctgh}^3 x = x - \operatorname{ctgh} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctgh}^3 x + C$ (por. zadanie 32.18p).

$$\begin{aligned} \text{d) } I_n &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} + \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \\ &= I_{n+1} + \frac{1}{2} \int x \frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}} dx. \end{aligned}$$

Całkę $\int x \frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}} dx$ znajdujemy korzystając ze wzoru (5);

$$f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}}, \quad g(x) = x,$$

$$f(x) = \int \frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \int (1+x^2)^{-n-1} (1+x^2)' dx = \frac{(1+x^2)^{-n}}{-n} = \frac{-1}{n(1+x^2)^n};$$

stąd

$$\begin{aligned} \int x \frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}} dx &= \int \left(\frac{-1}{n(1+x^2)^n} \right)' x dx = \frac{-x}{n(1+x^2)^n} - \int 1 \frac{-1}{n(1+x^2)^n} dx = \\ &= \frac{-x}{n(1+x^2)^n} + \frac{1}{n} I_n. \end{aligned}$$

Czyli $I_n = I_{n+1} - \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{1}{2n} I_n$, stąd ostatecznie

$$(d) \quad I_{n+1} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n,$$

gdzie

$$I_1 = \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg } x + C.$$

$$\begin{aligned} \text{Np. } I_3 &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4} I_2 = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4} \left[\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} I_1 \right] = \\ &= \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3}{8} \text{arc tg } x + C. \end{aligned}$$

32.10. Znaleźć całki ułamków prostych:

$$a) \int \frac{A dx}{x-\alpha}; \quad b) \int \frac{B dx}{(x-\alpha)^n} \quad (n > 1); \quad c) \int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} dx;$$

$$d) \int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n} dx \quad (n > 1).$$

W przykładach c) i d) $b^2 - 4ac < 0$.

Rozwiązanie.

$$a) \int \frac{A dx}{x-\alpha} = A \int \frac{dx}{x-\alpha} = A \ln |x-\alpha| + C.$$

$$b) \int \frac{B dx}{(x-\alpha)^n} = B \int (x-\alpha)^{-n} dx = \frac{B(x-\alpha)^{-n+1}}{-n+1} + C.$$

$$c) \int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} dx = \frac{p}{2a} \ln(ax^2+bx+c) + \frac{2aq-bp}{a\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C,$$

(por. przykład 32.6d);

$$d) I = \int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n} dx = \frac{1}{a^n} \int \frac{px+q}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+k^2\right]^n} dx, \quad \text{gdzie} \quad k^2 = \frac{4ac-b^2}{4a^2}.$$

Podstawiamy $x + \frac{b}{2a} = ku$, zatem $dx = k du$,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a^n} \int \frac{pku - \frac{bp}{2a} + q}{(k^2u^2 + k^2)^n} k du = \\ &= \frac{1}{a^n k^{2n-1}} \left[\frac{pk}{2} \int \frac{2u du}{(u^2+1)^n} + \left(q - \frac{bp}{2a}\right) \int \frac{du}{(1+u^2)^n} \right] = \\ &= \frac{p}{2a^n k^{2n-2}} \cdot \frac{(u^2+1)^{-n+1}}{-n+1} + \frac{2aq-bp}{2a^{n+1} k^{2n-1}} I_n \end{aligned}$$

(por. przykład 32.5 (b), 32.9d), przy czym po zastosowaniu wzoru (d) (przykład 32.9d) należy do znalezionej funkcji podstawić $u = \frac{1}{k} \left(x + \frac{b}{2a}\right)$, gdzie $k = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$.

32.11. Znaleźć całki:

$$a) \int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx; \quad b) \int \frac{(x-1)dx}{(x-2)(x+1)^2 x^2};$$

$$c) \int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}; \quad d) \int \frac{x^7+x^5+x^3+x}{(x^2+2)^2(x^2+3)^2} dx.$$

Rozwiązanie. W przykładach b)-d) mamy całki funkcji wymiernych właściwych; należy więc znaleźć rozkłady funkcji podcałkowych na ułamki proste (por. § 17) oraz znaleźć całki otrzymanych ułamków prostych (por. przykład 32.10). W przykładzie a) stopień licznika (cztery) jest większy od stopnia mianownika (trzy), należy więc najpierw podzielić licznik przez mianownik, a następnie znaleźć całki otrzymanego wielomianu oraz funkcji wymiernej właściwej.

$$a) I = \int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx; \quad (x^4 - 3x^2 - 3x - 2) : (x^3 - x^2 - 2x) = x + 1 - \frac{x+2}{x^3 - x^2 - 2x};$$

stąd

$$I = \int \left(x + 1 - \frac{x+2}{x^3 - x^2 - 2x} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x - I_1,$$

gdzie

$$I_1 = \int \frac{x+2}{x^3-x^2-2x} dx = \int \frac{x+2}{x(x-2)(x+1)} dx.$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+1},$$

zatem $x+2 \equiv a(x-2)(x+1) + bx(x+1) + c(x-2)x$, stąd $a = -1$, $b = \frac{2}{3}$, $c = \frac{1}{3}$, czyli

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} \right) dx = -\ln|x| + \frac{2}{3} \ln|x-2| + \frac{1}{3} \ln|x+1| + C = \\ &= \ln(|x|^{-1}|x-2|^{2/3}|x+1|^{1/3}) + C, \end{aligned}$$

tzn.

$$I = \frac{x^2}{2} + x - \ln(|x|^{-1}|x-2|^{2/3}|x+1|^{1/3}) + C.$$

$$\text{b) } I = \int \frac{(x-1)dx}{(x-2)(x+1)^2 x^2}; \quad \frac{x-1}{(x-2)(x+1)^2 x^2} = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x} + \frac{e}{x-2},$$

stąd $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{11}{9}$, $c = \frac{1}{2}$, $d = -\frac{5}{4}$, $e = \frac{1}{36}$, czyli

$$\begin{aligned} I &= \int \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{11}{9} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{x-2} \right] dx = \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{11}{9} \ln|x+1| - \frac{1}{2x} - \frac{5}{4} \ln|x| + \frac{1}{36} \ln|x-2| + C. \end{aligned}$$

c) $I = \int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}$; ponieważ czynniki stopnia drugiego w mianowniku są nierozkładalne, więc

$$\frac{x+1}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)} = \frac{ax+b}{x^2+x+2} + \frac{cx+d}{x^2+4x+5},$$

przy czym $a=0$, $b=\frac{1}{3}$, $c=0$ i $d=-\frac{1}{3}$; stąd

$$I = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2+x+2} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \frac{2\sqrt{7}}{21} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

$$\text{d) } I = \int \frac{x^7+x^5+x^3+x}{(x^2+2)^2(x^2+3)^2} dx;$$

$$\frac{x^7+x^5+x^3+x}{(x^2+2)^2(x^2+3)^2} = \frac{ax+b}{(x^2+2)^2} + \frac{cx+d}{x^2+2} + \frac{ex+f}{(x^2+3)^2} + \frac{gx+h}{x^2+3},$$

stąd $b=d=f=h=0$, $a=-5$, $c=19$, $e=-20$ i $g=-18$, zatem

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-5x dx}{(x^2+2)^2} + \int \frac{19x dx}{x^2+2} + \int \frac{-20x dx}{(x^2+3)^2} + \int \frac{-18x dx}{x^2+3} = \\ &= \frac{5}{2(x^2+2)} + \frac{19}{2} \ln(x^2+2) + \frac{10}{x^2+3} - 9 \ln(x^2+3) + C. \end{aligned}$$

32.12. Znaleźć całki:

a) $\int \frac{dx}{3 \cos x + \sin x + 1}$; b) $\int \sinh^3 x dx$; c) $\int \cosh^3 x \sinh^2 x dx$;

d) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$; e) $\int \sin^6 x \cos^4 x dx$;

f) $\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$; g) $\int \frac{dx}{\sin^8 x \cos^4 x}$; h) $\int \sqrt{\frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}} dx$.

Rozwiązanie. a) $I = \int \frac{dx}{3 \cos x + \sin x + 1}$; stosujemy podstawienie $u = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$, stąd

$$\frac{1}{2}x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} u, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2},$$

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x}{\sin^2 \frac{1}{2}x + \cos^2 \frac{1}{2}x} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}x}{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x + 1} = \frac{2u}{u^2 + 1}, \quad \cos x = \frac{\cos^2 \frac{1}{2}x - \sin^2 \frac{1}{2}x}{\sin^2 \frac{1}{2}x + \cos^2 \frac{1}{2}x} = \frac{1-u^2}{u^2 + 1}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{2du}{u^2+1}}{\frac{3-3u^2}{u^2+1} + \frac{2u}{u^2+1} + 1} = - \int \frac{du}{u^2 - u - 2} = \\ &= - \int \frac{du}{(u+1)(u-2)} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{u+1}{u-2} \right| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}x + 1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}x - 2} \right| + C. \end{aligned}$$

b) $\int \sinh^3 x dx = \int \sinh^2 x \sinh x dx = \int (\cosh^2 x - 1) \sinh x dx$. Podstawiamy $u = \cosh x$, stąd $du = \sinh x dx$, zatem

$$I = \int (u^2 - 1) du = \frac{1}{3}u^3 - u + C = \frac{1}{3} \cosh^3 x - \cosh x + C.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } I &= \int \cosh^3 x \sinh^2 x dx = \int (\cosh^2 x \sinh^2 x) \cosh x dx = \\ &= \int (1 + \sinh^2 x) \sinh^2 x \cosh x dx. \end{aligned}$$

Podstawiamy $u = \sinh x$, stąd $du = \cosh x dx$, czyli

$$I = \int (1 + u^2) u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C = \frac{1}{3} \sinh^3 x + \frac{1}{5} \sinh^5 x + C.$$

d) $I = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$; możemy stosować rozmaite podstawienia np. $u = \sin x$, względnie $u = \cos x$, które przekształcą całkę I do całki funkcji wymiernej. Jednak najszybciej dojdziemy do wyniku podstawiając $u = \operatorname{ctg} x$. Zatem $du = \frac{-dx}{\sin^2 x}$, $\sin x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$, $\cos x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$, czyli

$$I = \int \frac{dx}{\sin x \cos x \sin^2 x} = - \int \frac{du}{\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \cdot \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}} = - \int \left(\frac{1}{u} + u \right) du =$$

$$= -(\ln |u| + \frac{1}{2}u^2) + C = -(\ln |\operatorname{ctg} x| + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x) + C.$$

e) $I = \int \sin^6 x \cos^4 x dx$; całka typu (9). Można więc stosować podstawienie $u = \operatorname{tg} x$, stąd $dx = \frac{du}{1+u^2}$, $\sin x = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$, zatem $I = \int \frac{u^6 du}{(u^2+1)^6}$. Znaleźnię otrzymanej całki wymiernej wymaga długich rachunków. Postąpimy więc inaczej. Otóż

$$I = \int \sin^6 x \cos^4 x dx = \int \sin^6 x (1 - \sin^2 x)^2 dx = I_6 - 2I_8 + I_{10}$$

(por. zadanie 32.27c i 32.28c). Stąd

$$I = I_6 - 2 \left[-\frac{1}{8} \cos x \sin^7 x + \frac{7}{8} I_6 \right] - \frac{1}{10} \cos x \sin^9 x + \frac{9}{10} I_8 =$$

$$= \frac{11}{80} \cos x \sin^7 x - \frac{1}{10} \cos x \sin^9 x + \frac{3}{80} I_6 =$$

$$= \frac{11}{80} \cos x \sin^7 x - \frac{1}{10} \cos x \sin^9 x + \frac{3}{80} \left[-\frac{1}{6} \cos x \sin^5 x - \frac{5}{24} \cos x \sin^3 x + \frac{5}{32} (2x - \sin 2x) \right] + C =$$

$$= \frac{3}{256} x - \frac{1}{4} \sin 2x \left(\frac{3}{128} + \frac{1}{64} \sin^2 x + \frac{1}{80} \sin^4 x - \frac{11}{40} \sin^6 x + \frac{1}{5} \sin^8 x \right) + C.$$

f) $I = \int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$; całka typu (9). Podstawiamy $u = \operatorname{tg} x$, stąd $du = \frac{dx}{\cos^2 x}$, zatem

$$I = \int \frac{1}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{du}{a^2 + b^2 u^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{bu}{a} \right) + C = \frac{1}{ab} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{b \operatorname{tg} x}{a} \right) + C.$$

g) $I = \int \frac{dx}{\sin^8 x \cos^4 x}$; podstawiamy $u = \operatorname{ctg} x$, stąd $du = \frac{-dx}{\sin^2 x}$, zatem

$$I = - \int \frac{du}{\frac{u^4}{(1+u^2)^2} \cdot \frac{1}{(1+u^2)^3}} = - \int \frac{(1+u^2)^5}{u^4} du =$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + 5 \operatorname{tg} x - 10 \operatorname{ctg} x - \frac{10}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg}^5 x - \frac{1}{7} \operatorname{ctg}^7 x + C.$$

h) $I = \int \sqrt{\frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}} dx = \int (\operatorname{tg} x)^{3/2} (\operatorname{tg} x)' dx = \frac{2}{5} (\operatorname{tg} x)^{5/2} + C.$

32.13. Znaleźć całki:

$$\text{a) } \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx; \quad \text{b) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt{1+x}}.$$

Rozwiązanie. Całki w przykładach a) i b) są typu (10).

$$\text{a) } I = \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx; \text{ ponieważ } w_1 = \frac{1}{3}, w_2 = \frac{2}{3}, w_3 = \frac{1}{6}, \text{ więc } n = \text{NWW}(3, 3, 6) = 6.$$

Podstawiamy $x = u^6$, stąd $dx = 6u^5 du$, $\sqrt[3]{x} = u^2$, $\sqrt[3]{x^2} = u^4$, $\sqrt[6]{x} = u$, czyli

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(u^6 + u^4 + u)6u^5 du}{u^6(1 + u^2)} = 6 \int \frac{u^3(u^2 + 1) + 1}{u^2 + 1} du = \\ &= 6 \left(\int u^3 du + \int \frac{du}{u^2 + 1} \right) = \frac{3}{2}u^4 + 6 \arctg u + C = \frac{3}{2}x^{2/3} + 6 \arctg \sqrt[6]{x} + C. \end{aligned}$$

$$\text{b) } I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt{1+x}}; \text{ ponieważ } w_1 = \frac{1}{3}, w_2 = \frac{2}{3}, \text{ więc } n = 6. \text{ Podstawiamy } 1+x = u^6; \text{ stąd } dx = 6u^5 du, \sqrt{1+x} = u^3, \sqrt[3]{(1+x)^2} = u^4, \text{ czyli}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{6u^5 du}{u^4 + u^3} = 6 \int \frac{u^2}{u + 1} du = 6 \int \left(u - 1 + \frac{1}{u + 1} \right) du = \\ &= 6 \left(\frac{1}{2}u^2 - u + \ln |u + 1| \right) + C = 6 \left[\frac{1}{2}(1+x)^{1/3} - (1+x)^{1/6} + \ln(\sqrt[6]{1+x} + 1) \right] + C. \end{aligned}$$

32.14. Znaleźć całki:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})^2}; \quad \text{b) } \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

Rozwiązanie. Całki w przypadkach a) i b) są typu (12).

$$\text{a) } I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})^2} = \int x^{-1/2}(1 + x^{1/3})^{-2} dx, \text{ czyli } r = -\frac{1}{2}, s = \frac{1}{3}, p = -2, \text{ tzn. przypadek } \alpha). \text{ Zatem } x = u^6, \text{ stąd } dx = 6u^5 du, x^{-1/2} = 1/u^3, x^{1/3} = u^2, \text{ czyli}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{6u^5 du}{u^3(u^2 + 1)^2} = 6 \int \frac{u^2 du}{(u^2 + 1)^2} = 6 \int \frac{(u^2 + 1) - 1}{(u^2 + 1)^2} du = 6 \left(\arctg u - \int \frac{du}{(u^2 + 1)^2} \right) = \\ &= 6 \left(\arctg u - \frac{u}{2(u^2 + 1)} - \frac{1}{2} \arctg u + C \right) = 3 \arctg u - \frac{3u}{u^2 + 1} + C_1 = \\ &= 3 \arctg \sqrt[6]{x} - \frac{3\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x} + 1} + C_1. \end{aligned}$$

b) $I = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} dx$, czyli $r = -\frac{1}{2}$, $s = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{3}$, $\frac{r+1}{s} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2$, a więc przypadek β). Podstawiamy $1+\sqrt[4]{x}=u^3$, stąd $x=(u^3-1)^4$, $dx=12u^2(u^3-1)^3 du$, $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(u^3-1)^2}$, czyli

$$I = \int \frac{u \cdot 12u^2(u^3-1)^3 du}{(u^3-1)^2} = 12 \int (u^6 - u^3) du = 12 \left(\frac{u^7}{7} - \frac{u^4}{4} \right) + C = \\ = \frac{3}{7}u^4(4u^3-7) + C = \frac{3}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{4}{3}} [4(1+\sqrt[4]{x})-7] + C.$$

32.15. Znaleźć całkę $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Rozwiązanie. Niech $I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$; rozróżnimy przypadki a) $a > 0$ i β) $a < 0$; w przypadku a) zastosujemy podstawienie Eulera (por. podstawienie (17), $\sqrt{ax^2+bx+c} = u - \sqrt{ax}$. Stąd

$$ax^2+bx+c = u^2 - 2\sqrt{a}ux + ax^2, \quad x = \frac{u^2-c}{b+2\sqrt{a}u},$$

$$dx = \frac{2(ub + \sqrt{a}u^2 + \sqrt{a}c)}{(b+2\sqrt{a}u)^2}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{bu + \sqrt{a}u^2 + \sqrt{a}c}{b+2\sqrt{a}u}.$$

Zatem

$$I = \int \frac{2(ub + \sqrt{a}u^2 + \sqrt{a}c)(b+2\sqrt{a}u)}{(b+2\sqrt{a}u)^2(bu + \sqrt{a}u^2 + \sqrt{a}c)} du = \int \frac{2du}{b+2\sqrt{a}u} = \\ = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |b+2\sqrt{a}u| + C = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}| + C.$$

W przypadku β) oczywiście $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, stąd

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}} = \\ = \int \frac{1}{\sqrt{-a}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2} - \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}}.$$

Podstawiamy $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}u$, stąd $dx = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} du$, zatem

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{\frac{\sqrt{A}}{2a}}{\sqrt{\frac{A}{4a^2} - \frac{A}{4a^2} u^2}} du = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{\frac{\sqrt{A}}{2a}}{\frac{\sqrt{A}}{2|a|} \sqrt{1-u^2}} du = \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{-a}} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin u + C = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C.
 \end{aligned}$$

32.16. Znaleźć całki:

a) $\int \frac{2x^3 - x + 3}{\sqrt{-2x^2 + 4x + 7}} dx$; b) $\int (1-x^2)\sqrt{1-x^2} dx$.

Rozwiązanie. a) $I = \int \frac{2x^3 - x + 3}{\sqrt{-2x^2 + 4x + 7}} dx$; całka typu (19). Stosujemy wzór (20), w którym wielomian G_{n-1} będzie trójmianem kwadratowym $a_1x^2 + b_1x + c_1$. Zatem

$$(a) \quad \int \frac{2x^3 - x + 3}{\sqrt{-2x^2 + 4x + 7}} dx = (a_1x^2 + b_1x + c_1)\sqrt{-2x^2 + 4x + 7} + A \int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2 + 4x + 7}}.$$

W celu znalezienia niewiadomych współczynników a_1 , b_1 , c_1 i A równość (a) różniczkujemy stronami

$$\begin{aligned}
 \frac{2x^3 - x + 3}{\sqrt{-2x^2 + 4x + 7}} &= (2a_1x + b_1)\sqrt{-2x^2 + 4x + 7} + \\
 &+ (a_1x^2 + b_1x + c_1) \frac{-2x + 2}{\sqrt{-2x^2 + 4x + 7}} + \frac{A}{\sqrt{-2x^2 + 4x + 7}}.
 \end{aligned}$$

Z kolei otrzymaną równość mnożymy stronami przez wspólny mianownik $\sqrt{-2x^2 + 4x + 7}$; stąd

$$(a_1) \quad 2x^3 - x + 3 = (2a_1x + b_1)(-2x^2 + 4x + 7) + (a_1x^2 + b_1x + c_1)(-2x + 2) + A.$$

Równość (a₁) jest tożsamością, zatem $2 = -4a_1 - 2a_1$, $0 = 8a_1 - 2b_1 + 2a_1 - 2b_1$, $-1 = 14a_1 + 4b_1 + 2b_1 - 2c_1$, $3 = 7b_1 + 2c_1 + A$, czyli $a_1 = -\frac{1}{3}$, $b_1 = -\frac{5}{6}$, $c_1 = -\frac{13}{3}$, $A = \frac{35}{2}$.
Więc

$$I = \left(\frac{-x^2}{3} - \frac{5x}{6} - \frac{13}{3} \right) \sqrt{-2x^2 + 4x + 7} + \frac{35}{2} I_1,$$

gdzie

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2 + 4x + 7}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{-4x + 4}{\sqrt{72}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{\sqrt{2}(x-1)}{3} + C.$$

b) $I = \int (1-x^2)\sqrt{1-x^2} dx$; całka typu (23). Podstawiamy np. $x = \sin t$ (dla $|t| < \frac{1}{2}\pi$ funkcja \sin jest rosnącą, przy czym $|\sin t| = |x| < 1$), stąd $dx = \cos t dt$, $1-x^2 = 1 - \sin^2 t =$

$= \cos^2 t$, zatem

$$I = \int \cos^2 t \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt.$$

Ale $\sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$ ($\cos t > 0$ dla $|t| < \frac{1}{2}\pi$), czyli

$$\begin{aligned} I &= \int \cos^4 t dt = \frac{1}{8}(3t + 3 \sin t \cos t + 2 \sin t \cos^3 t) + C = \\ &= \frac{1}{8}[3 \arcsin x + 3x\sqrt{1-x^2} + 2x(1-x^2)^{3/2}] + C. \end{aligned}$$

32.17. Znaleźć całki:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \int \frac{1 + \sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx; & \text{b)} & \int x^2 \ln \sqrt{1-x} dx; & \text{c)} & \int \frac{5x}{\sqrt{1+x^4}} dx; \\ \text{d)} & \int e^{\sqrt[3]{x}} dx; & \text{e)} & \int \frac{e^{\sin x}(x \cos^3 x - \sin x)}{\cos^2 x} dx; & \text{f)} & \int \operatorname{tg} x \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 x}} dx. \end{aligned}$$

Rozwiązanie. a) $I = \int \frac{1 + \sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx$; podstawiamy $u = \operatorname{ctg} x$, stąd $du = \frac{-dx}{\sin^2 x}$,

zatem

$$I = - \int (1 + \sqrt{u}) du = -\operatorname{ctg} x - \frac{2}{3}(\operatorname{ctg} x)^{3/2} + C.$$

b) $I = \int x^2 \ln \sqrt{1-x} dx = \frac{1}{2} \int x^2 \ln(1-x) dx$; stąd

$$\begin{aligned} 2I &= \int (\frac{1}{3}x^3)' \ln(1-x) dx = \frac{1}{3}x^3 \ln(1-x) - \frac{1}{3} \int \frac{x^3 - 1 + 1}{x-1} dx = \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln(1-x) - \frac{1}{3}(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1|) + C. \end{aligned}$$

c) $I = \int \frac{5x dx}{\sqrt{1+x^4}}$; podstawiamy $x^2 = u$, stąd $2x dx = du$, zatem

$$I = \frac{5}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{5}{2} \ln(x^2 + \sqrt{1+x^4}) + C.$$

d) $I = \int e^{\sqrt[3]{x}} dx$; podstawiamy $u = \sqrt[3]{x}$, stąd $x = u^3$, $dx = 3u^2 du$, zatem

$$I = 3 \int u^2 e^u du = 3u^2 e^u - 6(u e^u - e^u) + C = e^{\sqrt[3]{x}}(3\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt[3]{x} + 6) + C.$$

e) $I = \int \frac{e^{\sin x}(x \cos^3 x - \sin x)}{\cos^2 x} dx$; przekształcamy funkcję podcałkową

$$I = \int \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^3 x} e^{\sin x} \cos x dx,$$

a następnie podstawiamy $u = \sin x$ (zakładamy, że $|x| < \frac{1}{2}\pi$). Stąd $du = \cos x dx$, $x = \arcsin u$,

$\cos x = \sqrt{1-u^2}$, zatem

$$\begin{aligned} I &= \int \left(x - \frac{\sin x}{\cos^3 x} \right) e^{\sin x} \cos x \, dx = \int \left(\arcsin u - \frac{u}{(1-u^2)\sqrt{1-u^2}} \right) e^u \, du = \\ &= \int (e^u)' \arcsin u \, du - \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \right)' e^u \, du = \\ &= e^u \arcsin u - \int \frac{e^u \, du}{\sqrt{1-u^2}} - \left(\frac{e^u}{\sqrt{1-u^2}} - \int \frac{e^u}{\sqrt{1-u^2}} \, du \right) = \\ &= e^u \arcsin u - \frac{e^u}{\sqrt{1-u^2}} + C = e^{\sin x} \left(x - \frac{1}{\cos x} \right) + C. \end{aligned}$$

f) $I = \int \operatorname{tg} x \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 x}} \, dx$; podstawiamy $u = \operatorname{tg} x$, skąd $dx = \frac{du}{1+u^2}$, $\cos^4 x = \frac{1}{(1+u^2)^2}$, zatem $I = \int \sqrt{1+(1+u^2)^2} \frac{u \, du}{1+u^2}$. Z kolei podstawiamy $z = 1+u^2$, skąd $dz = 2u \, du$, czyli

$$I = \frac{1}{2} \int \sqrt{1+z^2} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \int \frac{1+z^2}{z\sqrt{1+z^2}} \, dz = \frac{1}{2} \sqrt{1+z^2} + \frac{1}{2} I_1,$$

gdzie

$$I_1 = \int \frac{dz}{z\sqrt{1+z^2}}.$$

Podstawiamy $z = 1/t$, skąd $dz = -dt/t^2$, zatem

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}} = -\ln(t + \sqrt{1+t^2}) + C_1 = \\ &= -\ln\left(\frac{1}{z} + \sqrt{1 + \frac{1}{z^2}}\right) + C_1 = \ln z - \ln(1 + \sqrt{1+z^2}) + C_1 = \\ &= \ln(1+u^2) - \ln(1 + \sqrt{1+(1+u^2)^2}) + C_1 = \\ &= \ln(1+\operatorname{tg}^2 x) - \ln(1 + \sqrt{1+(1+\operatorname{tg}^2 x)^2}) + C_1 = \\ &= -2 \ln |\cos x| - \ln(\cos^2 x + \sqrt{\cos^4 x + 1}) + 2 \ln |\cos x| + C_1 = \\ &= -\ln(\cos^2 x + \sqrt{\cos^4 x + 1}) + C_1. \end{aligned}$$

Stąd ostatecznie

$$I = \frac{\sqrt{1+\cos^4 x}}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \ln(\cos^2 x + \sqrt{\cos^4 x + 1}) + C.$$

Zadania

32.18. Znaleźć całki:

- a) $\int \sqrt{x^n} dx$; b) $\int \sqrt[k]{x^r \sqrt{x^p} \sqrt[n]{x}} dx$; c) $\int (3\sqrt{x} - \sqrt[4]{x^3} + 5x^3) dx$;
d) $\int \left(\frac{2}{x} - 3x^2 \sqrt{x} + \frac{5x}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$; e) $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$; f) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$;
g) $\int \frac{2t^3 - 3t\sqrt[3]{t} + 5t^5\sqrt[5]{t^2}}{t\sqrt{t}} dt$; h) $\int \left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 3c\sqrt[3]{x^2} \right) dx$;
i) $\int (2 \cdot 5^x - 3e^x) dx$; j) $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$; k) $\int \left(\ln b \cdot b^x - \frac{ba^x + ab^x}{a^x} \right) dx$;
l) $\int \frac{2 \cdot 3^x - a^x + 4e^{2x} - 5b^x}{e^x} dx$; ł) $\int \left(\frac{-9}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sin^2 x} + 4 \cos x + \frac{5}{1+x^2} \right) dx$;
m) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\cos^2 x} - 5 \sin x - \frac{1}{1+x^2} \right) dx$; n) $\int \left(3 \sinh x - \frac{5}{\cosh^2 x} + 2 \cosh x \right) dx$;
o) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$; p) $\int \operatorname{ctgh}^2 x dx$; r) $\int \frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}} dx$; s) $\int \frac{4-x}{2+\sqrt{x}} dx$;
t) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$; u) $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$; w) $\int \frac{1+3x^2}{x^2(1+x^2)} dx$; x) $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$;
y) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$; z) $\int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x} dx$; ź) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$.

32.19. Znaleźć całki:

- a) $\int a^{kx} dx$; b) $\int \frac{dx}{\cos^2 ax}$; c) $\int \frac{dx}{\sin^2 bx}$; d) $\int \sinh px dx$;
e) $\int \cosh rx dx$; f) $\int \frac{dx}{\cosh^2 cx}$; g) $\int \frac{dx}{\sinh^2 mx}$;
h) $\int \frac{dx}{1+ax^2}$ ($a > 0$); i) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-bx^2}}$ ($b > 0$).

32.20. Znaleźć całki:

- a) $\int xe^x dx$; b) $\int x \sin x dx$; c) $\int x^2 \cos 4x dx$;
d) $\int u^2 \cosh u du$; e) $\int x 10^x dx$; f) $\int t^2 a^t dt$; g) $\int t^2 5^t dt$;
h) $\int (x^2 - 5x + 6) \cos x dx$; i) $\int (3x^2 - x + 2) 3^x dx$;
j) $\int \ln x dx$; k) $\int x^n \ln x dx$ ($n \neq -1$); l) $\int \ln^2 x dx$;

- l) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$; m) $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} dx$; n) $\int e^{ax} \sin bx dx$;
 o) $\int a^{kx} \cos bx dx$; p) $\int x^2 e^x \sin x dx$; r) $\int x \cdot 2^x \cos x dx$;
 s) $\int \sin(\ln x) dx$; t) $\int \cos(\ln x) dx$; u) $\int \sqrt{1-x^2} dx$.

32.21. Znaleźć całki:

- a) $\int (3x+2)^5 dx$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x+5}}$; c) $\int e^{x/2} dx$; d) $\int \cos \frac{x}{3} dx$;
 e) $\int 3^{7x} dx$; f) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$; g) $\int \frac{dx}{\sin^2(5x+1)}$; h) $\int \sinh 8x dx$;
 i) $\int \frac{dx}{\cosh^2 2x}$; j) $\int \frac{dx}{3+4x^2}$; k) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

32.22. Wykazać, że jeżeli $\int f(x) dx = F(x) + C$, to

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C, \quad a \neq 0.$$

32.23. Znaleźć całki:

- a) $\int xe^{x^2} dx$; b) $\int x \sqrt{x^2+a^2} dx$; c) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-k^2}}$;
 d) $\int (3x^2+2)^3 x dx$; e) $\int \frac{x dx}{1+x^4}$; f) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$; g) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$;
 h) $\int \frac{\cos x dx}{1+4 \sin^2 x}$; i) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-3e^{2x}}}$; j) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^4 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$; k) $\int \frac{2^x}{1+4^x} dx$.

32.24. Korzystając m.in. ze wzorów (a) i (b) przykład 32.5, znaleźć całki:

- a) $\int \frac{x}{2+5x^2} dx$; b) $\int \operatorname{tg} x dx$; c) $\int \operatorname{ctgh} x dx$; d) $\int \frac{e^x dx}{e^x+3}$;
 e) $\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x+1} dx$; f) $\int \frac{dx}{x(3 \ln x+5)}$; g) $\int \frac{x+5}{4x^2+x+7} dx$;
 h) $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$; i) $\int \frac{(\ln x)^n}{x} dx$ ($n \neq -1$); j) $\int (e^x+2)^6 e^x dx$;
 k) $\int \frac{(\operatorname{arc} \sin x)^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$; l) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x \cos^2 x}$; l) $\int \frac{\sqrt[4]{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}}{1+x^2} dx$;

$$\begin{aligned} \text{m)} \int \sqrt[6]{\cos^5 x} \sin x \, dx; \quad \text{n)} \int \frac{\sqrt{5 \ln x + 7}}{x} \, dx; \quad \text{o)} \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{2e^{2x} + 3}}; \\ \text{p)} \int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{5 + 3 \sin x}}; \quad \text{r)} \int \sqrt{2 \operatorname{arctg} x - 2} \frac{dx}{1 + x^2}; \quad \text{s)} \int \cosh^6 x \sinh x \, dx; \\ \text{t)} \int \operatorname{tgh}^5 x \frac{dx}{\cosh^2 x}; \quad \text{u)} \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{\operatorname{ctg} x}}; \quad \text{w)} \int \frac{4^x dx}{\sqrt{3 - 5 \cdot 4^x}}. \end{aligned}$$

32.25. Znaleźć całki:

$$\begin{aligned} \text{a)} \int x \operatorname{arctg} x \, dx; \quad \text{b)} \int \operatorname{arcctg} 2x \, dx; \quad \text{c)} \int x^5 \operatorname{arctg} x \, dx; \\ \text{d)} \int \operatorname{arcsin} x \, dx; \quad \text{e)} \int \sin \sqrt{x} \, dx; \quad \text{f)} \int x^3 e^{-x^2} \, dx; \\ \text{g)} \int (\operatorname{arcsin} x)^2 \, dx; \quad \text{h)} \int x \sin^2 x \, dx; \quad \text{i)} \int \frac{\operatorname{arcsin} x}{x^2} \, dx; \\ \text{j)} \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} \, dx; \quad \text{k)} \int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1 + x^2)^{3/2}} \, dx; \quad \text{l)} \int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x} \, dx; \\ \text{ł)} \int \frac{\ln(\operatorname{arctg} x)}{1 + x^2} \, dx; \quad \text{m)} \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2(1 + x^2)} \, dx; \\ \text{n)} \int \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln(\sin x)} \, dx; \quad \text{o)} \int e^{e^x + x} \, dx; \quad \text{p)} \int x \sin \sqrt{x} \, dx; \\ \text{r)} \int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx; \quad \text{s)} \int \frac{x}{\sinh^2 x} \, dx. \end{aligned}$$

32.26. Znaleźć całki:

$$\begin{aligned} \text{a)} \int \frac{dx}{\sin x}; \quad \text{b)} \int \frac{dx}{\cos 2x}; \quad \text{c)} \int \frac{dx}{\cosh x}; \quad \text{d)} \int \sin 3x \sin 5x \, dx; \\ \text{e)} \int \sin x \sin(x + a) \, dx; \quad \text{f)} \int \sinh x \sinh 2x \, dx; \\ \text{g)} \int \cos \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{3} x \, dx; \quad \text{h)} \int \cosh x \cosh 3x \, dx; \quad \text{i)} \int \cos mx \cos nx \, dx \quad (m \neq |n|); \\ \text{j)} \int \sin mx \cos nx \, dx \quad (m \neq n \wedge m \neq -n); \quad \text{k)} \int \cos x \cos 2x \cos 3x \, dx; \\ \text{l)} \int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx; \quad \text{ł)} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}}; \quad \text{m)} \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}. \end{aligned}$$

32.27. Znaleźć wzory rekurencyjne dla całek:

$$\begin{aligned} \text{a)} \int x^n e^x \, dx; \quad \text{b)} \int \ln^n x \, dx; \quad \text{c)} \int \sin^n x \, dx; \quad \text{d)} \int \operatorname{tg}^n x \, dx; \quad \text{e)} \int \operatorname{ctg}^n x \, dx; \\ \text{f)} \int \sinh^n x \, dx; \quad \text{g)} \int \cosh^n x \, dx; \quad \text{h)} \int \operatorname{tgh}^n x \, dx; \quad \text{i)} \int \frac{dx}{\cos^n x}. \end{aligned}$$

32.28. Korzystając z wyników zadania 32.27, znaleźć następujące całki:

a) $\int x^5 e^x dx$; b) $\int \ln^4 x dx$; c) $\int \sin^6 x dx$; d) $\int \operatorname{tg}^5 x dx$; e) $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$;
 f) $\int \sinh^4 x dx$; g) $\int \cosh^4 x dx$; h) $\int \operatorname{tgh}^5 x dx$; i) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

32.29. Znaleźć całki:

a) $\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x-3)}$; b) $\int \frac{(5x^2-3) dx}{(x-2)(3x^2+2x-1)}$; c) $\int \frac{x^2+6x+5}{x^2-6x+5} dx$;
 d) $\int \frac{x^4 dx}{(x^2-1)(x+2)}$; e) $\int \frac{x^2 dx}{(x-2)^3(x+1)}$; f) $\int \frac{dx}{(x-1)^3 x^2}$;
 g) $\int \frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6} dx$; h) $\int \frac{x^3+x^2+2}{x(x^2-1)^2} dx$; i) $\int \frac{x^5+2}{x^3-1} dx$;
 j) $\int \frac{3(x^4+2x^2+2)}{(x^3-1)(x^2+2x+2)} dx$; k) $\int \frac{dx}{x^6-1}$; l) $\int \frac{dx}{x^4+1}$;
 m) $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$; n) $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^3}$; o) $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}$;
 p) $\int \frac{dx}{x^3-4x^2+5x-2}$; q) $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$; r) $\int \frac{x^3 dx}{(x^2+x+5)^2}$;
 s) $\int \frac{2x dx}{(x^2+a)(x^2+b)}$; t) $\int \frac{\sin^4 x \cos x dx}{\sin^4 x - 1}$; u) $\int (3x^2+2x+1) \operatorname{arctg} x dx$.

32.30. Znaleźć całki:

a) $\int \frac{dx}{5+4 \cos x}$; b) $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x + \sqrt{2}}$; c) $\int \frac{1-a \cos x}{1-2a \cos x+a^2} dx$;
 d) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$; e) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin x} dx$; f) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$;
 g) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$; h) $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}$; i) $\int \sin^9 x dx$;
 j) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}$; k) $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$; l) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$;
 m) $\int \sin^4 x \cos^6 x dx$; n) $\int \frac{\cos^8 x}{\sin^2 x} dx$; o) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}$;

$$\text{o) } \int \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\cos 2x} dx; \quad \text{p) } \int \frac{dx}{1 - \sin^4 x}; \quad \text{r) } \int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}};$$

$$\text{s) } \int \frac{2\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}{(1 + \cos 2x)\sqrt{1 + \operatorname{tg} x}} dx.$$

32.31. Znaleźć całki:

$$\text{a) } \int \sinh^2 x dx; \quad \text{b) } \int \cosh^2 x dx; \quad \text{c) } \int \frac{dx}{2 \sinh x + 3 \cosh x};$$

$$\text{d) } \int \frac{dx}{\sinh x + 2 \cosh x}; \quad \text{e) } \int \sinh^4 x \cosh^3 x dx; \quad \text{f) } \int \cosh^3 x dx;$$

$$\text{g) } \int \frac{dx}{\sinh^3 x \cosh^3 x}; \quad \text{h) } \int \frac{dx}{\sinh^3 x}; \quad \text{i) } \int \sinh^2 x \cosh^4 x dx;$$

$$\text{j) } \int \frac{\cosh^3 x}{1 - \operatorname{tgh} x} dx; \quad \text{k) } \int \frac{dx}{\sinh x \cosh^2 x}; \quad \text{l) } \int \frac{dx}{\operatorname{tgh} x - 1}.$$

32.32. Znaleźć całki:

$$\text{a) } \int \frac{x dx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}; \quad \text{b) } \int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx; \quad \text{c) } \int \frac{dx}{(1+x)^{3/2} + (1+x)^{1/2}};$$

$$\text{d) } \int \frac{x dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}; \quad \text{e) } \int \frac{\sqrt[6]{x} + 1}{\sqrt[6]{x^7} + \sqrt[4]{x^5}} dx; \quad \text{f) } \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}};$$

$$\text{g) } \int \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}} dx; \quad \text{h) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(\sqrt[3]{x}+1)^3}}; \quad \text{i) } \int \frac{\sqrt{x} dx}{(1 + \sqrt[3]{x})^2};$$

$$\text{j) } \int \frac{x dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}; \quad \text{k) } \int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}+1}}; \quad \text{l) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}; \quad \text{ł) } \int \sqrt[3]{x(1-x^2)} dx.$$

32.33. Znaleźć całki:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5x + 7}}; \quad \text{b) } \int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2 + 2x + 1}}; \quad \text{c) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - ax}};$$

$$\text{d) } \int \sqrt{x^2 - 2x - 1} dx; \quad \text{e) } \int \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}} dx;$$

$$\text{f) } \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{2x^2 + 2x + 1}}; \quad \text{g) } \int \frac{x^3 dx}{(x-1)^2 \sqrt{x^2 + 2x + 4}}; \quad \text{h) } \int \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}{(x-1)^2} dx.$$

32.34. Znaleźć całki:

$$\begin{aligned} \text{a)} \int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}; \quad \text{b)} \int \frac{dx}{(1-x^2)^{5/2}}; \quad \text{c)} \int \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2+1-x^2}}; \\ \text{d)} \int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} dx; \quad \text{e)} \int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}; \\ \text{f)} \int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1} dx; \quad \text{g)} \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}; \quad \text{h)} \int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

32.35. Znaleźć całki:

$$\begin{aligned} \text{a)} \int xe^{3\sqrt{x}} dx; \quad \text{b)} \int \frac{xe^x dx}{(1+x)^2}; \quad \text{c)} \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^4} dx; \\ \text{d)} \int \sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}} \frac{dx}{x}; \quad \text{e)} \int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} dx; \quad \text{f)} \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx; \\ \text{g)} \int \frac{\sinh \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} dx; \quad \text{h)} \int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}} dx; \quad \text{i)} \int \sqrt{e^x+1} dx; \\ \text{j)} \int x^3 \arcsin \frac{1}{x} dx; \quad \text{k)} \int \arcsin \sqrt{x} dx; \quad \text{l)} \int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx; \\ \text{ł)} \int \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 2} dx; \quad \text{m)} \int \frac{dx}{(1-2^x)^4}; \quad \text{n)} \int \frac{(3+x^2)^2 x^3}{(1+x^2)^3} dx; \\ \text{o)} \int x^x(1+\ln x) dx; \quad \text{p)} \int \frac{x \ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx; \quad \text{r)} \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}} dx; \\ \text{s)} \int \sqrt{6 \sin^2 x + 2 \sin x + 15 \cos x} dx; \quad \text{t)} \int \frac{x^2-1}{x^2+1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}; \quad \text{u)} \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}. \end{aligned}$$

Odpowiedzi

W odpowiedziach będziemy opuszczali stałą całkowania.

$$\begin{aligned} \text{32.18. a)} \frac{m}{n+m} x^{(n+m)/m}, \quad n+m \neq 0; \quad \text{b)} \frac{prk}{1+p(1+r)+prk} x^{[1+p(1+r)+prk]/prk}; \\ \text{c)} 2x^{3/2} - \frac{4}{7}x^{7/4} + \frac{5}{4}x^4; \quad \text{d)} 2 \ln|x| - \frac{6}{7}x^{7/2} + 3x^{5/3}; \quad \text{e)} \sqrt{2h/g}; \\ \text{f)} -2x^{-1/2} - 4x^{1/2} + \frac{2}{3}x^{3/2}; \quad \text{g)} \frac{4}{5}t^{5/2} - \frac{18}{5}t^{5/6} + \frac{50}{9}t^{9/10}; \quad \text{h)} 4a\sqrt{x} + b/x + \frac{9}{5}cx^{5/3}; \\ \text{i)} \frac{2}{\ln 5} 5^x - 3e^x; \quad \text{j)} 3x - 2(\ln \frac{3}{2})^{-1}(\frac{3}{2})^x; \quad \text{k)} b^x - bx - a \left(\ln \frac{b}{a}\right)^{-1} \left(\frac{b}{a}\right)^x; \end{aligned}$$

$$l) 2\left(\ln \frac{3}{e}\right)^{-1} \left(\frac{3}{e}\right)^x - \left(\ln \frac{a}{e}\right)^{-1} \left(\frac{a}{e}\right)^x + 4e^x - 5\left(\ln \frac{b}{e}\right)^{-1} \left(\frac{b}{e}\right)^x;$$

$$l) 9 \arccos x - \operatorname{ctg} x + 4 \sin x + 5 \operatorname{arctg} x;$$

$$m) \arcsin x + 2 \operatorname{tg} x + 5 \cos x + \operatorname{arctg} x; \quad n) 3 \cosh x - 5 \operatorname{tgh} x + 2 \sinh x;$$

$$o) \operatorname{tg} x - x; \quad p) x - \operatorname{ctgh} x; \quad r) x + \frac{3}{4}x^{4/3} + \frac{3}{5}x^{5/3}; \quad s) 2x - \frac{2}{3}x\sqrt{x};$$

$$t) 2 \operatorname{arctg} x + \ln|x|; \quad u) -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x; \quad w) -\frac{1}{x} + 2 \operatorname{arctg} x;$$

$$x) -2 \cos x; \quad y) \sin x - \cos x; \quad z) \sin x - \cos x; \quad \dot{z}) -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x.$$

$$32.19. a) \frac{1}{k \ln a} a^{kx}; \quad b) \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax; \quad c) -\frac{1}{b} \operatorname{ctg} bx; \quad d) \frac{1}{p} \cosh px; \quad e) \frac{1}{r} \sinh rx;$$

$$f) \frac{1}{c} \operatorname{tgh} cx; \quad g) \frac{-1}{m} \operatorname{ctgh} mx; \quad h) \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg}(\sqrt{a}x); \quad i) \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin(\sqrt{b}x).$$

$$32.20. a) e^x(x-1); \quad b) -x \cos x + \sin x; \quad c) \frac{1}{32}(8x^2 \sin 4x + 4x \cos 4x - \sin 4x);$$

$$d) (u^2 + 2) \sinh u - 2u \cosh u;$$

$$e) \frac{10^x}{\ln^2 10} (\ln 10 \cdot x - 1); \quad f) \frac{a^t}{\ln^3 a} (\ln^2 a \cdot t^2 - 2 \ln a \cdot t + 2);$$

$$g) \frac{5^t}{\ln^3 5} (\ln^2 5 \cdot t^2 - 2 \ln 5 \cdot t + 2); \quad h) (x^2 - 5x + 4) \sin x + (2x - 5) \cos x;$$

$$i) \frac{3^x}{\ln^3 3} [\ln^2 3(3x^2 - x + 2) - \ln 3(6x - 1) + 6]; \quad j) x(\ln x - 1);$$

$$k) \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right); \quad l) x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2); \quad \dot{l}) -\frac{1}{x} (\ln^2 x + 2 \ln x + 2);$$

$$m) 2\sqrt{x}(\ln^2 x - 4 \ln x + 8); \quad n) \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sin bx - b \cos bx];$$

$$o) \frac{a^{kx}}{b^2 + k^2 \ln^2 a} [b \sin bx + k \ln a \cos bx]; \quad p) \frac{e^x}{2} [(x^2 - 1) \sin x - (x - 1)^2 \cos x];$$

$$r) \frac{x \cdot 2^x}{(1 + \ln^2 2)^2} \left[(1 + \ln^2 2)(\sin x + \ln 2 \cdot \cos x) - \frac{1}{x} (\ln 4 \cdot \sin x - \cos x + \right. \\ \left. + \ln^2 2 \cdot \cos x) \right];$$

$$s) \frac{1}{2}x [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]; \quad t) \frac{1}{2}x [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]; \quad u) \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x).$$

32.21. a) $\frac{1}{18}(3x+2)^6$; b) $\frac{3}{8}(4x+5)^{2/3}$; c) $2e^{x/2}$; d) $2 \sin \frac{1}{3}x$;

e) $\frac{1}{7 \ln 3} 3^{7x}$; f) $\frac{1}{4} \operatorname{tg} 4x$; g) $-\frac{1}{5} \operatorname{ctg}(5x+1)$; h) $\frac{1}{8} \cosh 8x$;

i) $\frac{1}{2} \operatorname{tgh} 2x$; j) $\frac{1}{12} \sqrt{12} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2}{3} \sqrt{3} x$; k) $\frac{1}{3} \operatorname{arc} \sin 3x$.

32.23. a) $\frac{1}{2} e^{x^2}$; b) $\frac{1}{3}(x^2+a^2)^{3/2}$; c) $\sqrt{x^2-k^2}$; d) $\frac{1}{24}(3x^2+2)^4$;

e) $\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x^2$; f) $-e^{1/x}$; g) $2 \sin \sqrt{x}$; h) $\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(2 \sin x)$;

i) $\frac{1}{3} \sqrt{3} \operatorname{arc} \sin(\sqrt{3} e^x)$; j) $\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{tg}^2 x)$; k) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2^x / \ln 2$.

32.24. a) $\frac{1}{10} \ln(2+5x^2)$; b) $-\ln |\cos x|$; c) $\ln |\sinh x|$;

d) $\ln(e^x+3)$; e) $\ln|x^3+2x+1|$; f) $\frac{1}{3} \ln|3 \ln x+5|$;

g) $\frac{1}{8} \ln(4x^2+x+7) + \frac{39}{4\sqrt{111}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{8x+1}{\sqrt{111}}$; h) $\frac{1}{4} \ln^4 x$;

i) $\frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}$; j) $\frac{1}{7}(e^x+2)^7$; k) $\frac{1}{4}(\operatorname{arc} \sin x)^4$;

l) $-\frac{1}{2}(\operatorname{tg} x)^{-2}$; l) $\frac{4}{3}(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^{5/4}$; m) $-\frac{6}{11}(\cos x)^{11/6}$;

n) $\frac{2}{15}(5 \ln x+7)^{3/2}$; o) $\frac{1}{2}(2e^{2x}+3)^{1/2}$; p) $\frac{2}{3}(5+3 \sin x)^{1/2}$;

r) $-\frac{1}{3}(2 \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x-2)^{3/2}$; s) $\frac{1}{7} \cosh^7 x$; t) $\frac{1}{6} \operatorname{tgh}^6 x$;

u) $-\frac{5}{4}(\operatorname{ctg} x)^{4/5}$; w) $-\frac{7}{30 \ln 4} (3-5 \cdot 4^x)^{6/7}$.

32.25. a) $\frac{1}{2}(x^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} x)$; b) $x \operatorname{arc} \operatorname{ctg} 2x + \frac{1}{4} \ln(1+4x^2)$;

c) $\frac{1}{6}(x^6+1) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{90}(3x^5-5x^3+15x)$; d) $x \operatorname{arc} \sin x + \sqrt{1-x^2}$;

e) $-2(\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - \sin \sqrt{x})$; f) $\frac{-e^{-x^2}}{2} (x^2+1)$;

g) $x(\operatorname{arc} \sin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \operatorname{arc} \sin x - 2x$; h) $\frac{1}{8}(2x^2-2x \sin 2x - \cos 2x)$;

i) $-\frac{1}{x} \operatorname{arc} \sin x - \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right|$; j) $-x - \operatorname{ctg} x \cdot \ln(e \sin x)$;

k) $-\frac{(1-x)e^{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}}{2\sqrt{1+x^2}}$; l) $x - \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) - e^{-x} \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^x$;

l) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x(\ln(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) - 1)$; m) $\ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2}(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2$;

- n) $\ln |\ln \sin x|$; o) e^{e^x} ; p) $2(6-x)\sqrt{x} \cos x - 6(2-x) \sin \sqrt{x}$;
 r) $x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x|$; s) $-x \operatorname{ctgh} x + \ln |\sinh x|$.

32.26. a) $\ln |\operatorname{tg} \frac{1}{2}x|$; b) $\frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi + x)|$; c) $2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^x$;

d) $\frac{1}{16}(4 \sin 2x - \sin 8x)$; e) $\frac{1}{2}x \cos a - \frac{1}{4} \sin(2x + a)$;

f) $\frac{2}{3} \sinh^3 x$; g) $\frac{3}{5}(5 \sin^6 x + \sin^5 x)$; h) $\frac{1}{8}(2 \sinh 2x + \sinh 4x)$.

i) $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{m-n} \sin(m-n)x + \frac{1}{m+n} \sin(m+n)x \right]$;

j) $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{n-m} \cos(m-n)x - \frac{1}{m+n} \cos(m+n)x \right]$;

k) $\frac{1}{48}(12x + 6 \sin 2x + 3 \sin 4x + 2 \sin 6x)$;

l) $\frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} + \frac{1}{2}a^2 \ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$; ł) $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$; m) $\frac{x}{|x|} \operatorname{arc} \cos \frac{1}{x}$.

32.27. a) $I_n = x^n e^x - n I_{n-1}$; b) $I_n = x \ln^n x - n I_{n-1}$;

c) $I_n = \frac{-1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$; d) $I_n = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2} \quad (n > 3)$;

e) $I_n = \frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{1-n} - I_{n-2} \quad (n > 3)$; f) $I_n = \frac{1}{n} \cosh x \sinh^{n-1} x - \frac{n-1}{n} I_{n-2}$;

g) $I_n = \frac{1}{n} \sinh x \cosh^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$; h) $I_n = I_{n-2} - \frac{\operatorname{tgh}^{n-1} x}{n-1} \quad (n > 1)$;

i) $I_n = \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} \quad (n > 2)$.

32.28. a) $e^x(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120)$;

b) $x(\ln^4 x - 4 \ln^3 x + 12 \ln^2 x - 24 \ln x + 24)$;

c) $-\frac{1}{6} \cos x \sin^5 x - \frac{5}{24} \cos x \sin^3 x + \frac{5}{32} (2x - \sin 2x)$;

d) $\frac{1}{6} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln |\cos x|$; e) $x + \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x$;

f) $\frac{1}{4} \cosh x \sinh^3 x - \frac{3}{16} (\sinh 2x - 2x)$; g) $\frac{1}{4} \sinh x \cosh^3 x + \frac{3}{16} (\sinh 2x + 2x)$;

h) $\ln(\cosh x) - \frac{1}{2} \operatorname{tgh}^2 x - \frac{1}{4} \operatorname{tgh}^4 x$; i) $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{2}{3} \operatorname{tg} x$.

32.29. a) $\ln(|x+1|^{1/4} |x+2|^{-2/5} |x-3|^{3/20})$;

b) $\ln(|x-2|^{17/15} |3x-1|^{11/30} |x+1|^{1/6})$; c) $x + \ln(|x-1|^{-3} |x-5|^{15})$,

d) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln(|x-1|^{1/6} |x+1|^{1/2} |x+2|^{10/3})$;

- e) $\frac{-2}{3(x-2)^2} - \frac{8}{9(x-2)} + \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right|^{1/27}$; f) $\frac{-1}{2(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x} + 3 \ln \left| \frac{x-1}{x} \right|$;
- g) $\frac{-4}{5(x-1)^5} - \frac{2}{(x-1)^4} - \frac{8}{3(x-1)^3} - \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}$; h) $\frac{x+3}{2(1-x^2)} + \frac{1}{2} \ln \frac{x^3}{\sqrt[4]{(x+1)^5(x-1)^3}}$;
- i) $\frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$; j) $\ln|x^3-1| - 6 \operatorname{arctg}(x+1)$;
- k) $\frac{1}{6} \ln \left[\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \right)^{1/2} \right] - \frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}x}{1-x^2}$;
- l) $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}$;
- l) $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}$; m) $\frac{1}{8} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{x}{8(x^2+1)}$;
- n) $\frac{-x}{3(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{1}{9} \ln(x^2+x+1) + \frac{2\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{9} \ln|x-1|$;
- o) $\frac{1}{x-1} + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right|$; p) $\frac{1}{3} \left(2 \ln \left| \frac{x^3+1}{x^3} \right| - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^3+1} \right)$;
- r) $\frac{2}{x^2+x+5} + \frac{7}{19} \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+5} + \frac{1}{2} \ln(x^2+x+5) - 29 \cdot (19)^{-3/2} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{19}$;
- s) $\frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x^2+b}{x^2+a} \right|$, $a \neq b$, $\frac{-1}{x^2+a}$, $a=b$; t) $\sin x + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\sin x)$;
- u) $(x^3+x^2+x+1) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x^2 - x$.

32.30. a) $\frac{2}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2}x \right)$; b) $\frac{2(1-\sqrt{2})}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}x + \sqrt{2}-1}$;

c) $\frac{1}{2}x + \operatorname{arctg} \left(\frac{1+a}{1-a} \operatorname{tg} \frac{1}{2}x \right)$; d) $\frac{1}{15} \cos^3 x (3 \cos^2 x - 5)$;

e) $\frac{1}{3} \cos^3 x + \cos x + \ln |\operatorname{tg} \frac{1}{2}x|$; f) $-\frac{1+\sin^2 x}{\sin x}$;

g) $\ln |\operatorname{tg} x| + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x$; h) $\ln \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x - 1}}{\sqrt[6]{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1}} - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{3}}$;

i) $-\cos x + \frac{4}{3} \cos^3 x - \frac{6}{5} \cos^5 x + \frac{4}{7} \cos^7 x - \frac{1}{9} \cos^9 x$; j) $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x) + 2 \ln |\operatorname{tg} x|$;

k) $\frac{1}{6} \sin^5 x \cos x - \frac{1}{24} \sin^3 x \cos x - \frac{1}{16} \sin x \cos x + \frac{1}{16} x$; l) $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x$;

l) $-\frac{1}{10} \sin^3 x \cos^7 x - \frac{3}{80} \sin x \cos^7 x + \frac{1}{160} \sin x \cos^5 x + \frac{1}{128} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{256} \sin x \cos x + \frac{3}{256} x$;

$$\text{m)} - \left[\text{ctg } x + \frac{35}{16}x + \frac{19}{16}\sin x \cos x + \frac{11}{24}\sin x \cos^3 x + \frac{1}{6}\sin x \cos^5 x \right];$$

$$\text{n)} - \frac{1}{2} \left[\text{ctg } x + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \left(\frac{\text{tg } x}{\sqrt{2}} \right) \right]; \quad \text{o)} \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + \text{tg } x}{1 - \text{tg } x} \right| + \frac{1}{2} \sin x \cos x;$$

$$\text{p)} \frac{1}{2} \text{tg } x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg(\sqrt{2} \text{tg } x); \quad \text{r)} 4\sqrt{\text{tg } x}; \quad \text{s)} \sqrt{\text{tg}^2 x - 1} - \ln(\text{tg } x + \sqrt{\text{tg}^2 x - 1})$$

$$\text{32.31. a)} \frac{1}{4}(\sinh 2x - 2x); \quad \text{b)} \frac{1}{4}(2x + \sinh 2x); \quad \text{c)} \frac{2}{\sqrt{5}} \arctg \frac{3 \text{tgh } \frac{1}{2}x + 2}{\sqrt{5}};$$

$$\text{d)} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2 \text{tgh } \frac{1}{2}x + 1}{\sqrt{3}}; \quad \text{e)} \frac{1}{5} \sinh^5 x + \frac{1}{7} \sinh^7 x; \quad \text{f)} \sinh x + \frac{1}{3} \sinh^3 x;$$

$$\text{g)} -\frac{1}{2} \text{ctgh}^2 x - 2 \ln \text{tgh } x + \frac{1}{2} \text{tgh}^2 x; \quad \text{h)} -\frac{1}{2} \left(\ln \left| \text{tgh } \frac{x}{2} \right| + \frac{\cosh x}{\sinh^2 x} \right);$$

$$\text{i)} \frac{1}{6} \sinh x \cosh^5 x - \frac{1}{24} \sinh x \cosh^3 x - \frac{1}{16} \sinh x \cosh x - \frac{1}{16}x;$$

$$\text{j)} \sinh x + \frac{2}{3} \sinh^3 x + \frac{1}{5}(\sinh^5 x + \cosh^5 x);$$

$$\text{k)} \ln \left| \text{tgh } \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{\cosh x}; \quad \text{l)} -\frac{1}{4}(2x + \sinh 2x + 2 \sinh^2 x).$$

$$\text{32.32. a)} \frac{2}{9} \cdot \frac{3x-2}{\sqrt{3x-1}}; \quad \text{b)} \frac{1}{2} (x-2)(x+1) \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{1}{2} \ln|x + \sqrt{x^2-1}|;$$

$$\text{c)} 2 \arctg \sqrt{1+x}; \quad \text{d)} 6 \left(\frac{u^9}{9} + \frac{u^8}{8} + \frac{u^7}{7} + \frac{u^6}{6} + \frac{u^5}{5} + \frac{u^4}{4} \right), \text{ gdzie } u = \sqrt[6]{x+1};$$

$$\text{e)} -6x^{-1/6} + 12x^{-1/12} + 2 \ln x - 24 \ln(\sqrt[12]{x} + 1);$$

$$\text{f)} 2 \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}; \quad \text{g)} 2 \sqrt{\frac{x}{1-x}} - 2 \arctg \sqrt{\frac{x}{1-x}}; \quad \text{h)} \frac{-3}{2(\sqrt[3]{x+1})^2};$$

$$\text{i)} \frac{6}{3}x^{5/6} - 4x^{1/2} + 18x^{1/6} + \frac{3x^{1/6}}{1+x^{1/3}} - 21 \arctg x^{1/6};$$

$$\text{j)} \frac{3}{5}z^5 - 2z^3 + 3z, \text{ gdzie } z = \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}};$$

$$\text{k)} 6 \left(\frac{1}{7}u^7 - \frac{3}{5}u^5 + u^3 - u \right), \text{ gdzie } u = \sqrt{1 + \sqrt[3]{x}};$$

$$\text{l)} \frac{1}{6} \ln \frac{u^2 + u + 1}{u^2 - 2u + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2u + 1}{\sqrt{3}}, \text{ gdzie } u = \sqrt[3]{1 + x^{-3}};$$

$$\text{ł)} \frac{u}{2(u^3 + 1)} - \frac{1}{12} \ln \frac{u^2 + 2u + 1}{u^2 - u + 1} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctg \frac{2u - 1}{\sqrt{3}}, \text{ gdzie } u = \sqrt[3]{x^{-2} - 1}.$$

32.33. a) $\ln(x + \frac{5}{2} + \sqrt{x^2 + 5x + 7})$; b) $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{3x-1}{2}$; c) $\ln(x - \frac{1}{2}a + \sqrt{x^2 - ax})$;

d) $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1} - \ln|x-1 + \sqrt{x^2-2x-1}|$;

e) $\frac{1}{6}(2x^2+x+7)\sqrt{x^2+2x-1} - 2\ln|x+1 + \sqrt{x^2+2x-1}|$;

f) $\frac{3x-1}{2x^2} z - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x+z}{x} \right|$, gdzie $z^2 = 2x^2 + 2x + 1$;

g) $\frac{7x-8}{7x-7} u + \ln(x+1+u) - \frac{19}{7\sqrt{7}} \ln \left| \frac{2x+5+\sqrt{7}u}{x-1} \right|$, gdzie $u^2 = x^2 + 2x + 4$;

h) $\frac{-u}{x-1} + \ln(x+1+u) - \frac{2}{\sqrt{7}} \ln \left| \frac{2x+5+\sqrt{7}u}{x-1} \right|$, gdzie $u^2 = x^2 + 2x + 4$.

32.34. a) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; b) $\frac{-2x^3+3x}{3(1-x)^2(1+x)} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

c) $\frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \left(2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + 1 \right) \right]$; d) $\ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$;

e) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2-1})$; f) $\ln(x + \sqrt{x^2+2}) - \arctg \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$;

g) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}x + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{2}x - \sqrt{x^2-1}} \right|$; h) $\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{2}x} \right|$.

32.35. a) $3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^4} + 20x - 60\sqrt[3]{x^2} + 120\sqrt[3]{x} - 120)$;

b) $\frac{e^x}{1+x}$; c) $\frac{1}{6} \ln \frac{1+x^2}{x^2} - \frac{\arctg x}{3x^3} - \frac{1}{6x^2}$;

d) $3 \left(2 \arctg z - \ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right| \right)$, gdzie $z = \sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}$;

e) $\frac{x}{\ln x}$; f) $\frac{5}{12}(\cos^2 x - 6)\sqrt[5]{\cos^2 x}$; g) $-2 \cosh \sqrt{1-x}$;

h) $\frac{4}{7}\sqrt[4]{(e^x+1)^7} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{(e^x+1)^3}$; i) $2\sqrt{e^x+1} + \ln \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$;

j) $\frac{1}{4} \left(x^4 \arcsin \frac{1}{x} + \frac{x^2+2}{3} \sqrt{x^2-1} \right)$; k) $\frac{1}{2} \sqrt{x-x^2} + (x-\frac{1}{2}) \arcsin \sqrt{x}$;

l) $2\sqrt{x+1}(\ln|x+1|-2)$; t) $\frac{\sqrt{2}}{2} \left[\arctg \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2+\operatorname{tg}^2 x}} + \ln(\sqrt{2+\operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x) \right]$;

$$\text{m)} x - \log_2 |1 - 2^x| + \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{1}{1 - 2^x} + \frac{1}{2(1 - 2^x)^2} + \frac{1}{3(1 - 2^x)^3} \right];$$

$$\text{n)} \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \ln(1 + x^2) + \frac{1}{(1 + x^2)^2}; \quad \text{o)} x^x;$$

$$\text{p)} (1 + \sqrt{1 + x^2}) [\ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) - 1]; \quad \text{r)} -\ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x});$$

$$\text{s)} \frac{\sqrt{6} \cdot 89}{72} \left[\frac{6u + 1}{\sqrt{89}} \sqrt{1 + \frac{(6u + 1)^2}{89}} + \operatorname{arcsinh} \frac{6u + 1}{\sqrt{89}} \right], \text{ gdzie } u = \sin x;$$

$$\text{t)} \frac{1}{\sqrt{2}} \arccos \frac{\sqrt{2}x}{x^2 + 1}; \quad \text{u)} \ln \left| \frac{\sqrt{1 + e^x + e^{2x}} - e^x - 1}{\sqrt{1 + e^x + e^{2x}} - e^x + 1} \right|.$$

§ 33. CAŁKI OZNACZONE

33.1. Miara Jordana. Niech P oznacza przedział domknięty w \mathbf{R}^n , tzn.

$$P = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, a_i, b_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

W punkcie 33.1 P , względnie P_i, P_{ij} będą oznaczać zawsze przedziały domknięte w \mathbf{R}^n .
Objętością n -wymiarową przedziału P nazywamy liczbę nieujemną

$$\operatorname{vol} P = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Niech $B = \bigcup_{j=1}^m P_j$, gdzie $\operatorname{int} P_i \cap \operatorname{int} P_k = \emptyset$ dla $i \neq k$ ($\operatorname{int} A$ oznacza wnętrze zbioru

A). Definiujemy

$$\operatorname{vol} B = \operatorname{vol} \bigcup_{j=1}^m P_j := \sum_{j=1}^m \operatorname{vol} P_j.$$

Można wykazać, że jeżeli $B = \bigcup_{j=1}^r P_{1j}$, gdzie $\operatorname{int} P_{1i} \cap \operatorname{int} P_{1k} = \emptyset$ dla $i \neq k$, to

$$\operatorname{vol} \bigcup_{j=1}^m P_j = \operatorname{vol} \bigcup_{j=1}^r P_{1j}.$$

Niech $D \subset \mathbf{R}^n$ oznacza obszar domknięty i ograniczony. Tworzymy zbiory $D_1 = \bigcup_{j=1}^m P_{1j} \subset D$, gdzie $\operatorname{int} P_{1i} \cap \operatorname{int} P_{1k} = \emptyset$ dla $i \neq k$ (D_1 nazywamy *figurą wpisaną w D*) oraz $D_2 = \bigcup_{j=1}^r P_{2j} \supset D$, gdzie $\operatorname{int} P_{2i} \cap \operatorname{int} P_{2k} = \emptyset$ dla $i \neq k$ (D_2 nazywamy *figurą opisaną lub pokryciem* zbioru D). Niech

$$\underline{Z} = \{z \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\} : z = \operatorname{vol} D_1\}, \quad \bar{Z} = \{z \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\} : z = \operatorname{vol} D_2\},$$

gdzie D_1 oznacza dowolną figurę wpisaną w D oraz D_2 oznacza dowolne pokrycie D .

Udowadnia się, że zawsze istnieją kresy \underline{Z} , $\inf \bar{Z}$ i $\sup \underline{Z} \leq \inf \bar{Z}$.

Jeżeli $\underline{Z} = \inf \bar{Z}$, to mówimy, że D jest *zbiorem mierzalnym* (w sensie Jordana) i wspólną wartość kresów nazywamy *miarą Jordana* zbioru D i piszemy $|D| = \sup \underline{Z} = \inf \bar{Z}$ (czasem piszemy $|D| = m(D)$).

W szczególności miara Jordana dla: $n=1$ oznacza długość, $n=2$ – pole, $n=3$ – objętość. Jeżeli $|D|=0$, to mówimy, że D jest *zbiorem miary zero* w \mathbf{R}^n . Udowadnia się np. że skończony zbiór punktów ma zawsze miarę zero, skończony zbiór łuków na płaszczyźnie ma miarę zero na płaszczyźnie, skończony zbiór płatów w \mathbf{R}^3 ma miarę zero na \mathbf{R}^3 .

Można udowodnić, że:

1° Jeżeli istnieje $|D|$, to istnieje $|\text{int } D|$ i $|D| = |\text{int } D|$;

2° Jeżeli istnieją $|D_j|$, $j=1, 2, \dots, m$, to istnieje $\left| \bigcup_{j=1}^m D_j \right|$ i

$$\left| \bigcup_{j=1}^m D_j \right| = \sum_{j=1}^m |D_j|.$$

Uwaga. Można udowodnić, że suma przeliczalnej liczby zbiorów mierzalnych (w sensie Jordana) może nie być zbiorem mierzalnym.

W dalszych paragrafach będziemy mówili tylko o zbiorach mierzalnych.

33.2. Dana jest funkcja $f: \mathbf{R}^n \supset A \rightarrow \mathbf{R}$ ograniczona na obszarze domkniętym i ograniczonym A . Tworzymy podział $\Delta_n: A_1, A_2, \dots, A_n$, $A = \bigcup_{i=1}^n A_i \wedge A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ zbioru A . Liczbę $\delta_n = \max \text{dia } A_k$, $k=1, 2, \dots, n$ nazywamy *średnicą podziału* Δ_n oraz bierzemy dowolne punkty $x_i \in A_i$, $i=1, 2, \dots, n$. Każdemu ciągowi (Δ_n) podziałów zbioru A odpowiada ciąg liczbowy średnic (δ_n) oraz ciąg liczbowy $(S_n) = \left(\sum_{i=1}^n f(x_i) |A_i| \right)$ ($|A_i|$ oznacza miarę Jordana zbioru A_i) zwany *ciągami sum całkowych* funkcji f . Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$, to ciąg (Δ_n) nazywamy *ciągami normalnymi podziałów* zbioru A .

Jeżeli dla każdego ciągu normalnego podziałów zbioru A odpowiadający mu ciąg sum całkowych jest zbieżny do tej samej granicy i granica ta nie zależy od wyboru punktów x_i , to mówimy, że f jest *całkowalna w sensie Riemanna* na A i granicę tę nazywamy *całką Riemanna funkcji f na A* i oznaczamy

$$(1) \quad \int_A f dm = \int_A \dots \int_A \overset{n \text{ razy}}{f(x)} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \lim_{\delta_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^k) |A_i^k|$$

$k=1, 2, \dots$ (wskaźnik k oznacza, że chodzi o dowolny ciąg normalny podziałów). W szczególności dla $n=1$ (wówczas $A = \langle a, b \rangle$) przyjmujemy oznaczenie $\int_A f dm = \int_a^b f(x) dx$ oraz uzupełniamy powyższą definicję:

$$\int_a^a f(x) dx := 0, \quad \int_a^b f(x) dx := - \int_b^a f(x) dx.$$

Jeżeli f jest całkowalna na A , to będziemy pisali $f \in \mathcal{R}(A)$.

Uwaga 1. Całkę Riemanna definiuje się również za pomocą kresów. Definicja taka, jest bardzo przydatna w dowodach twierdzeń z rachunku całkowego, natomiast w zastosowaniach technicznych powyższa definicja jest wygodniejsza.

33.3. Twierdzenia o całkach

T_1 . Funkcja $f: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła na obszarze ograniczonym i domkniętym A jest na nim całkowalna.

Uwaga. T_1 ma podstawowe znaczenie w zastosowaniach, ponieważ sprowadza obliczanie całki do znalezienia granicy jednego ciągu sum całkowych.

$$T_2. (f, g \in \mathcal{R}(A) \wedge \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \Rightarrow \left(\int_A (\alpha f + \beta g) dm = \alpha \int_A f dm + \beta \int_A g dm \right).$$

$$T_3. (f \in \mathcal{R}(A) \wedge A = B \cup C \wedge \text{int } B \cap \text{int } C = \emptyset) \Rightarrow (f \in \mathcal{R}(B) \wedge f \in \mathcal{R}(C) \wedge \int_A f dm = \int_B f dm + \int_C f dm).$$

Z definicji dla $f(x) = 1, x \in A$ otrzymujemy

$$(2) \quad \int_A dm = m(A) = |A|.$$

T_4 . Jeżeli $f \in C^0(A)$, gdzie A jest obszarem normalnym względem osi Ox_n , to

$$(3) \quad \int_A f dm = \int_a^b dx_1 \int_{g_1(x_1)}^{h_1(x_1)} dx_2 \int_{g_2(x_1, x_2)}^{h_2(x_1, x_2)} dx_3 \dots \int_{g_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2})}^{h_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2})} dx_{n-1} \int_{g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})}^{h_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) dx_n.$$

W przypadku $n=1$ mamy

$$(4) \quad \int_A f dm = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b,$$

gdzie F jest jakąkolwiek funkcją pierwotną funkcji f .

Z T_4 § 32 oraz ze wzoru (4) otrzymujemy wzór:

$$(5) \quad \int_a^b f'(x)g(x) dx = (f(x)g(x)) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx,$$

gdzie $f', g' \in C^1(\langle a, b \rangle)$ i

$$(f(x)g(x)) \Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Uwaga 2. W calce $\int_{g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})}^{h_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n$ zmienne x_1, x_2, \dots, x_{n-1} traktujemy jako stałe i całkujemy względem zmiennej x_n korzystając z (4). Po $(n-1)$ -krotnym zastosowaniu wzoru (4) otrzymujemy $\int_a^b \Phi(x_1) dx_1$, tzn. $\int_A f dm = G(b) - G(a)$, gdzie $G'(x_1) = \Phi(x_1)$ na $\langle a, b \rangle$.

Uwaga 3. W pewnych przypadkach całki obliczamy szybciej, traktując obszar A jako normalny względem osi $Ox_j, j \neq n$. Na przykład:

1° jeżeli $A = \{(x, y) : (a \leq y \leq b) \wedge (g(y) \leq x \leq h(y))\}$, $f \in C^0(A)$, to

$$(6) \quad \iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dy \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx;$$

2° jeżeli $B = \{(x, y, z) : (a \leq z \leq b) \wedge (g_1(z) \leq x \leq h_1(z)) \wedge (g_2(x, z) \leq y \leq h_2(x, z))\}$, $f \in C^0(B)$, to

$$(7) \quad \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \int_{g_1(z)}^{h_1(z)} dx \int_{g_2(x, z)}^{h_2(x, z)} f(x, y, z) dy.$$

T_5 (zmiana zmiennych w całce n -krotnej). Jeżeli

1° $g: \mathbf{R}^n \supset \bar{A} \ni y \rightarrow g(g_1(y), \dots, g_n(y)) \in \mathbf{R}^n$, \bar{A} jest domknięciem obszaru regularnego A , $g_i \in C^0(\bar{A})$, $i = 1, 2, \dots, n$,

2° obcięcie $g|_A$ jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym, $g_i \in C^1(A)$ oraz Jakobian odwzorowania $g|_A$ jest różny od zera na A ,

3° $f: g(\bar{A}) \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}$, $f \in C^0(g(\bar{A}))$, to

$$(8) \quad \int_{g(\bar{A})} f dm = \int_{\bar{A}} \dots \int f(g_1(y), \dots, g_n(y)) \det \left[\frac{\partial g_i(y)}{\partial y_j} \right]_{n \times n} dy_1 dy_2 \dots dy_n,$$

gdzie $g_i: \bar{A} \ni (y_1, y_2, \dots, y_n) \rightarrow g_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}$ są współrzędnymi odwzorowania g oraz $i, j = 1, 2, \dots, n$.

W szczególności dla $n=1$ otrzymujemy

$$(9) \quad \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f(g(y)) g'(y) dy,$$

gdzie $\bar{A} = \langle a, b \rangle$, $J = g'(y) \neq 0$, $y \in (a, b)$.

Wzór (8) stosujemy wówczas, jeżeli całka po jednej stronie we wzorze (8) jest łatwiejsza do obliczania niż całka po drugiej stronie, przy czym najważniejszy jest przypadek tzw. współrzędnych sferycznych, tzn. gdy g jest pewnym odwzorowaniem sferycznym (por. zadanie 18.26d). Dla $n=2$ są to znane współrzędne biegunowe:

$$x = g_1(\varphi, r) = r \cos \varphi, \quad y = g_2(\varphi, r) = r \sin \varphi,$$

$$\bar{A} = \{(\varphi, r) : (\varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle 0, 2\pi \rangle) \wedge (r \in \langle 0, +\infty \rangle)\}, \quad |J| = r \neq 0,$$

dla $r \in (0, +\infty)$. Z (8) otrzymujemy

$$(10) \quad \iint_{g(\bar{A})} f(x, y) dx dy = \iint_{\bar{A}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi dr,$$

gdzie odwzorowanie g ma współrzędne g_1 i g_2 .

Dla $n=3$ mamy:

$$x = g_1(\varphi, \theta, \rho) = \rho \cos \theta \cos \varphi,$$

$$y = g_2(\varphi, \theta, \rho) = \rho \cos \theta \sin \varphi, \quad z = g_3(\varphi, \theta, \rho) = \rho \sin \theta,$$

$$\bar{A} = \{(\varphi, \theta, \rho) : (\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle) \wedge (\theta \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle) \wedge (\rho \in \langle 0, +\infty \rangle)\},$$

$J = \rho^2 \cos \theta$. Z (8) otrzymujemy,

$$(11) \quad \iiint_{g(\bar{A})} f(x, y, z) dx dy dz = \\ = \iiint_{\bar{A}} f(g_1(\varphi, \theta, \rho), g_2(\varphi, \theta, \rho), g_3(\varphi, \theta, \rho)) |\rho^2 \cos \theta| d\varphi d\theta d\rho.$$

W przypadku ogólnym odwzorowanie $g: \mathbf{R}^n \supset \bar{A} \rightarrow \mathbf{R}^n$ mające współrzędne $g_i, i = 1, 2, \dots, n$ określone wzorami:

$$x_1 = g_1(u, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) = u \cos v_1 \cos v_2 \dots \cos v_{n-1},$$

$$x_2 = g_2(u, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) = u \sin v_1 \cos v_2 \cos v_3 \dots \cos v_{n-1},$$

$$x_3 = g_3(u, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) = u \sin v_2 \cos v_3 \dots \cos v_{n-1},$$

.....

$$x_{n-1} = g_{n-1}(u, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) = u \sin v_{n-2} \cos v_{n-1},$$

$$x_n = g_n(u, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) = u \sin v_{n-1},$$

$$\bar{A} = \{(u, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) : (u \in \langle 0, +\infty \rangle) \wedge (0 \leq v_1 \leq 2\pi) \wedge (-\frac{1}{2}\pi \leq v_i \leq \frac{1}{2}\pi), \\ i = 2, 3, \dots, n-1\},$$

jest obcięciem $h|_{\bar{A}}$ odwzorowania sferycznego (por. § 18), przy czym (por. zadanie 29.19):

$$J = u^{n-1} \cos v_2 \cos^2 v_3 \dots \cos^{n-2} v_{n-1} \neq 0 \quad \text{na } A = \text{int } \bar{A}.$$

Można wykazać, że odwzorowanie g spełnia założenia twierdzenia T_5 , skąd (por. wzór (8)):

$$(12) \quad \int_{g(\bar{A})} f dm = \int_{\bar{A}} \dots \int f(g_1, g_2, \dots, g_n) |u^{n-1} \cos v_2 \cos^2 v_3 \dots \cos^{n-2} v_{n-1}| du dv_1 \dots dv_{n-1}.$$

Przykłady

33.1. Za pomocą definicji całki oznaczonej obliczyć:

$$a) \int_a^b x dx; \quad b) \int_a^b e^x dx; \quad c) \int_0^b \cos x dx.$$

Rozwiązanie. Funkcje podcałkowe występujące w przykładach a), b) i c) są ciągłe na każdym przedziale, zatem są całkowne (por. T_1). Wystarczy więc znaleźć granicę ciągu sum całkowych dla jakiegokolwiek ciągu normalnego podziałów i dla jakichkolwiek punktów pośrednich wybranych z odpowiednich podprzedziałów.

a) Przedział $\langle a, b \rangle$ dzielimy na n równych części punktami $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. W otrzymanym podziale Δ_n przedziału $\langle a, b \rangle$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = \delta_n, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Biorąc ciąg podziałów (Δ_n) mamy $(\delta_n) = \left(\frac{b-a}{n}\right) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} = 0$, a więc utworzony ciąg podziałów (Δ_n) jest ciągiem normalnym. Jako punkty pośrednie weźmy lewe końce przedziałów $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, tzn. $x'_i = x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, czyli

$$x'_i = a + (i-1) \frac{b-a}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Z kolei, znajdujemy odpowiednią sumę całkową funkcji $f: \langle a, b \rangle \ni x \rightarrow x \in \mathbf{R}$. Otóż

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \left[a + (i-1) \frac{b-a}{n} \right] \Delta x_i = \\ &= \frac{b-a}{n} \left\{ a + \left(a + \frac{b-a}{n} \right) + \left(a + 2 \frac{b-a}{n} \right) + \dots + \left[a + (n-1) \frac{b-a}{n} \right] \right\} = \\ &= \frac{b-a}{n} \left\{ na + \frac{b-a}{n} [1+2+\dots+(n-1)] \right\} = \\ &= \frac{b-a}{n} \left[na + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{(1+n-1)(n-1)}{2} \right] = \\ &= \frac{b-a}{n} \left[na + \frac{(b-a)(n-1)}{2} \right] = (b-a) \left(a + \frac{b-a}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \right). \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \int_a^b x \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x'_i \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(b-a) \left(a + \frac{b-a}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \right) \right] = \\ &= (b-a) \left(a + \frac{b-a}{2} \right) = \frac{b^2 - a^2}{2}. \end{aligned}$$

b) Postępujemy analogicznie jak w punkcie a):

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = h = \delta_n, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} = 0, \quad x'_i = x_{i-1} = a + (i-1)h, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Stąd

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x'_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n e^{a+(i-1)h} h = h e^a (1 + e^h + e^{2h} + \dots + e^{(n-1)h}).$$

Wyrażenie w nawiasie jest sumą n wyrazów ciągu geometrycznego o ilorazie e^h , zatem

$$S_n = h e^a \frac{e^{nh} - 1}{e^h - 1} = e^a (e^{b-a} - 1) : \frac{e^h - 1}{h}.$$

Ale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h}{1} = 1,$$

skąd

$$\int_a^b e^x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n e^{x'_i} \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[e^a (e^{b-a} - 1) \cdot \frac{e^h - 1}{h} \right] = e^a (e^{b-a} - 1) = e^b - e^a,$$

a więc

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a.$$

c) Postępujemy analogicznie jak w punktach a) i b):

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b}{n} = \delta_n, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{n} = 0, \quad x'_i = (i-1) \frac{b}{n} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Stąd

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n f(x'_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \cos \left[(i-1) \frac{b}{n} \right] \frac{b}{n} = \\ &= \frac{b}{n} \left[1 + \cos \frac{b}{n} + \cos 2 \frac{b}{n} + \dots + \cos (n-1) \frac{b}{n} \right] = \\ &= \frac{b}{n} \left\{ \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2} + \cos \frac{b}{n} + \cos \frac{2b}{n} + \dots + \cos (n-1) \frac{b}{n} \right] \right\} = \\ &= \frac{b}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin \frac{(2n-1)b}{2n}}{2 \sin \frac{b}{2n}} \right) = \frac{b}{n} \frac{\sin \frac{b}{2n} + \sin \frac{(2n-1)b}{2n}}{2 \sin \frac{b}{2n}} \end{aligned}$$

(por. 2.14). Zatem

$$\begin{aligned} \int_0^b \cos x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \cos x'_i \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{b}{n} \frac{\sin \frac{b}{2n} + \sin \frac{(2n-1)b}{2n}}{2 \sin \frac{b}{2n}} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{b}{2n} / \sin \frac{b}{2n} \right) \left[\sin \frac{b}{2n} + \sin \frac{2n-1}{2n} b \right] \right\}. \end{aligned}$$

Ale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{2n} = 0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n} = 1, \quad \text{czyli} \quad \int_0^b \cos x dx = \sin b.$$

Jak widać z przykładu 33.1 obliczanie całek oznaczonych za pomocą definicji nawet dla bardzo prostych funkcji jest uciążliwe rachunkowo. Dlatego też, w następnych zadaniach będziemy korzystali przede wszystkim ze wzorów (3) - (7), które sprowadzają problem obliczania całek oznaczonych do znajdowania całek nieoznaczonych, którymi zajmowaliśmy się w § 32.

33.2. Obliczyć całki:

$$\text{a) } \int_1^2 \sqrt{x^m} dx, \quad m+r \neq 0; \quad \text{b) } \int_{-2}^3 3^x dx; \quad \text{c) } \int_0^1 x^2 \cosh x dx;$$

$$\text{d) } \int_0^{\pi/4} \sin^3 x \cos^4 x dx; \quad \text{e) } \int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4} dx;$$

$$\text{f) } \int_0^{\pi/2} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx; \quad \text{g) } \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 x}} dx.$$

Rozwiązanie. Korzystać będziemy m. in. ze wzorów (4), (5) i (9).

$$\text{a) } A = \int_1^2 \sqrt{x^m} dx = \frac{r}{r+m} x^{(m+r)/r} \Big|_1^2 = \frac{r}{r+m} (2^{(m+r)/r} - 1).$$

$$\text{b) } A = \int_{-2}^3 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} \Big|_{-2}^3 = \frac{1}{\ln 3} (3^3 - 3^{-2}) = \frac{242}{9 \ln 3}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } A &= \int_0^1 x^2 \cosh x dx = \int_0^1 x^2 (\sinh x)' dx = x^2 \sinh x \Big|_0^1 - \int_0^1 2x \sinh x dx = \\ &= \sinh 1 - 2 \int_0^1 x (\cosh x)' dx = \sinh 1 - (2x \cosh x) \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 \cosh x dx = \\ &= \sinh 1 - 2 \cosh 1 + (2 \sinh x) \Big|_0^1 = 3 \sinh 1 - 2 \cosh 1 = \frac{e^2 - 5}{2e}. \end{aligned}$$

d) $A = \int_0^{\pi/4} \sin^3 x \cos^4 x dx$; podstawiamy $u = \cos x$ (por. wzór (9)). Stąd $du = -\sin x dx$ oraz jeżeli $x=0$ (dolna granica całkowania), to $u = \cos 0 = 1$ i jeżeli $x = \frac{1}{4}\pi$ (górną granicą całkowania), to $u = \cos \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Zatem

$$A = \int_1^{\sqrt{2}/2} (1-u^2) u^4 (-du) = \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} \right) \Big|_{\sqrt{2}/2}^1 = \frac{16\sqrt{2}-9}{280\sqrt{2}}.$$

e) $A = \int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4} dx$; podstawiamy $x = \frac{a}{\cos t}$ (zauważmy, że funkcja określona wzorem

$x(t) = \frac{a}{\cos t}$ jest klasy C^1 na przedziale $\langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$). Stąd $dx = \frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt$ oraz $x(0) = a$ i $x(\frac{1}{2}\pi) = 2a$, zatem

$$A = \int_0^{\pi/3} \frac{\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2}}{\frac{a^4}{\cos^4 t}} \cdot \frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt =$$

$$= \frac{1}{a^2} \int_0^{\pi/3} \sin^2 t \cos t dt = \frac{1}{a^2} \int_0^{\pi/3} \sin^2 t (\sin t)' dt = \left(\frac{1}{3a^2} \sin^3 t \right) \Big|_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{8a^2}.$$

f) $A = \int_0^{\pi/2} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$; podstawiamy $t = \cos x$, stąd $dt = -\sin x dx$ oraz $t = \cos 0 = 1$ i $t = \cos \frac{1}{2}\pi = 0$, zatem

$$A = - \int_1^0 \sqrt{1+t^2} dt = \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{2} [t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2})] \Big|_0^1 = \frac{1}{2} [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})].$$

g) $A = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 x}} dx$; korzystamy z 32.17f. Otóż

$$A = \left[\frac{\sqrt{1 + \cos^4 x}}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \ln(\cos^2 x + \sqrt{\cos^4 x + 1}) \right] \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{5} - 1)}{2} \right].$$

33.3. Zmienić kolejność całkowania w całkach:

a) $\int_2^3 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$; b) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx$; c) $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy$ ($a > 0$).

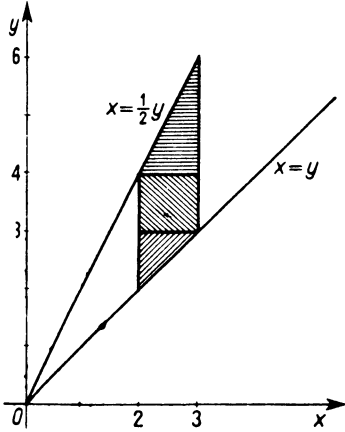
Rozwiązanie. Korzystamy ze wzorów (6) i (3) dla $n=2$ oraz z wykresów krzywych ograniczających obszar całkowania.

a) Rys. 33.1, $\int_2^3 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy = \int_2^3 dy \int_2^y f(x, y) dx + \int_3^6 dy \int_2^3 f(x, y) dx +$
 $+ \int_4^6 dy \int_{y/2}^3 f(x, y) dx.$

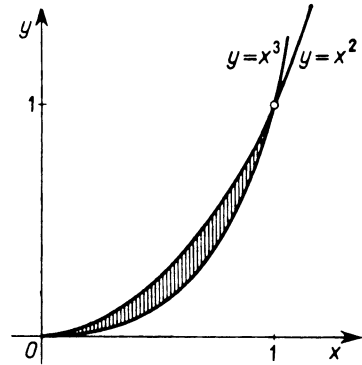
b) Rys. 33.2, $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy.$

c) Obszar całkowania ograniczony jest od dołu półokręgiem. Istotnie, $y = \sqrt{2ax - x^2}$, zatem $y^2 = 2ax - x^2$, czyli $(x - a)^2 + y^2 = a^2$. Od góry obszar ograniczony jest parabolą $y = \sqrt{2a} \sqrt{x}$, stąd wykres (rys. 33.3), z którego otrzymujemy

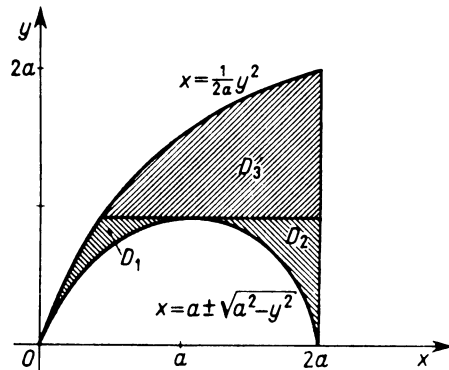
$$\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy = \int_0^a dy \left[\int_{y^2/2a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y) dx \right] + \int_a^{2a} dy \int_{y^2/2a}^{2a} f(x, y) dx.$$



Rys. 33.1



Rys. 33.2



Rys. 33.3

33.4. Obliczyć całki:

- a) $\int_0^1 \int_0^1 xy \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy$; b) $\iint_D y^2 \sqrt{R^2-x^2} dx dy$, $D = \{(x, y) \in R^2 ; x^2 + y^2 \leq R^2\}$;

$$c) \iint_D xy \, dx \, dy, \quad D: \begin{cases} y=0 \text{ } ^{(1)}, \\ x=0, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1; \end{cases}$$

d) $\iint_D \sin(x+y) \, dx \, dy$, gdzie obszar D jest trójkątem o wierzchołkach $O(0, 0)$, $A(\frac{1}{2}\pi)$, $B(\pi, 0)$;

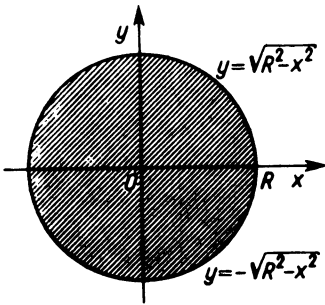
$$e) \iint_D x^2 y \, dx \, dy, \quad D: \begin{cases} y=-\sqrt{-x}, \\ y=1/x, \\ y=-2; \end{cases} \quad f) \iint_D xy \, dx \, dy, \quad D: \begin{cases} y=-x^2+4, \\ y=3\sqrt{x}, \\ y=0 \quad (x \leq 0). \end{cases}$$

Rozwiązanie. W przykładach a), b), c) i f) korzystamy ze wzoru (3) dla $n=2$, w przykładach d) i e) korzystamy ze wzoru (6).

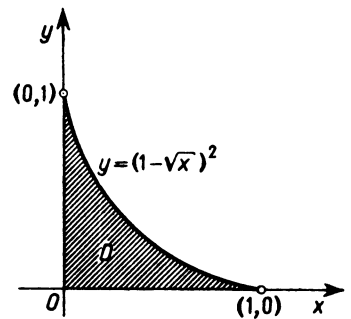
$$\begin{aligned} a) \int_0^1 \int_0^1 xy \sqrt{1+x^2+y^2} \, dx \, dy &= \int_0^1 x \, dx \int_0^1 y \sqrt{1+x^2+y^2} \, dy = \\ &= \int_0^1 x \, dx \left[\frac{1}{3} (1+x^2+y^2)^{3/2} \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \int_0^1 [x(2+x^2)^{3/2} - x(1+x^2)^{3/2}] \, dx = \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{5} (2+x^2)^{5/2} - \frac{1}{5} (1+x^2)^{5/2} \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{15} (1+3^{5/2} - 2^{7/2}). \end{aligned}$$

b) Korzystając z rysunku 33.4, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \iint_D y^2 \sqrt{R^2-x^2} \, dx \, dy &= \int_{-R}^R dx \sqrt{R^2-x^2} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 \, dy = \\ &= \frac{1}{3} \int_{-R}^R \sqrt{R^2-x^2} \, dx \, y^3 \Big|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{2}{3} \int_{-R}^R (R^2-x^2)^2 \, dx = \\ &= \frac{2}{3} \left(R^4 x - \frac{2}{3} R^2 x^3 + \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_{-R}^R = \frac{32}{45} R^5. \end{aligned}$$



Rys. 33.4



Rys. 33.5

(¹) Zapis ten oznacza, że obszar D ograniczony jest liniami o równaniach: $y=0$, $x=0$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$.

c) Korzystając m. in. z rysunku 33.5, otrzymujemy

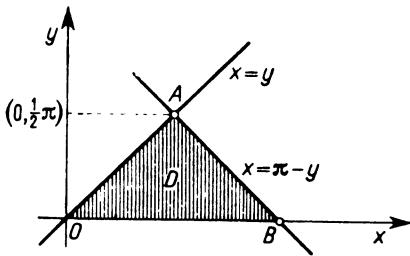
$$A = \iint_D xy \, dx \, dy = \int_0^1 x \, dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} y \, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 x \, dx \, y^2 \Big|_0^{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-\sqrt{x})^4 \, dx.$$

Podstawiamy $u = 1 - \sqrt{x}$, $dx = -2\sqrt{x} \, du$, $\sqrt{x} = 1 - u$, $x = (1 - u)^2$, zatem

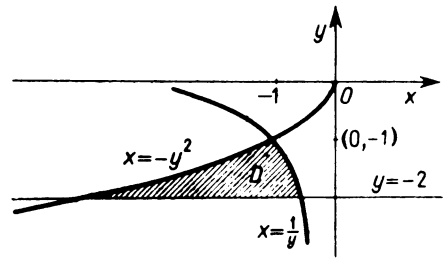
$$A = \frac{1}{2} \int_1^0 (1-u)^2 u^4 (-2)(1-u) \, du = \frac{1}{280}.$$

d) Korzystając z rysunku 33.6, otrzymujemy $L_{OA}: y = x$, $L_{AB}: y + x = \pi$. Stąd

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sin(x+y) \, dx \, dy = \int_0^{\pi/2} dy \int_y^{\pi-y} \sin(x+y) \, dx = - \int_0^{\pi/2} (\cos \pi - \cos 2y) \, dy = \\ &= -(-y - \frac{1}{2} \sin 2y) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \pi. \end{aligned}$$



Rys. 33.6



Rys. 33.7

e) Korzystając m. in. z rysunku 33.7, otrzymujemy

$$A = \iint_D x^2 y \, dx \, dy = \int_{-2}^{-1} y \, dy \int_{-y^2}^{1/y} x^2 \, dx = \frac{1}{3} \int_{-2}^{-1} \left[y \left(\frac{1}{y^3} + y^6 \right) \right] dy = -\frac{251}{24}.$$

f) Korzystając z rys. 33.8 oraz z T_3 , otrzymujemy

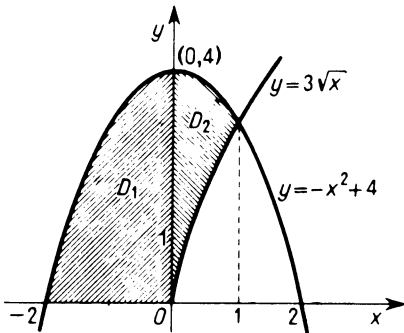
$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dx \, dy &= \iint_{D_1} xy \, dx \, dy + \iint_{D_2} xy \, dx \, dy = \\ &= \int_{-2}^0 x \, dx \int_0^{-x^2+4} y \, dy + \int_0^1 x \, dx \int_{3\sqrt{x}}^{-x^2+4} y \, dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 x(-x^2+4)^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_0^1 [x(-x^2+4)^2 - x \cdot 9x] \, dx = -\frac{15}{4}. \end{aligned}$$

33.5. Obliczyć całki:

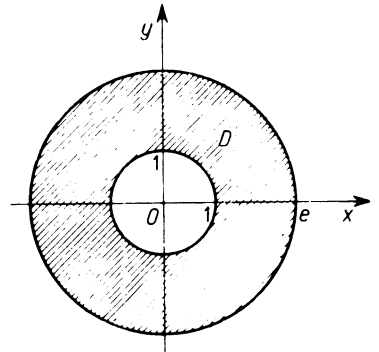
a) $\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \, dx \, dy, \quad D: \begin{cases} x^2+y^2 \leq e^2, \\ x^2+y^2 \geq 1; \end{cases}$

$$\text{b) } \iint_D \ln(1+x^2+y^2) dx dy, \quad D: \begin{cases} x^2+y^2 \leq 4, \\ x^2+y^2 \geq 1, \\ y \geq x; \end{cases}$$

$$\text{c) } \iint_D \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy, \quad D: x^2+y^2-2x \leq 0.$$



Rys. 33.8



Rys. 33.9

Rozwiązanie. Stosujemy wzór (10).

a) Korzystając m. in. z rysunku 33.9, otrzymujemy $\Delta = \{(\varphi, r) \in \mathbf{R}^2: 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 1 \leq r \leq e\}$, skąd

$$\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} dx dy = \int_1^e \frac{\ln r^2}{r^2} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \int_1^e \frac{\ln r}{r} dr = 2\pi.$$

b) Korzystając m. in. z rysunku 33.10, otrzymujemy $\Delta = \{(\varphi, r) \in \mathbf{R}^2: \frac{1}{4}\pi \leq \varphi \leq \frac{5}{4}\pi, 1 \leq r \leq 2\}$, skąd

$$\begin{aligned} \iint_D \ln(1+x^2+y^2) dx dy &= \int_1^2 \ln(1+r^2) r dr \int_{\pi/4}^{5\pi/4} d\varphi = \pi \int_1^2 \ln(1+r^2) r dr = \quad (1) \\ &= \pi \int_2^5 \ln u \frac{1}{2} du = \frac{1}{2}\pi \int_2^5 (u)' \ln u du = \\ &= \frac{1}{2}\pi [u \ln u]_2^5 - \int_2^5 du = \frac{1}{2}\pi (5 \ln 5 - 2 \ln 2 - 3). \end{aligned}$$

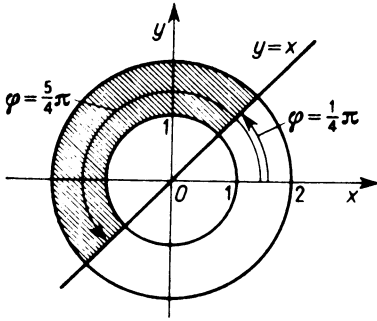
c) Z nierówności $x^2+y^2-2x \leq 0$ otrzymujemy $(x-1)^2+y^2 \leq 1$, a więc obszar D jest kołem (rys. 33.11). Zatem $\Delta = \{(\varphi, r) \in \mathbf{R}^2: -\frac{1}{2}\pi \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi, 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi\}$, skąd

$$\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy = \iint_D \sqrt{4-r^2} r dr d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} \sqrt{4-r^2} r dr = \quad (2)$$

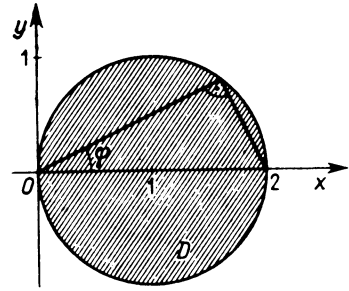
(1) Stosujemy podstawienie $u=1+r^2$, więc $r dr = \frac{1}{2} du$.

(2) Stosujemy podstawienie $u=4-r^2$, więc $r dr = -\frac{1}{2} du$.

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_4^{4\sin^2 \varphi} \sqrt{u} du = -\frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4\sin^2 \varphi \sqrt{4\sin^2 \varphi - 8}) d\varphi = \\
 &= -\frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^2 \varphi |\sin \varphi| - 1) d\varphi = \\
 &= -\frac{8}{3} \left(-\pi - \int_{-\pi/2}^0 \sin^3 \varphi d\varphi + \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi d\varphi \right) = -\frac{8}{3} \left(-\pi + 2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi d\varphi \right) = \quad (1) \\
 &= -\frac{8}{3} \left[-\pi - 2 \int_1^0 (1-z^2) dz \right] = \frac{8}{9} (3\pi - 4).
 \end{aligned}$$



Rys. 33.10



Rys. 33.11

33.6. Obliczyć całki:

a) $\iiint_V x dv$, gdzie V jest obszarem ograniczonym powierzchniami $x^2 + y^2 = -2z + 9$, $z = 0$ ($x \geq 0, y \geq 0$);

b) $\iiint_V z dv$, gdzie $V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0 \right\}$.

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzoru (3) dla $n=3$.

a) Mamy (por. rys. 33.12)

$$V = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq \frac{9}{2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\},$$

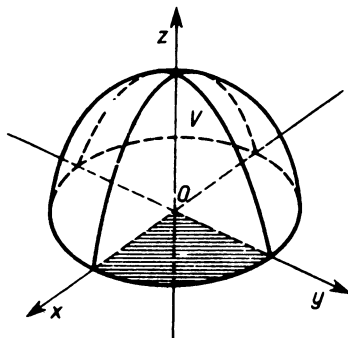
skąd

$$W = \iiint_V x dv = \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dy \int_0^{\frac{9}{2} - \frac{1}{2}(x^2+y^2)} x dz = \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} x \left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2}(x^2+y^2) \right] dy.$$

Wprowadzając współrzędne biegunowe, otrzymujemy

$$W = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^3 r \cos \varphi \left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2}r^2 \right] r dr = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \left(\frac{9}{3}r^3 - \frac{1}{3}r^5 \right) \Big|_0^3 = \frac{81}{5} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = \frac{81}{5}.$$

(1) Stosujemy podstawienie $z = \cos \varphi$, więc $-dz = \sin \varphi d\varphi$.



Rys. 33.12

b) Rzutem obszaru V na płaszczyźnie Oxy jest obszar

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}, \quad \text{zatem} \quad V : \begin{cases} -a \leq x \leq a, \\ -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \\ 0 \leq z \leq c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \end{cases}$$

Stąd

$$\begin{aligned} W &= \int_{-a}^a dx \int_{-\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}}^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} dy \int_0^{c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} z dz = \\ &= \frac{c^2}{2} \int_{-a}^a dx \int_{-\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}}^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dy = 2c^2 \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dy. \end{aligned}$$

Otrzymaną całkę obliczamy stosując uogólnione współrzędne biegunowe: $x = ar \cos t$, $y = br \sin t$. Stąd $J = abr$,

$$A = \left\{ (t, r) \in \mathbf{R}^2 : \frac{a^2 r^2 \cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2 r^2 \sin^2 t}{b^2} \leq 1 \right\} = \left\{ (t, r) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi, 0 \leq r \leq 1 \right\}.$$

A więc (por. (8))

$$W = 2c^2 \int_0^{\pi/2} dt \int_0^1 abr(1-r^2) dr = \frac{1}{4} \pi abc^2.$$

33.7. Obliczyć całki:

$$a) W = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv, \quad \text{gdzie}$$

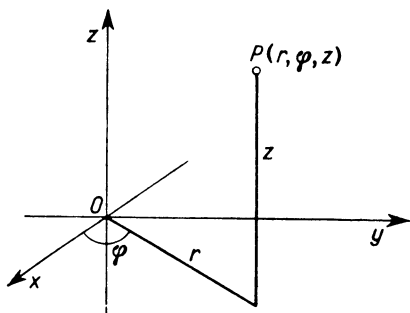
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x^2 + y^2 + z^2 \geq 1, z \geq 0\};$$

$$b) W = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z \sqrt{x^2 + y^2} dz;$$

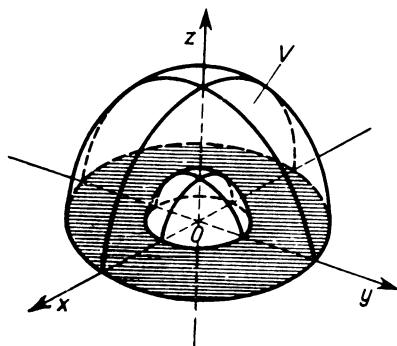
$$c) W = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dv, \quad \text{gdzie}$$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}az\}, \quad a > 0.$$

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzoru (8) dla $n=3$, przy czym w przykładach a) i c) stosujemy współrzędne sferyczne ⁽¹⁾, a w przykładzie b) stosujemy współrzędne walcowe (cylindryczne) określone wzorami (por. rys. 33.13) $x=h_1(r, \varphi, z)=r \cos \varphi$, $y=h_2(r, \varphi, z)=r \sin \varphi$, $z=h_3(r, \varphi, z)=z$, gdzie Jakobian $J=r$.



Rys. 33.13



Rys. 33.14

a) Mamy (por. rys. 33.14) $g(\bar{A})=V$ (por. (11)) ⁽¹⁾, gdzie

$$\bar{A} = \{(\varphi, \psi, r) : (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \wedge (0 \leq \psi \leq \frac{1}{2}\pi) \wedge (1 \leq r \leq 3)\}$$

oraz

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \sin^2 \psi \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \psi \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \psi = r^2.$$

Stąd

$$W = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\psi \int_1^3 r^2 \sin \psi dr = 20 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \psi d\psi = 20 \int_0^{2\pi} d\varphi = 40\pi.$$

Uwaga. We wzorze (11) przyjęliśmy $\frac{1}{2}\pi - \psi$ zamiast θ oraz r zamiast ρ .

⁽¹⁾ W odwzorowaniu sferycznym często zamiast kąta θ rozpatruje się kąt $\frac{1}{2}\pi - \theta$, dla którego mamy: $x=k_1(\varphi, \theta, \rho)=\rho \sin \theta \cos \varphi$, $y=k_2(\varphi, \theta, \rho)=\rho \sin \theta \sin \varphi$, $z=k_3(\varphi, \theta, \rho)=\rho \cos \theta$, $J=\rho^2 \sin \theta$,

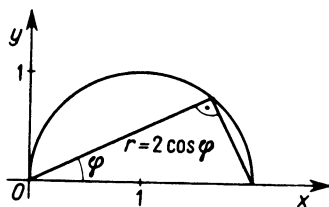
$$\bar{A}_1 = \{(\varphi, \theta, \rho) : (\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle) \wedge (\theta \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle) \wedge (\rho \in \langle 0, +\infty \rangle)\}.$$

b) Rzut obszaru V na płaszczyźnie Oxy jest obszarem ograniczonym półokręgiem $y = \sqrt{2x - x^2}$ i osią Ox (rys. 33.15). Więc

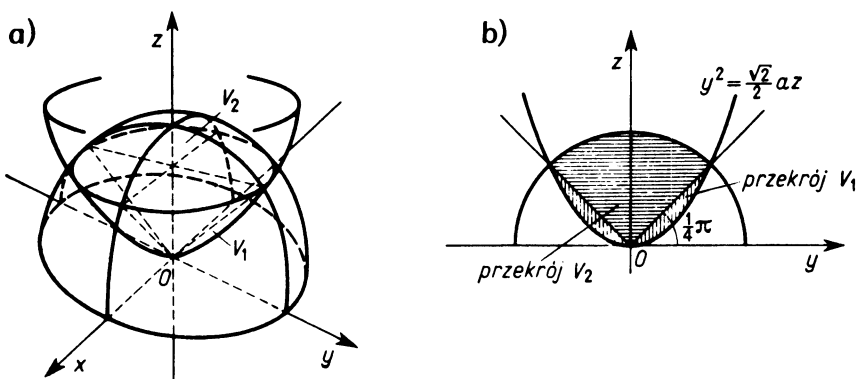
$$\bar{A}: \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi, \\ 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi, \\ 0 \leq z \leq a, \end{cases}$$

zatem

$$W = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} dr \int_0^a z r r dz = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^2 dr = \frac{1}{6} a^2 \int_0^{\pi/2} 8 \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{4}{3} a^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9} a^2.$$



Rys. 33.15



Rys. 33.16

c) Obszar V rozkładamy na dwa obszary V_1 i V_2 (rys. 33.16), stąd

$$\bar{A}_1: \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ \frac{1}{4}\pi \leq \psi \leq \frac{1}{2}\pi, \\ 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{2}}{2} a \frac{\cos \psi}{\sin^2 \psi} \end{cases} \quad \text{i} \quad \bar{A}_2: \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \psi \leq \frac{1}{4}\pi, \\ 0 \leq r \leq a. \end{cases}$$

gdzie

$$r(\varphi, \psi) = \frac{\sqrt{2} a \cos \psi}{2 \sin^2 \psi}$$

jest równaniem paraboloidy $x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \sqrt{2} az$ w układzie współrzędnych sferycznych. Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} W &= \iiint_{A_1} r^4 \sin \psi \, dm + \iiint_{A_2} r^4 \sin \psi \, dm = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\psi \int_0^{\frac{\sqrt{2} a \cos \psi}{2 \sin^2 \psi}} r^4 \sin \psi \, dr + \int_0^a r^4 \, dr \int_0^{\pi/4} \sin \psi \, d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{a^5}{5} + \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[2^{-5/2} a^5 \frac{\cos^5 \psi}{\sin^9 \psi}\right] d\psi = \\ &= \frac{\pi a^5}{5} (2 - \sqrt{2}) + \frac{a^5}{20\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{(1 - \sin^2 \psi)^2 \cos \psi}{\sin^9 \psi} d\psi. \end{aligned}$$

Podstawiamy $u = \sin \psi$, skąd $du = \cos \psi \, d\psi$, zatem

$$\int_{\pi}^{\pi/2} \frac{(1 - \sin^2 \psi)^2 \cos \psi}{\sin^9 \psi} d\psi = \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{1 - 2u^2 + u^4}{u^9} du = \frac{7}{24}.$$

A więc

$$W = \frac{\pi a^5}{5} (2 - \sqrt{2}) + \frac{a^5}{20\sqrt{2}} \cdot \frac{7}{24} 2\pi = \frac{\pi a^5 (96\sqrt{2} - 89)}{240\sqrt{2}}.$$

33.8. Obliczyć miarę zbioru

$$\bar{G}_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (\sum_{i=1}^n x_i \leq h) \wedge (x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n)\}, \quad h > 0$$

(\bar{G}_n jest tzw. *simpleksem n -wymiarowym*).

Rozwiązanie. Zbiór \bar{G}_n jest domkniętym obszarem normalnym względem osi Ox_n . Istotnie, z nierówności

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \leq h\right) \wedge (x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n)$$

otrzymujemy

$$0 \leq x_n \leq h - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1} \Rightarrow h - x_1 - \dots - x_{n-1} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq x_{n-1} \leq h - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{G}_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (0 \leq x_n \leq h - \sum_{i=1}^{n-1} x_i) \wedge$$

$$\wedge (0 \leq x_{n-1} \leq h - \sum_{i=1}^{n-2} x_i) \wedge \dots \wedge (0 \leq x_1 \leq h)\}.$$

Stąd (por. (2) i (3))

$$|\bar{G}_n| = \int_0^h dx_1 \int_0^{h-x_1} dx_2 \dots \int_0^{h-x_1-x_2-\dots-x_{n-1}} dx_n.$$

Stosując wzór (8), gdzie $x_1 = h\xi_1$, $x_2 = h\xi_2$, ..., $x_n = h\xi_n$, $J = \det [h\delta_{ij}]_{n \times n} = h^n$, otrzymujemy

$$|\bar{G}_n| = h^n \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{1-\xi_1} d\xi_2 \dots \int_0^{1-\xi_1-\xi_2-\dots-\xi_{n-1}} d\xi_n = h^n \int_{\bar{B}_n} \dots \int d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n = A_n h^n,$$

gdzie

$$\bar{B}_n = \{\xi \in \mathbb{R}^n : (\sum_{i=1}^n \xi_i \leq 1) \wedge (\xi_i \geq 0, i=1, 2, \dots, n)\}$$

oraz A_n oznacza miarę $|\bar{G}_n|$ dla $h=1$. Z kolei

$$\begin{aligned} A_n &= \int_{\bar{B}_n} \dots \int d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n = \int_0^1 d\xi_n \int_{\bar{G}_{n-1}} \dots \int d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{n-1} = \\ &= A_{n-1} \int_0^1 (1-\xi_n)^{n-1} d\xi_n = \frac{A_{n-1}}{n} \end{aligned}$$

(wykorzystaliśmy poprzedni wynik podstawiając $h=1-\xi_n$).

Z otrzymanego wzoru rekurencyjnego $A_n = \frac{A_{n-1}}{n}$ ($A_1 = \int_0^1 dx_1 = 1$), mamy

$$A_n = \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \frac{1}{n-2} \dots \frac{A_1}{2} = \frac{1}{n!}$$

stąd $|\bar{G}_n| = \frac{h^n}{n!}$.

33.9. Obliczyć miarę (objętość n -wymiarową) kuli domkniętej

$$\bar{K}_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq R^2\}.$$

Rozwiązanie. Kula $\bar{K}_n \subset \mathbb{R}^n$ jest obszarem regularnym domkniętym, zatem (por. (2))

$$|\bar{K}_n| = \int_{\bar{K}_n} 1 dm = \int_{\kappa_n} \dots \int dx_1 \dots dx_n.$$

Następnie stosujemy wzór (12), gdzie

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \{(u, v_1, \dots, v_{n-1}) \in \mathbb{R}^n : (u \in \langle 0, R \rangle) \wedge (0 \leq v_1 \leq 2\pi) \wedge \\ &\wedge (-\frac{1}{2}\pi \leq v_i \leq \frac{1}{2}\pi, i=2, \dots, n-1)\}, \quad J_g \neq 0 \quad \text{oraz} \quad g(\bar{A}) = \bar{K}_n \end{aligned}$$

(g jest odwzorowaniem sferycznym obcięty do zbioru \bar{A}). Stąd

$$\begin{aligned} |\bar{K}_n| &= \int_{\bar{K}_n} dm = \int_{\bar{A}} |J_g| dm = \int_0^R u^{n-1} du \int_0^{2\pi} dv_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v_2 dv_2 \dots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-2} v_{n-1} dv_{n-1} = \\ &= \frac{R^n}{n} 2\pi \cdot 2^{n-2} a_1 a_2 \dots a_{n-2}, \end{aligned}$$

gdzie $a_i = \int_0^{\pi/2} \cos^i x dx$, $i=1, 2, \dots, n-2$. Ale (por. zadanie 33.12r)

$$a_i = \begin{cases} \frac{(i-1)!!}{i!!} & \text{dla } i \text{ nieparzystych,} \\ \frac{(i-1)!!}{i!!} \frac{\pi}{2} & \text{dla } i \text{ parzystych.} \end{cases}$$

Skąd

$$\begin{aligned} |\bar{K}_{2m}| &= \frac{R^{2m}}{2m} 2\pi \cdot 2^{2m-2} \frac{0!!1!! \pi 2!!3!! \pi}{1!!2!! 2 3!!4!! 2 \dots (2m-3)!!(2m-2)!! 2} = \\ &= \frac{R^{2m}}{m} \pi \cdot 2^{m-1} \frac{\pi^{m-1}}{2^{m-1}} \frac{|2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2|}{(2m-2)(2m-4)\dots 2} = \frac{\pi^m}{m!} R^{2m} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} |\bar{K}_{2m+1}| &= \frac{R^{2m+1}}{2m+1} 2\pi \cdot 2^{2m-1} \frac{0!!1!! \pi 2!!3!! \pi}{1!!2!! 2 3!!4!! 2 \dots (2m-2)!! 2 (2m-1)!!} = \\ &= \frac{2^{m+1}\pi^m}{(2m+1)!!} R^{2m+1} \end{aligned}$$

W szczególności:

$$\begin{aligned} |\bar{K}_1| &= |\bar{K}_{2 \cdot 0 + 1}| = 2R && \text{(długość przedziału } \langle -R, R \rangle), \\ |\bar{K}_2| &= |\bar{K}_{2 \cdot 1}| = \pi R^2 && \text{(pole koła),} \\ |\bar{K}_3| &= |\bar{K}_{2 \cdot 1 + 1}| = \frac{4}{3}\pi R^3 && \text{(objętość kuli).} \end{aligned}$$

Zadania

33.10. Za pomocą definicji całki oznaczonej obliczyć:

$$\text{a) } \int_0^b x^2 dx; \quad \text{b) } \int_0^b \sin x dx; \quad \text{c) } \int_c^d a^x dx; \quad \text{d) } \int_a^b \frac{dx}{x^2} \quad (0 < a < b);$$

e) $\int_A c dm$, gdzie stała $c \in \mathbf{R}$ i $A \subset \mathbf{R}^n$ jest obszarem regularnym.

33.11. Udowodnić wzory (5) i (9).

33.12. Obliczyć całki:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x dx; \quad \text{b) } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 \sin x dx; \quad \text{c) } \int_1^e x^2 \ln x dx; \\ \text{d) } \int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx; \quad \text{e) } \int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}; \quad \text{f) } \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{g)} & \int_0^{\pi/4} \sin^5 x \cos^2 x \, dx; & \text{h)} & \int_1^4 \frac{x \, dx}{\sqrt{2+4x}}; & \text{i)} & \int_0^{a/2} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \, dx; \\
 \text{j)} & \int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2 \cos x}; & \text{k)} & \int_0^{3/4} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}; & \text{l)} & \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} \, dx; \\
 \text{ł)} & \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}; & \text{m)} & \int_0^{\pi/2} \sin^7 x \, dx; & \text{n)} & \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx; \\
 \text{o)} & \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx; & \text{p)} & \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx; & \text{r)} & \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx; \\
 \text{s)} & \int_0^a (a^2-x^2)^n \, dx; & \text{t)} & \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin nx \, dx.
 \end{aligned}$$

33.13. Obliczyć całki:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} & \int_1^2 \int_3^4 \frac{dx \, dy}{(x+y)^2}; & \text{b)} & \int_1^2 \int_2^5 (5x^2y-2y^3) \, dx \, dy; & \text{c)} & \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 \, dx \, dy}{1+y^2}; \\
 \text{d)} & \int_0^1 \int_0^1 \frac{y \, dx \, dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}; & \text{e)} & \int_0^1 \int_0^1 x^2 y e^{xy} \, dx \, dy; & \text{f)} & \int_0^{\pi/2} \int_0^2 x^2 y \cos(xy^2) \, dx \, dy.
 \end{aligned}$$

33.14. Znaleźć granice całkowania całki $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$ przy danym (ograniczonym)

obszarze całkowania D :

- a) trójkącie o wierzchołkach $A(1, 0)$, $O(0, 0)$, $B(1, 1)$;
 b) trójkącie o wierzchołkach $O(0, 0)$, $A(2, 1)$, $B(-2, 1)$;
 c) $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0\}$; d) $D = \{(x, y): y^2 \geq x^2, y \leq 4 - x^2\}$;
 e) $D = \{(x, y): y \geq x^2, y \leq \sqrt{x}\}$; f) $D = \{(x, y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

33.15. Zmienić kolejność całkowania w całkach:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} & \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) \, dy; & \text{b)} & \int_{-6}^2 dx \int_{\frac{1}{2}x^2-1}^{2-x} f(x, y) \, dy; \\
 \text{c)} & \int_0^r dx \int_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x, y) \, dy; & \text{d)} & \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) \, dy; \\
 \text{e)} & \int_0^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) \, dy; & \text{f)} & \int_{-7}^1 dy \int_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x, y) \, dx.
 \end{aligned}$$

33.16. Obliczyć całki:

$$a) \iint_D (x^2 + y) dx dy, \quad D: \begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = x; \end{cases}$$

$$b) \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy, \quad D: \begin{cases} y = x, \\ x = 2, \\ y = \frac{1}{x}; \end{cases} \quad c) \iint_D \cos(x+y) dx dy, \quad D: \begin{cases} y = x, \\ x = 0, \\ y = \pi; \end{cases}$$

$$d) \iint_D (x+6y) dx dy, \quad D: \begin{cases} y = x, \\ y = 5x, \\ x = 1; \end{cases} \quad e) \iint_D \sqrt{4x^2 - y^2} dx dy, \quad D: \begin{cases} y = 0, \\ x = 1, \\ y = x; \end{cases}$$

$$f) \iint_D x^3 y^2 dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq R^2; \quad g) \int_1^2 dy \int_0^{\ln y} e^x dx;$$

$$h) \iint_D y^2 dx dy, \text{ gdzie obszar } D \text{ ograniczony jest osią } Ox \text{ i łukiem cykloidy } x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

33.17. Obliczyć całki:

$$a) \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \ln(1 + x^2 + y^2) dy; \quad b) \iint_D (h - 2x - 3y) dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq R^2;$$

$$c) \iint_D \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}} dx dy, \quad D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0; \end{cases}$$

$$d) \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy, \quad D: \begin{cases} x^2 + y^2 - Rx \leq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

33.18. Obliczyć całki:

$$a) \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x+y+z) dz; \quad b) \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1+x+y+z}};$$

$$c) \iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}, \text{ gdzie obszar } V \text{ jest ograniczony płaszczyznami: } x=0, y=0,$$

$$z=0 \text{ i } x+y+z=1.$$

$$d) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xyz dz; \quad e) \int_0^{e-1} dx \int_0^{e-x-1} dy \int_c^{x+y+e} \frac{\ln(z-x-y)}{(x-e)(x+y-e)} dz;$$

f) $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dv$, gdzie obszar V ograniczony jest powierzchniami $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$;

g) $\iiint_V y \cos(x + z) dv$, gdzie obszar V ograniczony jest powierzchniami $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $z = 0$, $x + z = \frac{1}{2}\pi$.

33.19. Obliczyć całki:

$$\text{a) } \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz; \quad \text{b) } \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz;$$

$$\text{c) } \iiint_V (x^2 + y^2) dv, \quad \text{gdzie } V: \begin{cases} r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \\ z \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{d) } \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv, \quad \text{gdzie } V: x^2 + y^2 + z^2 \leq x;$$

$$\text{e) } \iiint_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dv, \quad \text{gdzie } V: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

33.20. Obliczyć:

$$\text{a) } \iiint_V dx_1 dx_2 dx_3 dx_4, \quad V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| < a\}.$$

$$\text{b) } \int_V x_1^{2n} dm, \quad V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : (\sum_{i=1}^4 x_i^2 \leq a) \wedge (x_i \geq 0, i=1, 2, 3, 4)\};$$

$$\text{c) } \int_U \sqrt{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} dm,$$

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5 : (\sum_{i=1}^5 x_i \leq 1) \wedge (x_i \geq 0, i=1, 2, 3, 4, 5)\};$$

$$\text{d) } \int_V \sqrt{1 + \sum_{i=1}^5 x_i^2} dm, \quad V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5 : 1 \leq \sum_{i=1}^5 x_i^2 \leq 4\}.$$

33.21. Obliczyć:

$$\text{a) } \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} x_1 x_2 \dots x_n dx_n;$$

$$\text{b) } \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \dots \int_0^1 (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + x_2 x_4 + \dots + x_{n-1} x_n) dx_n;$$

$$\text{c) } \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \dots \int_0^1 (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 dx_n; \quad \text{d) } \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \dots \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i^2 dx_n.$$

33.22. Obliczyć miarę zbioru

$$\bar{W}_n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1, a_i > 0, i=1, 2, \dots, n \right\}.$$

33.23. Znaleźć miarę zbioru

$$A = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{i} \leq 1 \right) \wedge (x_i \geq 0, i=1, 2, \dots, n) \right\}.$$

33.24. Udowodnić wzór $V_n(R) = R^n U_n$, gdzie

$$V_n(R) = \int \dots \int_G dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

$$G = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq R^2, R \in \mathbf{R}_+ \}, \quad U_n = V(1).$$

33.25. Udowodnić twierdzenie o wartości średniej dla całek: jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze regularnym domkniętym $\bar{A} \subset \mathbf{R}^n$, to $\int_{x_0 \in \bar{A}} f dm = |\bar{A}| f(x_0)$.

Odpowiedzi

33.10. a) $\frac{1}{3}b^3$; b) wsk. por. 2.14h, $1 - \cos b$;

c) wsk. por. przykład 33.1b, $\frac{1}{\ln a}(a^d - a^c)$;

d) wsk. przyjąć $x'_i = \sqrt{x_{i-1} x_i}$; $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$; e) $c|A|$.

33.12. a) $\frac{\pi}{8}$; b) 0; c) $\frac{2e^3 + 1}{9}$; d) $1 - 2 \ln 2$;

e) $\frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}$; f) $\frac{\pi a^2}{4}$; g) $\frac{64\sqrt{2} - 71}{840\sqrt{2}}$; h) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$;

i) $\frac{a}{6}(\pi + 6 - 3\sqrt{3})$; j) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; k) $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{9 + 4\sqrt{2}}{7}$; l) $2 - \frac{\pi}{2}$;

l) $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}$; m) $\frac{16}{35}$; n) 0 dla $m \neq n \wedge m \neq -n$, π dla $m = n$ i $-\pi$ dla $m = -n$;

o) 0 dla $m \neq n \wedge m \neq -n$, π dla $m = n$ i $-\pi$ dla $m = -n$;

p) $\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2}$ dla $n = 2k$, $\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$ dla $n = 2k+1$, przy czym $0!! = 1$, $1!! = 1$,

$i!! = i(i-2)!!$ dla $i > 1$;

r) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$;

s) wsk. podstawić $x = a \sin t$ oraz skorzystać z zadania 33.12r,

$$a^{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!};$$

t) wyprowadzić najpierw następujący wzór rekurencyjny:

$$A_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + A_{n-1} \right), \quad \text{gdzie} \quad A_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin nx \, dx;$$

$$A_n = \frac{1}{2^{n+1}} \left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \dots + \frac{2^n}{n} \right).$$

33.13. a) $\ln \frac{25}{24}$; b) -182 ; c) $\frac{1}{12}\pi$; d) $\ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$; e) $3-e$; f) $-\frac{1}{16}\pi$.

33.14. a) $\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx$;

b) $\int_{-2}^2 dx \int_{\frac{1}{2}|x|}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx$;

c) $\int_0^5 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^5 dy \int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx$;

d) $\int_{(1-\sqrt{17})/2}^{(-1+\sqrt{17})/2} dx \int_{|x|}^{4-x^2} f(x, y) dy =$

$$= \int_0^{(-1+\sqrt{17})/2} dy \int_{-y}^y f(x, y) dx + \int_{(-1+\sqrt{17})/2}^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x, y) dx$$
;

e) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$;

f) $A = \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \left[\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \right] +$

$$+ \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy = B,$$

gdzie B powstaje z A przez podstawienie y zamiast x w granicach całkowania, dy zamiast dx i dx zamiast dy .

33.15. a) $\int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x, y) dx$;

b) $\int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x, y) dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x, y) dx$; c) $\int_0^r dy \int_{r-\sqrt{r^2-y^2}}^y f(x, y) dx$;

d) $\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx$;

e) $\int_0^1 dy \int_{ey}^e f(x, y) dx$; f) $\int_{-2}^6 dx \int_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f(x, y) dy$.

33.16. a) $\frac{33}{140}$; b) $\frac{9}{4}$; c) -2 ; d) $\frac{76}{3}$; e) $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{3}\pi)$; f) 0 ; g) $\frac{1}{2}$; h) $\frac{35}{12}\pi a^4$.

33.17. a) $\frac{1}{4}\pi[(1+R^2)\ln(1+R^2)-R^2]$; b) $\pi R^2 h$; c) $\frac{1}{8}\pi(\pi-2)$; d) $\frac{1}{3}R^3(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{3})$.

33.18. a) $\frac{1}{2}abc(a+b+c)$; b) $\frac{8}{15}(31+12\sqrt{2}-27\sqrt{3})$; c) $\frac{1}{2}(\ln 2 - \frac{5}{8})$;

d) $\frac{1}{720}$; e) $2e-5$; f) $\frac{1}{6}\pi$; g) $\frac{1}{16}\pi^2 - \frac{1}{2}$.

33.19. a) $\frac{1}{2}\pi a$; b) $\frac{1}{8}\pi$; c) $\frac{4}{15}\pi(R^5-r^5)$; d) $\frac{1}{10}\pi$; e) $\frac{1}{4}\pi^2 abc$.

33.20. a) $\frac{2}{3}a^4$; b) $\frac{\pi^2 a^{2n+4}(2n-1)!!}{8(n+2)(2n+2)!!}$; c) $\frac{1}{132}$;

d) $\frac{16}{43}\pi^2(33\sqrt{33}-2\sqrt{2})$.

33.21. a) $\frac{1}{n!2^n}$; b) $\frac{n(n-1)}{8}$; c) $\frac{n(3n+1)}{12}$; d) $\frac{n}{3}$.

33.22. $|\bar{W}_n| = a_1 a_2 \dots a_n V_n(1)$, gdzie $V_n(1)$ jest miarą kuli o promieniu 1 (por. przykład 33.9). Wsk. Por. przykład 33.8.

33.23. 1. 33.25. Wsk. Por. T_5 § 20.

§ 34. CAŁKI POJEDYNCZE NIEWŁAŚCIWE; ZASTOSOWANIA GEOMETRYCZNE CAŁEK POJEDYNCZYCH

34.1. Niech $\bigvee_a \bigwedge_{b>a} f \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$. Jeżeli istnieje granica $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$, to nazywamy ją *całką niewłaściwą funkcji f na $\langle a, +\infty \rangle$* i piszemy

$$(1) \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Jeżeli granica w (1) istnieje, to mówimy też, że *całka $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ jest zbieżna*; w przeciwnym przypadku mówimy, że *całka jest rozbieżna*. Podobnie definiujemy i nazywamy całki funkcji f i g , jeżeli $\bigvee_b \bigwedge_{a<b} f \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$, oraz $\bigwedge_{a,b \in \mathbb{R}} g \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$. Otóż

$$(2) \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \int_{-\infty}^a g(x) dx + \int_a^{+\infty} g(x) dx, \quad a \in \mathbb{R},$$

jeżeli istnieje granica po prawej stronie wzoru (2) oraz istnieją obie całki po prawej stronie wzoru (3).

Niech $f \in \mathcal{R}(\langle a, b-\eta \rangle)$, gdzie $0 < \eta < b-a$ i f nieograniczona na przedziale $\langle b-\eta, b \rangle$.

Jeżeli istnieje granica $\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_a^{b-\eta} f(x) dx$, to nazywamy ją *całką niewłaściwą funkcji f na*

$\langle a, b \rangle$ i piszemy

$$(4) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_a^{b-\eta} f(x) dx.$$

Jeżeli istnieje granica (4), to mówimy, że całka (4) jest zbieżna; w przeciwnym przypadku mówimy, że całka jest rozbieżna.

Podobnie określamy całkę funkcji f , gdzie $f \in \mathcal{R}(\langle a+\varepsilon, b \rangle)$, $0 < \varepsilon < b-a$ i f jest nieograniczona na $\langle a, a+\varepsilon \rangle$. Otóż

$$(5) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx,$$

jeżeli granica po prawej stronie wzoru (5) istnieje.

Jeżeli $(f \in \mathcal{R}(\langle a, c-\eta \rangle), 0 < \eta < c-a) \wedge (f \in \mathcal{R}(\langle c+\varepsilon, b \rangle), 0 < \varepsilon < b-c)$ i f nieograniczona na sąsiedztwie punktu c , to

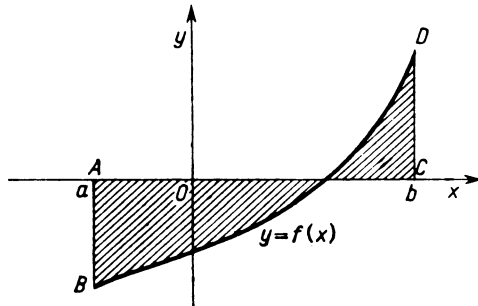
$$(6) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

jeżeli obie całki po prawej stronie wzoru (6) istnieją.

T₁. Jeżeli $\bigwedge_{x \geq a} (0 < f(x) \leq g(x))$, to z rozbieżności całki $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ wynika rozbieżność całki $\int_a^{+\infty} g(x) dx$. Jeżeli $\bigwedge_{x \geq a} (0 \leq f(x) \leq g(x))$, to ze zbieżności całki $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ [$\int_a^b g(x) dx$], wynika zbieżność całki $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ [$\int_a^b f(x) dx$] ⁽¹⁾.

34.2. Jeżeli $f \in C^0(\langle a, b \rangle)$, to pole $|D|$ figury ograniczonej wykresem funkcji f , osią Ox i odcinkami AB i CD (rys. 34.1) określone jest wzorem

$$(7) \quad |D| = \int_a^b |f(x)| dx.$$



Rys. 34.1

⁽¹⁾ Całki w nawiasach kwadratowych są typu (4) lub (5).

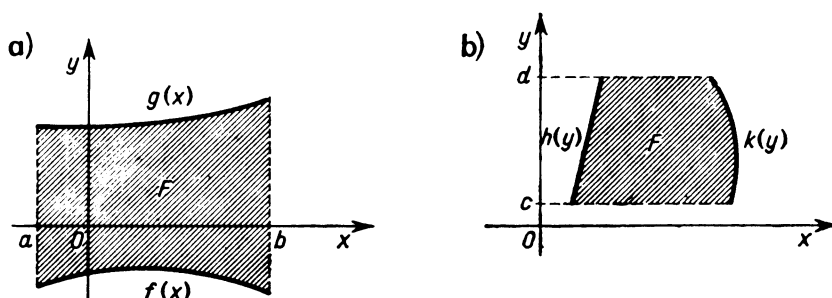
Jeżeli

$$F = \{(x, y) : (a \leq x \leq b) \wedge (f(x) \leq y \leq g(x), f, g \in C^0(\langle a, b \rangle))\}$$

$$[F = \{(x, y) : (c \leq y \leq d) \wedge (h(y) \leq x \leq k(y), h, k \in C^0(\langle c, d \rangle))\}],$$

to (rys. 34.2a) [rys. 34.2b]

$$(8) \quad |F| = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \quad [|F| = \int_c^d (k(y) - h(y)) dy].$$



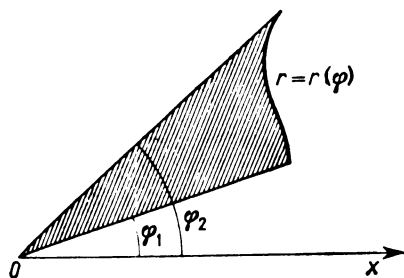
Rys. 34.2

W przypadku gdy $f(x) \equiv 0$ na $\langle a, b \rangle$ i funkcja g określona jest równaniami parametrycznymi $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, przy czym $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$, to

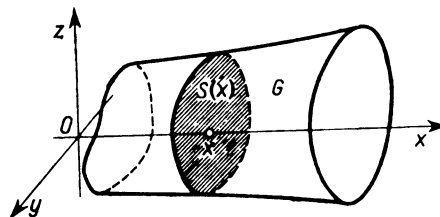
$$(9) \quad |F| = \int_{t_1}^{t_2} |y(t) x'(t)| dt.$$

Pole $|D|$ figury na rys. 34.3 określone jest wzorem

$$(10) \quad |D| = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi, \quad \text{gdzie } r \in C^0(\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle), \quad \varphi_2 - \varphi_1 < 2\pi.$$



Rys. 34.3

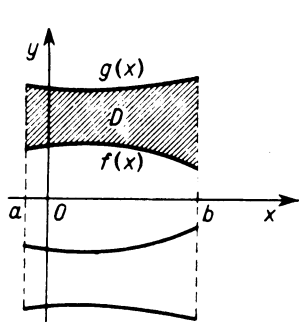


Rys. 34.4

Objętość $|V|$ zbioru G (rys. 34.4) określona jest wzorem

$$(11) \quad |V| = \int_a^b S(x) dx, \quad S \in C^0(\langle a, b \rangle),$$

gdzie $\bigwedge_{x \in \langle a, b \rangle} S(x)$ jest polem przekroju zbioru G płaszczyzną prostopadłą do osi Ox w punkcie $x \in Ox$. W szczególności, jeżeli G powstaje przez obrót krzywej o równaniu $y=f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$ dookoła osi Ox (¹), to



Rys. 34.5

$$(12) \quad |V| = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Objętość figury utworzonej przez obrót obszaru

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b \wedge (0 \leq f(x) \leq y \leq g(x), f, g \in C^0(\langle a, b \rangle))\}$$

(rys. 34.5) dookoła osi Ox określona jest wzorem

$$(13) \quad |V| = \pi \int_a^b (g^2(x) - f^2(x)) dx.$$

Jeżeli krzywa K określona jest: α) równaniem $y=f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, β) równaniami $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, γ) równaniem $r=r(\varphi)$, $\varphi \in \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$, gdzie funkcje f , x , y , $r \in C^1$ na swoich dziedzinach, to długość łuku L krzywej K określona jest wzorami:

$$(14) \quad L = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)} dx,$$

$$(15) \quad L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

$$(16) \quad L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi.$$

Pole $|P|$ powierzchni, powstałej przez obrót krzywej K określonej w punktach α) i β) dookoła osi Ox określone jest wzorami:

$$(17) \quad |P| = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+f'^2(x)} dx,$$

$$(18) \quad |P| = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |y(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Przykłady

34.1. Obliczyć (jeżeli istnieją) całki:

$$a) \int_a^{+\infty} x^p dx \quad (a > 0); \quad b) \int_{-\infty}^0 \sin x dx; \quad c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} \quad (a > 0);$$

(¹) Przyjmujemy, że podstawami bryły są okręgi o promieniach $|f(a)|$ i $|f(b)|$.

$$d) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{3x+1}; \quad e) \int_0^{+\infty} e^{-mx} \sin kx \quad (m > 0).$$

Rozwiązanie. W przykładach a), d) i e) korzystamy ze wzoru (1), w przykładzie b) – ze wzoru (2) oraz w przykładzie c) – ze wzoru (3).

a) Rozróżniamy dwa przypadki:

$$\alpha) p = -1; \quad \int_a^{+\infty} x^{-1} dx = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln a) = +\infty,$$

zatem całka jest rozbieżna;

$$\beta) p \neq -1; \quad \int_a^{+\infty} x^p dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b x^p dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_a^b = \frac{1}{p+1} \lim_{b \rightarrow +\infty} (b^{p+1} - a^{p+1}) =$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{dla } p > -1, \quad \text{tzn. całka jest rozbieżna,} \\ -\frac{a^{p+1}}{p+1} & \text{dla } p < -1, \quad \text{tzn. całka jest zbieżna.} \end{cases}$$

b) $\int_{-\infty}^0 \sin x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \sin x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} (-\cos x) \Big|_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (\cos a - 1)$, a więc całka jest rozbieżna, ponieważ nie istnieje granica $\lim_{a \rightarrow -\infty} \cos a$.

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \int_{-\infty}^d \frac{dx}{x^2+a^2} + \int_d^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^d \frac{dx}{x^2+a^2} + \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_d^c \frac{dx}{x^2+a^2} =$$

$$= \lim_{b \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right) \Big|_b^d + \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right) \Big|_d^c =$$

$$= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{d}{a} - \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{d}{a} + \frac{\pi}{2a} + \frac{\pi}{2a} = \frac{\pi}{a},$$

czyli całka jest zbieżna.

$$d) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{3x+1} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \ln(3x+1) \Big|_0^b = +\infty, \quad \text{a więc całka jest rozbieżna.}$$

$$e) \int_0^{+\infty} e^{-mx} \sin kx dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-mx} \sin kx dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{m \sin kx + k \cos kx}{m^2 + k^2} e^{-mx} \right) \Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{m \sin kb + k \cos kb}{m^2 + k^2} e^{-mb} + \frac{k}{m^2 + k^2} \right) = \frac{k}{m^2 + k^2},$$

ponieważ funkcja określona wzorem $g(b) = -\frac{m \sin kb + k \cos kb}{m^2 + k^2}$ jest ograniczona oraz $\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-mb} = 0$ ($m > 0$).

34.2. Obliczyć (jeżeli istnieją) całki:

$$\text{a) } \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}; \quad \text{b) } \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}; \quad \text{c) } \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5-x}};$$

$$\text{d) } \int_0^3 \frac{dx}{x^2-4x+3}; \quad \text{e) } \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (a < b); \quad \text{f) } \int_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx.$$

Rozwiązanie. a) Funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ jest całkowna na każdym przedziale $(1+a, 2)$, $0 < a < 1$ oraz $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$. Zatem (por. wzór (5))

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{1+a}^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\frac{-1}{x-1} \right]_{1+a}^2 = -\lim_{a \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{a} \right) = +\infty,$$

czyli całka jest rozbieżna.

b) Analogicznie jak w punkcie a) mamy $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} = +\infty$, stąd

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{1+a}^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = 2 \lim_{a \rightarrow 0^+} \sqrt{\ln x} \Big|_{1+a}^e = 2 \lim_{a \rightarrow 0^+} (1 - \sqrt{\ln(a+1)}) = 2,$$

zatem całka jest zbieżna.

c) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{\sqrt{5-x}} = +\infty$, stąd (por. wzór (4))

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5-x}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_2^{5-a} \frac{dx}{\sqrt{5-x}} = -2 \lim_{a \rightarrow 0^+} \sqrt{5-x} \Big|_2^{5-a} = -2 \lim_{a \rightarrow 0^+} (\sqrt{a} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}.$$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2-4x+3} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2-4x+3} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x^2-4x+3} = -\infty$,

stąd (por. wzór (6))

$$\int_0^3 \frac{dx}{x^2-4x+3} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+3} + \int_1^3 \frac{dx}{x^2-4x+3} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{1-a} \frac{dx}{(x-1)(x-3)} + \lim_{b \rightarrow 0^+} \int_{1+b}^2 \frac{dx}{(x-1)(x-3)} + \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_2^{3-c} \frac{dx}{(x-1)(x-3)} = \\
&= \frac{1}{2} \left(\lim_{a \rightarrow 0^+} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| \Big|_0^{1-a} + \lim_{b \rightarrow 0^+} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| \Big|_{1+b}^2 + \lim_{c \rightarrow 0^+} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| \Big|_2^{3-c} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\lim_{a \rightarrow 0^+} \ln \left| \frac{-a-2}{-a} \right| - \ln 3 + \ln 1 - \lim_{b \rightarrow 0^+} \ln \left| \frac{b-2}{b} \right| + \lim_{c \rightarrow 0^+} \ln \left| \frac{-c}{2-c} \right| - \ln 1 \right).
\end{aligned}$$

Ponieważ $\lim_{a \rightarrow 0^+} \ln \left| \frac{-a-2}{-a} \right| = +\infty$, zatem nie istnieje całka $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)(x-3)}$, a więc całka $\int_0^3 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ jest rozbieżna.

e) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = +\infty$, stąd

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \lim_{d \rightarrow 0^+} \int_{a+d}^c \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} + \lim_{e \rightarrow 0^+} \int_c^{b-e} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},$$

gdzie $a < c < b$. Ale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = -\arcsin \frac{-2x+a+b}{b-a},$$

zatem

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} &= - \left[\arcsin \frac{a+b-2c}{b-a} - \lim_{d \rightarrow 0^+} \arcsin \frac{a+b-2a-2d}{b-a} + \right. \\
&\quad \left. + \lim_{e \rightarrow 0^+} \arcsin \frac{a+b-2b+2e}{b-a} - \arcsin \frac{a+b-2c}{b-a} \right] = \\
&= -[\arcsin(-1) - \arcsin 1] = \pi.
\end{aligned}$$

f) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} = -\infty$, stąd

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx &= \int_{-1}^0 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx + \int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-a} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx + \lim_{b \rightarrow 0^+} \int_b^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx = \\
&= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(3\sqrt[3]{x} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) \Big|_{-1}^{-a} + \lim_{b \rightarrow 0^+} \left(3\sqrt[3]{x} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) \Big|_b^1.
\end{aligned}$$

Ponieważ $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = +\infty$, zatem całka $\int_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx$ jest rozbieżna.

34.3. Z badać zbieżność całek:

$$\text{a) } \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1} dx; \quad \text{b) } \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^3+1} dx; \quad \text{c) } \int_2^{+\infty} \frac{x+3}{\sqrt[3]{x^4-1}} dx; \quad \text{d) } \int_1^e \frac{dx}{x^2 \sqrt{\ln x}}.$$

Rozwiązanie. Korzystamy z T_1 .

a) Ponieważ $f(x) = \frac{x^2}{x^4+x^2+1} > 0$ i $\frac{x^2}{x^4+x^2+1} < \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$ dla $x \geq 1$, więc ze zbieżności całki $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ (por. przykład 34.1a) wynika zbieżność całki $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+x^2+1}$.

b) Ponieważ $\frac{\sin^2 x}{x^3+1} \leq \frac{1}{x^3+1}$ dla $x \geq 1$ oraz całka $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$ jest zbieżna (por. zadanie 34.12g), więc badana całka jest zbieżna.

c) Dla $x \geq 2$ mamy $\frac{x+3}{\sqrt[3]{x^4-1}} > \frac{x}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{x^{1/3}} > 0$. Ale całka $\int_2^{+\infty} x^{-1/3} dx$ jest rozbieżna (por. przykład 34.1a), zatem badana całka jest również rozbieżna.

d) Jeżeli $x > 1$, to $x^2 > x$, stąd $0 < \frac{1}{x^2 \sqrt{\ln x}} < \frac{1}{x \sqrt{\ln x}}$, czyli całka $\int_1^e \frac{dx}{x^2 \sqrt{\ln x}}$ jest zbieżna, ponieważ całka $\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$ jest zbieżna (por. przykład 34.2b).

34.4. Obliczyć pola figur ograniczonych krzywymi o równaniach:

a) $x^2 = 4ay$, $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ ($a > 0$); b) elipsą o półosiach a i b ;

c) $y = -x^2 + 4x - 3$ i stycznymi do krzywej w punktach $A(3, 0)$ i $B(0, -3)$;

d) $y^2 = x^2 - x^4$.

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzoru (8), przy czym w każdym z przykładów w celu znalezienia granic całkowania narysujemy dane krzywe.

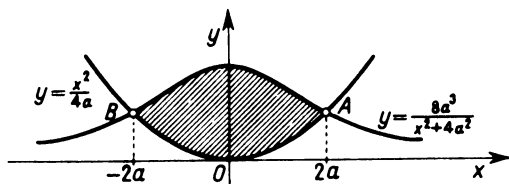
a) Znajdujemy odcięte punktów A i B (rys. 34.6). Otóż

$$\frac{x^2}{4a} = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2} \Rightarrow (x_B = -2a, x_A = 2a).$$

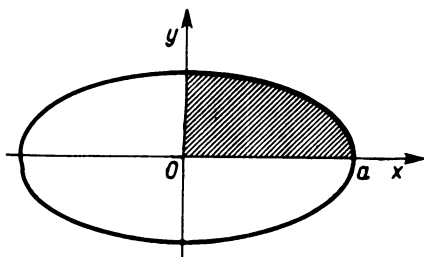
Ponieważ obszar ograniczony danymi krzywymi jest symetryczny względem osi Oy , więc

$$\frac{1}{2}|S| = \int_0^{2a} \left(\frac{8a^3}{x^2+4a^2} - \frac{x^2}{4a} \right) dx = \left(4a^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2a} - \frac{x^3}{12a} \right) \Big|_0^{2a} = a^2 \left(\pi - \frac{2}{3} \right),$$

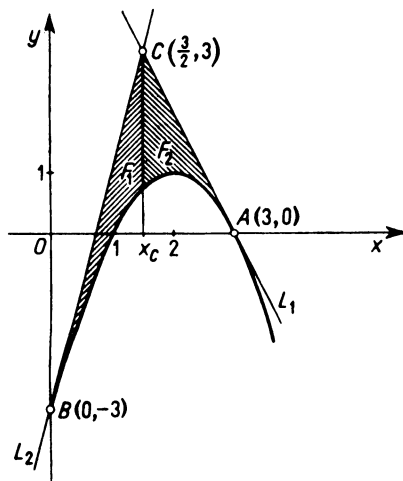
stąd $|S| = \frac{2}{3}a^2(3\pi - 2)$.



Rys. 34.6



Rys. 34.7



Rys. 34.8

b) Z równania elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ otrzymujemy $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, gdzie $0 \leq x \leq a$ (rys. 34.7). Stąd

$$\frac{1}{2}|S| = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left(\frac{1}{2} ab \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + \frac{b}{2a} x \sqrt{a^2 - x^2} \right) \Big|_0^a = \frac{1}{2} ab \operatorname{arcsin} 1 = \frac{1}{4} \pi ab,$$

zatem $|S| = \pi ab$.

c) Równania stycznych do wykresu funkcji $f: \mathbf{R} \ni x \rightarrow (-x^2 + 4x - 3) \in \mathbf{R}$ w punktach A i B (rys. 34.8):

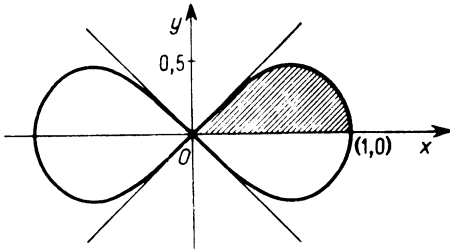
$$L_1: y = -2x + 6, \quad L_2: y = 4x - 3.$$

Z kolei odcięta punktu C $x_C = \frac{3}{2}$. Poszukiwane pole jest sumą pól $|S_1|$ i $|S_2|$ figur F_1 i F_2 (rys. 34.8), zatem

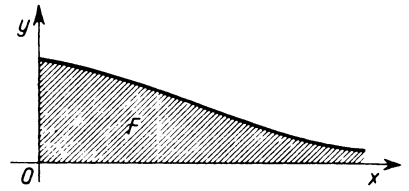
$$|S| = \int_0^{3/2} [4x - 3 - (-x^2 + 4x - 3)] dx + \int_{3/2}^3 [-2x + 6 - (-x^2 + 4x - 3)] dx = \frac{9}{4}.$$

d) Z równania $y^2 = x^2 - x^4$ otrzymujemy $y = f_{1,2}(x) = \mp |x| \sqrt{1 - x^2}$, gdzie $|x| \leq 1$. Zatem (por. rys. 34.9) figura F , której pola poszukujemy, jest symetryczna względem osi układu, stąd

$$\frac{1}{4}|S| = \int_0^1 x \sqrt{1 - x^2} dx = -\frac{1}{3}(1 - x^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}, \quad \text{czyli} \quad |S| = \frac{4}{3}.$$



Rys. 34.9



Rys. 34.10

34.5. Z badać, czy istnieje pole obszaru F ograniczonego krzywymi o równaniach

$$f(x) = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}, \quad y = 0, \quad x = 0 \quad (a > 0).$$

Rozwiązanie. Obszar F jest nieograniczony (por. rys. 34.10), zatem jego pole będzie istniało wtedy, gdy będzie istniała całka niewłaściwa

$$\int_0^{+\infty} \frac{8a^3 dx}{x^2 + 4a^2}.$$

Ale

$$\int_0^{+\infty} \frac{8a^3 dx}{x^2 + 4a^2} = 2\pi a^2$$

a więc istnieje pole obszaru F i równa się $2\pi a^2$.

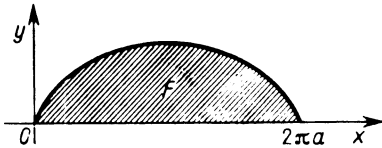
34.6. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi o równaniach ($a > 0$)

- $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, $y = 0$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$;
- $x(t) = a \cos^3 t$, $y(t) = a \sin^3 t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$;
- $r(\varphi) = a$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$;
- $r(\varphi) = a\varphi$, $\varphi \in \langle 0, \varphi_0 \rangle$;
- $r^2(\varphi) = a^2 \cos 2\varphi$, $\varphi \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$.

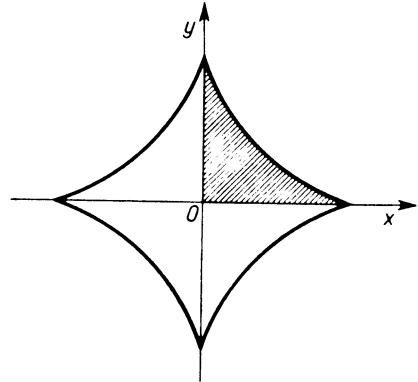
Rozwiązanie. W punktach a) i b) korzystamy ze wzoru (9), który jest również słuszny w przypadku, gdy krzywa $K: x=x(t), y=y(t), t_1 \leq t \leq t_2$ jest krzywą zamkniętą nie przecinającą się ze sobą. W punktach c), d) i e) skorzystamy ze wzoru (10).

a) Obszar F (rys. 34.11) ograniczony jest osią Ox i jednym łukiem cycloidy (por. 28.3j). Stąd

$$\begin{aligned} |F| &= \int_0^{2\pi} |a(1 - \cos t) a(1 - \cos t)| dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \\ &= a^2 (t - 2 \sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2. \end{aligned}$$



Rys. 34.11



Rys. 34.12

b) Należy znaleźć pole obszaru ograniczonego asteroidą (por. 28.3k oraz rys. 34.12). Otóż

$$|F| = 4 \int_0^{\pi/2} |a \sin^3 t (-3a \cos^2 t \sin t)| dt = 12a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos^2 t dt = 12a^2 \int_0^{\pi/2} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt.$$

Ale $\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x dx = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 3 \cdot 1}{2k(2k-2)\dots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$ (por. 33.12p), więc

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 t dt = \frac{3}{16}\pi \quad \text{i} \quad \int_0^{\pi/2} \sin^6 t dt = \frac{5}{32}\pi,$$

stąd

$$|F| = 12a^2 \left(\frac{3}{16}\pi - \frac{5}{32}\pi \right) = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

c) $|S| = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \varphi \Big|_0^{2\pi} = \pi a^2.$

d) $|S| = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_0} a^2 \varphi^2 d\varphi = \frac{1}{6} a^2 \varphi^3 \Big|_0^{\varphi_0} = \frac{1}{6} a^2 \varphi_0^3.$

e) $|S| = \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} a^2.$

34.7. Znaleźć objętości brył powstałych przez obrót dookoła osi Ox krzywych:

a) elipsy o półosiach a i b leżących na osiach układu;

b) $f(x) = \sin x$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$; c) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $0 \leq x \leq a$;

d) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $0 \leq x \leq \frac{1}{4}\pi$; e) $f(x) = \ln x$, $1 \leq x \leq e$.

Rozwiązanie. Stosujemy wzór (12).

a) Z równania elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ mamy $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, $|x| \leq a$. Stąd

$$|V| = \pi \int_{-a}^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi ab^2.$$

W szczególności, jeżeli $a = b$ otrzymujemy objętość kuli $V_k = \frac{4}{3}\pi a^3$.

$$b) |V| = \pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\pi \left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\pi^2.$$

$$c) |V| = \pi \int_0^a \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\pi \left(\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x}\right) \Big|_0^a = \frac{1}{8}\pi (e^{2a} + 4a - e^{-2a}).$$

$$d) |V| = \pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x dx = \pi (\operatorname{tg} x - x) \Big|_0^{\pi/4} = \pi \left(1 - \frac{1}{4}\pi\right).$$

$$e) |V| = \pi \int_1^e \ln^2 x dx = \pi [x(\ln^2 x - 2\ln x + 2)] \Big|_1^e = \pi(e - 2).$$

34.8. Znaleźć objętości brył powstałych przez obrót dookoła osi Ox obszarów płaskich ograniczonych krzywymi o równaniach:

a) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3x - 1$; b) $x^2 + (y - a)^2 = r^2$ ($0 < r < a$).

Rozwiązanie. Stosujemy wzór (13).

$$a) |V| = \pi \int_1^2 [(3x - 1)^2 - (x^2 + 1)^2] dx = \pi \left(\frac{7}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^5 - 3x^2\right) \Big|_1^2 = \frac{17}{15}\pi \text{ (por. rys. 34.13)}$$

b) Powierzchnia otrzymana przez obrót okręgu $x^2 + (y - a)^2 = r^2$ dookoła osi Ox jest torusem (por. rys. 34.14 oraz 16.4). Ponieważ $f_1(x) = a - \sqrt{r^2 - x^2}$ i $f_2(x) = a + \sqrt{r^2 - x^2}$ dla $|x| \leq r$ (por. rys. 34.14), więc

$$|V| = \pi \int_{-r}^r [(a + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (a - \sqrt{r^2 - x^2})^2] dx = 4\pi a \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2\pi^2 ar^2$$

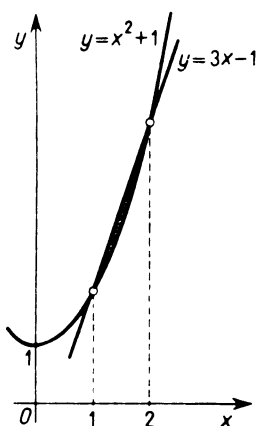
(wartość całki $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$ jest połową pola koła o promieniu r).

34.9. Znaleźć objętość bryły ograniczonej powierzchnią elipsoidy trójosiowej o równaniu

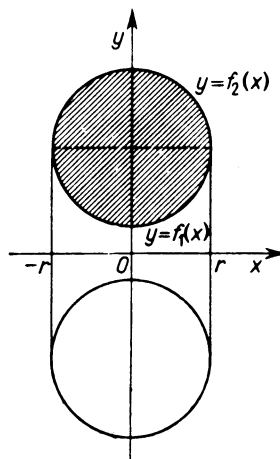
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Rozwiązanie. Płaszczyzna prostopadła do osi Ox i przechodząca przez punkt $M(x) \in Ox$ ($|x| < a$), przecina powierzchnię elipsoidy wzdłuż elipsy, której równanie rzutu na płaszczyźnie Oyz jest następujące:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Rys. 34.13



Rys. 34.14

($x = \text{const}$). Zatem pole przekroju $S(x) = \frac{\pi bc}{a^2} (a^2 - x^2)$ dla $|x| \leq a$ (por. przykład 34.4b).

Stąd, korzystając ze wzoru (11) otrzymujemy

$$|V| = \frac{\pi bc}{a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi abc.$$

34.10. Obliczyć długości łuków krzywych określonych równaniami:

a) $f(x) = \frac{1}{2}a(e^{x/a} + e^{-x/a}) = a \cosh \frac{x}{a}$, $0 \leq x \leq a$;

b) $f(x) = \frac{1}{3}(x - 3a)\sqrt{\frac{x}{a}}$ ($a > 0$), $0 \leq x \leq x_0$;

c) $f(x) = 2a \ln \frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} - 4\sqrt{ax}$, $0 \leq x \leq x_0$ ($a > x_0$);

d) $x(t) = a \cos t$, $y(t) = a \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (okrąg o promieniu a);

e) $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

f) $x(t) = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t$, $y(t) = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$;

g) $x(t) = a \cos^5 t$, $y(t) = a \sin^5 t$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$, $a > 0$;

h) $r(\varphi) = a\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $a > 0$; i) $r(\varphi) = ae^{m\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$, $a > 0$.

Rozwiązanie. W przykładach a) - c) stosujemy wzór (14), w przykładach d) - g) - wzór (15) oraz w przykładach h) i i) - wzór (16).

a) $f'(x) = \sinh \frac{x}{a}$, $L = \int_0^a \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{a}} dx = \int_0^a \sqrt{\cosh^2 \frac{x}{a}} dx = a \sinh \frac{x}{a} \Big|_0^a = a \sinh 1$.

b) $f'(x) = \frac{x-a}{2\sqrt{a}\sqrt{x}}$, $1 + f'^2(x) = 1 + \frac{(x-a)^2}{4ax} = \frac{(x+a)^2}{4ax}$; stąd

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{(x+a)^2}{4ax}} dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_0^{x_0} \frac{x+a}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{x_0} \frac{x+a}{\sqrt{x}} dx = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} + 2a\sqrt{x} \right) \Big|_{\varepsilon}^{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{3} x_0^{3/2} + 2a\sqrt{x_0} - \frac{2}{3} \varepsilon^{3/2} - 2a\sqrt{\varepsilon} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{x_0}{a}} (x_0 + 3a). \end{aligned}$$

c) $f'(x) = 2\sqrt{a} \frac{\sqrt{x}}{a-x}$, $1 + f'^2(x) = 1 + 4a \frac{x}{(a-x)^2} = \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^2$; stąd

$$L = \int_0^{x_0} \sqrt{\left(\frac{a+x}{a-x} \right)^2} dx = \int_0^{x_0} \frac{a+x}{a-x} dx = -2a \ln \frac{a-x_0}{a} - x_0.$$

d) $x'(t) = -a \sin t$, $y'(t) = a \cos t$, $x'^2(t) + y'^2(t) = a^2$; stąd

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2} dt = 2\pi a.$$

e) $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a \sin t$,

$$x'^2(t) + y'^2(t) = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) = 4a^2 \sin^2 \frac{1}{2}t;$$

stąd

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{1}{2}t} dt = 2a \int_0^{2\pi} |\sin \frac{1}{2}t| dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{1}{2}t dt = -4a \cos \frac{1}{2}t \Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

f) $x'(t) = t^2 \cos t$, $y'(t) = t^2 \sin t$, $x'^2(t) + y'^2(t) = t^4$; stąd

$$L = \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{3}\pi^3.$$

$$g) x'(t) = -5a \cos^4 t \sin t, \quad y'(t) = 5a \sin^4 t \cos t,$$

$$\begin{aligned} x'^2(t) + y'^2(t) &= 25a^2 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^6 t + \sin^6 t) = \\ &= 25a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) (\cos^4 t - \cos^2 t \sin^2 t + \sin^4 t) = \\ &= 25a^2 \sin^2 t \cos^2 t (1 - 3 \sin^2 t \cos^2 t) = \\ &= \frac{25}{16} a^2 \sin^2 2t (1 + 3 \cos^2 2t); \end{aligned}$$

zatem

$$L = \frac{5}{4} a \int_0^{\pi/2} \sin 2t \sqrt{1 + 3 \cos^2 2t} dt.$$

Podstawiamy $u = \sqrt{3} \cos 2t$, stąd $du = -2\sqrt{3} \sin 2t dt$, czyli

$$\begin{aligned} L &= -\frac{5}{4} a \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} \sqrt{1+u^2} du = \frac{5a}{16\sqrt{3}} [u \sqrt{1+u^2} + \ln(u + \sqrt{1+u^2})] \Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{5a}{8\sqrt{3}} [2\sqrt{3} + \ln(\sqrt{3}+2)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h) L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \varphi^2 + a^2} d\varphi = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi = \frac{1}{2} a [\varphi \sqrt{1 + \varphi^2} + \ln(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2})] \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2} a [2\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})]. \end{aligned}$$

$$i) L = \int_0^{\varphi_0} \sqrt{a^2 e^{2m\varphi} + a^2 m^2 e^{2m\varphi}} d\varphi = a \sqrt{1+m^2} \int_0^{\varphi_0} e^{m\varphi} d\varphi = \frac{a}{m} \sqrt{1+m^2} (e^{m\varphi_0} - 1).$$

34.11. Obliczyć pola powierzchni powstałych przez obrót dookoła osi Ox krzywych:

a) $f(x) = \sqrt{x+2}$, $1 \leq x \leq 2$; b) $f(x) = \sin x$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$;

c) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $0 \leq x \leq \frac{1}{4}\pi$; d) $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

e) $x(t) = e^t \sin t$, $y(t) = e^t \cos t$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$.

Rozwiązanie. W przykładach a), b) i c) stosujemy wzór (17), w przykładach d) i e) – wzór (18).

$$a) |P| = 2\pi \int_1^2 \sqrt{x+2} \sqrt{1 + \frac{1}{4(x+2)}} dx = 2\pi \int_1^2 \sqrt{x + \frac{9}{4}} dx = \frac{4}{3}\pi \left(x + \frac{9}{4}\right)^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{1}{6}\pi(17\sqrt{17} - 13\sqrt{13}).$$

$$b) |P| = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = \pi [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})].$$

$$c) |P| = 2\pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 x}} dx = \pi \left[\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2} \right]$$

(por. 33.2g).

$$d) |P| = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{1}{2}t} dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{1}{2}t dt = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

$$e) x'(t) = e^t(\sin t + \cos t), \quad y'(t) = e^t(\cos t - \sin t), \quad x'^2(t) + y'^2(t) = 2e^{2t}, \quad \text{zatem}$$

$$\begin{aligned} |P| &= 2\pi \int_0^{\pi/2} e^t \cos t \sqrt{2} e^t dt = 2\sqrt{2} \pi \frac{1}{5} e^{2t} (\sin t + 2 \cos t) \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{2}{5} \sqrt{2} \pi (e^\pi - 2) \quad (\text{por. przykład 32.3c}). \end{aligned}$$

Zadania

34.12. Obliczyć (jeżeli istnieją) całki:

$$a) \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^3}; \quad b) \int_0^{+\infty} \cos x dx; \quad c) \int_{-\infty}^0 x \sin x dx;$$

$$d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}; \quad e) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}; \quad f) \int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{3/2}} dx; \quad g) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1};$$

$$h) \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x}; \quad i) \int_0^{+\infty} e^{-3x} \sin 2x dx; \quad j) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2};$$

$$k) \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx; \quad l) \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx; \quad ł) \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx; \quad m) \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x dx}{(1+x^2)^3}.$$

34.13. Obliczyć (jeżeli istnieją) całki:

$$a) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}; \quad b) \int_0^1 \frac{dx}{x}; \quad c) \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}; \quad d) \int_1^2 \frac{dx}{x \ln x};$$

$$e) \int_2^3 \frac{3x dx}{2\sqrt{x^2-4}}; \quad f) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}; \quad g) \int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx; \quad h) \int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx;$$

$$i) \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}; \quad j) \int_0^{3a} \frac{2x dx}{(x^2-a^2)^{2/3}}; \quad k) \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}.$$

34.14. Zbadać zbieżność całek:

$$\text{a) } \int_0^{+\infty} \frac{x \, dx}{x^3+1}; \quad \text{b) } \int_0^{+\infty} \frac{x^4 \, dx}{(x^3+x^2+1)^3}; \quad \text{c) } \int_1^{+\infty} x e^{-x} \, dx;$$

$$\text{d) } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx; \quad \text{e) } \int_1^{+\infty} \frac{x^4+x+2}{x^5} \, dx; \quad \text{f) } \int_2^{+\infty} \frac{x^2+1}{\sqrt[6]{x^5-2}} \, dx;$$

$$\text{g) } \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln(\ln x)}; \quad \text{h) } \int_0^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^4}}; \quad \text{i) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}};$$

$$\text{j) } \int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x^3 \ln x}} \, dx; \quad \text{k) } \int_0^1 \frac{x+1}{\sin^2 x} \, dx.$$

34.15. Obliczyć pola figur ograniczonych krzywymi o równaniach:

$$\text{a) } y^2=2x+1, \quad x-y-1=0; \quad \text{b) } f(x)=\ln x, \quad y=0, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8};$$

$$\text{c) } y^2=2px, \quad x^2=2py; \quad \text{d) } x^2+y^2=16, \quad x^2=6y \quad (y \geq \frac{1}{6}x^2);$$

$$\text{e) } f(x)=\frac{1}{1+x^2}, \quad g(x)=\frac{1}{2}x^2; \quad \text{f) } y^2+8x=16, \quad y^2-24x=48;$$

$$\text{g) } y^2=(1-x^2)^3 \quad (\text{krzywa zamknięta});$$

$$\text{h) } f(x)=\ln x, \quad g(x)=\ln^2 x; \quad \text{i) } f(x)=e^{-x}(x^2+2x), \quad y=0.$$

34.16. W jakim stosunku parabola $y^2=2x$ dzieli pole koła $x^2+y^2 \leq 8$?

34.17. Wyrzucić współrzędne punktu $M(x, y)$ hiperboli $x^2-y^2=a^2$ jako funkcje pola wycinka hiperbolicznego $OM'M$ (rys. 34.15).

34.18. Zbadać, czy istnieją pola figur ograniczonych krzywymi o równaniach:

$$\text{a) } f(x)=\frac{1}{1+x^2}, \quad y=0;$$

$$\text{b) } f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad y=0, \quad x=1 \quad (x \geq 1);$$

$$\text{c) } f(x)=\frac{1}{x^2(x+1)}, \quad y=0, \quad x=1 \quad (x \geq 1).$$

34.19. Obliczyć pola figur ograniczonych krzywymi o równaniach (parametry a, b, c i m są większe od zera):

$$\text{a) } x(t)=a \cos t, \quad y(t)=b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$$

$$\text{b) } x(t)=a(\cos t + t \sin t), \quad y(t)=a(\sin t - t \cos t) \quad \text{dla } 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{i } x=a \quad \text{dla } y \leq 0;$$

c) $x(t) = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y(t) = a(2 \sin t - \sin 2t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

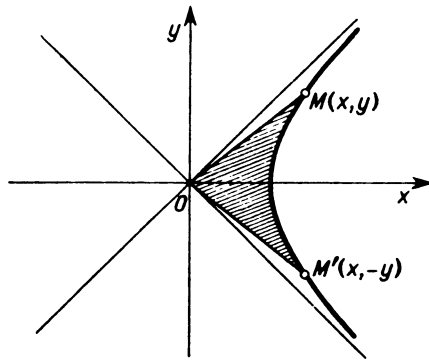
d) $x(t) = \frac{c^2}{a} \cos^3 t$, $y(t) = \frac{c^2}{b} \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ ($c^2 = a^2 - b^2$);

e) $x(t) = a \cos^5 t$, $y(t) = a \sin^5 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

f) $r(\varphi) = ae^{m\varphi}$ $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$; g) $r(\varphi) = a \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$;

h) $r(\varphi) = a \sin 2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$; i) $r(\varphi) = a(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

W punktach f)-i) chodzi o krzywe w układzie biegunowym $O\rho\varphi$.



Rys. 34.15

34.20. Obliczyć objętość stożka obrotowego o promieniu podstawy r i długości wysokości h .

34.21. Obliczyć objętość stożka ściętego obrotowego o długości wysokości h i promieniach podstaw r i R .

34.22. Obliczyć objętości brył powstałych przez obrót dookoła osi Ox krzywych o równaniach:

a) $y^2 = 2px$, $0 \leq x \leq a$; b) $(2a-x)y^2 = x^3$, $0 \leq x \leq b < 2a$;

c) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a \leq x \leq m$; d) $f(x) = \arcsin x$, $0 \leq x \leq 1$;

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$, $3 \leq x \leq 4$; f) $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x$, $\frac{1}{6}\pi \leq x \leq \frac{1}{3}\pi$.

34.23. Obliczyć objętości brył powstałych przez obrót dookoła osi Oy krzywych o równaniach:

a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $0 \leq y \leq h$; b) $x = \arccos y$, $0 \leq y \leq 1$; c) $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$, $0 \leq y \leq a$.

34.24. Znaleźć objętości brył powstałych przez obrót dookoła osi Ox figur płaskich ograniczonych krzywymi o równaniach:

a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $2ay - bx = 0$, $y = 0$; b) $y = x^2$, $y^2 = x$;

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$, $g(x) = -x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x + 1$.

34.25. Obliczyć objętości brył powstałych przez obrót dookoła osi Ox krzywych o równaniach:

a) $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

b) $x(t) = a \cos^3 t$, $y(t) = b \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \pi$;

c) $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos^2 t$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$.

34.26. Obliczyć objętość bryły określonej nierównościami

$$\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} \leq x \quad (p > 0, q > 0) \quad \text{i} \quad 0 \leq x \leq a.$$

34.27. Obliczyć objętość bryły ograniczonej

powierzchnią $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ i płaszczyznami $z = 0$ i $z = h$.

34.28. Z badać, czy istnieją objętości brył powstałych przez obrót dookoła osi Ox obszarów płaskich ograniczonych krzywymi o równaniach:

a) $f(x) = \frac{a^2}{x}$, $y = 0$, $x = a > 0$ ($x \geq a$); b) $f(x) = e^{-x} \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 0$ ($x \geq 0$).

34.29. Obliczyć długości łuków krzywych o równaniach:

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$; b) $f(x) = \ln x$, $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$;

c) $f(x) = a \ln \cos \frac{x}{a}$, $0 \leq x \leq b$; d) $x(y) = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$, $0 < b \leq y \leq a$;

e) $x(y) = \frac{1}{2}(y^2 - \ln y)$, $1 \leq y \leq 2$; f) $f(x) = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$;

g) $y^2 = x^3$, $0 \leq x \leq 4$; h) $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ od punktu $O(0, 0)$ do punktu $P_0(x_0, y_0)$;

i) $x(t) = a \cos^3 t$, $y(t) = a \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

j) $x(t) = a(\cos t + t \sin t)$, $y(t) = a(\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$;

k) $x(t) = e^t \sin t$, $y(t) = e^t \cos t$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$;

l) $x(t) = a(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2}t)$, $y(t) = a \sin t$ od punktu $A(0, a)$ do punktu $P(x, y)$;

ł) $x(t) = \cos^4 t$, $y(t) = \sin^4 t$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$;

m) $x(t) = a(\sinh t - t)$, $y(t) = a(\cosh t - 1)$, $0 \leq t \leq t_0$;

n) $r(\varphi) = a(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$; o) $r(\varphi) = a \sin^3 \frac{1}{2}\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 3\pi$;

p) $r(\varphi) = a \operatorname{tgh} \frac{1}{2}\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

W punktach n), o) i p) chodzi o krzywe w układzie biegunowym $Or\varphi$.

34.30. Wykazać, że długość łuku elipsy $x(t) = a \cos t$, $y(t) = b \sin t$ równa się długości łuku sinusoidy $f(x) = c \sin(x/a)$ dla $0 \leq x \leq 2\pi a$ ($c^2 = b^2 - a^2$).

34.31. Obliczyć pola powierzchni powstałych przez obrót dookoła osi Ox krzywych o równaniach:

- a) $y^2 = 4ax$, $0 \leq x \leq 3a$; b) $f(x) = a \cosh(x/a)$, $0 \leq x \leq a$;
 c) $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x_1 \leq x \leq x_2$ ($x_1 > -r$, $x_2 < r$);
 d) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ($a > b$); e) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;
 f) $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ ($a < b$); g) $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, $a \leq x \leq m$;
 h) $x(t) = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y(t) = a(2 \sin t - \sin 2t)$, $0 \leq t \leq \pi$;
 i) $x(t) = a(\cos t + t \sin t)$, $y(t) = a(\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

34.32. Obliczyć pola powierzchni powstałych przez obrót dookoła osi Oy krzywych o równaniach:

- a) $y^2 = 2px$, $0 \leq x \leq x_0$; b) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ($0 < b \leq a$); c) $f(x) = 1 - x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

Odpowiedzi

34.12. a) $\frac{1}{18}$; b) rozbieżna; c) rozbieżna; d) π ;

e) $\frac{2}{3} \ln 2$; f) $\frac{1}{2}\pi - 1$; g) $\frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$; h) rozbieżna; i) $\frac{2}{13}$;

j) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$; k) $\frac{1}{2}$; l) 2; l) $\frac{a}{a^2 + b^2}$; m) $-\frac{1}{8}$.

34.13. a) 2; b) rozbieżna; c) $\frac{8}{3}$; d) rozbieżna; e) $\sqrt[4]{125}$;

f) $\frac{1}{2}\pi$; g) $\frac{10}{7}$; h) $-2/e$; i) $\frac{1}{3}\pi$; j) $9a^{2/3}$; k) $\frac{1}{2}\pi - \arcsin \frac{3}{4}$.

34.14. Zbieżna w zadaniach a), b), c), d), h) i i); rozbieżna w zadaniach e), f), g), j) i k).

34.15. a) $\frac{16}{3}$; b) $\sqrt{8} \ln(\sqrt{8}/e) - \sqrt{3} \ln(\sqrt{3}/e)$; c) $\frac{4}{3}p^2$; d) $\frac{4}{3}(\sqrt{3} + 4\pi)$;

e) $\frac{1}{6}(3\pi - 2)$; f) $\frac{32}{3}\sqrt{6}$; g) $\frac{3}{4}\pi$; h) $3 - e$; i) 4.

34.16. $\frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}$. **34.17.** $x = a \cosh \frac{|S|}{a^2}$, $y = a \sinh \frac{|S|}{a^2}$.

34.18. a) $|S| = \pi$; b) nie istnieje; c) $|S| = 1 - \ln 2$.

34.19. a) πab ; b) $\frac{1}{3}\pi a^2(4\pi^2 + 3)$; c) $6\pi a^2$;

d) $\frac{3}{8} \cdot \frac{\pi c^4}{ab}$; e) $\frac{15}{128}\pi a^2$; f) $\frac{a^2}{4m}(e^{2m\phi_2} - e^{2m\phi_1})$; g) $\frac{1}{4}\pi a^2$; h) $\frac{1}{8}\pi a^2$; i) $\frac{3}{2}\pi a^2$.

34.20. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

34.21. $\frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$.

$$34.22. \text{ a) } \pi p a^2; \quad \text{ b) } -\pi \left[8a^3 \ln \left(1 - \frac{b}{2a} \right) + \frac{1}{3} b^3 + ab(4a + b) \right];$$

$$\text{ c) } \frac{\pi b^2}{3a^2} (m-a)^2 (m+2a); \quad \text{ d) } \pi \left(\frac{1}{4} \pi^2 - 2 \right); \quad \text{ e) } \pi \ln \frac{4}{3}; \quad \text{ f) } \frac{\pi}{18\sqrt{3}} (16 + 3\sqrt{3}\pi).$$

34.23. Jeżeli krzywa określona jest wzorem $x=g(y)$, $c \leq y \leq d$, to objętość $|V|$ bryły otrzymanej przez obrót tej krzywej dookoła osi $Oy^{(1)}$ wyraża się wzorem $|V| = \pi \int_c^d g^2(y) dy$.

$$\text{ a) } \pi a^2 h \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{b} \right)^2 \right]; \quad \text{ b) } \pi(\pi - 2); \quad \text{ c) } \frac{1}{15} \pi a^3.$$

$$34.24. \text{ a) } \frac{4}{9} (4\sqrt{3} - 6) \pi a b^2; \quad \text{ b) } \frac{3}{10} \pi; \quad \text{ c) } \pi (58 + \sqrt{3} \cdot 15 - \sqrt{3} \cdot 10\pi) / 90.$$

$$34.25. V = \pi \int_1^2 y^2(t) |x'(t)| dt; \quad \text{ a) } 5\pi a^3; \quad \text{ b) } \frac{32}{105} \pi a b^2; \quad \text{ c) } \frac{8}{15} \pi.$$

$$34.26. \pi a^2 \sqrt{pq}. \quad 34.27. \pi a b h \left(1 + \frac{h^2}{3c^2} \right).$$

$$34.28. \text{ a) } \pi a^3; \quad \text{ b) } \frac{1}{4} \pi.$$

$$34.29. \text{ a) } \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5}) + \frac{1}{2} \sqrt{5}; \quad \text{ b) } 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}; \quad \text{ c) } a \ln \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{b}{2a} \right);$$

$$\text{ d) } a \ln(a/b); \quad \text{ e) } \frac{1}{4} \left(\sqrt{65} - \sqrt{5} - \ln \frac{1 + \sqrt{65}}{4 + 4\sqrt{5}} \right);$$

$$\text{ f) } 2; \quad \text{ g) } \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1);$$

$$\text{ h) } 4a(z_1 - 2) + 2a\sqrt{3} \ln \frac{z_1 - \sqrt{3}}{z_1 + \sqrt{3}} + 4a\sqrt{3} \ln(2 + \sqrt{3}), \text{ gdzie } z_1 = \sqrt{\frac{8a - 3x_0}{2a - x_0}} \text{ oraz } |x_0| < 2a;$$

$$\text{ i) } 6a; \quad \text{ j) } \frac{1}{8} \pi^2 a; \quad \text{ k) } \sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1); \quad \text{ l) } a \ln \frac{y}{a}; \quad \text{ ł) } 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2});$$

$$\text{ m) } 2(\sqrt{\cosh t_0} \cosh \frac{1}{2} t_0 - 1) - \sqrt{2} \ln \frac{\sqrt{2} \cosh \frac{1}{2} t_0 + \sqrt{\cosh t_0}}{1 + \sqrt{2}};$$

$$\text{ n) } 4a; \quad \text{ o) } \frac{1}{2} \pi a; \quad \text{ p) } a(2\pi - \operatorname{tgh} \pi).$$

$$34.31. \text{ a) } \frac{56}{3} \pi a^2; \quad \text{ b) } \frac{1}{4} \pi a^2 (e^2 - e^{-2} + 4); \quad \text{ c) } 2\pi r(x_2 - x_1);$$

$$\text{ d) } 2\pi b \left(b + \frac{a}{e} \operatorname{arc} \sin e \right), \quad \text{ gdzie } e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a};$$

$$\text{ e) } \frac{12}{5} \pi a^2; \quad \text{ f) } 4\pi^2 a b;$$

⁽¹⁾ Przyjmujemy, że podstawami bryły są okręgi o promieniach $|g(c)|$ i $|g(d)|$.

$$g) \frac{\pi b m}{a} \sqrt{e^2 m^2 - a^2} - \pi b^2 - \frac{\pi a b}{e} \ln \frac{em + \sqrt{e^2 m^2 - a^2}}{ae + b}, \quad \text{gdzie} \quad e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a};$$

$$h) \frac{128}{5} \pi a^2; \quad i) 6\pi^2 a^2.$$

$$34.32. \quad a) \frac{1}{4} \pi \left[(p + 4x_0) \sqrt{2x_0(p + 2x_0)} - p^2 \ln \frac{\sqrt{2x_0} + \sqrt{p + 2x_0}}{\sqrt{p}} \right];$$

$$b) 2\pi a^2 + \frac{2\pi b^2}{e} \ln \left[\frac{a}{b} (1 + e) \right], \quad \text{gdzie} \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}; \quad c) \frac{1}{8} \pi (5\sqrt{5} - 1).$$

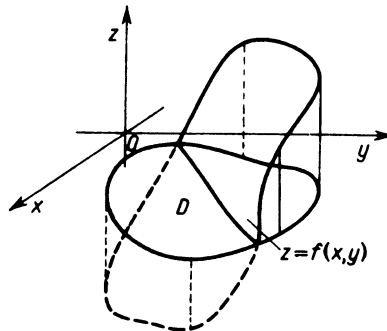
§ 35. ZASTOSOWANIA GEOMETRYCZNE CAŁEK WIELOKROTNYCH

Jeżeli funkcja $f: \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na obszarze regularnym D , to objętość $|V|$ (miara zbioru V) obszaru regularnego

$$V = \{(x, y, z) : ((x, y) \in D) \wedge (0 \leq z \leq |f(x, y)|)\}$$

(por. rys. 35.1) określona jest wzorem:

$$(1) \quad |V| = \iint_D |f(x, y)| dx dy.$$



Rys. 35.1

Jeżeli

$$V = \{(x, y, z) : (a \leq x \leq b) \wedge (g_1(x) \leq y \leq h_1(x)) \wedge (g_2(x, y) \leq z \leq h_2(x, y))\},$$

$g_i, h_i \in C^0$, $i = 1, 2$, na swoich dziedzinach, to

$$(2) \quad |V| = \iint_D (h_2(x, y) - g_2(x, y)) dx dy,$$

$$D = \{(x, y) : (a \leq x \leq b) \wedge (g_1(x) \leq y \leq h_1(x))\}.$$

Ze wzoru (2) § 33 dla $n=2$ i $n=3$ otrzymujemy wzory na pole obszaru D i objętość obszaru V :

$$(3) \quad |D| = \iint_D dx dy,$$

$$(4) \quad |V| = \iiint_V dx dy dz.$$

Jeżeli $(f: \mathbf{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbf{R}) \wedge (f \in C^1(D)) \wedge (D \text{ obszar regularny})$, to pole $|S|$ wykresu funkcji f (pole płata powierzchniowego) określone jest wzorem

$$(5) \quad |S| = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dx dy.$$

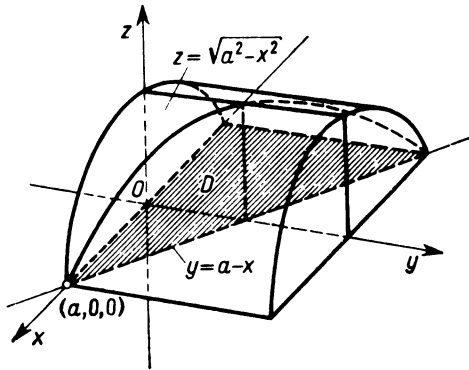
Przykłady

35.1. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami o równaniach:

$$x^2 + z^2 = a^2, \quad x + y = a, \quad z = 0, \quad y = 0, \quad \text{przy czym } z \geq 0 \wedge y \geq 0 \quad \text{oraz } a > 0.$$

Rozwiązanie. Korzystając ze wzoru (2) (por. rys. 35.2), otrzymujemy

$$\begin{aligned} |V| &= \iint_D \sqrt{a^2 - x^2} dx dy = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \int_0^{a-x} dy = \\ &= \int_{-a}^a dx \sqrt{a^2 - x^2} (a - x) = \int_{-a}^a (a\sqrt{a^2 - x^2} - x\sqrt{a^2 - x^2}) dx = \frac{1}{2}\pi a^3. \end{aligned}$$



Rys. 35.2

35.2. Znaleźć objętość części kuli o promieniu R wyciętej przez walec kołowy o promieniu $a < R$, którego oś przechodzi przez środek kuli.

Rozwiązanie. Korzystając ze wzoru (2) (por. rys. 35.3), otrzymujemy

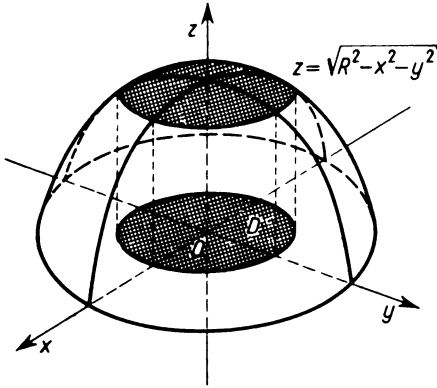
$$\frac{1}{2}|V| = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy.$$

Z kolei stosując współrzędne biegunowe, mamy

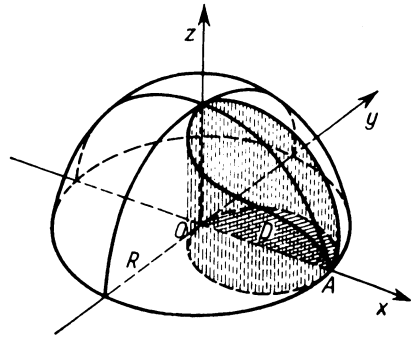
$$\frac{1}{2}|V| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{R^2 - r^2} r dr = \frac{1}{3}\pi [R^3 - (R^2 - a^2)^{3/2}],$$

zatem

$$|V| = \frac{2}{3}\pi [R^3 - (R^2 - a^2)^{3/2}].$$



Rys. 35.3



Rys. 35.4

35.3. Znaleźć objętość części wspólnej kuli $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ i walca $x^2 + y^2 - Rx \leq 0$.

Rozwiązanie. Z uwagi na symetrię rozpatrywanej bryły względem płaszczyzn Oxy i Oxz (rys. 35.4) obliczamy $\frac{1}{4}$ objętości. Otóż

$$\frac{1}{4}|V| = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy, \quad \text{gdzie} \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 - Rx \leq 0 \wedge y \geq 0\}.$$

Korzystając z wyniku zadania 33.17d, otrzymujemy

$$|V| = \frac{4}{3}R^3 \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right).$$

35.4. Obliczyć pola figur ograniczonych krzywymi o równaniach:

a) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, $a > 0$; b) $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$ ($a > 0$).

Rozwiązanie. Stosujemy wzór (3) oraz wzór (10) § 33.

a) Korzystając z przykładu 38.4a, mamy $\frac{1}{4}|D| = \iint_D dx dy$. Otrzymaną całkę obliczamy, wprowadzając współrzędne biegunowe $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Zatem $(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)^2 = 2a^2(r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi)$, czyli $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$. Mamy więc

$$D \rightarrow \Delta = \{(\varphi, r) : 0 \leq \varphi \leq \frac{1}{4}\pi \wedge 0 \leq r \leq a\sqrt{2 \cos 2\varphi}\},$$

stąd

$$\frac{1}{4}|D| = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2 \cos 2\varphi}} r dr = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} d\varphi r^2 \Big|_0^{a\sqrt{2 \cos 2\varphi}} = a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}a^2,$$

czyli $|D| = 2a^2$.

b) Korzystając z przykładu 38.4b oraz wprowadzając współrzędne biegunowe, kolejno otrzymujemy: $r^4 = 2ar^3 \cos^3 \varphi$, $r = 2a \cos^3 \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$. Zatem

$$\frac{1}{2}|D| = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a \cos^3 \varphi} r dr = 2a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^6 \varphi d\varphi = \frac{5}{16}\pi a^2,$$

czyli $|D| = \frac{5}{8}\pi a^2$ (całkę $\int_0^{\pi/2} \cos^6 \varphi d\varphi$ obliczyliśmy korzystając z wyniku zadania 33.12r).

35.5. Obliczyć pole figury ograniczonej krzywą

$$K: \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{xy}{c^2}.$$

Rozwiązanie. Krzywa K jest ograniczona i symetryczna względem początku układu, przy czym dwie symetryczne gałęzie leżą w pierwszej i trzeciej ćwiartce układu ($xy \geq 0$). Punkt $O(0, 0)$ jest jedynym punktem przecięcia krzywej z osiami układu, przy czym jest to punkt węzłowy krzywej (por. § 38), w którym styczne pokrywają się z osiami układu (rys. 35.5). Z uwagi na występujące wyrażenie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ wygodnie będzie dokonać zamiany zmiennych, wprowadzając tzw. uogólnione współrzędne biegunowe określone wzorami: $x(r, \varphi) = ar \cos \varphi$, $y(r, \varphi) = br \sin \varphi$. Kolejno otrzymujemy: równanie krzywej K w układzie $O r \varphi$

$$r^4 = \frac{ab}{c^2} r^2 \cos \varphi \sin \varphi, \quad \text{czyli} \quad r^2 = \frac{ab}{c^2} \cos \varphi \sin \varphi;$$

jakobian

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & -ar \sin \varphi \\ b \sin \varphi & br \cos \varphi \end{vmatrix} = abr,$$

stąd

$$\frac{|D|}{2} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{ab}{c^2} \cos \varphi \sin \varphi}} ab r dr = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 b^2}{c^2} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{a^2 b^2}{4c^2}.$$

Zatem $|D| = \frac{a^2 b^2}{2c^2}$.

35.6. Obliczyć pole figury ograniczonej parabolami $y^2 = px$, $y^2 = qx$, $x^2 = ay$, $x^2 = by$, gdzie $0 < p < q$ oraz $0 < a < b$.

Rozwiązanie. Wygodnie będzie wprowadzić takie nowe współrzędne $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, aby obszar krzywoliniowy D (rys. 35.6) przekształcił się na prostokąt. Przekształcenie takie realizują wzory $y^2 = ux$ i $x^2 = vy$, stąd $x(u, v) = \sqrt[3]{uv^2}$ i $y(u, v) = \sqrt[3]{u^2v}$. Istotnie parabole ograniczające obszar D mają w układzie Ouv równania: $u = p$, $u = q$, $v = a$, $v = b$, a więc obraz obszaru D jest prostokątem

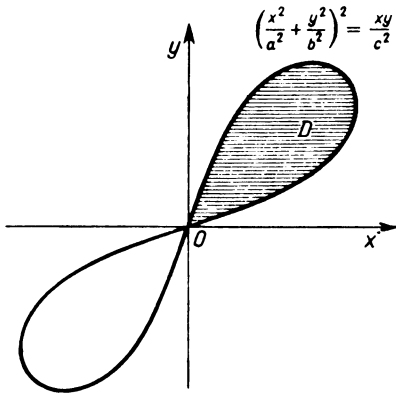
$$\Delta = \{(u, v) : p \leq u \leq q \wedge a \leq v \leq b\}.$$

Znajdujemy jacobian

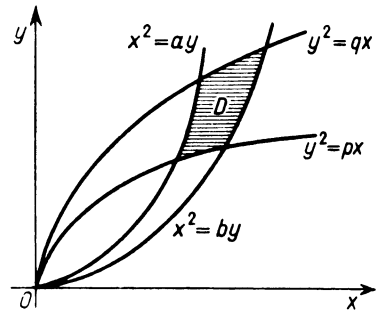
$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}v^{2/3}u^{-2/3} & \frac{2}{3}u^{1/3}v^{-1/3} \\ \frac{2}{3}v^{1/3}u^{-1/3} & \frac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3},$$

stąd

$$|D| = \int_p^q du \int_a^b \frac{1}{3} dv = \frac{1}{3}(b-a)(q-p).$$



Rys. 35.5



Rys. 35.6

35.7. Obliczyć objętości brył ograniczonych powierzchniami o równaniach:

a) $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = x^2$;

b) $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; c) $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3xyz$.

Rozwiązanie. Stosujemy wzór (4).

a) V jest obszarem normalnym (rys. 35.7):

$$V = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1 \wedge x^2 \leq y \leq x \wedge x^2 + y^2 \leq z \leq 2x^2 + 2y^2\},$$

stąd

$$|V| = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + y^2) dy = \frac{3}{35}.$$

b) Mamy (por. rys. 35.8):

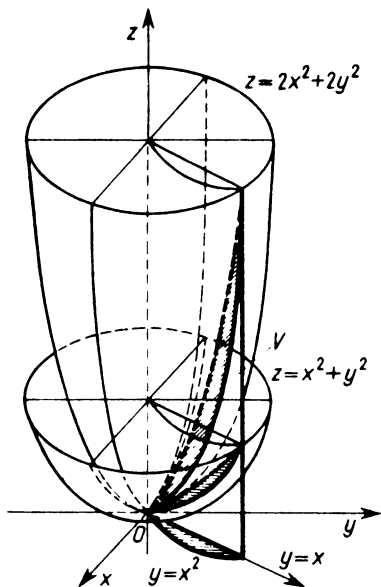
$$V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - x^2 - y^2\},$$

gdzie okrąg $x^2 + y^2 = 4$ jest rzutem na płaszczyźnie Oxy linii przenikania paraboloidy i stożka. Stąd

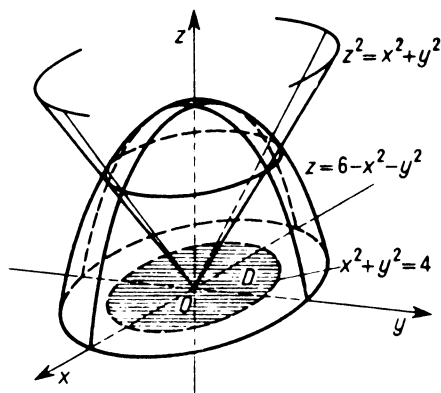
$$|V| = \iint_D dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{6-x^2-y^2} dz = \iint_D (6 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy.$$

Wprowadzając współrzędne biegunowe, otrzymujemy

$$|V| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r(6 - r^2 - r) dr = 2\pi \left(6 \cdot \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{3}r^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{32}{3}\pi.$$



Rys. 35.7



Rys. 35.8

c) Powierzchnia $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3xyz$ jest ograniczona, przy czym lewa strona równania jest nieujemna. Wynika stąd, że mogą zajść następujące przypadki: 1° $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$; 2° $x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0$; 3° $x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0$; 4° $x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0$. A więc powierzchnia leży w pierwszej, trzeciej, szóstej i ósmej ósemce układu⁽¹⁾ oraz składa się z czterech części parami symetrycznych względem jednej z osi układu (lewa i prawa strona równania nie ulega zmianie przy zmianie znaku dwóch spośród zmiennych x, y i z). Wystarczy więc obliczyć objętość bryły w pierwszej ósemce układu i wynik pomnożyć przez cztery. Równanie powierzchni w układzie współrzędnych sferycznych: $r^6 = a^3r^3 \sin^2\psi \sin\varphi \cos\varphi \cos\psi$, czyli $r = a\sqrt[3]{\sin^2\psi \sin\varphi \cos\varphi \cos\psi}$, gdzie $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi, 0 \leq \psi \leq \frac{1}{2}\pi$. Zatem

$$\begin{aligned}
 |V| &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{a\sqrt[3]{\sin^2\psi \sin\varphi \cos\varphi \cos\psi}} r^2 \sin\psi \, dr = \\
 &= \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi \int_0^{\pi/2} (\sin^3\psi \cos\psi) \, d\psi = \quad (2) \\
 &= \frac{2}{3} a^3 \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi \, d\varphi \int_0^1 u^3 \, du = \frac{1}{6} a^3 \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{6} a^3.
 \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Zakładamy, że $a > 0$. Jeżeli $a < 0$, to należy rozpatrywać pozostałe cztery ósemki układu współrzędnych.

⁽²⁾ Stosujemy podstawienie $u = \sin\psi$, więc $du = \cos\psi \, d\psi$.

35.8. Znaleźć pole płata powierzchniowego wyciętego:

- walcem $x^2 + y^2 = R^2$ z paraboloidy hiperbolicznej $z = xy$;
- walcem $x^2 + y^2 = a^2$ z walca $x^2 + z^2 = a^2$;
- walcem $x^2 + y^2 = Rx$ ze sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;
- walcem $x^2 + y^2 = R^2$ ze stożka $y^2 + z^2 = x^2$.

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzoru (5).

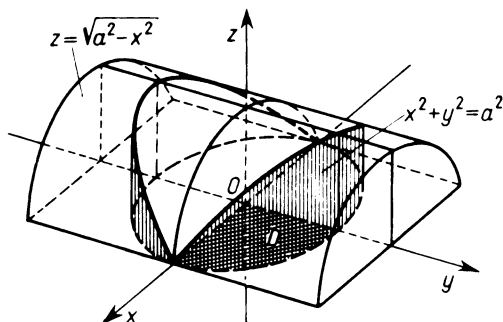
a) $z = f(x, y) = xy$, $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq R^2\}$, stąd

$$|S| = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{1 + r^2} \, r \, dr = \frac{2}{3} \pi (1 + r^2)^{3/2} \Big|_0^R = \frac{2}{3} \pi [(1 + R^2)^{3/2} - 1].$$

b) $z = f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2}$, $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq a^2\}$. Z uwagi na symetrię powierzchni walca $x^2 + z^2 = a^2$ względem płaszczyzn układu (por. rys. 35.9) otrzymujemy

$$\frac{|S|}{8} = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} \, dy = a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy = a \int_0^a dx = a^2,$$

stąd $|S| = 8a^2$ ⁽¹⁾.



Rys. 35.9

c) $z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$; $D_1 = \{(x, y): (x - \frac{1}{2}R)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}R^2\}$,

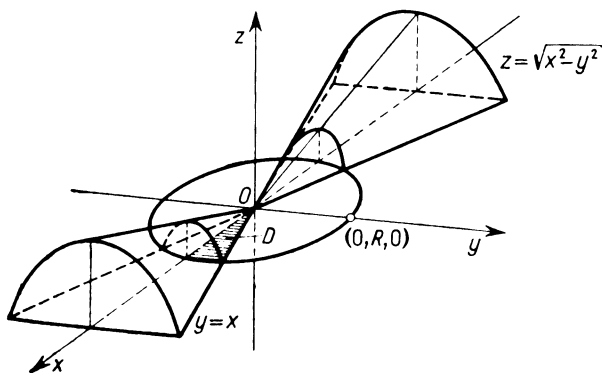
$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

⁽¹⁾ Uwaga. Całka w przykładzie b) jest całką podwójną niewłaściwą, której definicji nie podawaliśmy. Obliczanie jej sprowadziliśmy do obliczania całki niewłaściwej pojedynczej $\int_b^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

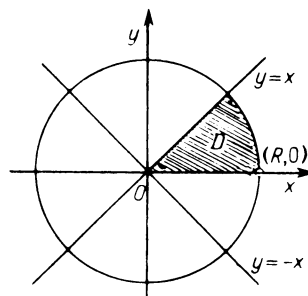
stąd (por. rys. 35.4)

$$\begin{aligned} \frac{|S|}{4} &= \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = R \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{R \cos \varphi} \frac{r dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \\ &= R \int_0^{\pi/2} d\varphi (-\sqrt{R^2 - r^2}) \Big|_0^{R \cos \varphi} = -R \int_0^{\pi/2} (R |\sin \varphi| - R) d\varphi = \\ &= -R^2 \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi - 1) d\varphi = R^2 (\frac{1}{2}\pi - 1). \end{aligned}$$

Zatem $|S| = 2R^2(\pi - 2)$. (Por. notkę (1) w b)).



Rys. 35.10



Rys. 35.11

d) Osią symetrii stożka $y^2 + z^2 = x^2$ jest oś Ox (rys. 35.10). Uwzględniając symetrię stożka względem płaszczyzn układu otrzymujemy

$$\frac{|S|}{8} = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 - y^2} + \frac{y^2}{x^2 - y^2}} dx dy = \iint_D \frac{\sqrt{2} x dx dy}{\sqrt{x^2 - y^2}},$$

gdzie obszar D podany jest na rysunku 35.11. Zauważmy, że

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \sqrt{x^2 - y^2},$$

natomiast znalezienie całki

$$\int \frac{x dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

wymaga dłuższych rachunków. Należy więc tak zapisać obszar D , aby granice zmiennej

y były stałe. Otóż

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \leq y \leq \frac{R}{\sqrt{2}} \wedge y \leq x \leq \sqrt{R^2 - y^2} \right\}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \frac{|S|}{8} &= \sqrt{2} \int_0^{R/\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{R^2 - y^2}} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \sqrt{2} \int_0^{R/\sqrt{2}} dy \sqrt{x^2 - y^2} \Big|_y^{\sqrt{R^2 - y^2}} = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{R/\sqrt{2}} \sqrt{R^2 - 2y^2} dy = 2 \int_0^{R/\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2 - y^2} dy = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4} \pi \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{4} \Rightarrow |S| = 2\pi R^2, \end{aligned}$$

ponieważ całka $\int_0^{R/\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2 - y^2} dy$ równa się $\frac{1}{4}$ pola koła o promieniu $R/\sqrt{2}$ (por. notkę ⁽¹⁾ w b)).

Zadania

35.9. Znaleźć objętości brył ograniczonych:

- a) płaszczyzną $z=0$, powierzchnią $x^2 + z^2 = R^2$ ($z \geq 0$) i płaszczyznami $y=0$, $y=H$;
 b) płaszczyznami: $z=0$, $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$ ($0 < a < b$, $0 < c < d$) i paraboloidą hiperboliczną $z=xy/m$ ($m > 0$);
 c) płaszczyznami: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=4$, $y=4$ oraz powierzchnią $z=x^2 + y^2 + 1$.

35.10. Znaleźć objętości brył ograniczonych powierzchniami o równaniach:

- a) $z=2x^2 + y^2 + 1$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;
 b) $az=y^2$, $x^2 + y^2 = r^2$, $z=0$, $a > 0$; c) $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x+z=6$, $z=0$;
 d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = \frac{b}{a}x$, $y=0$, $z=0$ ($x \geq 0$); e) $x^2 + y^2 = R^2$, $z = \frac{x^3}{a^2}$, $z=0$ ($x \geq 0$).

35.11. Znaleźć objętość części wspólnej walców $x^2 + y^2 = a^2$ i $x^2 + z^2 = a^2$.

35.12. Znaleźć pola figur ograniczonych krzywymi o równaniach:

- a) $y=x$, $y=\frac{1}{2}x$, $x+y=a$, $x+3y=a$ ($a > 0$),
 b) $y^2=10x+25$, $y^2=-6x+9$;
 c) $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x=4$; d) $xy=a^2$, $x+y=\frac{5}{2}a$ ($a > 0$).

35.13. Korzystając ze współrzędnych biegunowych obliczyć pola figur ograniczonych krzywymi o równaniach:

- a) $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$;
 b) $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$;
 c) $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2)$ ($a > 0$);
 d) $(x^2 + y^2)^2 = 8a^2xy$, $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$ ($a > 0$), przy czym $(x-a)^2 + (y-a)^2 \leq a^2$.

35.14. Obliczyć pola figur ograniczonych krzywymi o równaniach:

a) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = x^2 + y^2$; b) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{c^2}$; c) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2y}{c^3}$.

35.15. Obliczyć pola figur ograniczonych krzywymi o równaniach:

- a) $xy = p$, $xy = q$, $y = ax$, $y = bx$; b) $xy = p$, $xy = q$, $y^2 = ax$, $y^2 = bx$;
 c) $x^2 = py$, $x^2 = qy$, $y = ax$, $y = bx$; d) $x + y = p$, $x + y = q$, $y = ax$, $y = bx$,

gdzie $0 < p < q$ oraz $0 < a < b$.

35.16. Obliczyć objętości brył ograniczonych powierzchniami o równaniach:

- a) $y^2 = 4a^2 - 3ax$, $y^2 = ax$, $z = -h$, $z = h$ ($h > 0$);
 b) $z = x + y$, $z = xy$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$;
 c) $x^2 + z^2 = a^2$, $x + y = -a$, $x + y = a$, $x - y = -a$, $x - y = a$ ($a > 0$);
 d) $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = a - x - y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($a > 0$);
 e) $cz = 2x^2 + 3y^2 + a^2$, $x + y = b$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($c > 0$, $a > 0$);
 f) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z^2 = x^2 + y^2$ ($z^2 \leq x^2 + y^2$) ($a > 0$);
 g) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $x^2 + y^2 = z^2$ ($z \geq 0$, $0 < a < b$);
 h) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 3z$;
 i) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, $x^2 + y^2 = z^2$ ($z^2 \geq x^2 + y^2$) ($a > 0$);
 j) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3x$ ($a > 0$); k) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz$ ($a > 0$);
 l) $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2y^2z^2$; ł) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$;
 m) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) \frac{z}{c}$ ($c > 0$); n) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2y}{h^3}$ ($h > 0$).

35.17. Znaleźć pola płatów powierzchniowych wyciętych:

- a) walcem $x^2 + y^2 = a^2$ ze sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($a < R$);
 b) walcem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2$ z paraboloidy $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$;
 c) walcem $z^2 = 2py$ ze stożka $z^2 = x^2 + y^2$;
 d) walcem $(x^2 + y^2)^2 = R^2(x^2 - y^2)$ ze sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;
 e) walcami $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$ z powierzchni śrubowej $z = c \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$;

f) walcem $\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$ z powierzchni $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 2z$;

g) walcami $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$) z powierzchni $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$.

35.18. Znaleźć pole powierzchni części stożka $x^2 + y^2 = z^2$ leżącej nad płaszczyzną Oxy i odciętej płaszczyzną $z = \sqrt{2}(\frac{1}{2}x + 1)$.

35.19. Znaleźć pole powierzchni części walca $x^2 + y^2 = a^2$ wyciętej płaszczyznami $x+z=0$ i $x-z=0$

35.20. Znaleźć pole powierzchni całkowitej bryły ograniczonej sferą $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ i paraboloidą $x^2 + y^2 = 2az$ ($a > 0$).

Odpowiedzi

35.9. a) $\frac{1}{2}\pi|H|R^2$; b) $\frac{1}{4m}(d^2 - c^2)(b^2 - a^2)$; c) $\frac{560}{3}$.

35.10. a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{\pi r^4}{4a}$; c) $\frac{48}{5}\sqrt{6}$; d) $\frac{1}{3}abc$; e) $\frac{4R^5}{15a^2}$.

35.11. $\frac{16}{3}a^3$.

35.12. a) $\frac{7}{120}a^2$; b) $\frac{16}{3}\sqrt{15}$; c) $\frac{16}{3}$; d) $(\frac{15}{8} - 2\ln 2)a^2$.

35.13. a) $3(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2})$; b) $\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}\ln(1 + \sqrt{2})$; c) $\frac{1}{2}\pi a^2$; d) $a^2(\frac{1}{2}\sqrt{7} + \arcsin \frac{1}{8}\sqrt{14})$.

35.14. a) $\frac{1}{2}\pi ab(a^2 + b^2)$; b) $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^3 b}{c^2}$; c) $\frac{\pi}{32} \cdot \frac{a^5 b^3}{c^6}$.

35.15. a) $\frac{1}{2}(q-p)\ln \frac{b}{a}$; b) $\frac{1}{2}(q-p)\ln \frac{b}{a}$;

c) $\frac{1}{2}(q^2 - p^2)(b^3 - a^3)$; d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{(b-a)(q^2 - p^2)}{(1+a)(1+b)}$.

35.16. a) $\frac{32}{9}a^2 h$; b) $\frac{7}{24}$; c) $\frac{2}{3}a^3(3\pi - 4)$; d) $\frac{1}{24}a^3(3\pi - 4)$;

e) $\frac{5}{12} \cdot \frac{b^4}{c} + \frac{a^2 b^2}{2c}$; f) $\frac{2}{3}\sqrt{2}\pi a^3$; g) $\frac{2 - \sqrt{2}}{3}\pi(b^3 - a^3)$;

h) $\frac{19}{6}\pi$; i) πa^3 ; j) $\frac{1}{3}\pi a^3$; k) $\frac{1}{360}a^3$;

l) $\frac{16}{105}a^3$; ł) $\frac{1}{4}\pi^2 abc$; m) $\frac{1}{60}\pi abc$; n) $\frac{\pi}{192} \cdot \frac{a^7 b^4 c}{h^9}$.

35.17. a) $4\pi R(R - \sqrt{R^2 - a^2})$; b) $\frac{3}{2}\pi ab[(1 + c^2)^{3/2} - 1]$; c) $2\sqrt{2}\pi p^2$;
 d) $2R^2(\pi + 4 - 4\sqrt{2})$; e) $\frac{\pi}{4} \left[b\sqrt{b^2 + c^2} - a\sqrt{a^2 + c^2} + c^2 \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + c^2}}{a + \sqrt{a^2 + c^2}} \right]$;
 f) $\frac{3}{2}(20 - 3\pi)$; g) $\frac{\pi}{4} \left[3\sqrt{2} - \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln 2 + \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \right]$.

35.18. 8π .

35.19. $8a^2$.

35.20. $\frac{16}{3}\pi a^2$.

§ 36. ZASTOSOWANIA FIZYCZNE CAŁEK

Całki oznaczone stosujemy m. in. do obliczania wielkości fizycznych. Mając obliczyć pewną stałą wielkość fizyczną Q związaną z obszarem regularnym $A \subset \mathbb{R}^n$, $n=1, 2, 3$, tworzymy ciąg normalny podziałów (Δ_n) obszaru A , przy czym każdemu obszarowi $A_i \in \Delta_n$ przyporządkowujemy wielkość $Q_i \subset Q$. Jeżeli uda nam się uzyskać przybliżenie wielkości Q w postaci sumy całkowej (por. § 33), to wielkość Q określona jest całką (1) § 33.

Momentem statycznym [bezwładności] układu punktów P_i o masach m_i , $i=1, 2, \dots, n$, względem figury G , nazywamy liczbę $M = \sum_{i=1}^n m_i d_i$ [$B = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2$], gdzie $d_i = d(P_i, G)$.

Figura G najczęściej jest punktem, prostą lub płaszczyzną w \mathbb{R}^3 . Jeżeli w obszarze regularnym $V \subset \mathbb{R}^3$ rozmieszczona jest w sposób ciągły masa o gęstości punktowej $\rho: V \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\rho \in C^0(V)$, to całka

$$(1) \quad F = \iiint_V \rho(x, y, z) f_1(x, y, z) dV$$

określa: 1° masę całkowitą obszaru V , jeżeli $f_1 \equiv 1$ na V ; 2° moment statyczny⁽¹⁾ [bezwładności] względem figury G , jeżeli $f_1(x, y, z) = d((x, y, z), G)$ [$f_1(x, y, z) = d^2((x, y, z), G)$].

Podobne wzory otrzymujemy dla obszarów regularnych na płaszczyźnie,

$$(2) \quad W = \iint_D \rho(x, y) g_1(x, y) dx dy.$$

Przy korzystaniu ze wzorów (1) i (2) stosujemy wzory na: odległość dwóch punktów, odległość punktu od płaszczyzny, odległość punktu od prostej. Za pomocą całek pojedynczych można również obliczać momenty łuków krzywych o równaniach $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, gdzie $f \in C^1(\langle a, b \rangle)$. Mianowicie, jeżeli na łuku K rozmieszczona jest w sposób

⁽¹⁾ Jeżeli punkty zbioru V leżą po różnych stronach prostej $L \subset \mathbb{R}^2$ [płaszczyzny $H \subset \mathbb{R}^3$], to odległości tych punktów od L [H] bierzemy ze znakami przeciwnymi.

ciągły masa o gęstości

$$\rho: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbf{R}_+ \wedge \rho \in C^0(\langle a, b \rangle),$$

to całka

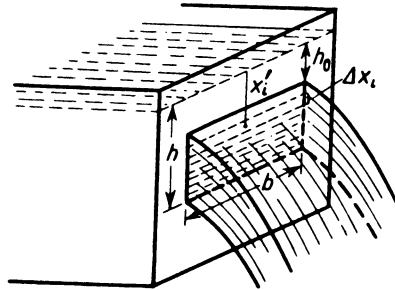
$$(3) \quad F = \varepsilon_1 \int_a^b \rho(x) f_1(x) \sqrt{1+f_1'^2(x)} dx$$

określa: 1° masę całkowitą łuku K , jeżeli $\varepsilon_1 = 1$ oraz $f_1(x) = 1$, $x \in \langle a, b \rangle$, 2° moment statyczny [bezwładności] względem osi Ox , jeżeli $f_1(x) = f(x)$ [... = $f^2(x)$], $x \in \langle a, b \rangle$, 3° moment statyczny [bezwładności] względem osi Oy , jeżeli $f_1(x) = x$ [... = x^2], $x \in \langle a, b \rangle$, przy czym $\varepsilon_1 = -1$ w przypadku momentu statycznego względem osi Ox [Oy], gdy $f(x) \leq 0$, $x \in \langle a, b \rangle$ [$b \leq 0$], w pozostałych przypadkach $\varepsilon_1 = 1$.

Dalsze przykłady zastosowań całek w fizyce, w szczególności obliczanie pracy i parcia cieczy podamy w przykładach.

Przykłady

36.1. Załóżmy, że w naczyniu napełnionym wodą (rys. 36.1) znajduje się pozioma szczelina prostokątna na głębokości h pod powierzchnią wody. Prędkość wyciekania wody ze szczeliny, jak wynika ze wzoru Torricellego, wynosi $v = \sqrt{2gh}$. Znaleźć prędkość ucieczki wody, czyli objętość wody Q wypływającej w czasie jednej sekundy.



Rys. 36.1

Rozwiązanie. Dzielimy prostokąt na n pasków P_i o szerokościach Δx_i ($h_0 \leq x \leq h$), przy czym głębokość paska niech będzie $x_i' \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Prędkość wypływu wody przez pasek P_i wynosi $v_i = \sqrt{2gx_i'}$. Ponieważ pole paska P_i równa się $b\Delta x_i$ (por. rys. 36.1), więc wypływ wody przez pasek P_i wynosi: $Q_i = \sqrt{2gx_i'} b\Delta x_i$. Stąd wypływ wody przez cały prostokąt

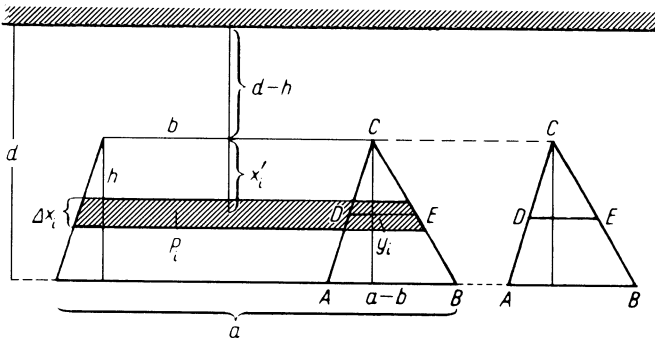
$$Q = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{2gx_i'} b\Delta x_i = \sqrt{2g} b \int_{h_0}^h \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{2g} b (h^{3/2} - h_0^{3/2}) \quad (1).$$

(1) W rzeczywistości wypływ wody jest mniejszy od znalezionej wartości z powodu tarcia wewnętrznego cieczy i ciśnienia strumienia. Wpływ ten uwzględnia się na ogół pod postacią empirycznego współczynnika $k < 1$, przyjmując $Q = \frac{2}{3}k \sqrt{2g} b (h^{3/2} - h_0^{3/2})$.

W szczególności dla $h_0=0$ otrzymujemy wzór na odpływ wody przez prostokątne ujście (np. wodospadu)

$$Q = \frac{2}{3} \sqrt{2g} b h^{3/2}.$$

36.2. Obliczyć siłę parcia cieczy o ciężarze właściwym γ na zanurzoną w cieczy pionową płytkę w kształcie trapezu o wymiarach podanych na rysunku 36.2.



Rys. 36.2

Rozwiązanie. Siła parcia F cieczy na element pionowej ścianki określona jest wzorem $F = \gamma Sx$, gdzie γ – ciężar właściwy cieczy, S – pole powierzchni elementu, x – odległość elementu od swobodnej powierzchni cieczy. Bierzemy ciąg normalny podziałów (Δ_n) przedziału $\langle 0, h \rangle$, gdzie $\Delta_n: 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = h$. Obliczymy przybliżoną wartość siły parcia F_i na wydzielony pasek P_i (rys. 36.2). Otóż $F_i \approx \gamma(d-h+x'_i)(b+y_i)\Delta x_i$; ale z podobieństwa trójkątów (rys. 36.2)

$$\frac{y_i}{x'_i} = \frac{a-b}{h} \Rightarrow y_i = \frac{a-b}{h} x'_i,$$

czyli

$$F_i \approx \gamma(d-h+x'_i) \left(b + \frac{a-b}{h} x'_i \right) \Delta x_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F \approx \sum_{i=1}^n F_i \Rightarrow F = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F_i = \int_0^h \gamma(d-h+x) \left(b + \frac{a-b}{h} x \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \gamma h [ha + (a+b)(3d-2h)].$$

36.3. Wyprowadzić wzór na moment statyczny jednorodnego łuku określonego wzorem $y=f(x)$, $0 \leq a \leq x \leq b$, $f \in C^1(\langle a, b \rangle)$ względem osi Oy , tzn. wzór (3), gdy $\varepsilon_1 = 1$, $\rho(x) = p = \text{const}$ dla $x \in \langle a, b \rangle$, $f_1(x) = x$, $x \in \langle a, b \rangle$.

Rozwiązanie. Moment łuku K_i o długości ΔL_i (rys. 36.3) względem osi Oy wynosi $M_i = p \Delta L_i x'_i$. Ale długość łuku

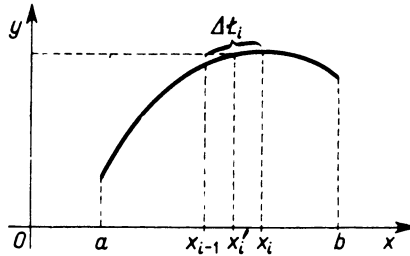
$$l = \int_a^x \sqrt{1+f'^2(t)} dt = L(x), \quad x \in \langle a, b \rangle$$

jest funkcją różniczkowalną zmiennej x , przy czym

$$L'(x) = \left(\int_a^x \sqrt{1+f'^2(t)} dt \right)'_x = \sqrt{1+f'^2(x)}.$$

Funkcja L spełnia zatem założenia twierdzenia Lagrange'a na każdym z przedziałów $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, stąd

$$\Delta L_i = L(x_i) - L(x_{i-1}) = L'(x'_i) \Delta x_i,$$



Rys. 36.3

gdzie

$$x_{i-1} < x'_i < x_i, \quad \text{czyli} \quad M_i = p \sqrt{1+f'^2(x'_i)} \Delta x_i x'_i.$$

Punkt x'_i jest dowolnym punktem pośrednim przedziału $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, możemy więc założyć, że $x'_i = x_i$. Stąd

$$M_i = p \sqrt{1+f'^2(x_i)} \Delta x_i x_i,$$

a dla całego łuku

$$M_y = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n p \sqrt{1+f'^2(x_i)} x_i \Delta x_i.$$

Wyrażenie pod znakiem granicy jest sumą całkową funkcji ciągłej określonej wzorem $g(x) = p \sqrt{1+f'^2(x)} x$, $x \in \langle a, b \rangle$, zatem

$$M_y = p \int_a^b x \sqrt{1+f'^2(x)} dx.$$

36.4. Znaleźć moment statyczny półkola jednorodnego (o gęstości p) o promieniu r , względem osi leżącej w płaszczyźnie półokręgu, równoległej do średnicy i oddalonej od niej o d jednostek długości.

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzoru (2), gdzie (por. rys. 36.4)

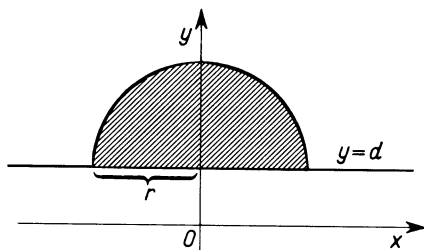
$$D = \{(x, y) : (x^2 + (y-d)^2 \leq r^2) \wedge (y \geq d)\}$$

oraz $g_1(x, y) = \sqrt{y^2} = |y| = y$. Zatem

$$M = \iint_D py \, dx \, dy = p \int_0^\pi d\varphi \int_0^r (\rho \sin \varphi + d) \rho \, d\rho = \frac{1}{8} pr^2 (4r + 3\pi d)$$

(stosowaliśmy zmianę zmiennych: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi + d$,

$$J = \rho, \quad \Delta = \{(\varphi, \rho) : (0 \leq \varphi \leq \pi) \wedge (0 \leq \rho \leq r)\}.$$

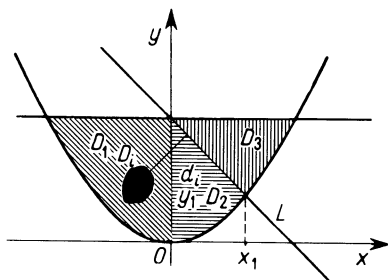


Rys. 36.4

36.5. Znaleźć moment statyczny i moment bezwładności figury jednorodnej ograniczonej liniami o równaniach $y = x^2$ i $y = 1$ względem prostej $x + y = 1$.

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzoru (2) (por. też rys. 36.5),

$$M_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \rho \iint_D \varepsilon |x + y - 1| \, dx \, dy, \quad B_x = \frac{1}{2} \rho \iint_D (x + y - 1)^2 \, dx \, dy,$$



Rys. 36.5

gdzie ρ oznacza stałą gęstość oraz np. $\varepsilon = 1$ [$\varepsilon = -1$] dla punktów półpłaszczyzny dodatniej [ujemnej] wyznaczonej prostą L . W celu obliczenia momentu M_x obszar D rozkładamy na trzy obszary D_1, D_2, D_3 , przy czym obszary D_1 i D_2 leżą w półpłaszczyźnie ujemnej, a obszar D_3 leży w półpłaszczyźnie dodatniej wyznaczonej prostą L (rys. 36.5), stąd

$x+y-1 \leq 0$ dla $(x, y) \in D_1$ lub $(x, y) \in D_2$ oraz $x+y-1 \geq 0$ dla $(x, y) \in D_3$. Zatem

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \rho \left[\iint_{D_1} (x+y-1) dx dy + \iint_{D_2} (x+y-1) dx dy + \iint_{D_3} (x+y-1) dx dy \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \rho \left[\int_{-1}^0 dx \int_{x^2}^1 (x+y-1) dy + \int_0^{x_1} dx \int_{x^2}^{-x+1} (x+y-1) dy + \int_{y_1}^1 dy \int_{1-y}^{\sqrt{y}} (x+y-1) dx \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2} \rho \left(-\frac{11}{30} - \frac{1}{2} x_1 + \frac{5}{6} x_1^3 + \frac{1}{2} x_1^5 - \frac{1}{6} x_1^6 \right), \end{aligned}$$

gdzie $x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. Z kolei

$$B_x = \frac{1}{2} \rho \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2x - 2y) dy = \frac{2}{7} \rho.$$

36.6. Dana jest jednorodna bryła V (o gęstości ρ) ograniczona powierzchniami $x^2 + y^2 = -z + 1$, $z = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$). Znaleźć momenty statyczne względem płaszczyzn układu oraz współrzędne środka ciężkości bryły.

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzoru (1) oraz ze wzorów

$$(a) \quad \xi = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \eta = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \zeta = \frac{M_{xy}}{M}, \quad \text{gdzie} \quad M = \rho \iiint_V dv,$$

określających współrzędne środka ciężkości $S(\xi, \eta, \zeta)$ bryły. Zatem (por. rys. 36.6):

$$M_{xy} = \rho \iint_D dx dy \int_0^{1-x^2-y^2} z dz = \frac{1}{2} \rho \iint_D (1-x^2-y^2)^2 dx dy =$$

$$= \frac{1}{2} \rho \int_0^1 r (1-r^2)^2 dr \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{1}{24} \pi \rho;$$

$$M_{xz} = \rho \iint_D y dx dy \int_0^{1-x^2-y^2} dz = \rho \iint_D y (1-x^2-y^2) dx dy =$$

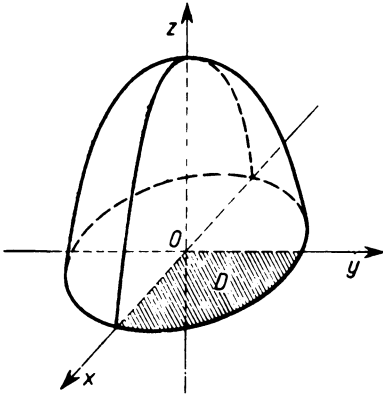
$$= \rho \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 (r^2 - r^4) dr = \frac{2}{15} \rho = M_{yz}.$$

Z kolei

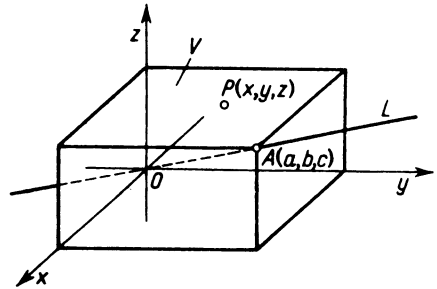
$$M = \rho \iiint_V dv = \rho \iint_D (1-x^2-y^2) dx dy = \rho \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 (r-r^3) dr = \frac{1}{8} \pi \rho,$$

zatem

$$\xi = \frac{2\rho}{15} \cdot \frac{8}{\pi\rho} = \frac{16}{15\pi} = \eta, \quad \zeta = \frac{\pi\rho}{24} \cdot \frac{8}{\pi\rho} = \frac{1}{3}.$$



Rys. 36.6



Rys. 36.7

36.7. Znaleźć momenty M_x i M_O jednorodnej (o gęstości ρ) bryły określonej nierównościami: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzoru (1). Wprowadzając współrzędne sferyczne otrzymujemy

$$M_x = \rho \int_0^{\pi/2} d\psi \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R r^2 \sin \psi r \sin \psi dr = \rho \int_0^{\pi/2} \sin^2 \psi d\psi \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R r^3 dr = \\ = \frac{1}{4} \rho R^4 \frac{1}{2} \pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 \psi d\psi = \frac{1}{32} \pi^2 \rho R^4,$$

$$M_O = \rho \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\psi \int_0^R r^2 \sin \psi r dr = \frac{1}{4} \rho R^4 \frac{1}{2} \pi \int_0^{\pi/2} \sin \psi d\psi = \frac{1}{8} \pi \rho R^4.$$

36.8. Dana jest belka prostopadłościenna jednorodna o gęstości p i długościach krawędzi a, b, c . Znaleźć moment bezwładności belki względem jej przekątnej (tzn. przekątnej prostopadłościanu).

Rozwiązanie. Łatwo zauważyć, że momenty względem każdej z czterech przekątnych są równe. Zatem (rys. 36.7) $B_L = \iiint_V p d^2(P, L) dm$; ale

$$L: \mathbf{R} = t\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = (a, b, c), \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

$$\overline{OP} \times \mathbf{v} = (cy - bz)\mathbf{i} + (az - cx)\mathbf{j} + (bx - ay)\mathbf{k}.$$

Stąd

$$B_L = p \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} [(b^2 + c^2)x^2 + (a^2 + c^2)y^2 - 2abxy - 2(bcy + acx)z + \\ + (a^2 + b^2)z^2] dz = \frac{1}{6} \frac{pabc}{a^2 + b^2 + c^2} (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2).$$

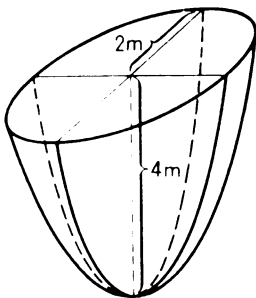
Zadania

36.9. Przypuśćmy, że pod działaniem pewnej siły F punkt materialny P porusza się po osi Ox , przy czym kierunek działania siły pokrywa się z kierunkiem ruchu punktu oraz siła F zmienia się w sposób ciągły w zależności od położenia punktu P , tzn. $F=f(x)$, gdzie f jest funkcją ciągłą. Znaleźć pracę jaką wykona siła F przy przesunięciu punktu P od punktu $A(a)$ do punktu $B(b)$.

36.10. Obliczyć pracę jaką trzeba wykonać, aby wyczerpać wodę napełniającą zbiornik w kształcie walca o wysokości $h=5$ m i promieniu podstawy $r=3$ m.

36.11. Ładunek elektryczny E działa siłą ceE/x^2 na ładunek e znajdujący się w odległości x , gdzie c oznacza stały współczynnik. Przypuśćmy, że skutkiem tego działania jest przesunięcie ładunku e po linii prostej przechodzącej przez punkt o ładunku E z odległości a do odległości b ($b>a$). Obliczyć wykonaną pracę przy tym przesunięciu.

36.12. Jaką pracę trzeba wykonać, aby usypać stos piasku w kształcie stożka o promieniu podstawy $r=1,2$ m i długości wysokości $h=1$ m? Ciężar właściwy piasku wynosi 19613 N/m³ (piasek podnosi się z powierzchni Ziemi).



Rys. 36.8

36.13. Naczynie ma kształt paraboloidy obrotowej (rys. 36.8) o promieniu podstawy $R=2$ m i głębokości $H=4$ m. Ciężar właściwy płynu napełniającego naczynie wynosi 7845 N/m³. Znaleźć pracę jaką trzeba wykonać, aby wyczerpać płyn z naczynia.

36.14. Wymiary piramidy Cheopsa (będącej ostrosłupem prawidłowym) są w przybliżeniu następujące: wysokość 140 m, krawędź podstawy (kwadratu) 200 m. Ciężar właściwy kamienia, z którego zbudowana jest piramida wynosi w przybliżeniu 24517 N/m³. Obliczyć pracę zużytą przy jej budowie na pokonanie siły ciężkości.

36.15. Znaleźć pracę, którą należy wykonać na przewyciężenie siły ciężkości, aby podnieść masę m z powierzchni Ziemi na wysokość h , jeżeli siła przyciągania ziemskiego w odległości x od środka Ziemi wynosi $F=\frac{mg R^2}{x^2}$, gdzie R oznacza promień Ziemi. Jaką prędkość należy nadać ciału, aby rzucone z powierzchni Ziemi pionowo nie wróciło na Ziemię? Opór powietrza pomijamy.

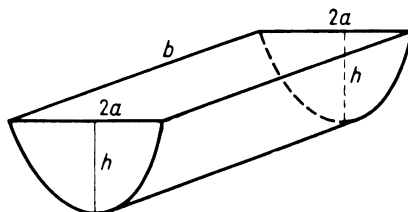
36.16. Obliczyć pracę potrzebną na przewyciężenie siły ciężkości w celu wypompowania cieczy z napełnionego kotła w kształcie walca kołowego zakończonego półkulą. Promień przekroju walca ma długość a , długość wysokości walca wynosi h (długość głębokości kotła wynosi $a+h$), ciężar właściwy cieczy γ .

36.17. Zbiornik ma kształt czworościanu o trzech krawędziach wychodzących z jednego wierzchołka wzajemnie prostopadłych o długościach a , b , c , przy czym krawędzie a i b

są poziome, krawędź c jest pionowo skierowana drugim wierzchołkiem ku dołowi. Obliczyć pracę na przewyciężenie siły ciężkości potrzebną do wypompowania cieczy z tego naczynia. Ciężar właściwy cieczy γ .

36.18. Zbiornik ma kształt stożka ściętego o długościach promieni podstaw: dolnej r , górnej R i długości wysokości h . Obliczyć pracę potrzebną na przewyciężenie siły ciężkości w celu wypompowania cieczy z pełnego naczynia. Ciężar właściwy cieczy γ .

36.19. Obliczyć pracę jaką należy wykonać na przewyciężenie siły ciężkości, aby wyczerpać wodę z pełnego naczynia w kształcie walca parabolicznego o wymiarach podanych na rys. 36.9.



Rys. 36.9

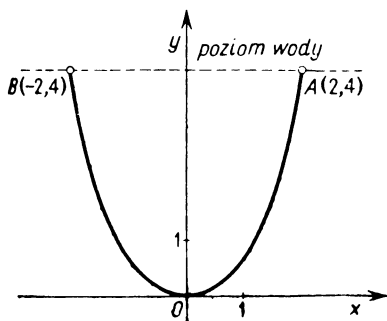
36.20. Obliczyć pracę potrzebną na przewyciężenie siły ciężkości do wykopania rowu o długości k i przekroju poprzecznym w kształcie trójkąta o długości podstawy a i długości wysokości h . Ciężar właściwy Ziemi γ .

36.21. Obliczyć siłę nacisku wody na pionową ściankę w kształcie prostokąta o długościach boków a i b zanurzoną w naczyniu w taki sposób, że bok o długości a znajduje się na swobodnej powierzchni wody.

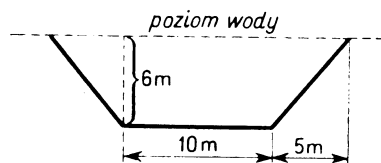
36.22. Obliczyć siłę nacisku wody na pionową ściankę prostokątną o szerokości 8 cm i wysokości 12 cm zanurzoną w wodzie w taki sposób, że górna podstawa prostokąta znajduje się 5 cm poniżej powierzchni wody.

36.23. Obliczyć siłę nacisku wody na pionową ściankę trójkąta o podstawie 10 cm i wysokości 4 cm zanurzoną w wodzie w taki sposób, że podstawa jest równoległa do swobodnej powierzchni wody, a przeciwległy wierzchołek podstawy znajduje się na powierzchni wody.

36.24. Obliczyć siłę nacisku wody na pionową ściankę w kształcie segmentu parabolicznego, o wymiarach (w metrach) i położeniu podanym na rysunku 36.10.



Rys. 36.10



Rys. 36.11

36.25. Obliczyć siłę nacisku wody na pionową ściankę w kształcie trapezu równoramiennego o wymiarach i położeniu podanym na rysunku 36.11.

36.26. Wyznaczyć parcie cieczy (siłę nacisku) wypełniającej całkowicie puszkę w kształcie walca kołowego o długości promienia podstawy r i długości wysokości h na: a) płaską ściankę, jeżeli oś walca ustawiona jest poziomo, b) boczną powierzchnię, jeżeli oś walca ustawiona jest pionowo. Ciężar właściwy cieczy γ .

36.27. Obliczyć parcie cieczy na płytkę kwadratową o długości boku a , zanurzoną pionowo w cieczy tak, że jeden z jej wierzchołków dotyka powierzchni cieczy, a jedna z przekątnych jest pozioma. Ciężar właściwy cieczy γ .

36.28. Obliczyć parcie cieczy na poprzeczną ściankę koryta o przekroju półkolistym o długości promienia r napełnionego całkowicie cieczą o ciężarze właściwym γ .

36.29. Obliczyć parcie cieczy na płytkę w kształcie rombu o długości boku a i kącie ostrym $\frac{1}{3}\pi$ zanurzoną pionowo w cieczy tak, że jeden z jego wierzchołków przy kącie ostrym dotyka powierzchni cieczy, a przekątna rombu wychodząca z tego wierzchołka jest ustawiona pionowo. Ciężar właściwy cieczy γ .

36.30. Puskę walcową o przekroju eliptycznym o długościach osi a i b napełniono do połowy cieczą o ciężarze właściwym γ i następnie po hermetycznym zamknięciu z góry położono poziomo w ten sposób, że oś elipsy a i oś walca są poziome, a oś b pionowa. Obliczyć parcie cieczy na płaskie ścianki puszki.

36.31. Znaleźć moment statyczny względem osi Ox łuku krzywej o równaniu $y = \sqrt{x}$, $x \in \langle 1, 4 \rangle$ ⁽¹⁾.

36.32. Znaleźć moment statyczny względem osi Oy łuku krzywej $y = x^2$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

36.33. Znaleźć współrzędne środka ciężkości łuku krzywej określonej w przykładzie 36.3.

36.34. Znaleźć współrzędne środków ciężkości łuków krzywych określonych równaniami:

$$\text{a) } y = \sqrt{r^2 - x^2}, |x| \leq r; \quad \text{b) } f(x) = a \cosh \frac{x}{a}, |x| \leq a;$$

$$\text{c) } x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

36.35. Znaleźć moment bezwładności odcinka AB o długości $d(A, B) = 1$ względem osi leżącej z nim w jednej płaszczyźnie wiedząc, że koniec A odcinka jest odległy od osi o k , a koniec B o h .

36.36. Znaleźć momenty bezwładności łuków krzywych o równaniach:

$$\text{a) } f(x) = e^x, \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ względem osi } Ox;$$

$$\text{b) } f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad |x| \leq r \text{ względem osi } Ox \text{ i } Oy.$$

$$\text{c) } x(t) = a \cos^3 t, \quad y(t) = a \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi \text{ względem osi } Ox \text{ i } Oy.$$

⁽¹⁾ W tym i w następnych zadaniach będziemy zakładali, że rozpatrywane łuki krzywych oraz figury płaskie i przestrzenne są jednorodnie o gęstości 1.

36.37. Znaleźć momenty statyczne względem osi układu trójkąta ograniczonego prostymi $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $x=0$, $y=0$ ($a>0$, $b>0$).

36.38. Znaleźć współrzędne środków ciężkości figur ograniczonych krzywymi o równaniach:

a) $x+y=a$, $x=0$, $y=0$; b) $y=\sqrt{2px}$, $y=0$, $x=a$;

c) $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $x=0$, $y=0$ ($x\geq 0$); d) $y=\ln x$, $y=0$, $x=e$;

e) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $y=0$, $x=0$;

f) $x(t)=a(t-\sin t)$, $y(t)=a(1-\cos t)$, $0\leq t\leq 2\pi$, $y=0$;

g) $y=\sin x$, $0\leq x\leq \pi$, $y=0$; h) $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$.

U w a g a. Występujące w zadaniu 36.38 parametry są dodatnie.

36.39. Znaleźć momenty M_x figur ograniczonych krzywymi o równaniach:

a) $f(x)=\frac{2}{1+x^2}$, $y=x^2$; b) $y=\sin x$, $\frac{1}{6}\pi\leq x\leq\frac{5}{6}\pi$, $y=\frac{1}{2}$.

36.40. Udowodnić twierdzenia *Guldina*:

T_1 . Objętość bryły powstałej przez obrót figury płaskiej F dookoła osi leżącej w płaszczyźnie figury F i nie przecinającej jej, równa się iloczynowi pola figury F przez długość okręgu utworzonego przez obrót dookoła osi środka ciężkości figury F .

T . Pole powierzchni utworzonej przez obrót krzywej dookoła osi, leżącej w płaszczyźnie krzywej i nie przecinającej jej, równa się iloczynowi długości łuku tej krzywej przez długość okręgu utworzonego przez obrót dookoła osi środka ciężkości tej krzywej.

36.41. Sześciokąt foremny o boku a obraca się dookoła jednego z boków. Znaleźć objętość powstałej przy tym obrocie bryły.

36.42. Korzystając z twierdzenia T_2 (zadanie 36.40) znaleźć pole powierzchni torusa (por. przykład 16.4 i zadanie 34.31f).

36.43. Znaleźć moment bezwładności koła o promieniu r względem jego średnicy.

36.44. Znaleźć moment bezwładności trójkąta o długości podstawy a i długości wysokości h względem podstawy.

36.45. Znaleźć moment bezwładności kwadratu o długości boku a względem jego przekątnej.

36.46. Znaleźć momenty B_x i B_y figury ograniczonej elipsą $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.

36.47. Znaleźć moment bezwładności koła o promieniu R względem stycznej.

36.48. Znaleźć moment statyczny sześciokąta foremnego względem boku, jeżeli długość boku wynosi a .

36.49. Znaleźć środek ciężkości wycinka kołowego o promieniu R odpowiadającego kątowni środkowemu α .

36.50. Znaleźć momenty bezwładności:

a) kwadratu o długości boku a względem wierzchołka;

b) prostokąta o długościach boków a i b względem punktu przecięcia przekątnych.

36.51. Znaleźć moment bezwładności figury ograniczonej krzywymi $y^2 = ax$ i $x = a$ względem prostej $y = -a$.

36.52. Znaleźć moment bezwładności figury ograniczonej krzywymi: $xy = 4$ i $x + y = 5$ względem prostej $y = x$.

36.53. Udowodnić, że moment bezwładności pierścienia kołowego względem jego środka jest dwa razy większy od momentu bezwładności tego pierścienia względem dowolnej osi leżącej w jednej z nim płaszczyźnie i przechodzącej przez środek pierścienia.

36.54. Dany jest obszar regularny $V \subset \mathbb{R}^3$ i funkcja gęstości $\rho: V \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\rho \in C^0(V)$. Wyprowadzić wzory na momenty statyczne i bezwładności obszaru V względem początku układu, osi układu i płaszczyzn układu.

36.55. Znaleźć współrzędne środków ciężkości brył ograniczonych powierzchniami o równaniach:

a) $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$;

c) $z = x^2 + y^2$, $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; d) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;

e) $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$ ($z > 0$); f) $x^2 + y^2 = z$, $x + y + z = 0$.

36.56. Znaleźć momenty bezwładności względem płaszczyzn układu, brył ograniczonych powierzchniami o równaniach:

a) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$);

b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{2}{5}z$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$.

36.57. Znaleźć momenty bezwładności względem osi Oz brył ograniczonych powierzchniami o równaniach:

a) $x = 0$, $x = a$, $y = b$, $z = 0$, $z = c$;

b) $z^2 = 2ax$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = ax$; c) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x^2 + y^2 = z^2$ ($z > 0$).

36.58. Znaleźć momenty bezwładności względem płaszczyzn układu, osi układu i początku układu, stożka jednorodnego (o gęstości ρ) określonego nierównościami: $z^2 \geq x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq h$.

36.59. Znaleźć moment bezwładności kuli o promieniu R względem jej średnicy.

36.60. Znaleźć moment bezwładności kuli o promieniu R względem stycznej do tej kuli.

36.61. Znaleźć moment bezwładności obrotowego stożka ściętego o promieniach podstaw a i b i długości wysokości h względem osi stożka.

36.62. Znaleźć wzór na moment bezwładności obszaru regularnego $V \subset \mathbf{R}^3$ o gęstości objętościowej $\rho: V \rightarrow \mathbf{R}_+$, $\rho \in C^0(V)$ względem prostej

$$L: \mathbf{R} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{v} = (2, 0, 1), \quad \mathbf{r}_0 = (1, 2, -1).$$

36.63. Dana jest półkula jednorodna (o gęstości ρ) o promieniu r i płaszczyzna H równoległa do podstawy półkuli i oddalona od niej o d jednostek długości. Znaleźć: a) moment statyczny półkuli względem płaszczyzny H ; b) moment bezwładności półkuli względem prostej położonej na płaszczyźnie H i przechodzącej przez oś półkuli prostopadłą do H ; c) moment bezwładności półkuli względem punktu przecięcia płaszczyzny H z osią półkuli prostopadłą do H .

36.64. Wyprowadzić wzór (1).

Odpowiedzi

36.9. $L = \int_a^b f(x) dx$. **36.10.** $L = 3465383$ dżula.

36.11. $L = ceE \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$, jeżeli $b \rightarrow +\infty$, to $L = \frac{ceE}{a}$.

36.12. $L \approx 7397$ dżula. **36.13.** $L \approx 262908$ dżula. **36.14.** $L \approx 159903 \cdot 10^7$ dżula.

36.15. $L = \frac{mghR^2}{R+h}$, $\frac{mv^2}{2} \geq mgR^2 \int_R^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = mgR \Rightarrow v \geq \sqrt{2gR}$.

36.16. $\frac{1}{12} \pi \gamma a^2 (3a^2 + 6h^2 + 8ah)$. **36.17.** $L = \frac{abc^2}{12} \gamma$.

36.18. $L = \frac{\pi \gamma h^2}{12} (R^2 + 3r^2 + 2Rr)$. **36.19.** $L = \frac{8}{15} abh^2$.

36.20. $L = \frac{1}{8} \pi \gamma a k h^2$. **36.21.** $F = \frac{1}{2} ab^2$. **36.22.** $F = 10,3 \text{ N}$.

36.23. $F \approx 0,52 \text{ N}$. **36.24.** $F \approx 0,17 \text{ MN}$. **36.25.** $F \approx 2,3 \text{ MN}$.

36.26. a) $F = \pi \gamma r^3$; b) $F = \pi \gamma r h^2$. **36.27.** $F = \frac{1}{8} a^3 (5\sqrt{2} - 4) \gamma$.

36.28. $F = \frac{2}{3} r^3 \gamma$. **36.29.** $F = \frac{3}{4} a^3 \gamma$. **36.30.** $F = \frac{1}{12} ab^2 \gamma$.

36.31. $M_x = \frac{1}{12} (17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$. **36.32.** $M_y = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1)$.

36.33. $\xi = \frac{\int_a^b x \sqrt{1+f'^2(x)} dx}{L}$, $\eta = \frac{\int_a^b f(x) \sqrt{1+f'^2(x)} dx}{L}$, gdzie $L = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)} dx$.

36.34. a) $P\left(0, \frac{2r}{\pi}\right)$; b) $P\left(0, \frac{a}{4} \cdot \frac{2 + \sinh 2}{\sinh 1}\right)$; c) $P\left(\pi a, \frac{4}{3} a\right)$.

$$36.35. B = \frac{1}{3}(k^2 + kh + h^2).$$

$$36.36. a) B_x = \frac{1}{3}[(1+e^2)\sqrt{1+e^2} - 2\sqrt{2}]; \quad b) B_x = B_y = \frac{1}{2}\pi r^3; \quad c) B_x = B_y = \frac{3}{8}a^3.$$

$$36.37. M_x = \frac{1}{8}ab^2, \quad M_y = \frac{1}{8}a^2b.$$

$$36.38. a) P\left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a\right); \quad b) P\left(\frac{3}{5}a, \frac{3}{8}\sqrt{2pa}\right); \quad c) P\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}\right);$$

$$d) P\left[\frac{1}{4}(e^2+1), \frac{1}{2}(e-2)\right]; \quad e) P\left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a\right);$$

$$f) P(\pi a, \frac{5}{6}a); \quad g) P\left(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{8}\pi\right); \quad h) P\left(\frac{9}{20}, \frac{9}{20}\right).$$

$$36.39. a) M_x = \frac{1}{2}\pi + \frac{4}{3}; \quad b) M_x = \frac{1}{12}\pi + \frac{1}{8}\sqrt{3}. \quad 36.41. V = \frac{9}{2}\pi a^3. \quad 36.42. P = 4\pi^2 ab.$$

$$36.43. B = \frac{1}{4}\pi r^4. \quad 36.44. B = \frac{1}{12}ah^3. \quad 36.45. B = \frac{1}{12}a^4.$$

$$36.46. B_x = \frac{1}{4}\pi ab^3, \quad B_y = \frac{1}{4}\pi a^3b. \quad 36.47. B = \frac{5}{4}\pi R^4. \quad 36.48. \frac{9}{4}a^3.$$

36.49. Środek ciężkości leży na dwusiecznej kąta α w odległości $\frac{4}{3}R \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\alpha}$ od środka koła.

$$36.50. a) \frac{2}{3}a^4; \quad b) \frac{1}{12}ab(a^2 + b^2). \quad 36.51. \frac{8}{5}a^4. \quad 36.52. 16 \ln 2 - \frac{75}{8}.$$

$$36.54. M_0 = \iiint_V \rho(x, y, z) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv, \quad M_x = \iiint_V \rho(x, y, z) \sqrt{y^2 + z^2} dv,$$

$$M_y = \iiint_V \rho(x, y, z) \sqrt{x^2 + z^2} dv, \quad M_z = \iiint_V \rho(x, y, z) \sqrt{x^2 + y^2} dv,$$

$$M_{xy} = \iiint_V \rho(x, y, z) z dv, \quad M_{xz} = \iiint_V \rho(x, y, z) y dv,$$

$$M_{yz} = \iiint_V \rho(x, y, z) x dv,$$

momenty bezwładności otrzymujemy z wyżej podanych wzorów zastępując w nich wyrażenie „ $\rho(x, y, z) f_1(x, y, z)$ ” wyrażeniem „ $\rho(x, y, z) f_1^2(x, y, z)$ ”.

$$36.55. a) S\left(\frac{1}{4}a, \frac{1}{4}a, \frac{1}{4}a\right); \quad b) S\left(0, 0, \frac{3}{4}c\right); \quad c) S\left(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a, \frac{7}{30}a^2\right),$$

$$d) S\left(\frac{3}{8}a, \frac{3}{8}a, \frac{3}{8}a\right); \quad e) S\left(0, 0, \frac{3}{8}a\right); \quad f) S\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right).$$

$$36.56. a) B_{xy} = \frac{1}{60}abc^3, \quad B_{xz} = \frac{1}{60}ab^3c, \quad B_{yz} = \frac{1}{60}a^3bc,$$

$$b) B_{xy} = \frac{4}{15}\pi abc^3, \quad B_{xz} = \frac{4}{15}\pi ab^3c, \quad B_{yz} = \frac{4}{15}\pi a^3bc;$$

$$c) B_{xy} = 2625\pi; \quad B_{xz} = 360\pi, \quad B_{yz} = 160\pi.$$

$$36.57. a) \frac{1}{3}abc(a^2 + b^2); \quad b) \frac{32}{135}\sqrt{2}a^5; \quad c) \frac{4}{15}\pi(4\sqrt{2} - 5),$$

$$36.58. B_{xy} = \frac{1}{3}\pi\rho h^5, \quad B_{xz} = B_{yz} = \frac{1}{20}\pi\rho h^5, \quad B_x = B_y = \frac{1}{4}\pi\rho h^5,$$

$$B_z = \frac{1}{10}\pi\rho h^5, \quad B_0 = \frac{3}{10}\pi\rho h^5.$$

$$36.59. \frac{8}{15}\pi R^5. \quad 36.60. \frac{28}{15}\pi R^5. \quad 36.61. \frac{1}{10}\pi h(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4).$$

$$36.62. B_L = \frac{1}{5} \iiint_V \rho(x, y, z)(x^2 + 5y^2 + 4z^2 - 4xz - 6x - 20y + 12z + 29) dv.$$

$$36.63. a) \frac{1}{12}\pi pr^3(3r + 8d); \quad b) \frac{4}{15}\pi pr^5; \quad c) \frac{1}{30}\pi pr^3(12r^2 + 20d^2 + 15rd).$$

ELEMENTY GEOMETRII RÓŻNICZKOWEJ

§ 37. KRZYWE W \mathbf{R}^3

37.1. Funkcję wektorową $\mathbf{r}: T_p \ni t \rightarrow \mathbf{r}(t) \in \mathbf{R}^3$ (T_p oznacza zbiór spójny na \mathbf{R} , por. też § 23) nazywamy *lokalnie wzajemnie jednoznaczną*, jeżeli dla każdego $t_0 \in T_p$ istnieje otoczenie domknięte $\bar{U}(t_0; \eta) \subset T_p$, na którym \mathbf{r} jest różnowartościowa. Jeżeli $T_p = \langle a, b \rangle$, to dla punktów a i b mówimy o *otoczeniach domkniętych jednostronnych*.

Def. 1. Funkcję wektorową \mathbf{r} lokalnie wzajemnie jednoznaczną na T_p i ciągłą na T_p nazywamy *opisem parametrycznym krzywej (przebiegiem krzywej)*.

Zbiór $\mathbf{r}(T_p) \subset \mathbf{R}^3$ nazywamy *hodografem opisu \mathbf{r}* . Łatwo sprawdzić (por. zadanie 37.6), że różne opisy parametryczne mogą określać te same hodografy.

Def 2. Mówimy, że opis $\mathbf{r}_1: T_p \ni t \rightarrow \mathbf{r}_1(t) \in \mathbf{R}^3$ jest *równoważny opisowi $\mathbf{r}_2: U_p \ni u \rightarrow \mathbf{r}_2(u) \in \mathbf{R}^3$* , jeżeli istnieje funkcja $g: U_p \ni u \rightarrow g(u) \in T_p$ spełniająca warunki: 1° $g \in C^0(U_p)$, 2° g odwzorowuje U_p na T_p , 3° g jest rosnącą na U_p , 4° $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 \circ g$.

Udowadnia się, (por. przykład 37.1), że relacja równoważności \approx opisów parametrycznych w zbiorze Φ wszystkich opisów parametrycznych jest równoważnością. Z T_1 § 1 otrzymujemy więc przestrzeń ilorazową $|\Phi| \approx$.

Def. 3. Klasy abstrakcji opisów parametrycznych nazywamy *krzywymi zorientowanymi*.

Krzywą zorientowaną będziemy określali, podając dowolnego jej reprezentanta, tzn. opis $\mathbf{r}: T_p \rightarrow \mathbf{R}^3$ należący do klasy abstrakcji wyznaczającej krzywą, przy czym równanie

$$(\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t \in T_p) \Leftrightarrow (x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), t \in T_p),$$

nazywamy *równaniem krzywej zorientowanej*.

Z def. 3 wynika, że krzywa zorientowana \mathbf{r} określa hodograf $\mathbf{r}(T_p)$ jednoznacznie oraz określa jednoznacznie uporządkowanie punktów na hodografie, które nazywamy *orientacją* lub *zwrotem krzywej*. Jeżeli w def. 2 warunek 3° zastąpimy warunkiem: „funkcja g jest malejąca na U_p ”, to otrzymujemy *opisy przeciwne* i w konsekwencji *krzywe zorientowane przeciwnie*, jako *klasy abstrakcji opisów przeciwnych*. Krzywe zorientowane przeciwnie określają na hodografie orientacje przeciwnie.

W dalszym ciągu obrazu $\mathbf{r}(t) \in \mathbf{r}(T_p)$, $t \in T_p$ będziemy interpretowali jako promienie wodzące w \mathbf{R}^3 (por. § 8). Jeżeli $\mathbf{r}: T_p = \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbf{R}^3$ jest krzywą zorientowaną, to punkt $\mathbf{r}(a)$ nazywamy *początkiem krzywej*, punkt $\mathbf{r}(b)$ – *końcem krzywej*. Jeżeli $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, to

krzywa nazywa się *krzywą zamkniętą*, jeżeli ponadto \mathbf{r} jest różnowartościowa na $\langle a, b \rangle$ lub (a, b) , to krzywa nazywa się *krzywą zamkniętą zwykłą*, lub *krzywą Jordana*.

Krzywa zorientowana $\mathbf{r}: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbf{R}^3$, gdzie \mathbf{r} jest różnowartościowa na $\langle a, b \rangle$ nazywa się *łukiem zwykłym zorientowanym*. Krzywa zorientowana nazywa się *regularną klasy C^n* , jeżeli wśród jej opisów parametrycznych istnieje opis $\mathbf{r}: T_p \rightarrow \mathbf{R}^3$, gdzie $(\mathbf{r} \in C^n(T_p)) \wedge (\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ na T_p). Krzywa zorientowana nazywa się *przedziałami regularną klasy C^n* , jeżeli wśród jej opisów parametrycznych istnieje taki opis $\mathbf{r}: T_p \rightarrow \mathbf{R}^3$, że każdy przedział skończony $\langle a, b \rangle \subset T_p$ jest sumą skończonej liczby przedziałów, na których $\mathbf{r} \in C^n \wedge \mathbf{r}' \neq \mathbf{0}$.

W dalszym ciągu zamiast krzywa zorientowana będziemy pisali *krzywa*.

Niech $\mathbf{r}: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbf{R}^3$ będzie krzywą klasy C^1 . Liczbę

$$(1) \quad \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} dt$$

nazywamy *długością krzywej*. Udowadnia się, że długość krzywej nie zależy od wyboru reprezentanta krzywej zorientowanej (jest własnością krzywej).

Opis parametryczny $\mathbf{h} = \mathbf{r} \circ g$, określony wzorem $\mathbf{h}(s) = \mathbf{r}(g(s))$, $s \in \langle 0, l \rangle$, gdzie g jest funkcją odwrotną funkcji

$$p: \langle a, b \rangle \ni t \rightarrow p(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)| du \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$$

oraz

$$l = \int_a^b |\mathbf{r}'(u)| du$$

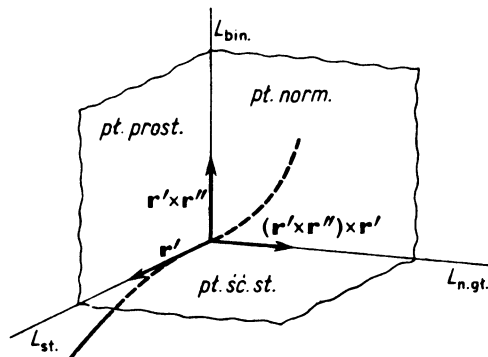
nazywamy *opisem naturalnym* lub *opisem łukowym krzywej* $\mathbf{r}: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbf{R}^3$.

37.2. Weźmy krzywą

$$\mathbf{r}: T_p \rightarrow \mathbf{R}^3$$

(2)

klasy C^2 , dla której $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' \neq \mathbf{0}$ na T_p . W każdym punkcie krzywej określone są jednoznacznie trzy proste wzajemnie prostopadłe i trzy płaszczyzny wzajemnie prostopadłe tworzące tzw. *trójścian Freneta* (rys. 37.1):



Rys. 37.1

prosta styczna

$$(\mathbf{R} = \mathbf{r}(t) + u\mathbf{r}'(t)) \Leftrightarrow (x = \varphi(t) + \varphi'(t)u, y = \psi(t) + \psi'(t)u, z = \chi(t) + \chi'(t)u, u \in \mathbb{R}),$$

wektor $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}'(t) \left[\mathbf{t} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{r}'(t) \right]$ nazywamy *wektorem stycznym* [*wersorem stycznym*];

płaszczyzna normalna:

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t) = 0 \Leftrightarrow (\varphi'(t)(x - \varphi(t)) + \psi'(t)(y - \psi(t)) + \chi'(t)(z - \chi(t)) = 0);$$

płaszczyzna ściśle styczna:

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(t)) \bullet (\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) = 0,$$

wektor $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$ [$\mathbf{b} = \mathbf{r}_2^w$] nazywamy *wektorem binormalnym* [*wersorem binormalnym*];

prosta binormalna:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(t) + u(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)), \quad u \in \mathbb{R};$$

prosta normalna główna:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(t) + u((\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \times \mathbf{r}'(t)), \quad u \in \mathbb{R},$$

wektor $\mathbf{r}_3 = (\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \times \mathbf{r}'(t)$ [$\mathbf{n} = \mathbf{r}_3^w$] nazywamy *wektorem normalnym głównym* [*wersorem normalnym głównym*];

płaszczyzna prostująca:

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}_3 = 0.$$

37.3. Niech P_0 będzie danym punktem (dla $t = t_0$), P zmiennym punktem (dla t) krzywej (2).

Jeżeli istnieje granica $\lim_{\substack{\Delta s \rightarrow 0 \\ (P \rightarrow P_0)}} \frac{|\Delta \varphi|}{\Delta s} = k$, gdzie $\Delta \varphi = \sphericalangle(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}'(t_0))$, $\Delta s = d\ell(\widetilde{PP_0})$ (por.

rys. 37.2), to nazywamy ją *krzywizną krzywej (2) w punkcie P_0* .

Jeżeli istnieje granica $\lim_{\substack{\Delta \psi \rightarrow 0 \\ (P \rightarrow P_0)}} \frac{\Delta \psi}{\Delta s} = \tau$, gdzie $\Delta \psi = \sphericalangle[(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)), (\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0))]$

($\Delta \psi$ jest kątem zorientowanym), to nazywamy ją *skreśleniem (torsją) krzywej (2) w punkcie P_0* . Udowadnia się wzory:

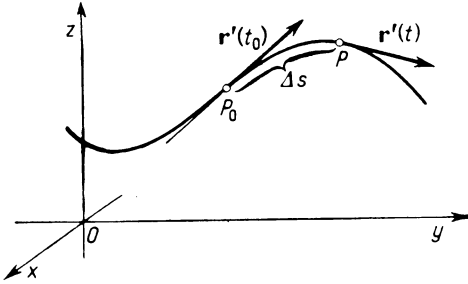
$$(3) \quad k = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}, \quad t \in T_P,$$

$$(4) \quad \tau = \frac{[\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''']}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2},$$

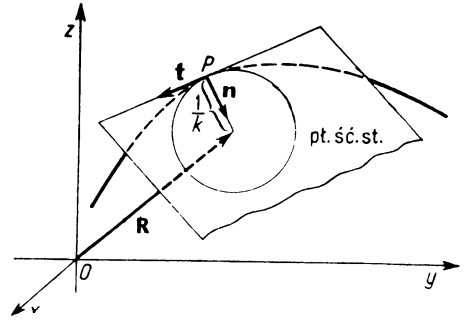
jeżeli \mathbf{r} jest klasy C^3 na T_p , gdzie

$$[\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}'''] = \begin{vmatrix} \varphi' & \psi' & \chi' \\ \varphi'' & \psi'' & \chi'' \\ \varphi''' & \psi''' & \chi''' \end{vmatrix}.$$

Uwaga. W przypadku krzywizny założenie o krzywej (2) można osłabić przyjmując $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \mathbf{o}$, wówczas $k=0$.



Rys. 37.2



Rys. 37.3

Okręgiem krzywiznowym (okręgiem ściśle stycznym) krzywej (2) w punkcie P nazywamy okrąg leżący w płaszczyźnie ściśle stycznej w P , mający środek (zwany *środkiem krzywizny* krzywej w P) na półprostej wyznaczonej przez wektor \mathbf{n} w punkcie P i o promieniu (zwanym *promieniem krzywizny*) $1/k$ (por. rys. 37.3). Promień wodzący środka krzywizny:

$$(5) \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} + \frac{1}{k} \mathbf{n}.$$

Zakładając, że $\mathbf{r} \in C^3(T_p) \wedge \bigwedge_{t \in T_p} \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' \neq \mathbf{o}$, można związki między wektorami \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} , $\mathbf{t} \in T_p$, krzywizną k i torsją τ przedstawić w postaci wzorów Freneta:

$$(6) \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau\mathbf{n},$$

gdzie s jest parametrem naturalnym.

Przykłady

37.1. Udowodnić, że relacja równoważności opisów parametrycznych w zbiorze Φ wszystkich opisów jest równoważnością w sensie def. z § 1.

Dowód. a) Funkcja $g: T_p \ni t \rightarrow t \in T_p$ spełnia warunki 1° - 4° dla dwóch tych samych opisów $\mathbf{r}_1: T_p \ni t \rightarrow \mathbf{r}_1(t) \in \mathbb{R}^3$, zatem relacja jest zwrotna.

β) Załóżmy, że opisy \mathbf{r}_1 i \mathbf{r}_2 są równoważne. Z warunków 3° i 2° wynika, że istnieje funkcja odwrotna $g^{-1}: T_p \ni t \rightarrow g^{-1}(t) \in U_p$ spełniająca jak łatwo zauważyć warunki 1°,

2° i 3°, przy czym

$$\mathbf{r}_2 \circ g^{-1} = (\mathbf{r}_1 \circ g) \circ g^{-1} = \mathbf{r}_1 \circ (g \circ g^{-1}) = \mathbf{r}_1,$$

tzn. spełniony jest również warunek 4°. Wynika stąd, że opisy \mathbf{r}_2 i \mathbf{r}_1 są równoważne, czyli relacja \approx jest symetryczna.

γ) Załóżmy równoważność opisów

$$\mathbf{r}_1: T_p \ni t \rightarrow \mathbf{r}_1(t) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{i} \quad \mathbf{r}_2: U_p \ni u \rightarrow \mathbf{r}_2(u) \in \mathbb{R}^3$$

oraz

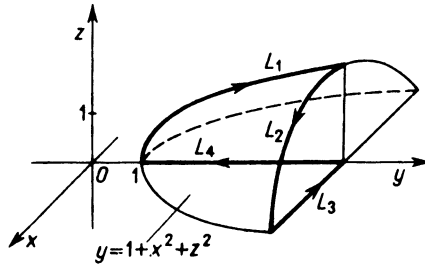
$$\mathbf{r}_2: U_p \ni u \rightarrow \mathbf{r}_2(u) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{i} \quad \mathbf{r}_3: V_p \ni v \rightarrow \mathbf{r}_3(v) \in \mathbb{R}^3.$$

Należy wykazać, że opisy \mathbf{r}_1 i \mathbf{r}_3 są równoważne. Z założeń wynika, że istnieją funkcje

$$g: U_p \ni u \rightarrow g(u) \in T_p, \quad k: V_p \ni v \rightarrow k(v) \in U_p,$$

z których każda spełnia warunki 1° - 4°. Wynika stąd, że istnieje funkcja $h = g \circ k: V_p \rightarrow T_p$ spełniająca warunki 1°, 2°, 3° oraz taka, że $\mathbf{r}_1 \circ h = \mathbf{r}_1 \circ (g \circ k) = (\mathbf{r}_1 \circ g) \circ k = \mathbf{r}_2 \circ k = \mathbf{r}_3 \Rightarrow$ (zachodzi 4°) \Rightarrow (opisy \mathbf{r}_1 i \mathbf{r}_3 są równoważne). \square

37.2. Znaleźć równania krzywej kawałkami regularnej zorientowanej danej na rysunku 37.4, gdzie łuk L_1 leży w płaszczyźnie Oyz , łuk L_2 w płaszczyźnie $y=5$, łuk L_3 jest odcinkiem w płaszczyźnie Oxy oraz łuk L_4 jest odcinkiem osi Oy .



Rys. 37.4

Rozwiązanie. Przecinając powierzchnię $y = 1 + x^2 + z^2$ kolejno płaszczyznami: $x=0$, $y=5$ stwierdzamy, że L_1 jest łukiem paraboli $y = z^2 + 1$, $x=0$, L_2 jest łukiem okręgu $x^2 + z^2 = 4$, $y=5$. Stąd rozpatrywana krzywa zamknięta $K = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$, gdzie

$$L_1: \mathbf{r}_1(t) = 0\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t \in \langle 0, 2 \rangle,$$

$$L_2: \mathbf{r}_2(u) = 2 \sin u \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2 \cos u \mathbf{k}, \quad u \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle,$$

$$L_3: \mathbf{r}_3(x) = -x\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}, \quad x \in \langle -2, 0 \rangle,$$

$$L_4: \mathbf{r}_4(y) = 0\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}, \quad y \in \langle -5, -1 \rangle.$$

Uwaga. Jeżeli $\mathbf{r} : \langle a, b \rangle \ni t \rightarrow \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ jest łukiem zwykłym, to z definicji łuku zwykłego wynika, że $\mathbf{r}_1 : \langle -b, -a \rangle \ni u \rightarrow \mathbf{r}_1(u) = \mathbf{r}(-u) \in \mathbb{R}^3$ jest łukiem zorientowanym przeciwnie do łuku \mathbf{r} (por. zad. 37.8g).

- 37.3.** Dana jest krzywa K o równaniu $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$, $t \in \mathbb{R}$. Dla krzywej K znaleźć:
 a) Wersor normalny główny dla $t=1$; b) równanie płaszczyzny prostującej dla $t=2$;
 c) wektor $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ dla $t=1$, gdzie s jest długością łuku krzywej K , \mathbf{t} – wersorem stycznym.

Rozwiązanie. Korzystamy z punktu 37.2 oraz ze wzoru (1).

- a) $\mathbf{n} = \mathbf{r}_3^*$, gdzie

$$\mathbf{r}_3 = (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}', \quad \mathbf{r}' = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'' = 0\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}' = (-2t^3 - t)\mathbf{i} + (1 - t^4)\mathbf{j} + (t^3 + 2t)\mathbf{k} = \mathbf{r}_3 \Rightarrow \mathbf{r}_3(1) = -3\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{n}(1) = \frac{1}{|\mathbf{r}_3(1)|} \mathbf{r}_3(1) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{k}.$$

- b) Płaszczyzna prostująca $H : (\mathbf{R} - \mathbf{r}(2)) \bullet \mathbf{r}_3(2) = 0$, gdzie

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}(2) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \frac{8}{3}\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_3(2) = -18\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 12\mathbf{k},$$

skąd

$$(-18(x-2) - 15(y-2) + 12(z - \frac{8}{3}) = 0) \Leftrightarrow (18x + 15y - 12z - 34 = 0).$$

- c) $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}} (\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k})$. W celu znalezienia dt/ds zauważymy, że (por. (1))

$$s = s(t) = \int_{t_0}^t |\mathbf{r}'(t)| dt \Rightarrow \frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1+t^2+t^4} \wedge \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

Ale $\mathbf{t} = \mathbf{t}(t) = \mathbf{t}(s^{-1}(s))$, skąd

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= \frac{d\mathbf{t}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}}{|\mathbf{r}'(t)|} \right) \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} = \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|^3} \left(|\mathbf{r}'(t)|(\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}) - \frac{t+2t^3}{|\mathbf{r}'(t)|} (\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}) \right) = \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|^4} (-(t+2t^3)\mathbf{i} + (1-t^4)\mathbf{j} + (2t+t^3)\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Dla $t=1$ otrzymujemy

$$\frac{dt}{ds} = -\frac{1}{3}\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}.$$

Uwaga. Wektor $\frac{dt}{ds}$ można również znaleźć, korzystając z pierwszego wzoru Freneta (por. (6)):

$$\frac{dt}{ds} = k\mathbf{n}. \text{ Mianowicie:}$$

$$k = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3} \Rightarrow \left(k(1) = \frac{\sqrt{1+4+1}}{(\sqrt{3})^3} = \frac{\sqrt{2}}{3}, \mathbf{n}(1) = \frac{-1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k} \right),$$

skąd

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k} \right) = \frac{1}{3}(-\mathbf{i} + \mathbf{k}).$$

37.4. Dana jest linia śrubowa K o równaniu

$$(a) \quad \mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + b t \mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}.$$

Wykazać, że: a) zbiór wszystkich środków krzywizny krzywej K jest również linią śrubową (oznaczamy ją np. K_1) o tej samej osi oraz że zbiór wszystkich środków krzywizny otrzymanej krzywej K_1 jest krzywą K ; b) iloczyn skreń krzywych K i K_1 w odpowiadających sobie punktach jest równy kwadratowi krzywizny krzywej K w tym punkcie. Korzystając z a) i b) znaleźć równania okręgów krzywiznowych krzywych K i K_1 dla $t = \frac{1}{2}\pi$.

Rozwiązanie. a) Korzystamy ze wzoru (5), przy czym wygodniej będzie przedstawić (a) w parametryzacji łukowej, ponieważ (5) przyjmuje wtedy postać (por. zadanie 37.19)

$$(a_1) \quad \mathbf{R}(s) = \mathbf{r}(s) + \frac{1}{|\mathbf{r}''(s)|^2} \mathbf{r}''(s).$$

Dla krzywej (a) mamy:

$$\mathbf{r}'(t) = -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + b \mathbf{k},$$

$$s = \int_0^t |\mathbf{r}'(v)| dv = \sqrt{a^2 + b^2} t = pt \Rightarrow \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}\left(\frac{s}{p}\right) = \mathbf{g}(s) =$$

$$= a \cos \frac{s}{p} \mathbf{i} + a \sin \frac{s}{p} \mathbf{j} + \frac{bs}{p} \mathbf{k},$$

gdzie $p = \sqrt{a^2 + b^2}$, $s \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Zatem

$$\mathbf{g}' = -\frac{a}{p} \sin \frac{s}{p} \mathbf{i} + \frac{a}{p} \cos \frac{s}{p} \mathbf{j} + \frac{b}{p} \mathbf{k},$$

$$\mathbf{g}'' = \frac{-a}{p^2} \cos \frac{s}{p} \mathbf{i} - \frac{a}{p^2} \sin \frac{s}{p} \mathbf{j},$$

$$|\mathbf{g}''|^2 = \frac{a^2}{p^4} \Rightarrow \mathbf{R}_1(s) = \left(a - \frac{p^2}{a}\right) \cos \frac{s}{p} \mathbf{i} + \left(a - \frac{p^2}{a}\right) \sin \frac{s}{p} \mathbf{j} + \frac{b}{p} s \mathbf{k},$$

tzn. równanie krzywej K_1 :

$$(a_2) \quad \left(\mathbf{R}_1(s) = \frac{-b^2}{a} \cos \frac{s}{p} \mathbf{i} - \frac{b^2}{a} \sin \frac{s}{p} \mathbf{j} + \frac{b}{p} s \mathbf{k} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\mathbf{R}(t) = -\frac{b^2}{a} \cos t \mathbf{i} - \frac{b^2}{a} \sin t \mathbf{j} + bt \mathbf{k} \right), \quad t \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$$

będącej również linią śrubową o osi Oz .

Z kolei przedstawiamy K_1 w parametryzacji łukowej i ponownie stosujemy wzór (a₁):

$$u = \int_0^t |\mathbf{R}'_1(w)| dw = \sqrt{\frac{b^4}{a^2} + b^2} t = \frac{bp}{a} t \Rightarrow \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}\left(\frac{a}{bp} u\right) = \\ = \mathbf{R}_2(u) = \frac{-b^2}{a} \cos \frac{a}{bp} u \mathbf{i} - \frac{b^2}{a} \sin \frac{a}{bp} u \mathbf{j} + \frac{a}{p} u \mathbf{k}, \quad u \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\}.$$

Zatem

$$\left(\mathbf{R}'_2(u) = \frac{a}{p^2} \cos \frac{a}{bp} u \mathbf{i} + \frac{a}{p^2} \sin \frac{a}{bp} u \mathbf{j}, \quad |\mathbf{R}'_2(u)| = \frac{a^2}{p^4} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\mathbf{R}_3(u) = \left(\frac{-b^2}{a} + \frac{p^2}{a} \right) \cos \frac{a}{bp} u \mathbf{i} + \left(\frac{-b^2}{a} + \frac{p^2}{a} \right) \sin \frac{a}{bp} u \mathbf{j} + \frac{a}{p} u \mathbf{k}, \quad u \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\}, \right.$$

tzn.

$$\mathbf{R}_4(t) = \mathbf{R}_3\left(\frac{au}{bp}\right) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + bt \mathbf{k}, \quad t \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\},$$

czyli $\mathbf{R}_4 = \mathbf{r}$, tzn. otrzymujemy K . \square

b) Korzystamy ze wzorów (4) i (3):

$$\tau = \frac{[\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''']}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2} = \frac{a^2 b}{a^2(a^2 + b^2)} = \frac{b}{a^2 + b^2} \quad (\text{dla } K),$$

$$\tau_1 = \frac{b}{\frac{b^4}{a^2} + b^2} = \frac{a^2}{b(a^2 + b^2)} \quad (\text{dla } K_1),$$

$$k = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3} = \frac{a \sqrt{a^2 + b^2}}{(\sqrt{a^2 + b^2})^3} = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad (\text{dla } K),$$

skąd $\tau \tau_1 = k^2$. \square

c) Korzystamy z definicji okręgu krzywiznowego:

Środki okręgów:

$$\mathbf{R}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-b^2}{a} \cos \frac{\pi}{2} \mathbf{i} - \frac{b^2}{a} \sin \frac{\pi}{2} \mathbf{j} + \frac{b\pi}{2} \mathbf{k} \Rightarrow S_1\left(0, \frac{-b^2}{a}, \frac{\pi b}{2}\right) \quad (\text{dla } K),$$

$$\mathbf{r}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = a \cos \frac{1}{2}\pi \mathbf{i} + a \sin \frac{1}{2}\pi \mathbf{j} + \frac{1}{2}b\pi \mathbf{k} \Rightarrow S_2(0, a, \frac{1}{2}\pi b) \quad (\text{dla } K_1);$$

promienie krzywizny:

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{a^2 + b^2}{a} \quad (\text{dla } K), \quad \rho_1 = \frac{1}{k_1} = \frac{a^2 + b^2}{a} \quad (\text{dla } K_1);$$

płaszczyzny ściśle styczne:

$$(b \sin \frac{1}{2}\pi x - b \cos \frac{1}{2}\pi y + az - \frac{1}{2}ab\pi = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2bx + 2az - \pi ab = 0 \quad (\text{dla } K), \quad 2ax - 2bz + \pi b^2 = 0 \quad (\text{dla } K_1)).$$

Stąd poszukiwane okręgi krzywiznowe:

przecięcie sfery:

$$(|\mathbf{h} - \mathbf{R}(\frac{1}{2}\pi)| = \rho) \Leftrightarrow \left(x^2 + \left(y + \frac{b^2}{a} \right)^2 + \left(z - \frac{\pi b}{2} \right)^2 = \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2} \right)$$

z płaszczyzną $2bx + 2az - \pi ab = 0$ (dla K), przecięcie sfery

$$(|\mathbf{h} - \mathbf{r}(\frac{1}{2}\pi)| = \rho_1) \Leftrightarrow \left(x^2 + (y - a)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\pi b \right)^2 = \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2} \right)$$

z płaszczyzną $2ax - 2bz + \pi b^2 = 0$ (dla K_1).

Zadania

37.5. Sprawdzić, czy funkcje wektorowe określone wzorami

a) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $t \in \mathbb{R}$;

b) $\mathbf{r}_2(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$, $t \in \mathbb{R}_+$;

c) $\mathbf{r}_3(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$, $t \in \langle 0, 3\pi \rangle$;

d) $\mathbf{r}_4(t) = \cos t\mathbf{i} + |\sin t|\mathbf{j}$, $t \in \langle 0, 3\pi \rangle$

są opisami parametrycznymi krzywych.

37.6. Sprawdzić, że opisy parametryczne: $\mathbf{r}_1: \langle 0, 2\pi \rangle \ni t \rightarrow (a \cos t, b \sin t) \in \mathbb{R}^2$, $a, b \in \mathbb{R}$ stałe, $\mathbf{r}_2: \langle 0, \frac{2}{3}\pi \rangle \ni t \rightarrow (a \cos 5t, b \sin 5t) \in \mathbb{R}^2$ określają te same hodograpy.

37.7. Wykazać, że opisy \mathbf{r}_1 i \mathbf{r}_2 w zadaniu 37.6 są równoważne.

37.8. Sprawdzić czy opisy parametryczne określone wzorami:

a) $\mathbf{r}_1(t) = a \cos t\mathbf{i} + a \sin t\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$, $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathbf{r}_2(u) = a \cos(ku)\mathbf{i} + a \sin(ku)\mathbf{j} + bku\mathbf{k}, \quad u \in \mathbb{R}_+, \quad a, b, k \in \mathbb{R} \text{ stałe};$$

b) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$,

$$\mathbf{r}_2(u) = u^2\mathbf{i} + u^4\mathbf{j} + u^6\mathbf{k}, \quad u \in \langle 0, 1 \rangle;$$

c) $\mathbf{r}_1(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $t \in \langle -2, 1 \rangle$,

$\mathbf{r}_2(u) = u^2\mathbf{i} + |u|\mathbf{j} + 2u\mathbf{k}$, $u \in \langle -2, 1 \rangle$;

d) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}$, $t \in \langle 1, e \rangle$,

$\mathbf{r}_2(u) = \ln u\mathbf{i} + u\mathbf{j} + \ln(\ln u)\mathbf{k}$, $u \in \langle e, e^e \rangle$;

e) $\mathbf{r}_1(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $t \in \langle 1, 2 \rangle$,

$\mathbf{r}_2(u) = u^2\mathbf{i} + \frac{1}{u^2}\mathbf{j} + \frac{1}{u^4}\mathbf{k}$, $u \in \langle -1, -\frac{1}{2} \rangle$;

f) $\mathbf{r}_1(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \sin t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$, $t \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$,

$\mathbf{r}_2(u) = e^{-u} \cos u\mathbf{i} - e^{-u} \sin u\mathbf{j} + e^{-u}\mathbf{k}$, $u \in \langle -\frac{1}{2}\pi, 0 \rangle$;

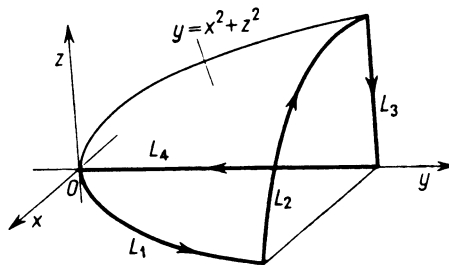
g) opisy \mathbf{r}_1 i \mathbf{r}_2 z def. 2, gdzie $t = g(u) = -u$, $U_p = \{u \in \mathbf{R}: -u \in T_p\}$ są równoważne.

37.9. Zapisać w postaci wektorowej równanie odcinka o końcach $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$.

37.10. Zapisać w postaci wektorowej równania okręgów:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z = \frac{1}{2}R$; b) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y = a$, $a > 0$.

37.11. Znaleźć równania krzywej kawałkami regularnej zorientowanej, danej na rysunku 37.5, jeżeli łuk L_1 leży w płaszczyźnie Oxy , łuk L_2 leży w płaszczyźnie $y=4$, łuk L_3 leży w płaszczyźnie Oyz , łuk L_4 jest odcinkiem o długości 4.



Rys. 37.5

37.12. Dane są równania łuków zorientowanych:

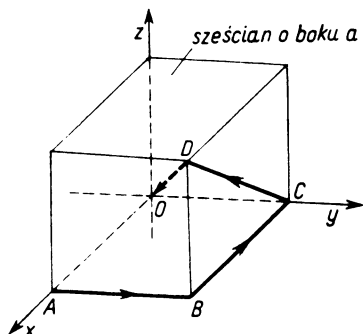
a) $\mathbf{r}(t) = 3 \sin t\mathbf{i} + 3 \cos t\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$;

b) $\mathbf{r}(t) = (2t+1)\mathbf{i} + (t^2+1)\mathbf{j} + (3t^2+t-1)\mathbf{k}$, $t \in \langle 1, 3 \rangle$;

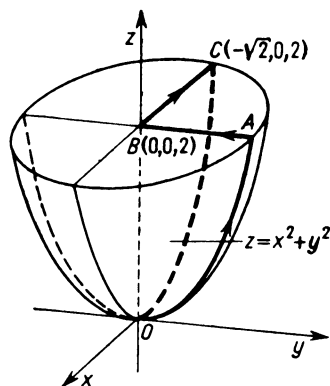
c) $\mathbf{r}(t) = a \cos^2 t\mathbf{i} + \sqrt{2} a \sin t \cos t\mathbf{j} + a \sin^2 t\mathbf{k}$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$.

Znaleźć równania łuków zorientowanych przeciwnie do nich.

37.13. Na rys. 37.6 dana jest krzywa zorientowana $ABCD O$ kawałkami regularna. Znaleźć równania tej krzywej.



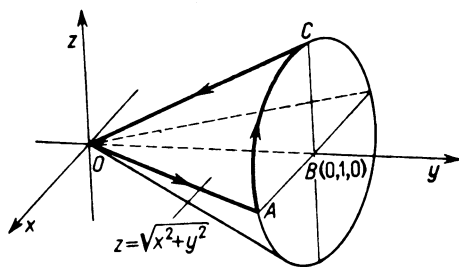
Rys. 37.6



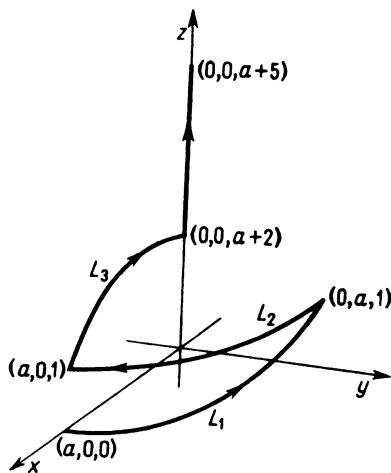
Rys. 37.7

37.14. Na rys. 37.7 dana jest krzywa zorientowana $OABCO$ kawałkami regularna. Znaleźć jej równania.

37.15. Na rys. 37.8 dana jest krzywa zorientowana $OACO$ kawałkami regularna. Znaleźć równania krzywej zorientowanej przeciwie do niej.



Rys. 37.8



Rys. 37.9

37.16. Znaleźć równania krzywej kawałkami regularnej danej na rys. 37.9, jeżeli: L_1 jest łukiem linii śrubowej $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + \frac{2}{\pi} t \mathbf{k}$, $t \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$, L_2 jest ćwiartką okręgu w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny Oxy , L_3 jest łukiem paraboli o wierzchołku w punkcie $P(0, 0, a+2)$ i osi symetrii osi Oz , L_4 jest odcinkiem o długości 3.

37.17. Wykazać, że jeżeli $\mathbf{h}(s) = \mathbf{r}(g(s))$, $s \in \langle 0, s_1 \rangle$ jest opisem parametrycznym naturalnym, to $\bigwedge_{s \in \langle 0, s_1 \rangle} |\mathbf{h}'(s)| = 1$.

37.18. Sprawdzić, które z następujących krzywych zamkniętych są krzywymi Jordana:

- a) $\mathbf{r}_1(t) = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$;
 b) $\mathbf{r}_2(t) = \sin 2t \mathbf{i} + (1 - \cos 2t) \mathbf{j} + 2 \cos t \mathbf{k}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$;
 c) $\mathbf{r}_3(t) = \sin 2t \mathbf{i} + (1 - \cos 2t) \mathbf{j} + 2 \cos t \mathbf{k}$, $t \in \langle \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \rangle$;
 d) $\mathbf{r}_4(t) = a \sin^2 t \mathbf{i} + a \sin 2t \mathbf{j} + a \cos^2 t \mathbf{k}$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$;
 e) $\mathbf{r}_5(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \cos 2t \mathbf{j} + a \cos 3t \mathbf{k}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$;
 f) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x = \frac{1}{3}a$, $a \in \mathbf{R}_+$;
 g) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + z = a$, $a \in \mathbf{R}_+$.

37.19. Wykazać, że wzór (5) w parametryzacji łukowej przyjmuje postać $\mathbf{R}(s) = \mathbf{r}(s) + \frac{1}{|\mathbf{r}''(s)|^2} \mathbf{r}''(s)$.

37.20. Znaleźć równania krawędzi i płaszczyzn trójscianu Freneta dla krzywych określonych równaniami:

- a) $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t) \mathbf{i} + (1 - \cos t) \mathbf{j} + 4 \sin \frac{1}{2}t \mathbf{k}$ dla $t = \pi$;
 b) $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} - t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$ dla $t = 1$;
 c) $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + \frac{1+t}{t} \mathbf{j} + \frac{1-t^2}{t} \mathbf{k}$ dla $t = 1$.

37.21. Znaleźć równania stycznych do krzywych określonych równaniami:

- a) $x(t) = a \cos \alpha \cos t$, $y(t) = a \sin \alpha \cos t$, $z(t) = a \sin t$ dla $t = t_0$;
 b) $x(t) = R \cos^2 t$, $y(t) = R \sin t \cos t$, $z(t) = R \sin t$ dla $t = \frac{1}{4}\pi$.

37.22. Na krzywej o równaniach $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $z(t) = t^3$ znaleźć punkt, w którym styczna jest równoległa do płaszczyzny $x + 2y + z - 4 = 0$.

37.23. Na krzywej o równaniach $x(t) = -t \cos t + \sin t$, $y(t) = t \sin t + \cos t$, $z(t) = t + 1$ znaleźć punkty, w których styczna jest równoległa do:

- a) płaszczyzny Oxz , b) płaszczyzny Oyz .

37.24. Wykazać, że krzywa o równaniach $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = t^2 - t + 2$, $z(t) = t$ leży na płaszczyźnie oraz znaleźć równanie tej płaszczyzny.

37.25. Wykazać, że krzywa o równaniach $x(t) = \sin 2t$, $y(t) = 1 - \cos 2t$, $z(t) = 2 \cos t$ leży na powierzchni sfery.

37.26. Znaleźć równania rzutu krzywej o równaniach $x(t) = e^t \cos t$, $y(t) = e^t \sin t$, $z(t) = 2t$ na płaszczyźnie Oxy .

37.27. Wykazać, że rzut linii śrubowej $x(t) = a \cos t$, $y(t) = a \sin t$, $z(t) = bt$ na płaszczyznę Oyz jest sinusoidą.

37.28. Wykazać, że krzywa o równaniu $\mathbf{r}(t) = ae^t \cos t \mathbf{i} + ae^t \sin t \mathbf{j} + ae^t \mathbf{k}$ leży na powierzchni stożka $x^2 + y^2 = z^2$ i przecina pod tym samym kątem wszystkie tworzące tego stożka.

37.29. Wykazać, że każda styczna do linii śrubowej tworzy ten sam kąt z osią Oz .

37.30. Wykazać, że linia śrubowa (por. zadanie 37.27) ma stałą krzywiznę i torsję w każdym punkcie.

37.31. Znaleźć długości łuków krzywych określonych równaniami:

a) $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $z(t) = \frac{2}{3}t^3$ dla $0 \leq t \leq 2$;

b) $x(t) = 2 \cos t$, $y(t) = 2 \sin t$, $z(t) = \frac{3}{\pi} t$ dla $0 \leq t \leq \pi$;

c) $x(t) = e^t \cos t$, $y(t) = e^t \sin t$, $z(t) = e^t$ dla $0 \leq t \leq t_0$;

d) $x(t) = a \cos t$, $y(t) = a \sin t$, $z(t) = a \ln \cos t$ dla $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$.

37.32. Znaleźć krzywiznę i torsję krzywej określonej równaniem $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} + e^t \mathbf{k}$ w punkcie $P(t)$.

37.33. Znaleźć największą krzywiznę i największą torsję krzywej określonej równaniem

$$\mathbf{r}(t) = a \cosh t \mathbf{i} + a \sinh t \mathbf{j} + at \mathbf{k}, \quad a > 0.$$

37.34. Wykazać, że wszystkie płaszczyzny ściśle styczne do krzywej określonej równaniami

$$K: x(t) = a_1 t^2 + b_1 t + c_1, \quad y(t) = a_2 t^2 + b_2 t + c_2, \quad z(t) = a_3 t^2 + b_3 t + c_3$$

pokrywają się z płaszczyzną, w której leży krzywa K .

37.35. Dana jest krzywa o równaniu

$$\mathbf{r}(u) = a(u - \sin u) \mathbf{i} + a(1 - \cos u) \mathbf{j} + au \mathbf{k}.$$

Znaleźć wektor $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ dla $u = \frac{1}{2}\pi$ (s parametr naturalny). Zadanie rozwiązać dwoma metodami: bezpośrednio przez zróżniczkowanie i korzystając ze wzorów Freneta.

37.36. Dana jest krzywa o równaniu $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + 3t \mathbf{k}$. Znaleźć wektor $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$ dla $t = t_0$. Zadanie rozwiązać dwoma metodami: bezpośrednio przez zróżniczkowanie i korzystając ze wzorów Freneta.

37.37. Dana jest krzywa o równaniu $\mathbf{r}(u) = u \cos u \mathbf{i} + u \sin u \mathbf{j} + u \mathbf{k}$. Znaleźć wektor $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ dla $u = 0$. Zadanie rozwiązać dwoma metodami.

37.38. Dana jest krzywa o równaniu $\mathbf{r}(u) = 4 \cos u \mathbf{i} + 4 \sin u \mathbf{j} + u \mathbf{k}$. Znaleźć wektor $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ dla $u = u_0$. Zadanie rozwiązać dwoma metodami.

37.39. Dana jest krzywa o równaniu $\mathbf{r}(t) = 2t^3 \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j} + 6t \mathbf{k}$. Znaleźć wektor $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$ dla $t = 1$. Zadanie rozwiązać dwoma metodami.

37.40. Znaleźć okręgi krzywiznowe krzywych określonych równaniami:

- a) $\mathbf{r}(x) = x \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j} + x^2 \mathbf{k}$ dla $x = 1$;
 b) $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$ dla $t = 1$;
 c) $\mathbf{r}(u) = u \mathbf{i} + \frac{1}{2}u^2 \mathbf{j} + 3u^3 \mathbf{k}$ dla $u = 1$;
 d) $\mathbf{r}(t) = a \sin^4 t \mathbf{i} + a \cos^4 t \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$ dla $t = \frac{1}{4}\pi$.

Odpowiedzi

37.5. a), b), c) – tak; d) nie, w otoczeniu punktów $t = \pi$ i $t = 2\pi$ \mathbf{r}_4 nie jest różniczkowalna.

37.8. a), b), d) – tak; c), e) nie; f) i g) opisy przeciwne.

37.9. $\mathbf{r}(t) = \overline{OA} + t\overline{AB} = (a_1 + (b_1 - a_1)t)\mathbf{i} + (a_2 + (b_2 - a_2)t)\mathbf{j} + (a_3 + (b_3 - a_3)t)\mathbf{k}$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

37.10. a) $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}\sqrt{3} R \cos t \mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3} R \sin t \mathbf{j} + \frac{1}{2} R \mathbf{k}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$;

b) $\mathbf{r}(t) = a \sin^2 t \mathbf{i} + a \cos^2 t \mathbf{j} + \sqrt{2}a \sin t \cos t \mathbf{k}$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$.

37.11. $K = \bigcup_{i=1}^4 L_i$, gdzie np. $L_1: \mathbf{r}_1(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$, $t \in \langle 0, 2 \rangle$,

$$L_2: \mathbf{r}_2(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 4 \mathbf{j} + 2 \sin t \mathbf{k}, \quad t \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle,$$

$$L_3: \mathbf{r}_3(t) = 0 \cdot \mathbf{i} + 4 \mathbf{j} - t \mathbf{k}, \quad t \in \langle -1, 0 \rangle,$$

$$L_4: \mathbf{r}_4(t) = 0 \cdot \mathbf{i} - t \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}, \quad t \in \langle -4, 0 \rangle.$$

37.12. a) $\mathbf{r}_1(t) = -3 \sin t \mathbf{i} + 3 \cos t \mathbf{j} - 2 \mathbf{k}$, $t \in \langle -\pi, 0 \rangle$;

b) $\mathbf{r}_1(t) = (1 - 2t)\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j} + (3t^2 - t - 1)\mathbf{k}$, $t \in \langle -3, -1 \rangle$;

c) $\mathbf{r}_1(t) = a \cos^2 t \mathbf{i} - \sqrt{2}a \sin t \cos t \mathbf{j} + a \sin^2 t \mathbf{k}$, $t \in \langle -\pi, 0 \rangle$.

37.13. $K = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DO}$, gdzie np.

$$\overline{AB}: \mathbf{r}_1(t) = a \mathbf{i} + t a \mathbf{j}, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

$$\overline{BC}: \mathbf{r}_2(u) = -a u \mathbf{i} + a \mathbf{j}, \quad u \in \langle -1, 0 \rangle,$$

$$\overline{CD}: \mathbf{r}_3(v) = a v \mathbf{i} + a \mathbf{j} + a v \mathbf{k}, \quad v \in \langle 0, 1 \rangle,$$

$$\overline{DO}: \mathbf{r}_4(w) = -a w \mathbf{i} - a w \mathbf{j} - a w \mathbf{k}, \quad w \in \langle -1, 0 \rangle.$$

37.14. $K = \overline{OA} \cup \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CO}$, gdzie np.

$$\overline{OA}: \mathbf{r}_1(t) = t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}, \quad t \in \langle 0, \sqrt{2} \rangle,$$

$$\overline{AB}: \mathbf{r}_2(u) = (\sqrt{2} - \sqrt{2}u)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad u \in \langle 0, 1 \rangle;$$

$$\overline{BC}: \mathbf{r}_3(v) = -\sqrt{2}v \mathbf{i} + 2\mathbf{k}, \quad v \in \langle 0, 1 \rangle,$$

$$\overline{CO}: \mathbf{r}_4(w) = w \mathbf{i} + w^2 \mathbf{k}, \quad w \in \langle -\sqrt{2}, 0 \rangle.$$

37.15. $K = \overline{OC} \cup \overline{CA} \cup \overline{AO}$, gdzie np.

$$\overline{OC}: \mathbf{r}_1(t) = t \mathbf{j} + t \mathbf{k}, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

$$\overline{CA}: \mathbf{r}_2(u) = \sin u \mathbf{i} + \mathbf{j} + \cos u \mathbf{k}, \quad u \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle,$$

$$\overline{AO}: \mathbf{r}_3(v) = -v \mathbf{i} - v \mathbf{j}, \quad v \in \langle -1, 0 \rangle.$$

37.16. $K = \bigcup_{i=1}^4 L_i$, gdzie np.

$$L_1: \mathbf{r}_1(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + \frac{2}{\pi} t \mathbf{k}, \quad t \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle,$$

$$L_2: \mathbf{r}_2(u) = a \sin u \mathbf{i} + a \cos u \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad u \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle,$$

$$L_3: \mathbf{r}_3(v) = -v \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + \left(-\frac{a+1}{a^2} v^2 + a + 2 \right) \mathbf{k}, \quad v \in \langle -a, 0 \rangle,$$

$$L_4: \mathbf{r}_4(w) = 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + w \mathbf{k}, \quad w \in \langle a+2, a+5 \rangle.$$

37.18. W punkcie b) krzywa nie jest krzywą Jordana, w pozostałych punktach krzywe Jordana.

37.20. a) $L_{st.}: \mathbf{r} = (\pi + 2t) \mathbf{i} + 2 \mathbf{j} + 4 \mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R},$

$$L_{n.gł.}: \mathbf{r} = \pi \mathbf{i} + (2-t) \mathbf{j} + (4-t) \mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$L_{bin.}: \mathbf{r} = \pi \mathbf{i} + (2+t) \mathbf{j} + (4-t) \mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$H_{fc.st.}: y - z + 2 = 0, \quad H_{nor.}: x = \pi, \quad H_{pr.}: y + z - 6 = 0;$$

b) $L_{st.}: \mathbf{r} = (1+u) \mathbf{i} - (1+2u) \mathbf{j} + (1+3u) \mathbf{k}, \quad u \in \mathbb{R},$

$$L_{n.gł.}: \mathbf{r} = (1-11u) \mathbf{i} + (-1+8u) \mathbf{j} + (1+9u) \mathbf{k}, \quad u \in \mathbb{R},$$

$$L_{bin.}: \mathbf{r} = (1-3u) \mathbf{i} + (-1-3u) \mathbf{j} + (1-u) \mathbf{k},$$

$$H_{fc.st.}: 3x + 3y + z - 1 = 0, \quad H_{nor.}: x - 2y + 3z - 6 = 0,$$

$$H_{pr.}: -11x + 8y + 9z + 10 = 0;$$

c) $L_{st.}: \mathbf{r} = (1+v) \mathbf{i} + (2-v) \mathbf{j} - 2v \mathbf{k}, \quad v \in \mathbb{R},$

$$L_{n.gł.}: \mathbf{r} = (1+v) \mathbf{i} + (2+v) \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}, \quad v \in \mathbb{R},$$

$$L_{bin.}: \mathbf{r} = (1+v) \mathbf{i} + (2-v) \mathbf{j} + v \mathbf{k}, \quad v \in \mathbb{R},$$

$$H_{fc.st.}: x - y + z + 1 = 0, \quad H_{nor.}: x - y - 2z + 1 = 0,$$

$$H_{pr.}: x + y - 3 = 0.$$

37.21. a) $x(u) = a \cos \alpha \cos t_0 - \cos \alpha \sin t_0 u, \quad y(u) = a \sin \alpha \cos t_0 - \sin \alpha \sin t_0 u,$
 $z(u) = a \sin t_0 + \cos t_0 u;$

$$b) x(u) = \frac{1}{2} R - R u, \quad y(u) = \frac{1}{2} R, \quad z(u) = \frac{1}{2} \sqrt{2} R + \frac{1}{2} \sqrt{2} u.$$

37.22. $P(-1, 1, -1), P(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}).$

37.23. a) Dla $t = (2n+1) \frac{1}{2} \pi, n=0, \mp 1, \mp 2, \dots,$ lub $t=0;$

b) dla $t = \pi n, n=0, \mp 1, \mp 2, \dots$

37.24. $x - y - z + 1 = 0.$

37.26. $r(\varphi) = e^\varphi$ w układzie biegunowym $Or\varphi \sim Oxy.$

37.31. a) $\frac{22}{3};$ b) $\sqrt{9+4\pi^2};$ c) $\sqrt{3}(e^{t_0}-1);$ d) $a \ln(1+\sqrt{2}).$

37.32. $k(t) = \frac{1}{3} \sqrt{2} e^{-t}, \quad \tau(t) = \frac{1}{3} e^{-t}.$

$$37.33. k = \tau = \frac{1}{2a}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

$$37.35. \frac{db}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{6}a} (-2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}). \quad 37.36. \frac{dn}{ds} = \frac{1}{\sqrt{13}} \sin t_0 \mathbf{i} - \cos t_0 \mathbf{j}.$$

$$37.37. \frac{dt}{ds} = \mathbf{j}. \quad 37.38. \frac{db}{ds} = \frac{1}{17} (\cos u_0 \mathbf{i} + \sin u_0 \mathbf{j}).$$

$$37.39. \frac{dn}{ds} = \frac{-1}{18\sqrt{6}} (\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

$$37.40. a) (x+8)^2 + (y-\frac{13}{4})^2 + (z-\frac{13}{4})^2 = \frac{629}{8}, \quad y = z;$$

$$b) (x+\frac{4}{3})^2 + (y-\frac{11}{2})^2 + (z+\frac{8}{5})^2 = \frac{629}{20}, \quad z = 2x;$$

$$c) (x+\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 + (z-\frac{11}{9})^2 = \frac{9}{2}, \quad x - 2y + z - \frac{1}{3} = 0;$$

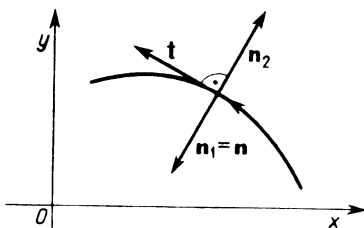
$$d) (x-\frac{3}{4}a)^2 + (y-\frac{3}{4}a)^2 = \frac{1}{2}a^2, \quad z = 2.$$

§ 38. KRZYWE PŁASKIE

38.1. Powtarzając dla funkcji wektorowej $\mathbf{r}: \mathbf{R} \supset T_p \ni t \rightarrow \mathbf{r}(t) \in \mathbf{R}^2$ definicje i określenia podane w § 37 dla funkcji $\mathbf{r}: T_p \rightarrow \mathbf{R}^3$, otrzymujemy w \mathbf{R}^2 krzywą zorientowaną płaską:

$$(1) \quad (\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j}, \quad t \in T_p) \Leftrightarrow (x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in T_p).$$

Dla krzywej (1) zamiast trójścianu Freneta rozpatruje się układ dwóch wersorów, wersora stycznego \mathbf{t} i wersora normalnego \mathbf{n} , przy czym \mathbf{n} jest tym wersorem prostopadłym do \mathbf{t} , dla którego wersory \mathbf{t} i \mathbf{n} są zorientowane zgodnie z wersorami \mathbf{i} i \mathbf{j} (na rys. 38.1



Rys. 38.1

$\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$). Krzywiznę krzywej (1) w punkcie P_0 określamy wzorem $k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s}$ (jeżeli granica istnieje), gdzie $\Delta \varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle$ jest miarą kąta zorientowanego (płaszczyzna z układem Oxy jest zorientowana) $\star [\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}'(t_0)]$. Ze wzoru (3) § 37 otrzymujemy

$$(2) \quad k = \frac{\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'}{|\mathbf{r}'|^3}, \quad t \in T_p.$$

Współrzędne środka krzywizny określa wzór (5) § 37.

Zbiór środków krzywizny krzywej płaskiej nazywamy *ewolutą* tej krzywej. Równanie ewoluty określa wzór (5) § 37.

38.2. Z § 30 wiemy, że przy pewnych założeniach o funkcji

$$F: \mathbf{R}^2 \supset D \ni (x, y) \rightarrow F(x, y) \in \mathbf{R}$$

równanie

$$(3) \quad F(x, y) = 0$$

wyznacza różniczkowalną funkcję uwikłaną (np. $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$) $\psi: \mathbf{R} \supset U(x_0; \eta) \ni x \rightarrow \psi(x) \in \mathbf{R}$, określającą krzywą regularną klasy C^1 o równaniu $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j}$, $t \in V(x_0; \eta)$.

Uwaga. Może się zdarzyć, że równanie (3) określa jedną lub więcej krzywych regularnych i oddzielne punkty, względnie tylko oddzielne punkty, względnie nie przedstawia żadnego tworu geometrycznego.

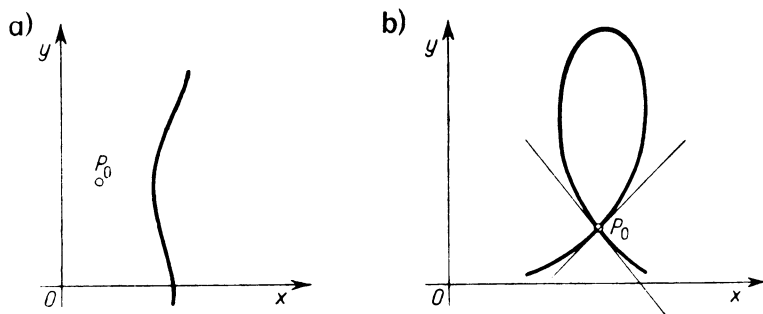
Równanie stycznej do krzywej regularnej określonej równaniem (3) w punkcie $P_0(x_0, y_0)$:

$$(4) \quad F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Jeżeli $F'_x(x_0, y_0) = 0 \wedge F'_y(x_0, y_0) = 0 \wedge F(x_0, y_0) = 0$, to $P_0(x_0, y_0)$ nazywamy *punktem osobliwym* krzywej określonej równaniem (3).

Niech $F \in C^2(D)$ oraz $\Delta = F''_{xx}(P_0)F''_{yy}(P_0) - (F''_{xy}(P_0))^2$. Jeżeli P_0 jest punktem osobliwym krzywej (3), to dla:

- a) $\Delta > 0$ punkt P_0 nazywamy *punktem izolowanym* (por. rys. 38.2a),
- β) $\Delta < 0$ punkt P_0 nazywamy *punktem węzłowym* (por. rys. 38.2b),



Rys. 38.2

γ) $\Delta = 0$ punkt P_0 nazywamy *punktem zwrotu (pierwszego lub drugiego rodzaju)*, por. rys. 38.3a. b), przy czym w tym przypadku P_0 może być również punktem izolowanym, lub *punktem samostyczności* (por. rys. 38.3c).

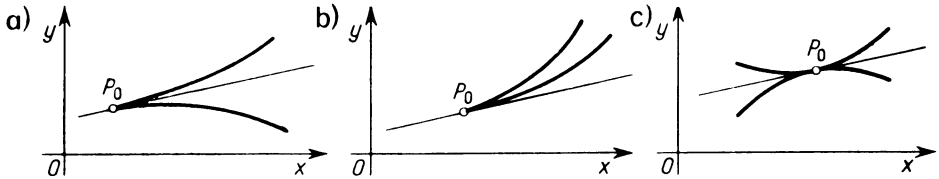
Współczynnik kierunkowy m stycznej do krzywej w punkcie osobliwym (jeżeli styczna istnieje) określony jest równaniem

$$(5) \quad F''_{yy}(P_0)m^2 + 2F''_{xy}(P_0)m + F''_{xx}(P_0) = 0.$$

Liniami warstwicowymi funkcji (wykresu funkcji) $f: \mathbf{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy krzywe (jeżeli istnieją) określone równaniami

$$(6) \quad f(x, y) = z_0, \quad z_0 \in \mathbf{R}.$$

Mówimy, że krzywa K jest *obwiednią rodziny krzywych* o równaniu $F(x, y, a) = 0$ (a – parametr rodziny), jeżeli w każdym swoim punkcie jest styczna do pewnej krzywej rodziny, przy tym lokalnie w każdym punkcie do innej oraz jest styczna do każdej krzywej rodziny.



Rys. 38.3

Jeżeli istnieje obwiednia rodziny o równaniu $F(x, y, a) = 0$, to współrzędne jej punktów spełniają układ równań

$$(7) \quad F(x, y, a) = 0, \quad F'_a(x, y, a) = 0.$$

Równania te mogą być również spełnione przez współrzędne punktów nie należących do obwiedni (por. przykład 38.5) np. punktów osobliwych krzywych rodziny.

Przykłady

- 38.1.** Dany jest łuk elipsy $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j}$, $t \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$. Dla danego łuku znaleźć:
 a) wektor styczny i wektor normalny dla $t = \frac{1}{4}\pi$; b) krzywiznę w dowolnym punkcie;
 c) równanie okręgu krzywiznowego dla $t = \frac{1}{2}\pi$.

Rozwiązanie. Rysujemy łuk elipsy (rys. 38.4).

a) Jeżeli $\mathbf{r} = \varphi(t) \mathbf{i} + \psi(t) \mathbf{j}$, to

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} = \frac{\varphi'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{i} + \frac{\psi'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{j} \quad \text{ i } \quad \mathbf{n} = \frac{-\psi'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{i} + \frac{\varphi'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{j},$$

ponieważ

$$\left(|\mathbf{n}| = \sqrt{\frac{\psi'^2(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^2} + \frac{\varphi'^2(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^2}} = 1 \right) \wedge$$

$$\wedge \left(\begin{vmatrix} \frac{\varphi'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} & \frac{\psi'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \\ -\frac{\psi'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} & \frac{\varphi'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \end{vmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|^2} (\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)) = 1 > 0 \right) \Leftrightarrow$$

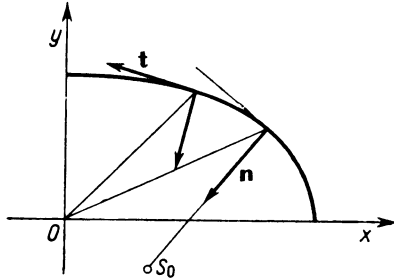
\Leftrightarrow (wektory \mathbf{t} i \mathbf{n} są zgodnie zorientowane z wektorami \mathbf{i} i \mathbf{j}).

Stąd

$$\mathbf{t} = \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{i} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{j}, \quad \mathbf{n} = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{i} - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{j}.$$

b) Korzystamy z (2);

$$k(t) = \frac{(-a \sin t)(-b \sin t) - (-a \cos t)b \cos t}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}.$$



Rys. 38.4

c) Znajdujemy współrzędne środka krzywizny (por. (5) § 37):

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{R}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \mathbf{r}\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \frac{1}{k\left(\frac{1}{2}\pi\right)} \mathbf{n}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \right. \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} a \mathbf{i} + \frac{1}{2} b \mathbf{j} + \frac{(a^2 + 3b^2)^{3/2}}{8ab} \left(\frac{-\sqrt{3}b}{(a^2 + 3b^2)^{1/2}} \mathbf{i} - \frac{a}{(a^2 + 3b^2)^{1/2}} \mathbf{j} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x = \frac{3\sqrt{3}}{8a} (a^2 - b^2), y = \frac{1}{8b} (b^2 - a^2) \right). \end{aligned}$$

Ponieważ promień krzywizny $\rho = \frac{1}{k\left(\frac{1}{2}\pi\right)} = \frac{(a^2 + 3b^2)^{3/2}}{8ab}$, więc równanie okręgu krzywiznowego:

$$\left(x - \frac{3\sqrt{3}}{8a} (a^2 - b^2) \right)^2 + \left(y - \frac{1}{8b} (b^2 - a^2) \right)^2 = \frac{(a^2 + 3b^2)^3}{64a^2b^2}.$$

38.2. Znaleźć ewolucję cycloidy $\mathbf{r}(t) = a(t - \sin t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}$, $t \in (0, 2\pi)$.

Rozwiązanie. Korzystamy z (5) § 37:

$$\mathbf{r}'(t) = a(1 - \cos t)\mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}, \quad \mathbf{r}''(t) = a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j},$$

$$k(t) = \frac{a(1 - \cos t)a \cos t - a \sin t a \sin t}{(a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t)^{3/2}} = \frac{-1}{4a \sin \frac{1}{2}t},$$

$$\mathbf{n} = -\cos \frac{1}{2}t \mathbf{i} + \sin \frac{1}{2}t \mathbf{j}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= \mathbf{r}(t) + \frac{1}{k(t)} \mathbf{n}(t) = a(t - \sin t) \mathbf{i} + a(1 - \cos t) \mathbf{j} - 4a \sin \frac{1}{2}t (-\cos \frac{1}{2}t \mathbf{i} + \sin \frac{1}{2}t \mathbf{j}) = \\ &= a(t + \sin t) \mathbf{i} - a(1 - \cos t) \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Podstawiając $t = u - \pi$ otrzymujemy

$$\mathbf{R}(u) = (a\pi + a(u - \sin u)) \mathbf{i} + (-2a + a(1 - \cos u)) \mathbf{j},$$

a więc również cykloidę przystającą do danej i przesunięta o πa w kierunku osi Ox i o $-2a$ w kierunku osi Oy .

38.3. Zbadać punkty osobliwe krzywych określonych równaniami:

a) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ ($a \neq 0$); b) $y^2 = bx^3 + ax^2$; c) $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$ ($a \neq 0$).

Rozwiązanie. Korzystamy z punktu 38.2.

a) $F'_x = 4x(x^2 + y^2 - a^2)$, $F'_y = 4y(x^2 + y^2 + a^2)$, stąd

$$x(x^2 + y^2 - a^2) = 0,$$

(a)

$$y(x^2 + y^2 + a^2) = 0.$$

Układ (a) ma rozwiązania: $O(0, 0)$, $P_{1,2}(\mp a, 0)$, przy czym tylko punkt $O(0, 0)$ jest punktem osobliwym, ponieważ współrzędne punktów $P_{1,2}$ nie spełniają danego równania.

W celu określenia rodzaju otrzymanego punktu osobliwego kolejno znajdujemy

$$F''_{xx} = 4(3x^2 + y^2 - a^2), \quad F''_{xy} = 8xy, \quad F''_{yy} = 4(x^2 + 3y^2 + a^2),$$

$$\Delta(O(0, 0)) = (-4a^2)4a^2 = -16a^4 < 0,$$

czyli punkt $O(0, 0)$ jest punktem węzłowym (por. punkt 38.2β). Współczynniki kierunkowe stycznych do krzywej w punkcie $O(0, 0)$ znajdujemy, korzystając z równania (5). Otóż $4a^2m^2 - 4a^2 = 0$, stąd $m = \mp 1$. A więc równania stycznych $y = \mp x$.

b) $F'_x = x(3bx + 2a)$, $F'_y = -2y$, stąd

$$x(3bx + 2a) = 0,$$

(b)

$$y = 0.$$

Układ (b) ma rozwiązania: $O(0, 0)$, $P\left(-\frac{2a}{3b}, 0\right)$ ($b \neq 0$), przy czym współrzędne punktu

P nie spełniają danego równania, a więc tylko punkt $O(0, 0)$ jest punktem osobliwym. Znajdujemy $F''_{xx} = 2(3bx + a)$, $F''_{xy} = 0$, $F''_{yy} = -2$, stąd $\Delta = -4a$. Zatem dla $a < 0$ punkt $O(0, 0)$ jest punktem izolowanym, dla $a > 0$ punkt $O(0, 0)$ jest punktem węzłowym, dla $a = 0 \wedge b \neq 0$ punkt $O(0, 0)$ jest punktem zwrotu, ponieważ wówczas $y = \mp \sqrt{bx^3}$ oraz $y' = \mp \frac{3}{2} \sqrt{bx}$.

c) $F'_x = 2x(2x^2 + 2y^2 - 3ax)$, $F'_y = 4y(x^2 + y^2)$, stąd

$$x(2x^2 + 2y^2 - 3ax) = 0,$$

(c)

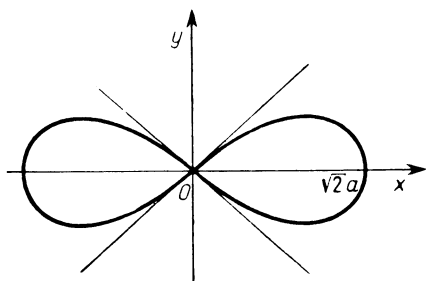
$$y(x^2 + y^2) = 0.$$

Układ (c) ma rozwiązania: $O(0, 0)$, $P(\frac{3}{2}a, 0)$, przy czym tylko punkt $O(0, 0)$ jest punktem osobliwym. Znajdujemy $F''_{xx} = 4(3x^2 + y^2 - 3ax)$, $F''_{xy} = 8xy$, $F''_{yy} = 4(x^2 + 3y^2)$, stąd $F''_{xx}(0, 0) = F''_{xy}(0, 0) = F''_{yy}(0, 0) = 0$. Z powyższego wynika, że wiadomości podane w punkcie 38.2 nie pozwalają stwierdzić jakiego rodzaju punktem osobliwym jest punkt $O(0, 0)$. W takim przypadku należy korzystać z pochodnych wyższych rzędów. Zagadnieniem tym nie będziemy się jednak zajmowali.

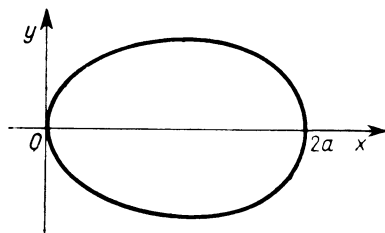
38.4. Narysować wykresy krzywych określonych równaniami:

a) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ ($a > 0$); b) $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$ ($a > 0$).

Rozwiązanie. a) Badana krzywa jest symetryczna względem osi układu oraz względem początku układu. Zauważmy dalej, że $x^2 - y^2 \geq 0$ oraz $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 2a^2x^2 - 2a^2y^2$, a więc $x^4 - 2a^2x^2 = -2a^2y^2 - 2x^2y^2 - y^4 \leq 0$, czyli $x^2(x^2 - 2a^2) \leq 0$. Wynika stąd, że $-\sqrt{2}a \leq x \leq \sqrt{2}a$ i $-x \leq y \leq x$. Łatwo sprawdzić, że $y_{\max} = \varphi(\frac{1}{2}\sqrt{3}a) = \frac{1}{2}a$. Korzystając z otrzymanych danych oraz z wyniku przykładu 38.3 rysujemy wykres krzywej (rys. 38.5).



Rys. 38.5



Rys. 38.6

b) Z równania krzywej wnosimy, że jest ona symetryczna względem osi Ox , przy czym $x \geq 0$, $x^4 \leq 2ax^3$, czyli $x \leq 2a$ oraz $y^4 \leq 2ax^3$, a więc $|y| \leq 2a$. Z kolei łatwo stwierdzić, że krzywa przecina oś Ox w punktach $O(0, 0)$ $A(2a, 0)$ oraz że $y_{\max} = \varphi(\frac{2}{3}a) = \frac{2}{3}\sqrt{3}a$. Punkt $O(0, 0)$ jest punktem osobliwym krzywej (por. przykład 38.3c), przy czym w celu zbadania zachowania się krzywej w otoczeniu punktu $O(0, 0)$ przecinamy ją prostymi $y = mx$ ($m \neq 0$). Otrzymujemy $(x^2 + m^2x^2)^2 = 2ax^3$, stąd $x^3[x(1 + m^2)^2 - 2a] = 0$, czyli $x = 0$ i $x = \frac{2a}{(1 + m^2)^2}$. Dla $x = 0$ otrzymujemy oczywiście jako punkt przecięcia punkt $O(0, 0)$ dla każdej wartości m , natomiast $\lim_{m \rightarrow -\infty} x = \lim_{m \rightarrow -\infty} \frac{2a}{(1 + m^2)^2} = 0$ oraz $\lim_{m \rightarrow +\infty} x = 0$, czyli że styczną do krzywej w punkcie $O(0, 0)$ jest oś Oy . Na podstawie otrzymanych wyników rysujemy wykres (rys. 38.6).

38.5. Znaleźć obwiednie rodzin krzywych (a – parametr rodziny) określonych równaniami:

a) $(y - a)^2 = x^3$; b) $x^3 + (y - a)^3 - 3x(y - a) = 0$; c) $y = 2ax + 3a^2$; d) $4(1 + a)x = a^2y$.

Rozwiązanie. Korzystamy z warunków (7).

a) $F'_a = [(y-a)^2 - x^3]'_a = -2(y-a)$, stąd

$$(y-a)^2 - x^3 = 0, \quad y-a=0.$$

Rugując z otrzymanego układu parametr a , otrzymujemy (tzw. krzywą wyróżnikową) $x=0$, czyli oś Oy . Pochodne cząstkowe $F'_x = -3x^2$ i $F'_y = 2(y-a)$, równają się zeru dla punktów postaci $(0, a)$, a więc otrzymana krzywa wyróżnikowa jest miejscem geometrycznym punktów osobliwych rodziny, tzn. nie istnieje obwiednia.

b) $F'_a = -3(y-a)^2 + 3x$, stąd

$$(y-a)^2 - x = 0,$$

(b)

$$x^3 + (y-a)^3 - 3x(y-a) = 0.$$

Rugując parametr a z układu (b), otrzymujemy

$$(x^3 - 2x\sqrt{x} = 0) \Leftrightarrow (x=0 \vee x = \sqrt[3]{4}).$$

Ponieważ pochodne $F'_x = 3x^2 - 3(y-a)$ i $F'_y = 3(y-a)^2 - 3x$ równają się zeru dla punktów postaci $(0, a)$, zatem prosta $x=0$ jest zbiorem punktów osobliwych rodziny, natomiast prosta $x = \sqrt[3]{4}$ jest obwiednią rodziny.

c) $F'_a = 2x + 6a$, stąd

$$x + 3a = 0,$$

(c)

$$2ax + 3a^2 - y = 0.$$

Rugując parametr a z układu (c) otrzymujemy parabolę $y = -\frac{1}{3}x^2$, która jest obwiednią, ponieważ $F'_y = -1 \neq 0$.

d) $F'_a = 4x - 2ay$, stąd

(d)

$$2x - ay = 0, \quad 4(1+a)x - a^2y = 0.$$

Rugując parametr a z układu (d), otrzymujemy $x(x+y)=0$.

Znaleziona krzywa wyróżnikowa składa się z dwóch prostych $x=0$ i $y=-x$, z których żadna nie jest obwiednią, ani nie jest zbiorem punktów osobliwych krzywych rodziny. Łatwo zauważyć, że są to proste należące do rodziny odpowiednio dla parametrów $a=0$ i $a=-2$.

Zadania

38.6. Dany jest łuk elipsy $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j}$, $t \in \langle 0, \frac{3}{2}\pi \rangle$. Znaleźć wersory styczne i wersory normalne do łuku dla $t=0$, $t=\frac{1}{2}\pi$, $t=\frac{3}{4}\pi$, $t=\frac{3}{2}\pi$.

38.7. Znaleźć równanie stycznej i równanie normalnej do cykloidy

$$\mathbf{r}(t) = a(t - \sin t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad \text{dla} \quad t = \frac{3}{2}\pi.$$

38.8. Znaleźć równanie stycznej i równanie normalnej do krzywej o równaniu $r(\varphi) = 2e^\varphi$, dla $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ w układzie biegunowym.

38.9. Dane są równania łuków zorientowanych:

a) $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j}$, $t \in \langle \frac{3}{2}\pi, 2\pi \rangle$;

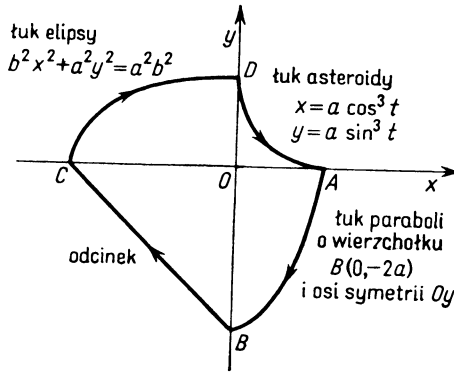
b) $\mathbf{r}(t) = a \cos^3 t \mathbf{i} + a \sin^3 t \mathbf{j}$, $t \in \langle \frac{1}{2}\pi, \pi \rangle$;

c) $\mathbf{r}(t) = a(\sin t - t) \mathbf{i} + a(1 - \cos t) \mathbf{j}$, $t \in \langle \pi, 2\pi \rangle$.

Znaleźć równania łuków zorientowanych przeciwnie z danymi.

38.10. Na płaszczyźnie dana jest krzywa zamknięta zorientowana kawałkami regularna (rys. 38.7). Znaleźć jej równania.

38.11. Znaleźć krzywiznę oraz współrzędne środka krzywizny krzywej określonej równaniem $y=f(x)$, $x \in (a, b)$, $f \in C^2((a, b)) \wedge (f'' \neq 0 \text{ na } (a, b))$.



Rys. 38.7

38.12. Wykazać, że krzywizna k krzywej określonej równaniem uwikłanym $F(x, y) = 0$ wyraża się wzorem

$$k = \frac{1}{(F'_x{}^2 + F'_y{}^2)^{3/2}} \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}.$$

38.13. Wykazać, że krzywizna krzywej o równaniu $r=r(\varphi)$ określonej w układzie biegunowym $Or\varphi$ wyraża się wzorem

$$k = \frac{r^2 + 2r_\varphi'^2 - rr_\varphi''}{(r^2 + r_\varphi'^2)^{3/2}}.$$

38.14. Znaleźć krzywizny krzywych określonych wzorami:

a) $\mathbf{r}(t) = t \cos t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j}$ dla $t = \frac{1}{2}\pi$;

b) $\mathbf{r}(t) = 3t^2 \mathbf{i} - (1 - t^3) \mathbf{j}$ dla $t = 1$;

c) $f(x) = x^4 - x + 2$ dla $x = 2$; d) $g(x) = e^{-x^2}$ dla $x = 0$;

e) $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ w punkcie $A(1, 1)$;

f) $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ w wierzchołkach $A(a, 0)$, $B(0, b)$;

g) $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ w punkcie $A(x, y)$;

h) $r = r(\varphi) = a(1 + \cos \varphi)$ dla $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ w układzie biegunowym $Or\varphi$;

i) $r = r(\varphi) = e^\varphi$ dla $\varphi = 1$ w układzie biegunowym $Or\varphi$.

38.15. Znaleźć największe wartości bezwzględne krzywizn krzywych określonych wzorami:

a) $f(x) = \ln x$, b) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + a \cosh \frac{t}{a} \mathbf{j}$.

38.16. W jakim punkcie paraboli $y^2 = 8x$ krzywizna równa się 0,128?

38.17. Znaleźć równania okręgów krzywiznowych krzywych określonych równaniami:

a) $f(x) = 4x^3$ w punkcie o odciętej $x = 1$;

b) $g(x) = \frac{x-2}{2x+5}$ w punkcie o odciętej $x = 2$;

c) $x(t) = 3t$, $y(t) = t^2 - 6$ dla $t = 1$; d) $x(t) = \sin^4 t$, $y(t) = \cos^4 t$ dla $t = \frac{1}{4}\pi$;

e) $x(t) = a(\cos t + t \sin t)$, $y(t) = a(\sin t - t \cos t)$ dla $t = \frac{1}{6}\pi$;

f) $r(\varphi) = a\varphi$ dla $\varphi = \pi$; g) $r(\varphi) = a(1 + \cos \varphi)$ dla $\varphi = \frac{1}{4}\pi$; h) $r(\varphi) = e^{a\varphi}$ dla $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

U w a g a. W punktach f), g) i h) krzywe dane są w układzie biegunowym $Or\varphi$.

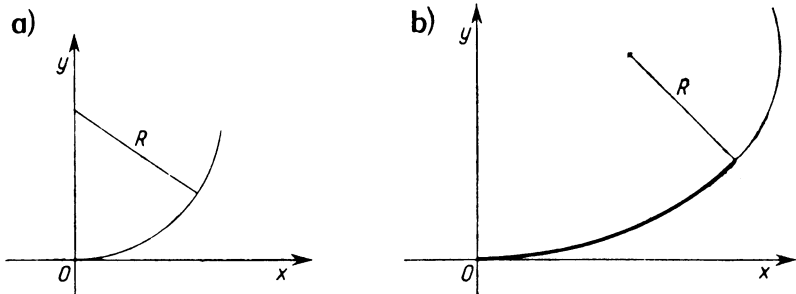
38.18. Udowodnić, że dla krzywych stożkowych promień krzywizny jest proporcjonalny do sześciangu długości odcinka normalnej (por. § 22).

38.19. Podać konstrukcję geometryczną środka krzywizny linii łańcuchowej

$$y(x) = a \cosh \frac{x}{a}.$$

38.20. Podać konstrukcję geometryczną stycznej oraz środka krzywizny cycloidy $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$ w dowolnym jej punkcie.

38.21. W mechanice dowodzi się, że przy ruchu punktu materialnego po krzywej powstaje siła odśrodkowa, której wielkość $F = \frac{mv^2}{R^2}$, gdzie: m – masa punktu, v – prędkość, R – promień krzywizny krzywej w rozpatrywanym punkcie. Ze wzoru



Rys. 38.8

tego korzystamy przy wytyczaniu łuków torów na zakrętach. Mianowicie, gdyby prostoliniowy odcinek toru (rys. 38.8) połączyć torem łuku okręgu, to przy wjeździe wagonu na łuk powstałaby natychmiast siła odśrodkowa (która na torze prostoliniowym jest równa zeru) powodująca gwałtowne szarpnięcie.

Sprawdzić, że jeżeli zamiast łuku okręgu weźmiemy łuk krzywej o równaniu $y = \frac{1}{6q} x^3$, $q \in \mathbf{R}_+$ (tzw. *krzywej przejściowej*), to siła odśrodkowa rośnie stopniowo poczynając od zera.

38.22. Korzystając z wyniku zadania 38.21, znaleźć na krzywej przejściowej określonej równaniem $y = \frac{\sqrt[4]{8}}{6} x^3$, $x \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$ punkt, dla którego promień krzywizny $R=1$ (w tym punkcie łączy się krzywa przejściowa z łukiem okręgu o promieniu 1). Wykazać, że istnieją dokładnie dwa takie punkty.

38.23. Znaleźć ewoluty krzywych określonych równaniami:

a) $y^2 = 2px$; b) $y(x) = a \cosh \frac{x}{a}$; c) $x(t) = a \cos t$, $y(t) = b \sin t$;

d) $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$; e) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

f) $x(t) = a \cos^3 t$, $y(t) = a \sin^3 t$; g) $r(\varphi) = a\varphi$; h) $r(\varphi) = a(1 + \cos \varphi)$.

Uwaga. W punktach g) i h) krzywe dane są w układzie biegunowym $O\rho\varphi$.

38.24. Udowodnić, że ewoluta krzywej płaskiej jest obwiednią rodziny normalnych tej krzywej. Zakładamy, że opisy parametryczne krzywej i ewoluty są funkcjami klasy C^3 .

38.25. Dane są równania i punkty:

a) $x^2 - y^2 = 4$, $P(\sqrt{5}, 1)$; b) $x^2 + xy + y^2 = 1$, $P(0, 1)$;

c) $xy^2 - e^{-y} - 1 = 0$, $P(e+1, -1)$;

d) $e^{x \cos y} \cos y + e^{x \sin y} \sin y + x + y - 1 = 0$, $P(0, 0)$.

Sprawdzić, że równania te wyznaczają krzywe płaskie na otoczeniach tych punktów oraz napisać równania stycznych do tych krzywych w danych punktach.

38.26. Zbadać punkty osobliwe krzywych określonych równaniami:

a) $3x^2 + x^3 - y^2 = 0$; b) $x^2 - x^3 + y^2 = 0$; c) $y^2 = x^3$;

d) $x^4 - x^2 - y^2 = 0$; e) $y^2 = x^3 - 2x^2 + x$; f) $x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0$.

38.27. Narysować wykresy krzywych określonych równaniami:

a) $y^2 = x^2 - x^4$; b) $a^2 y^2 = x^3(2a - x)$;

c) $x^4 + y^4 = 2xy$; d) $(x^2 + y^2 - 4x)^2 = 16(x^2 + y^2)$.

38.28. Znaleźć linie warstwiczne funkcji określonych wzorami:

a) $z = g(x, y) = 4x + 5y - 2$; b) $z = f(x, y) = x^2 + 2y$;

c) $z = k(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; d) $z = h(x, y) = (2 + x + 3y)^2$;

e) $z = r(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x}}$; f) $z = m(x, y) = \frac{y}{x^2}$;

g) $z = p(x, y) = \arctg \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}$ ($a > 0$); h) $z = t(x, y) = \ln(x^2 + y)$;

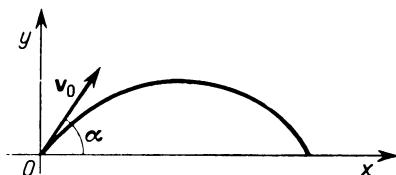
- i) $z=f(y-ax)$ (funkcja f ma funkcję odwrotną);
 j) $z=n(\sqrt{x^2+y^2})$ (funkcja n ma funkcję odwrotną).

38.29. Znaleźć obwiednie rodzin krzywych określonych równaniami:

- a) $(x-a)^2+y^2=1$; b) $(x-a)^2+y^2=\frac{1}{2}a^2$;
 c) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, gdzie $a+b=d$; d) $y=(x-a)^3$;
 e) $y=ax+a^2$; f) $(b+x)(y-a)^2=x^2(b-x)$; g) $(y-a)^2=(x-a)^3$.

W przykładach a) - g) zmienna a jest parametrem rodziny, zmienne x i y oznaczają współrzędne punktu bieżącego krzywych rodzin.

38.30. Znaleźć równanie obwiedni rodziny okręgów mających środki na paraboli $y=bx^2$ i przechodzących przez jej wierzchołek.



Rys. 38.9

38.31. Równanie toru pocisku wystrzelonego z punktu $O(0, 0)$ z prędkością początkową v_0 pod kątem α (rys. 38.9) określone jest wzorem

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Przyjmując kąt α jako parametr, znaleźć obwiednię wszystkich torów pocisków (v_0 - stała) w tej samej płaszczyźnie pionowej.

Odpowiedzi

38.6. $\mathbf{t}=(0, 1)$, $\mathbf{n}=(-1, 0)$, $\mathbf{t}=(-1, 0)$, $\mathbf{n}=(0, -1)$, $\mathbf{t}=\left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$,

$$\mathbf{n}=\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \mathbf{t}=(1, 0), \mathbf{n}=(0, 1).$$

38.7. $L_{st.} : \mathbf{r}(t) = (\frac{1}{4}a(3\pi - 2\sqrt{2}) + \frac{1}{2}a(2 + \sqrt{2})t)\mathbf{i} + (\frac{1}{2}a(2 + \sqrt{2}) + \frac{1}{2}a\sqrt{2}t)\mathbf{j}$,

$$L_{nor.} : \mathbf{r}(t) = (\frac{1}{4}a(3\pi - 2\sqrt{2}) - \frac{1}{2}a\sqrt{2}t)\mathbf{i} + (\frac{1}{2}a(2 + \sqrt{2}) + \frac{1}{2}a(2 + \sqrt{2})t)\mathbf{j}.$$

38.8. $L_{st.} : \mathbf{r}(t) = -2e^{\pi/2}t\mathbf{i} + 2e^{\pi/2}(1+t)\mathbf{j}$,

$$L_{nor.} : \mathbf{r}(t) = -2e^{\pi/2}t\mathbf{i} + 2e^{\pi/2}(1-t)\mathbf{j}.$$

38.9. a) $\mathbf{r}_1(t) = 2 \cos t \mathbf{i} - 3 \sin t \mathbf{j}$, $t \in \langle -2\pi, -\frac{3}{2}\pi \rangle$;

b) $\mathbf{r}_1(t) = a \cos^3 t \mathbf{i} - a \sin^3 t \mathbf{j}$, $t \in \langle -\pi, -\frac{1}{2}\pi \rangle$;

c) $\mathbf{r}_1(t) = a(t - \sin t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}$, $t \in \langle -2\pi, -\pi \rangle$.

38.10. $K = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$, gdzie np.

$$\overline{AB}: \mathbf{r}_1(t) = -t\mathbf{i} + \left(\frac{2}{a}t^2 - 2a\right)\mathbf{j}, \quad t \in \langle -a, 0 \rangle,$$

$$\overline{BC}: \mathbf{r}_2(u) = -bu\mathbf{i} + (-2a + 2au)\mathbf{j}, \quad u \in \langle 0, 1 \rangle,$$

$$\overline{CD}: \mathbf{r}_3(\varphi) = b \cos \varphi \mathbf{i} - a \sin \varphi \mathbf{j}, \quad \varphi \in \langle -\pi, -\frac{1}{2}\pi \rangle,$$

$$\overline{DA}: \mathbf{r}_4(v) = a \cos^3 v \mathbf{i} - a \sin^3 v \mathbf{j}, \quad v \in \langle -\frac{1}{2}\pi, 0 \rangle.$$

38.11. $k = \frac{f''(x)}{(1+f'^2(x))^{3/2}}, \quad S\left(x - \frac{1+f'^2(x)}{f''(x)}f'(x), f(x) + \frac{1+f'^2(x)}{f''(x)}\right).$

38.14. a) $\frac{8}{5\sqrt{5}\pi^2}$; b) $\frac{2}{15\sqrt{5}}$; c) $\frac{48}{962^{3/2}}$; d) -2 ; e) $\frac{-1}{3\sqrt{2}}$,

f) $\frac{-a}{b^2}, \frac{-b}{a^2}$; g) $\frac{-a^4b^4}{(b^4x^2+a^4y^2)^{3/2}}$; h) $\frac{\sqrt{3}}{2a}$; i) $\frac{1}{2\sqrt{2}e}$.

38.15. a) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$; b) $\frac{1}{a}$. 38.16. $A\left(\frac{9}{8}, -3\right).$

38.17. a) $(x + \frac{143}{24})^2 + (y - \frac{241}{24})^2 = \frac{145^2}{24^2}$; b) $(x - \frac{77}{18})^2 + (y + \frac{41}{2})^2 = \frac{41^2}{16^2}$;

c) $(x + \frac{4}{3})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{13^2}{36}$; d) $(x - \frac{3}{4})^2 + (y - \frac{3}{4})^2 = \frac{1}{8}$;

e) $(x - \frac{1}{2}\sqrt{3}a)^2 + (y - \frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{36}\pi^2 a^2$;

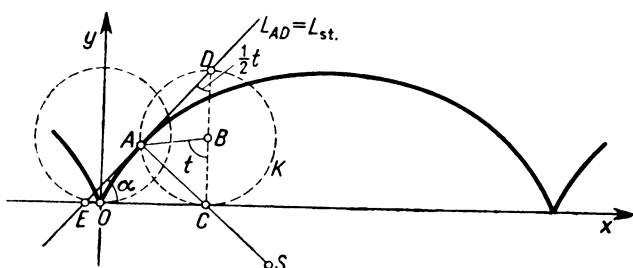
f) $\left[x + \frac{\pi a}{\pi^2 + 2}\right]^2 + \left[y + \frac{a(\pi^2 + 1)}{\pi^2 + 2}\right]^2 = \frac{a^2(\pi^2 + 1)^3}{(\pi^2 + 2)^2}$;

g) $[x - \frac{1}{6}a(3 + \sqrt{2})]^2 + [y - \frac{1}{6}a(\sqrt{2} - 1)]^2 = \frac{4}{9}a^2(2 + \sqrt{2})$;

h) $(x + ae^{4a\pi})^2 + y^2 = (1 + a^2)e^{8\pi}$.

38.19. Wsk. Por. przykład 22.3.

38.20. Wsk. Skorzystać z definicji cykloidy oraz wykazać, że $\operatorname{tg} \alpha_{st} = \operatorname{ctg} \frac{1}{2}t$, promień krzywizny $\rho = 2d(A, C)$ (por. rys. 38.10)



Rys. 38.10

$$38.21. \rho = \frac{q}{x} \left(\frac{1+x^4}{4q^2} \right)^{3/2}.$$

38.22. Jednym z punktów jest punkt $\left(1, \frac{\sqrt[4]{8}}{6}\right)$; funkcja określona wzorem $\rho = \frac{q}{x} \left(\frac{1+x^4}{4q^2} \right)^{3/2}$ ma dokładnie jedno minimum dla $x \approx 0,946 \sqrt{q}$.

$$38.23. \text{ a) } 27py^2 = 8(x-p)^3; \quad \text{ b) } x = a \ln \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4a^2}}{2a} \pm \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4a^2}}{4a};$$

$$\text{ c) } (ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}; \quad \text{ d) } x(t) = a(t + \sin t), \quad y(t) = -a(1 - \cos t);$$

$$\text{ e) } (ax)^{2/3} - (by)^{2/3} = (a^2 + b^2)^{2/3}; \quad \text{ f) } (x+y)^{2/3} + (x-y)^{2/3} = 2a^{2/3};$$

$$\text{ g) } x(t) = \frac{a}{t^2+2} (t \cos t - t^2 \sin t - \sin t), \quad y(t) = \frac{a}{t^2+2} (t \sin t + t^2 \cos t + \cos t);$$

$$\text{ h) } x(t) = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}a(1 - \cos t) \cos t, \quad y(t) = \frac{1}{3}a(1 - \cos t) \sin t.$$

38.24. Wsk. Wykazać, że jeżeli $\mathbf{R}(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j}$ – ewoluta, $\mathbf{r}(t) = \varphi_1(t)\mathbf{i} + \psi_1(t)\mathbf{j}$ – krzywa, to $\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = -\frac{\varphi_1'(t)}{\psi_1'(t)}$, lub skorzystać z równania normalnej.

$$38.25. \text{ a) } 2\sqrt{5}x - 2y - 8 = 0; \quad \text{ b) } x + 2y - 2 = 0;$$

$$\text{ c) } x - (e+2)y - 2e - 3 = 0; \quad \text{ d) } x + y = 0.$$

38.26. a) $O(0, 0)$ – węzeł, styczne w punkcie $O(0, 0)$: $y = \mp \sqrt{3}x$;

b) $O(0, 0)$ – punkt izolowany;

c) $O(0, 0)$ – punkt zwrotu, styczna w punkcie $O(0, 0)$: $y = 0$;

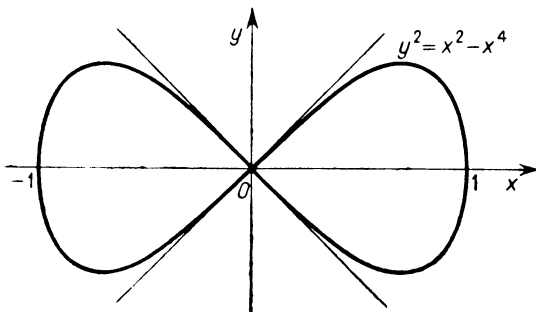
d) $O(0, 0)$ – punkt izolowany;

e) $P(1, 0)$ – węzeł, styczne w punkcie P : $y = \mp(x-1)$;

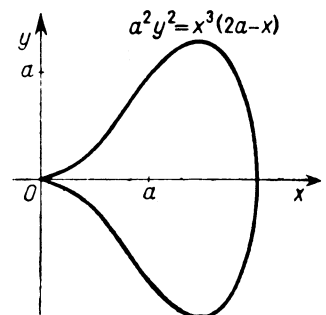
f) $O(0, 0)$ – węzeł, styczne w punkcie $O(0, 0)$: $y = \mp x$.

38.27. a) $|x| \leq 1$, krzywa symetryczna względem osi układu i początku układu, punkt $O(0, 0)$ – węzeł (rys. 38.11);

b) $0 \leq x \leq 2a$, krzywa symetryczna względem osi Ox , punkt $O(0, 0)$ – punkt zwrotu (rys. 38.12);



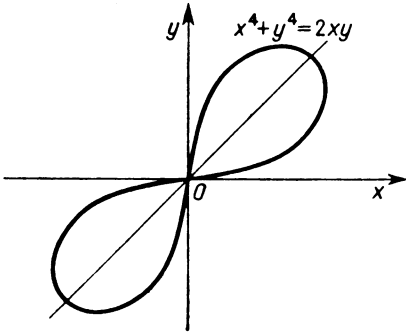
Rys. 38.11



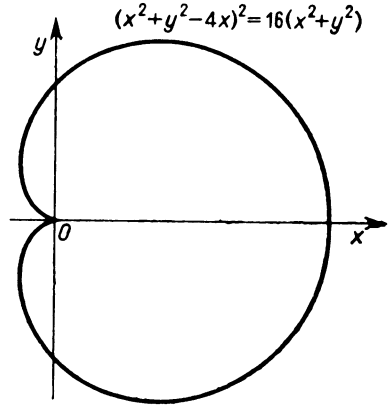
Rys. 38.12

c) krzywa symetryczna względem prostej $y=x$ oraz względem początku układu, punkt $O(0, 0)$ – węzeł, punkty ekstremalne $A_{1,2}(\pm\sqrt[3]{\frac{3}{16}}, \pm\sqrt[8]{\frac{27}{16}})$, $B_{1,2}(\pm\sqrt[8]{\frac{27}{16}}, \pm\sqrt[3]{\frac{3}{16}})$ (rys. 38.13);

d) krzywa symetryczna względem osi Ox , punkt $O(0, 0)$ – punkt zwrotu, punkty ekstremalne $A_{1,2}(3, \mp\sqrt{27})$, $B_{1,2}(-1, \mp\sqrt{3})$, $C(8, 0)$ (rys. 38.14).



Rys. 38.13



Rys. 38.14

- 38.28.** a) $4x + 5y - 2 - z_0 = 0$, $-\infty < z_0 < +\infty$; b) $x^2 = -2(y - \frac{1}{2}z_0)$, $-\infty < z_0 < +\infty$;
 c) $x^2 + y^2 = 4 - z_0^2$, $0 \leq z_0 \leq 2$; d) $2 + x + 3y = \sqrt{z_0}$, $z_0 \geq 0$;
 e) $y = z_0 \sqrt{x}$, $-\infty < z_0 < +\infty$; f) $y = z_0 x^2$, $-\infty < z_0 < +\infty$;
 g) $x^2 + \left(y - \frac{a}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2}(c^2 + 1)$, gdzie $c = \operatorname{tg} z_0$, $0 < |z_0| < \frac{1}{2}\pi$, z wyłączeniem punktów $A(\mp a, 0)$ oraz osi Ox dla $z_0 = 0$ z wyłączeniem punktów $A(\mp a, 0)$;

h) $x^2 = -(y - e^{z_0})$, $-\infty < z_0 < +\infty$; i) $y = ax + f^{-1}(z_0)$; j) $x^2 + y^2 = [n^{-1}(z_0)]^2$.

- 38.29.** a) $y = \mp 1$; b) $y = \mp x$;
 c) $x^{2/3} + y^{2/3} = d^{2/3}$; d) $y = 0$; e) $y = -\frac{1}{4}x^2$;
 f) $x = b$ – obwódca, $x = 0$ – zbiór punktów osobliwych;
 g) $y = x - \frac{4}{27}$ – obwódca, $y = x$ – zbiór punktów osobliwych.

38.30. $2by(x^2 + y^2) + x^2 = 0$.

38.31. $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2$ (tzw. parabola bezpieczeństwa).

§ 39. POWIERZCHNIE W \mathbb{R}^3

39.1. *Platem prostym* nazywamy hodograf funkcji wektorowej

$$(1) \quad \mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \supset D \ni (u, v) \rightarrow \mathbf{r}(u, v) \in \mathbb{R}^3, \quad D = \{(u, v) : (a \leq u \leq b) \wedge (c \leq v \leq d)\},$$

gdzie \mathbf{r} jest homeomorfizmem na D (tzn. istnieje \mathbf{r}^{-1} i $\mathbf{r}, \mathbf{r}^{-1} \in C^0$).

Obraz brzegu prostokąta D nazywamy *brzegiem płata*. Funkcję \mathbf{r} nazywamy *opisem parametrycznym płata*, równania:

$$(2) \quad (\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \varphi(u, v)\mathbf{i} + \psi(u, v)\mathbf{j} + \chi(u, v)\mathbf{k}, (u, v) \in D) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v), (u, v) \in D)$$

nazywamy odpowiednio *równaniem wektorowym (równaniami parametrycznymi) płata*.

Powierzchnią zwyczajną nazywamy zbiór $S \subset \mathbf{R}^3$, który można pokryć podzbiórami będącymi płacami prostymi. Przypadkiem szczególnym powierzchni jest płat prosty bez brzegu. Mówimy, że *powierzchnia zwyczajna jest klasy C^n* , jeżeli każdy jej punkt ma otoczenie na powierzchni, które ma opis parametryczny $\mathbf{r} \in C^n$. Punkt P powierzchni klasy C^1 , w którym $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v \neq \mathbf{0}$ nazywamy *punktem regularnym powierzchni*. W przeciwnym przypadku, tzn. jeżeli dla każdego opisu parametrycznego jest $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \mathbf{0}$, to punkt P nazywamy *punktem osobliwym*. Powierzchnia klasy C^1 składająca się z samych punktów regularnych nazywa się *powierzchnią regularną*. W szczególności hodograf funkcji (1), gdzie $\mathbf{r} \in C^1(D) \wedge \bigwedge_{(u, v) \in D} \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v \neq \mathbf{0}$ nazywamy *platem regularnym*.

Niech $(u_0, v_0) \in D$ dla równania (1). Jeżeli $v = v_0 [u = u_0]$, to $\mathbf{r}(u, v_0) = \mathbf{g}(u)$ [$\mathbf{r}(u_0, v) = \mathbf{h}(v)$] i hodograf funkcji \mathbf{g} [funkcji \mathbf{h}] nazywamy *linią współrzędnych (lub linią izoparametryczną) u [v] o równaniu $v = v_0 [u = u_0]$, lub krzywą $v = v_0 [u = u_0]$* . Parę uporządkowaną (u, v) nazywamy *współrzędnymi krzywoliniowymi* punktu powierzchni dla wartości parametrów u i v .

39.2. Jeżeli równanie

$$(3) \quad F(x, y, z) = 0$$

wyznacza płat regularny [powierzchnię regularną] (zachodzi to przy pewnych założeniach o funkcji F , por. § 30), to (3) nazywamy *równaniem uwikłanym płata [powierzchni]*.

W każdym punkcie P powierzchni regularnej o opisie $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbf{R}^3$ istnieje jednoznacznie określona płaszczyzna styczna o równaniu

$$(4) \quad ((\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) \bullet \overline{PQ} = 0) \Leftrightarrow (\mathbf{R}(k, t) = \mathbf{r} + k\mathbf{r}'_u + t\mathbf{r}'_v),$$

gdzie Q jest punktem bieżącym płaszczyzny stycznej, $k, t \in \mathbf{R}$ są parametrami oraz $\mathbf{r} = \overline{OP}$.

Jeżeli równanie (3) przedstawia powierzchnię regularną, to równanie płaszczyzny stycznej w punkcie P_0 powierzchni jest postaci

$$(5) \quad F'_x(P_0)(x - x_0) + F'_y(P_0)(y - y_0) + F'_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Wektor $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ w równaniu (4) oraz wektor $\mathbf{p} = (F'_x, F'_y, F'_z)$ w równaniu (5) nazywamy *wektorem normalnym do powierzchni* odpowiednio w punkcie (u, v) , względnie w punkcie $P(x, y, z)$. Prosta o równaniu

$$(6) \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} + t(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v), \quad t \in \mathbf{R},$$

nazywamy *prostą normalną do powierzchni $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbf{R}^3$ w punkcie (u, v)* .

Weźmy powierzchnię regularną S o opisie parametrycznym $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^3$ i punkt $P \in S$. W punkcie P istnieją dwa wersory normalne $\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|}$ i $-\mathbf{m}$. Ustalając jeden z nich określamy stronę powierzchni w otoczeniu punktu P . Powierzchnię z ustaloną stroną w danym punkcie nazywamy *powierzchnią zorientowaną w tym punkcie*. Dla pewnych powierzchni (np. dla płatów regularnych) można ustalić orientację ciągłą całej powierzchni; powierzchnie takie nazywamy *powierzchniami orientowalnymi* lub *dwustronnymi*. Orientację powierzchni dwustronnej ustalamy, podając np. jej wersory normalne

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|}, \quad (u, v) \in D.$$

Uwaga. Istnieją powierzchnie, które nie są orientowalne, nazywamy je *powierzchniami nieorientowalnymi (jednostronnymi)*. Przykładem powierzchni jednostronnej jest tzw. *wstęga Möbiusa*.

Przykłady

39.1. Napisać w postaci wektorowej równanie części elipsoidy

$$z = -c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad D = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

oraz znaleźć wersory normalne górnej strony tej powierzchni.

Rozwiązanie. Równanie elipsoidy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ można przedstawić parametrycznie, korzystając z uogólnionych współrzędnych sferycznych:

$$x = a \cos \theta \cos \varphi, \quad y = b \cos \theta \sin \varphi, \quad z = c \sin \theta,$$

gdzie $(\varphi, \theta) \in D = \{(\varphi, \theta) : (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \wedge (-\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi)\}$. Dla $\theta \in \langle -\frac{1}{2}\pi, 0 \rangle$ jest $-c \leq z \leq 0$, stąd równanie w postaci wektorowej

$$\mathbf{r}(\varphi, \theta) = a \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + b \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j} + c \sin \theta \mathbf{k},$$

$$D_1 = \{(\varphi, \theta) : (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \wedge (-\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq 0)\}.$$

Z kolei

$$\mathbf{r}'_\varphi = -a \cos \theta \sin \varphi \mathbf{i} + b \cos \theta \cos \varphi \mathbf{j} + 0 \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_\theta = -a \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} - b \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + c \cos \theta \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_\varphi \times \mathbf{r}'_\theta = bc \cos^2 \theta \cos \varphi \mathbf{i} + ac \cos^2 \theta \sin \varphi \mathbf{j} + ab \cos \theta \sin \theta \mathbf{k}.$$

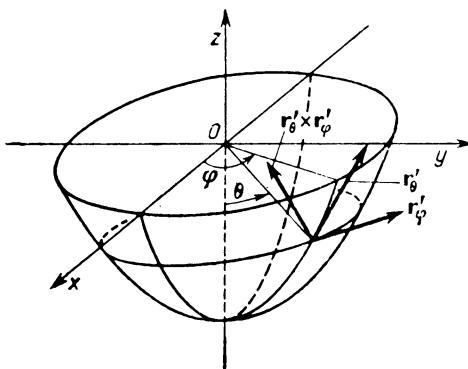
Ponieważ trzecia współrzędna wektora $\mathbf{w} = \mathbf{r}'_\varphi \times \mathbf{r}'_\theta$

$$\mathbf{w}_z = ab \cos \theta \sin \theta < 0 \quad \text{dla} \quad \theta \in (-\frac{1}{2}\pi, 0),$$

więc poszukiwane wersory normalne przyjmują postać ⁽¹⁾

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}'_{\theta} \times \mathbf{r}'_{\varphi}}{|\mathbf{r}'_{\theta} \times \mathbf{r}'_{\varphi}|}, \quad (\varphi, \theta) \in D_2 = \{(\varphi, \theta) : (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \wedge (-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0)\}.$$

Wektory górnej strony badanej elipsoidy można również znaleźć geometrycznie, korzystając z linii współrzędnych na powierzchni (por. rys. 39.1).

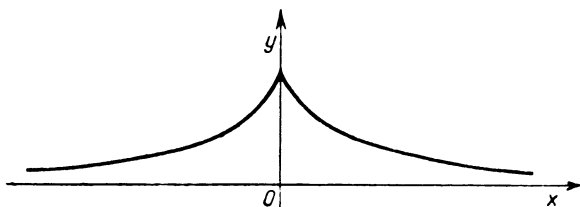


Rys. 39.1

39.2. *Pseudosferą* nazywamy powierzchnię obrotową powstałą przez obrót traktrisy o równaniu

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t + a \ln |\operatorname{tg} \frac{1}{2} t|) \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}, \quad t \in (0, \pi)$$

dookoła jej asymptoty (por. rys. 39.2). Znaleźć równanie pseudosfery, równanie płaszczyzny stycznej do niej w punkcie $(u, v) = (\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ oraz znaleźć geometrycznie i analitycznie wersory normalne zewnętrznej strony tej powierzchni.



Rys. 39.2

⁽¹⁾ W podanej parametryzacji \mathbf{w} i \mathbf{m} są skierowane ku dołowi, czyli na zewnątrz elipsoidy. Zmieniając umowę co do kolejności parametrów φ i θ otrzymujemy $-\mathbf{m}$ jako wersor normalny.

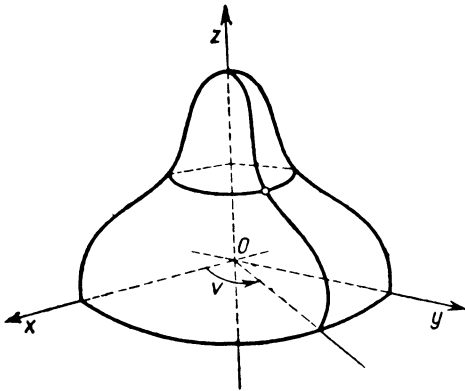
Rozwiązanie. Łatwo wykazać, że

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (a \cos t + a \ln |\operatorname{tg} \frac{1}{2}t|) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} a \sin t = 0,$$

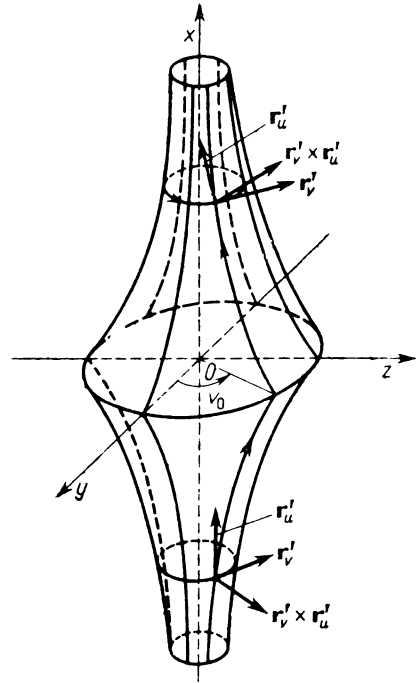
$$\lim_{t \rightarrow \pi^-} (a \cos t + a \ln |\operatorname{tg} \frac{1}{2}t|) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \pi^-} a \sin t = 0,$$

a więc oś Ox istotnie jest asymptotą traktysy. W celu znalezienia równania pseudosfery zauważmy, że każda płaszczyzna przechodząca przez oś obrotu pseudosfery (ogólnie powierzchni obrotowej) przecina ją w krzywych płaskich, zwanych *południkami* (por. rys. 39.3). Pseudosfera (ogólnie powierzchnia obrotowa) powstaje zatem przez obrót południka dookoła osi obrotu. W naszym przypadku południkiem będzie traktysa. Jeżeli przez ρ oznaczymy odległość punktu traktysy (ogólnie południka) od osi obrotu, to jej równania parametryczne przyjmują postać:

$$x = a \cos u + a \ln |\operatorname{tg} \frac{1}{2}u|, \quad \rho = a \sin u, \quad u \in (0, \pi).$$



Rys. 39.3



Rys. 39.4

Parametr u określa położenie punktu na traktysie. Aby określić jednoznacznie położenie punktu na powierzchni obrotowej należy jeszcze podać położenie południka. W tym celu wprowadzamy drugi parametr v , oznaczający kąt, o który trzeba obrócić płaszczyznę Oxy , aby otrzymać daną płaszczyznę południka. Zatem współrzędne punktu powierzchni obrotowej (w naszym przypadku pseudosfery) wyrażają się za pomocą parametrów u i v

wzorami (por. rys. 39.4):

$$x(u, v) = a \cos u + a \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} u \right|,$$

$$y(u, v) = a \sin u \cos v, \quad z(u, v) = a \sin u \sin v,$$

gdzie $(u, v) \in D = \{(u, v) : (0 < u < \pi) \wedge (0 \leq v \leq 2\pi)\}$. Stąd równanie wektorowe pseudosfery:

$$(a) \quad \mathbf{r}(u, v) = a(\cos u + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} u \right|) \mathbf{i} + a \sin u \cos v \mathbf{j} + a \sin u \sin v \mathbf{k},$$

gdzie $D = \{(u, v) : (0 < u < \pi) \wedge (0 \leq v \leq 2\pi)\}$.

Z kolei

$$\mathbf{r}'_u = \frac{a \cos^2 u}{\sin u} \mathbf{i} + a \cos u \cos v \mathbf{j} + a \cos u \sin v \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_v = -a \sin u \sin v \mathbf{j} + a \sin u \cos v \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = a^2 \cos u \sin u \mathbf{i} - a^2 \cos^2 u \cos v \mathbf{j} - a^2 \cos^2 u \sin v \mathbf{k}$$

oraz

$$\mathbf{r}\left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{2}a(1 - \ln 3) \mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3} a \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_u\left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi\right) \times \mathbf{r}'_v\left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{3} a^2 \mathbf{i} - \frac{1}{4}a^2 \mathbf{k}.$$

Korzystając z równania (4), otrzymujemy równanie płaszczyzny stycznej:

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}(k, t) = \mathbf{r}\left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi\right) + k \mathbf{r}'_u\left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi\right) + t \mathbf{r}'_v\left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\mathbf{R}(k, t) = \frac{1}{2}a(3 - 3 \ln 3 + \sqrt{3}k) \mathbf{i} - \frac{1}{2}\sqrt{3}at \mathbf{j} + \frac{1}{2}a(\sqrt{3} + k) \mathbf{k}) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sqrt{3}x - z + \frac{1}{2}\sqrt{3}a \ln 3 = 0). \end{aligned}$$

W celu znalezienia wektorów normalnych zewnętrznej strony powierzchni zauważmy, że liniami $v = v_0$ są południki, a liniami $u = u_0$ są okręgi o środkach na osi Ox i promieniach $a \sin u_0$ (por. rys. 39.4). Stąd wektory normalne:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}'_v \times \mathbf{r}'_u}{|\mathbf{r}'_v \times \mathbf{r}'_u|} &= \frac{1}{a^2 |\cos u|} \mathbf{r}'_v \times \mathbf{r}'_u = \\ &= \begin{cases} -\sin u \mathbf{i} + \cos u \cos v \mathbf{j} + \cos u \sin v \mathbf{k} & \text{dla } u \in (0, \frac{1}{2}\pi) \\ \sin u \mathbf{i} - \cos u \cos v \mathbf{j} - \cos u \sin v \mathbf{k} & \text{dla } u \in (\frac{1}{2}\pi, \pi). \end{cases} \end{aligned}$$

W punktach powierzchni dla parametru $u = \frac{1}{2}\pi$, tzn. na okręgu $y^2 + z^2 = a^2$, $x = 0$, wektory \mathbf{m} nie są określone ($\mathbf{r}'_v \times \mathbf{r}'_u = \mathbf{0}$). Można wykazać, że są to punkty osobliwe pseudosfery. Zauważmy, że dla $u \in (0, \frac{1}{2}\pi)$, $-\sin u < 0$, tzn. wektory \mathbf{m} tworzą kąty rozwarte z dodatnim kierunkiem osi Ox oraz dla $u \in (\frac{1}{2}\pi, \pi)$ wektory \mathbf{m} tworzą kąty ostre z dodatnim kierunkiem osi Ox (por. rys. 39.4).

39.3. Dana jest powierzchnia o równaniu:

$$\mathbf{r}(t, \varphi) = 2t \cos \varphi \mathbf{i} + 2t \sin \varphi \mathbf{j} + (1 + 2t) \mathbf{k}, \quad t \in \mathbf{R} \wedge \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

a) Określić jaka to powierzchnia; b) udowodnić, że krzywe $t = t_0$ są ortogonalne do krzywych $\varphi = \varphi_0$.

c) Znaleźć równania stycznych do krzywych o równaniach $t = 1$ i $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ w ich punkcie przecięcia oraz równanie prostej normalnej do powierzchni w tym punkcie.

Rozwiązanie. a) Rugując parametry t i φ z równań parametrycznych powierzchni:

$$x=2t \cos \varphi, \quad y=2t \sin \varphi, \quad z=1+2t$$

otrzymujemy

$$(z-1)^2 = x^2 + y^2,$$

ozn. stożek kołowy o osi Oz i wierzchołku $W(0, 0, 1) \in Oz$.

b) Mówimy, że dwie krzywe są ortogonalne jeżeli: 1° mają punkt wspólny, 2° wektory styczne w ich wspólnym punkcie są ortogonalne.

Znajdujemy wektory styczne do linii współrzędnych φ i linii współrzędnych t :

$$\mathbf{r}'_{\varphi}(t_0, \varphi) = -2t_0 \sin \varphi \mathbf{i} + 2t_0 \cos \varphi \mathbf{j},$$

$$\mathbf{r}'_t(t, \varphi_0) = 2 \cos \varphi_0 \mathbf{i} + 2 \sin \varphi_0 \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}.$$

Wektory te w punkcie przecięcia krzywych $t=t_0$ i $\varphi=\varphi_0$ są ortogonalne, ponieważ

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}'_{\varphi}(t_0, \varphi_0) \bullet \mathbf{r}'_t(t_0, \varphi_0)) &= -4t_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + 4t_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\mathbf{r}'_{\varphi}(t_0, \varphi_0) \perp \mathbf{r}'_t(t_0, \varphi_0)). \end{aligned}$$

c) $L_{st.}$ do krzywej $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ w punkcie $(t, \varphi) = (1, \frac{1}{2}\pi)$:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(1, \frac{1}{2}\pi) + \mathbf{r}'_{\varphi}(1, \frac{1}{2}\pi) \lambda = 2(1+\lambda) \mathbf{j} + (3+2\lambda) \mathbf{k}, \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

$L_{st.}$ do krzywej $t=1$ w punkcie $(t, \varphi) = (1, \frac{1}{2}\pi)$:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}(1, \frac{1}{2}\pi) + \mathbf{r}'_t(1, \frac{1}{2}\pi) \mu = 2 \mathbf{j} + 3 \mathbf{k} - 2\mu \mathbf{i}, \quad \mu \in \mathbb{R};$$

$L_{nor.}$ do powierzchni w punkcie $(1, \frac{1}{2}\pi)$:

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{r}(1, \frac{1}{2}\pi) + \lambda (\mathbf{r}'_{\varphi}(1, \frac{1}{2}\pi) \times \mathbf{r}'_t(1, \frac{1}{2}\pi)) = (2-4\lambda) \mathbf{j} + (3+4\lambda) \mathbf{k}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

39.4. Sprawdzić, że krzywa o równaniu $\mathbf{r}_1(t) = 3t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + 8t^2\mathbf{k}$, $t \in \mathbb{R}$ leży na powierzchni o równaniu

$$\mathbf{r}(u, v) = (u+v)\mathbf{i} - (u-v)\mathbf{j} + 4uv\mathbf{k}, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Znaleźć kąty jakie tworzy ta krzywa z liniami współrzędnych w punkcie dla $t=t_0$.

Rozwiązanie. Krzywa o równaniu $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$, $t \in T_p$ leży na powierzchni o równaniu $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$, $t \in T_p$. Muszą być zatem spełnione dla każdego t równania

$$(u+v=3t, \quad u-v=t, \quad 4uv=8t^2) \Leftrightarrow (u=2t, \quad v=t).$$

Ponieważ rozwiązania dwóch pierwszych równań spełniają równanie trzecie dla każdego t , zatem krzywa leży na powierzchni. Dla $t=t_0$ mamy

$$u = u_0 = 2t_0, \quad v = v_0 = t_0, \quad \mathbf{r}'_1(t_0) = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 16t_0\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_u(u_0, v_0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 4t_0\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}'_v(u_0, v_0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 8t_0\mathbf{k}.$$

Kosinus kąta φ między daną krzywą i krzywą $v=v_0$ w punkcie ich przecięcia:

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{r}'_u(u_0, v_0) \bullet \mathbf{r}'_1(t_0)}{|\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)| |\mathbf{r}'_1(t_0)|} = \frac{4(1+16t_0^2)}{\sqrt{(2+16t_0^2)(10+256t_0^2)}}.$$

Kosinus kąta ψ między daną krzywą i krzywą $u=u_0$:

$$\cos \psi = \frac{\mathbf{r}'_v(u_0, v_0) \bullet \mathbf{r}'_1(t_0)}{|\mathbf{r}'_v(u_0, v_0)| |\mathbf{r}'_1(t_0)|} = \frac{2+128t_0^2}{\sqrt{(2+64t_0^2)(10+256t_0^2)}}.$$

39.5. Znaleźć obwiednię i krawędź zwrotu rodziny powierzchni o równaniu:

$$(c^2 - 1)z - c^2y^2 + 2cx = 0 \quad (c - \text{parametr rodziny}).$$

Rozwiązanie. *Obwiednią jednoparametrowej rodziny powierzchni o równaniu $F(x, y, z, c) = 0$, $F \in C^1$ na pewnym zbiorze w \mathbf{R}^4 (c – parametr rodziny) nazywamy powierzchnią, która w każdym swoim punkcie jest styczna do pewnej powierzchni rodziny i ponadto dowolnie blisko punktu styczności z daną powierzchnią rodziny leży punkt styczności z inną powierzchnią rodziny. Udowadnia się, że współrzędne punktów obwiedni rodziny spełniają układ równań*

$$(a) \quad F(x, y, z, c) = 0, \quad F'_c(x, y, z, c) = 0.$$

Oprócz punktów obwiedni mogą spełniać układ (a) także punkty osobliwe powierzchni rodziny. Dla ustalonej wartości parametru c układ (a), jeżeli nie określa linii złożonej z punktów osobliwych, przedstawia krzywą zwaną *charakterystyką*, wzdłuż której obwiednia jest styczna do powierzchni odpowiadającej danej wartości c . Zmieniając c , otrzymujemy rodzinę krzywych tworzących całą obwiednię. Jeżeli charakterystyki posiadają obwiednię, to nazywamy ją *krawędzią zwrotu*. Równanie krawędzi zwrotu (zakładamy, że $F'_c \in C^2$) otrzymujemy z układu równań:

$$(a_1) \quad F(x, y, z, c) = 0, \quad F'_c(x, y, z, c) = 0, \quad F''_{cc}(x, y, z, c) = 0.$$

W naszym przykładzie rodzina powierzchni nie posiada punktów osobliwych, ponieważ

$$(F'_x = 2c, F'_y = -2c^2y, F'_z = c^2 - 1) \wedge (F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z > 0, c \in \mathbf{R}).$$

Charakterystykami są krzywe otrzymane z przecięcia powierzchni o równaniach:

$$(a_2) \quad (c^2 - 1)z - c^2y^2 + 2cx = 0,$$

$$(a_3) \quad 2cz - 2cy^2 + 2x = 0.$$

Zmieniając c , otrzymujemy zbiór charakterystyk tworzących poszukiwaną obwiednię. Rugując parametr c z (a₂) i (a₃), otrzymujemy równanie obwiedni w postaci uwikłanej.

Mianowicie $c = \frac{-x}{z - y^2}$, stąd

$$\left(\frac{x^2}{(z - y^2)^2} (z - y^2) - z + \frac{-2x^2}{z - y^2} = 0 \right) \Leftrightarrow (z^2 + x^2 = zy^2).$$

Z kolei $F''_{cc} = 2z - 2y^2 \Rightarrow z = y^2$. Wstawiając $z = y^2$ do (a₃), otrzymujemy $x = 0$, zatem krawędzią zwrotu jest parabola: $z = y^2, x = 0$.

Zadania

39.6. Podać interpretacje geometryczne wektorów $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)$, $\mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$, gdzie \mathbf{r} jest opisem parametrycznym płata regularnego.

39.7. Zapisać w postaci wektorowej powierzchnie o równaniach:

a) $x^2 + y^2 = z$; b) $x^2 + y^2 = 4 - z$; c) $y = x^2 + z^2$;

d) $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$; e) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

39.8. Wykazać, że powierzchnię o równaniu (katenoide):

$$\mathbf{r}(u, v) = a \cosh \frac{u}{a} \cos v \mathbf{i} + a \cosh \frac{u}{a} \sin v \mathbf{j} + u \mathbf{k}, \quad u \in \mathbb{R},$$

$v \in (0, 2\pi)$ można otrzymać przez obrót linii łańcuchowej $y = a \cosh \frac{x}{a}$ dookoła osi Ox .

39.9. Dana jest powierzchnia śrubowa

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k}, \quad D = \{(u, v) : (0 \leq u \leq 2) \wedge (0 \leq v \leq 2\pi)\}.$$

Narysować tę powierzchnię oraz linie współrzędnych na tej powierzchni, a następnie znaleźć geometrycznie i analitycznie wektory $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ w punktach powierzchni: $(u_1, v_1) = (1, \frac{1}{2}\pi)$, $(u_2, v_2) = (\frac{3}{2}, \pi)$.

39.10. Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej i prostej normalnej do powierzchni śrubowej

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k}, \quad (u, v) \in D$$

w punkcie $(u_0, v_0) = (1, \frac{1}{2}\pi) \in D$.

39.11. Znaleźć równania płaszczyzn stycznych do powierzchni określonych równaniami

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$ w punkcie $P_0(x_0, y_0, z_0)$;

b) $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 2pz$ w punkcie $P_1(x_1, y_1, z_1)$;

c) $xy^2 + z^3 = 12$ w punkcie $P(1, 2, 2)$;

d) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 + z^2)$ w punkcie $P_0(x_0, y_0, z_0)$;

e) $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2gx + 2hy + 2kz + m = 0$ w punkcie $P_0(x_0, y_0, z_0)$;

f) $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8$ w punkcie $P(2, 2, 1)$; g) $z = \arctg \frac{y}{x}$ w punkcie $P(1, 1, \frac{1}{2}\pi)$.

39.12. Znaleźć równania normalnych do powierzchni określonych równaniami:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ w punkcie $P(3, 4, 12)$; b) $z = x^2 + y^2$ w punkcie $P(1, 2, 5)$;

c) $z = y + \ln \frac{x}{z}$ w punkcie $P(1, 1, 1)$.

39.13. Znaleźć równania prostych stycznych i płaszczyzn normalnych do krzywych określonych równaniami:

- a) $y=x, z=x^2$ w punkcie $P(1, 1, 1)$;
 b) $x^2+z^2=10, y^2+z^2=10$ w punkcie $P(1, 1, 3)$.

39.14. Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni określonej równaniem $x^2+2y^2+z^2=1$ i równoległej do płaszczyzny $x-y+2z=0$.

39.15. Napisać w postaci parametrycznej równania krzywej określonej powierzchniami o równaniach $x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2=ax$ oraz wykazać, że rzut tej krzywej na płaszczyznę Oxz jest parabolą.

39.16. Znaleźć punkty przecięcia powierzchni śrubowej

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k} \quad ((u \in \mathbf{R}) \wedge (v \in \langle 0, 2\pi \rangle))$$

z prostą $\mathbf{R} = \mathbf{i} + t\mathbf{k}$, $t \in \mathbf{R}$ i kąty pod jakimi przecinają się.

39.17. Dana jest paraboloida $x^2+y^2=1-z$. Znaleźć wektor normalny zewnętrznej strony powierzchni.

39.18. Dana jest zamknięta powierzchnia stożka $x^2+z^2=y^2, 0 \leq y \leq 2$. Znaleźć wektor normalny dodatniej strony powierzchni, tzn. zewnętrznej.

39.19. Dane są powierzchnie o równaniach:

- a) $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + (4-u^2)\mathbf{k}$, $u \geq 0, v \in \langle 0, 2\pi \rangle$;
 b) $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + cv \mathbf{k}$, $u \geq 0, v \in \langle 0, 2\pi \rangle, c > 0$;
 c) $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + 2u \sin v \mathbf{j} + u^2 \mathbf{k}$, $u \geq 0, v \in \langle 0, 2\pi \rangle$;
 d) $\mathbf{r}(u, v) = u \mathbf{i} + u \cos v \mathbf{j} + u \sin v \mathbf{k}$, $u \geq 0, v \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

1° Określić jakie to powierzchnie oraz jakie są ich równania w układzie $Oxyz$, 2° określić jakie krzywe przedstawiają linie współrzędnych, 3° sprawdzić czy krzywe $u=u_0$ są ortogonalne do krzywych $v=v_0$, 4° napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie (u_0, v_0) powierzchni.

39.20. Dane są powierzchnie o równaniach:

a) $\mathbf{r}(u, v) = a \frac{u+v}{1+uv} \mathbf{i} + b \frac{1-uv}{1+uv} \mathbf{j} + c \frac{u-v}{1+uv} \mathbf{k}$, $uv \neq -1$;

b) $\mathbf{r}(u, v) = \frac{1}{2}a(u+v)\mathbf{i} + \frac{1}{2}b(u-v)\mathbf{j} + \frac{1}{2}uv\mathbf{k}$, $u, v \in \mathbf{R}$;

c) $\mathbf{r}(u, v) = (a_1u + b_1v)\mathbf{i} + (a_2u + b_2v)\mathbf{j} + (a_3u + b_3v)\mathbf{k}$, $(u, v) \in \mathbf{R}^2$, $\mathbf{R} \left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \right) = 2$.

1° Określić jakie to powierzchnie oraz jakie są ich równania w układzie $Oxyz$, 2° wykazać że linie $u=u_0$ i $v=v_0$ są prostymi oraz napisać ich równania w układzie $Oxyz$.

39.21. Dane są powierzchnie o równaniach:

a) $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + u \mathbf{k}$, $u \in \mathbf{R}, v \in \langle 0, 2\pi \rangle$;

b) $\mathbf{r}(u, v) = \sqrt{u} \cos v \mathbf{i} + \sqrt{u} \sin v \mathbf{j} + u \mathbf{k}$, $u \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\}, v \in \langle 0, 2\pi \rangle$;

c) $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + \sqrt{4-u^2} \mathbf{k}$, $u \in \langle 0, 2 \rangle, v \in \langle 0, 2 \rangle$;

d) $\mathbf{r}(u, v) = 2 \sin u \cos v \mathbf{i} + 3 \sin u \sin v \mathbf{j} + 4 \cos u \mathbf{k}$, $u, v \in \langle 0, 2\pi \rangle$;

e) $\mathbf{r}(u, v) = (b + a \cos v) \cos u \mathbf{i} + (b + a \cos v) \sin u \mathbf{j} + a \sin v \mathbf{k}$, $u, v \in \langle 0, 2\pi \rangle$;

f) $\mathbf{r}(u, v) = 2 \sinh u \cos v \mathbf{i} + 3 \sinh u \sin v \mathbf{j} + 4 \cosh u \mathbf{k}$, $u \in \mathbf{R}$, $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$;

g) $\mathbf{r}(u, v) = v \cos u \sin \alpha \mathbf{i} + v \sin u \sin \alpha \mathbf{j} + v \cos \alpha \mathbf{k}$, gdzie α stały kąt ostry, $u \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $v \in \mathbf{R}$;

h) $\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos u \mathbf{i} + 2 \sin u \mathbf{j} + v \mathbf{k}$, $u \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $v \in \mathbf{R}$.

1° Określić jakie powierzchnie przedstawiają te równania oraz znaleźć równania tych powierzchni w układzie $Oxyz$;

2° określić jakie krzywe przedstawiają linie współrzędnych na tych powierzchniach;

3° znaleźć równania prostych stycznych do linii współrzędnych i prostej normalnej do powierzchni w punkcie (u_0, v_0) , jeżeli:

$$(u_0, v_0) = (1, \frac{1}{2}\pi) \quad \text{dla a) i b);}$$

$$(u_0, v_0) = (2, \frac{1}{2}\pi) \quad \text{dla c);} \quad (u_0, v_0) = (\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi) \quad \text{dla d);}$$

$$(u_0, v_0) = (\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi) \quad \text{dla e);} \quad (u_0, v_0) = (0, 0) \quad \text{dla f);}$$

$$(u_0, v_0) = (\frac{1}{4}\pi, 1) \quad \text{dla g);} \quad (u_0, v_0) = (\frac{1}{3}\pi, 1) \quad \text{dla h).}$$

39.22. Dana jest powierzchnia o równaniu:

$$\mathbf{r}(u, v) = a \cos u \cos v \mathbf{i} + b \sin u \cos v \mathbf{j} + c \sin v \mathbf{k}, \quad u, v \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

1° Określić jaka to powierzchnia;

2° znaleźć na tej powierzchni punkt, w którym prosta normalna tworzy jednakowe kąty z osiami Ox, Oy, Oz .

39.23. Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni o równaniu

$$\mathbf{r}(u, v) = \cos u \cos v \mathbf{i} + \sqrt{2} \sin u \sin v \mathbf{j} + \sin v \mathbf{k}, \quad u, v \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

i równoległej do płaszczyzny $\mathbf{r} \bullet \mathbf{u} = 0$, $\mathbf{u} = (1, -1, -2)$.

39.24. Wykazać, że płaszczyzna styczna do powierzchni o równaniu:

$$\mathbf{r}(x, y) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + \frac{a^3}{xy} \mathbf{k}, \quad x, y \in \mathbf{R} - \{0\}$$

w dowolnym jej punkcie tworzy z płaszczyznami współrzędnych czworościan o stałej objętości.

39.25. Wykazać, że powierzchnia obrotowa powstała przez obrót krzywej o równaniu $z = f(x)$, $y = 0$ dookoła osi Oz ma równanie

$$\mathbf{r}(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi \mathbf{i} + \rho \sin \varphi \mathbf{j} + f(\rho) \mathbf{k}, \quad \rho \geq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

39.26. Dane są krzywe i powierzchnie o równaniach:

a) $\mathbf{r}(t) = t \cos t \mathbf{i} + t \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$, $t \in \mathbf{R}$,

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + u \mathbf{k}, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in \langle 0, 2\pi \rangle;$$

$$\text{b) } \mathbf{r}(t) = \frac{1}{10}(t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 3t^3\mathbf{k}), \quad t \in \mathbf{R},$$

$$\mathbf{r}(u, v) = \frac{u}{u^2+v^2}\mathbf{i} + \frac{1}{u^2+v^2}\mathbf{j} + \frac{v}{u^2+v^2}\mathbf{k}, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in \mathbf{R} - \{0\};$$

$$\text{c) } \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 5t^2\mathbf{k}, \quad t \in \mathbf{R},$$

$$\mathbf{r}(u, v) = \frac{u}{u^2+v^2}\mathbf{i} + \frac{v}{u^2+v^2}\mathbf{j} + \frac{1}{u^2+v^2}\mathbf{k}, \quad (u, v) \in \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\};$$

$$\text{d) } \mathbf{r}(t) = \sqrt{3}t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2\sqrt{3}t\mathbf{k}, \quad t \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\},$$

$$\mathbf{r}(u, v) = 4 \cos u \cos v \mathbf{i} + 4 \cos u \sin v \mathbf{j} + 4 \sin u \mathbf{k}, \quad u, v \in \langle 0, 2\pi \rangle;$$

$$\text{e) } \mathbf{r}(t) = 13t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}, \quad t \in \mathbf{R} \cup \{0\},$$

$$\mathbf{r}(u, v) = u^2\mathbf{i} - u \cos v \mathbf{j} + u \sin v \mathbf{k}, \quad u \geq 0, \quad v \in \langle 0, 2\pi \rangle;$$

$$\text{f) } \mathbf{r}(t) = \pi t^3\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}, \quad t \in \mathbf{R},$$

$$\mathbf{r}(u, v) = 2v\mathbf{i} + u \cos v \mathbf{j} + u \sin v \mathbf{k}, \quad (u, v) \in \mathbf{R}^2;$$

$$\text{g) } \mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t^3\mathbf{k}, \quad t \in \mathbf{R},$$

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + xy\mathbf{k}, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2;$$

$$\text{h) } \mathbf{r}(t) = 2t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 5(1-t^2)\mathbf{k}, \quad t \in \mathbf{R},$$

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (5-x^2-y^2)\mathbf{k}, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

1° Określić czy krzywe leżą na powierzchniach; 2° znaleźć kąty jakie tworzą krzywe z liniami współrzędnych w punkcie przecięcia się z nimi; 3° w przypadku gdy krzywa nie leży na powierzchni, znaleźć kąt pod jakim przecina powierzchnię.

39.27. Znaleźć obwiednie rodzin powierzchni (a – parametr rodziny):

$$\text{a) } x^2 + y^2 + (z-a)^2 = 2a; \quad \text{b) } (x-a)^2 + y^2 = 2az;$$

$$\text{c) } a^2x + ay + z = 0.$$

39.28. Znaleźć obwiednie jednoparametrowej rodziny sfer o równaniu

$$(x - \varphi(t))^2 + (y - \psi(t))^2 + (z - \chi(t))^2 = a^2(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

gdzie $\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k}$, $t \in \mathbf{R}$ jest krzywą regularną i $a \in C^1(\mathbf{R})$.

Uwaga. Obwiednia jednoparametrowej rodziny sfer nazywa się *powierzchnią kanałową*.

39.29. Znaleźć obwiednię rodziny sfer o stałym promieniu b i o środkach na okręgu $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ ($0 < b < a$).

39.30. Znaleźć obwiednie i krawędzie zwrotu rodzin powierzchni o równaniach (c – parametr rodziny):

$$\text{a) } (c+1)z - c^2x - c^2y^2 + 4c^2 = 0; \quad \text{b) } x + cy + c^2z - 4c = 0;$$

$$\text{c) } (c+4)x + c^2yz - 4c^2 = 0; \quad \text{d) } 9c^2x^2 + (c+2)y - 4c^2z^2 - 36c^2 = 0.$$

Odpowiedzi

39.6. $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)$ wektor styczny do krzywej $v=v_0$ w punkcie $u=u_0$, $\mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$ wektor styczny do krzywej $u=u_0$ w punkcie v_0 .

39.7. a) Np. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + u^2 \mathbf{k}$, $u \in \langle 0, +\infty \rangle$, $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$;

b) np. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + (4-u^2) \mathbf{k}$, $u \in \langle 0, +\infty \rangle$, $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$;

c) np. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u^2 \mathbf{j} + u \sin v \mathbf{k}$, $u \in \langle 0, +\infty \rangle$, $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$;

d) np. $\mathbf{r}(u, v) = \sin \alpha v \cos u \mathbf{i} + \sin \alpha v \sin u \mathbf{j} + \cos \alpha v \mathbf{k}$, $u \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $v \in \langle 0, +\infty \rangle$,

$\alpha = \arccos \frac{h}{R}$ oznacza stały kąt między tworzącą stożka i jego osią;

e) np. $\mathbf{r}(u, v) = a \sin u \cos v \mathbf{i} + b \sin u \sin v \mathbf{j} + c \cos u \mathbf{k}$, $u \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

39.9. $\frac{1}{2} \sqrt{2} \mathbf{i} - \frac{1}{2} \sqrt{2} \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{j} + \frac{2}{3} \mathbf{k}$.

39.10. $3x - 3\sqrt{3}y + 6z - \pi = 0$, $\mathbf{R} = (\frac{1}{2}\sqrt{3} + t)\mathbf{i} + (\frac{1}{2} - \sqrt{3}t)\mathbf{j} + (\frac{1}{2}\pi + 2t)\mathbf{k}$.

39.11. a) $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} \pm \frac{z_0 z}{c^2} = 1$; b) $\frac{x_1 x}{a^2} \pm \frac{y_1 y}{b^2} = p(z + z_1)$; c) $x + y + 3z - 9 = 0$;

d) $(2r^2 - a^2)x_0 x + (2r^2 + a^2)y_0 y + (2r^2 - a^2)z_0 z = r^4$, gdzie $r^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$;

e) $ax_0 x + by_0 y + cz_0 z + d(x_0 y + x y_0) + e(x_0 z + x z_0) + f(y_0 z + y z_0) + g(x + x_0) + h(y + y_0) + k(z + z_0) + m = 0$;

f) $x + y - 4z = 0$; g) $2x - 2y + 4z - \pi = 0$.

39.12. a) $\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-12}{12}$; b) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1}$; c) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

39.13.

a) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$, $x + y + 2z - 4 = 0$; b) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-1}$, $3x + 3y - z - 3 = 0$.

39.14. $x - y + 2z - \frac{1}{2} \sqrt{22} = 0$, $x - y + 2z + \frac{1}{2} \sqrt{22} = 0$.

39.15. $x(t) = a \sin^2 t$, $y(t) = a \sin t \cos t$, $z(t) = a \cos t$.

39.16. Wsk. Kątem między krzywą i powierzchnią w ich punkcie przecięcia nazywamy kąt między wektorem stycznym w tym punkcie do krzywej i płaszczyzną styczną do powierzchni w punkcie przecięcia.

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = ((-1)^k, k\pi), \quad k=0, 1, \dots, \quad \varphi = \frac{1}{4}\pi.$$

39.17. $\mathbf{m} = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \mathbf{i} + \frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \mathbf{k}$.

39.18. $\mathbf{m} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \mathbf{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \mathbf{k}$ oraz $\mathbf{m} = \mathbf{j}$ dla podstawy.

W punkcie $O(0, 0, 0)$ wektor normalny nie jest określony.

39.19. a) 1° paraboloida obrotowa $z = 4 - x^2 - y^2$; 2° $u = u_0$ – okręgi $x^2 + y^2 = u_0^2$, $z = 4 - u_0^2$, $u_0 > 0$, $v = v_0$ – parabole $\cos v_0 y - \sin v_0 x = 0$, $z = 4 - x^2 - y^2$; 3° są ortogonalne; 4° $2u_0^2 \cos v_0(x - u_0 \cos v_0) + 2u_0^2 \sin v_0(y - u_0 \sin v_0) + u_0(z - 4 + u_0^2) = 0$;

b) 1° powierzchnia śrubowa: $y \cos \frac{z}{c} = x \sin \frac{z}{c}$; 2° $u = u_0$ – linie śrubowe leżące na walcu $x^2 + y^2 = u_0^2$, o równaniach $\mathbf{r}(u_0, v) = u_0 \cos v \mathbf{i} + u_0 \sin v \mathbf{j} + cv \mathbf{k}$, $v = v_0$ – proste o równaniach $\mathbf{r}(u, v_0) = u \cos v_0 \mathbf{i} + u \sin v_0 \mathbf{j} + cv_0 \mathbf{k}$; 3° są ortogonalne; 4° $c \sin v_0 (x - u_0 \cos v_0) - c \cos v_0 (y - u_0 \sin v_0) + u_0 (z - cv_0) = 0$.

c) 1° paraboloida eliptyczna $4z = 4x^2 + y^2$; 2° $u = u_0$ – elipsy $4x^2 + y^2 = 4u_0^2$, $z = u_0^2$, $v = v_0$ – parabole otrzymane z przecięcia paraboloidy płaszczyzną $2 \sin v_0 x - \cos v_0 y = 0$; 3° nie są ortogonalne; 4° $-2u_0 \cos v_0 x - u_0 \sin v_0 y + z + u_0^2 = 0$.

d) 1° stożek $x^2 = y^2 + z^2$, $x \geq 0$; 2° $u = u_0$ – okręgi równoległe do płaszczyzny Oyz o środkach na dodatniej półosi Ox , $v = v_0$ – proste; 3° są ortogonalne; 4° $x - \cos v_0 y - \sin v_0 z = 0$.

39.20. a) Hiperboloida jednopowłokowa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;

$$u = u_0, \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \left(1 + \frac{y}{b}\right) u_0, \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \left(1 - \frac{y}{b}\right) \frac{1}{u_0},$$

$$v = v_0, \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \left(1 + \frac{y}{b}\right) v_0, \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \left(1 - \frac{y}{b}\right) \frac{1}{v_0};$$

b) paraboloida hiperboliczna $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$;

$$u = u_0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = u_0, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{2z}{u_0},$$

$$v = v_0, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = v_0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{2z}{v_0};$$

c) płaszczyzna $(a_2 b_3 - a_3 b_2)x + (a_3 b_1 - a_1 b_3)y + (a_1 b_2 - a_2 b_1)z = 0$;

$$u = u_0, \quad \mathbf{r} = (a_1 u_0 + b_1 v) \mathbf{i} + (a_2 u_0 + b_2 v) \mathbf{j} + (a_3 u_0 + b_3 v) \mathbf{k}, \quad v \in \mathbf{R},$$

$$v = v_0, \quad \mathbf{r} = (b_1 v_0 + a_1 u) \mathbf{i} + (b_2 v_0 + a_2 u) \mathbf{j} + (b_3 v_0 + a_3 u) \mathbf{k}, \quad u \in \mathbf{R}.$$

39.21. a) 1° Stożek $x^2 + y^2 = z^2$; 2° $u = u_0$ – okręgi równoległe do płaszczyzny Oxy o środkach na osi Oz , $v = v_0$ – proste otrzymane z przecięcia powierzchni stożkowej płaszczyznami przechodzącymi przez oś Oz ;

3° $L_{\text{st.}}$: $\mathbf{r} = -\lambda \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ dla $u_0 = 1$,

$$L_{\text{st.}}: \mathbf{r} = (k+1)(\mathbf{j} + \mathbf{k}), \quad k \in \mathbf{R} \text{ dla } v_0 = \frac{1}{2}\pi,$$

$$L_{\text{nor.}}: \mathbf{r} = (1-t)\mathbf{j} + (1+t)\mathbf{k}, \quad t \in \mathbf{R} \text{ w punkcie } (1, \frac{1}{2}\pi);$$

b) 1° paraboloida obrotowa $z = x^2 + y^2$; 2° $u = u_0$ – okręgi równoległe do płaszczyzny Oxy o środkach na osi Oz , $v = v_0$ – parabole otrzymane z przecięcia paraboloidy płaszczyznami przechodzącymi przez oś Oz ;

$$3^\circ L_{st.}: \mathbf{r} = -\lambda \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \lambda \in \mathbf{R} \text{ dla } u_0 = 1,$$

$$L_{st.}: \mathbf{r} = (1 + \frac{1}{2}t)\mathbf{j} + (1+t)\mathbf{k}, t \in \mathbf{R} \text{ dla } v_0 = \frac{1}{2}\pi,$$

$$L_{nor.}: \mathbf{r} = (1-t)\mathbf{j} + (1 + \frac{1}{2}t)\mathbf{k}, t \in \mathbf{R} \text{ w punkcie } (1, \frac{1}{2}\pi);$$

c) 1° sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; 2° $u = u_0$ – okręgi równoległe do płaszczyzny Oxy o środkach na osi Oz (równoleżniki), $v = v_0$ – okręgi w płaszczyznach przechodzących przez oś Oz (południki);

$$3^\circ L_{st.}: \mathbf{r} = -2k \mathbf{i} + 2\mathbf{j}, k \in \mathbf{R} \text{ dla } u_0 = 2,$$

$$L_{st.}: \mathbf{r} = 2\mathbf{j} + k\mathbf{k}, k \in \mathbf{R} \text{ dla } v_0 = \frac{1}{2}\pi,$$

$$L_{nor.}: \mathbf{r} = 2(1+k)\mathbf{j}, k \in \mathbf{R} \text{ w punkcie } (2, \frac{1}{2}\pi);$$

d) 1° elipsoida $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$; 2° $u = u_0$ – elipsy równoległe do płaszczyzny Oxy o środkach na osi Oz , $v = v_0$ – elipsy będące przecięciem elipsoidy płaszczyznami przechodzącymi przez oś Oz ;

$$3^\circ L_{st.}: \mathbf{r} = (1-\lambda)\mathbf{i} + \frac{3}{2}(1+\lambda)\mathbf{j} + 2\sqrt{2}\mathbf{k}, \lambda \in \mathbf{R} \text{ dla } u_0 = \frac{1}{2}\pi,$$

$$L_{st.}: \mathbf{r} = (1+\lambda)\mathbf{i} + \frac{3}{2}(1+\lambda)\mathbf{j} + 2\sqrt{2}(1-\lambda)\mathbf{k}, \lambda \in \mathbf{R}, \text{ dla } v_0 = \frac{1}{2}\pi,$$

$$L_{nor.}: \mathbf{r} = (1+3\sqrt{2}\lambda)\mathbf{i} + (\frac{3}{2}+2\sqrt{2}\lambda)\mathbf{j} + (2\sqrt{2}+3\lambda)\mathbf{k}, \lambda \in \mathbf{R} \text{ w punkcie } (\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi);$$

e) 1° torus $(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2 = 4b^2(x^2 + y^2)$; 2° $u = u_0$ – okręgi będące przecięciem sfery $(x - b \cos u_0)^2 + (y - b \sin u_0)^2 + z^2 = a^2$ z płaszczyzną $y = \operatorname{tg} u_0 x$, $v = v_0$ – okręgi równoległe do płaszczyzny Oxy o środkach na osi Oz ;

$$3^\circ L_{st.}: \mathbf{r} = (b + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a\sqrt{3})\mathbf{j} + \frac{1}{2}a(\sqrt{3} + \lambda)\mathbf{k}, \lambda \in \mathbf{R} \text{ dla } u_0 = \frac{1}{2}\pi,$$

$$L_{st.}: \mathbf{r} = (b + \frac{1}{2}a)(1-\lambda)\mathbf{j} + \frac{1}{2}\sqrt{3}a\mathbf{k}, \lambda \in \mathbf{R} \text{ dla } v_0 = \frac{1}{2}\pi,$$

$$L_{nor.}: \mathbf{r} = (b + \frac{1}{2}a + \lambda)\mathbf{j} + \sqrt{3}(\frac{1}{2}a + \lambda)\mathbf{k}, \lambda \in \mathbf{R} \text{ w punkcie } (\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi);$$

f) 1° hiperboloida dwupowłokowa $\frac{z^2}{16} - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$; 2° $u = u_0$ – elipsy równoległe do płaszczyzny Oxy o środkach na osi Oz , $v = v_0$ – hiperbole otrzymane z przecięcia hiperboloidy płaszczyznami przechodzącymi przez oś Oz ;

3° $L_{st.}: \mathbf{r} = 2\lambda \mathbf{i} + 4\mathbf{k}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ dla $v_0 = 0$, dla $u_0 = 0$ linia współrzędnych redukuje się do punktu $\mathbf{r} = 4\mathbf{k}$, a więc nie istnieje wektor styczny, $L_{nor.}: \mathbf{r} = (4 + \lambda)\mathbf{k}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ normalna w punkcie $(0, 0)$;

g) 1° stożek $x^2 + y^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha z^2$; 2° $u = u_0$ – proste przechodzące przez początek układu powstałe z przecięcia stożka płaszczyznami przechodzącymi przez oś Oz , $v = v_0$ – okręgi równoległe do płaszczyzny Oxy o środkach na osi Oz ;

$$3^\circ L_{st.}: \mathbf{r} = (1 + \lambda)(\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin \alpha (\mathbf{i} + \mathbf{j}) + \cos \alpha \mathbf{k}), \lambda \in \mathbf{R} \text{ dla } u_0 = \frac{1}{2}\pi,$$

$$L_{st.}: \mathbf{r} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin \alpha ((1-\lambda)\mathbf{i} + (1+\lambda)\mathbf{j}) + \cos \alpha \mathbf{k}, \lambda \in \mathbf{R} \text{ dla } v_0 = 1,$$

$$L_{nor.}: \mathbf{r} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin \alpha (1 + \lambda \cos \alpha (\mathbf{i} + \mathbf{j})) + (\cos \alpha - \lambda \sin^2 \alpha)\mathbf{k}, \lambda \in \mathbf{R} \text{ w punkcie } (\frac{1}{2}\pi, 1);$$

h) 1° walec kołowy o osi Oz $x^2 + y^2 = 4$; 2° $u = u_0$ – proste równoległe do osi Oz (tworzące walca), $v = v_0$ – okręgi równoległe do płaszczyzny Oxy o środkach na osi Oz ; 3° $L_{st.}$: $r = i + \sqrt{3}j + (1 + \lambda)k$ dla $u_0 = \frac{1}{3}\pi$,

$$L_{st.}: r = (1 - \sqrt{3}\lambda)i + (\sqrt{3} + \lambda)j + k, \text{ dla } v_0 = 1,$$

$$L_{nor.}: r = (1 + \lambda)i + \sqrt{3}(1 + \lambda)j + k, \lambda \in \mathbf{R} \text{ w punkcie } (\frac{1}{3}\pi, 1).$$

39.22. a) Elipsoida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

$$b) (u_0, v_0), \text{ gdzie } u_0 = \arctg \frac{b}{a}, v_0 = \operatorname{arcth} \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

39.23. $(u \cdot r \mp \sqrt{7} = 0) \Leftrightarrow (x - y - 2z \mp \sqrt{7} = 0)$.

39.26. a) 1° Leży; 2° $\cos \varphi = \frac{|t_0|}{\sqrt{1 + t_0^2}}$ dla $u = u_0$, $\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + t_0^2}}$ dla $v = v_0$;

b) 1° nie leży; 2° punkt przecięcia dla $t_0 = 1$, $u_0 = 1$, $v_0 = 3$, $\cos \varphi = \frac{90}{\sqrt{86 \cdot 136}}$ dla

krzywych $r(t)$ i $u_0 = 1$ w punkcie $(1, 3)$, $\cos \psi = \frac{50}{\sqrt{86 \cdot 104}}$ dla krzywych $r(t)$ i $v_0 = 3$ w punkcie

$(1, 3)$; 3° $\sin \alpha = \frac{18}{\sqrt{490}}$;

c) 1° leży; 2° $\cos \varphi = \frac{42t_0^2}{\sqrt{5(1 + 16t_0^2)(1 + 20t_0^2)}}$ dla $u = u_0$, $\cos \psi = \frac{20t_0^2 + 1}{\sqrt{5(1 + 4t_0^2)(1 + 20t_0^2)}}$

dla $v = v_0$;

d) 1° nie leży; 2° punkt przecięcia dla $t_0 = 1$, $u_0 = \frac{1}{3}\pi$, $v_0 = \frac{1}{3}\pi$, $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{43}}$ dla

krzywych $r(t)$ i $u = \frac{1}{3}\pi$, $\cos \psi = \frac{11\sqrt{3} - 18}{2\sqrt{258}}$, dla krzywych $r(t)$ i $v = \frac{1}{3}\pi$; 3° $\sin \alpha = \frac{12 + 11\sqrt{3}}{2\sqrt{258}}$;

e) 1° leży; 2° $\cos \varphi = 0$ dla $u = u_0$, $\cos \psi = 1$, dla $v = v_0$;

f) 1° nie leży; 2° punkt przecięcia dla $t_0 = 1$, $u_0 = 2$, $v_0 = \frac{1}{2}\pi$, $\cos \varphi = \frac{3\pi + 1}{\sqrt{18\pi^2 + 34}}$, dla

krzywych $r(t)$ i $u_0 = 2$, $\cos \psi = \frac{4}{\sqrt{9\pi^2 + 17}}$ dla krzywych $r(t)$ i $v_0 = \frac{1}{2}\pi$; 3° $\sin \alpha = \frac{3\pi + 1}{\sqrt{18\pi^2 + 17}}$;

g) 1° leży; 2° $\cos \varphi = \frac{t_0 + 6t_0^2}{\sqrt{(1 + 10t_0^2)(1 + 4t_0^2)}}$ dla $x = x_0$, $\cos \psi = \frac{1 + 3t_0^3}{\sqrt{(1 + 10t_0^2)(1 + t_0^4)}}$ dla

$y = y_0$;

h) 1° nie leży; 2° punkt przecięcia dla $t_0 = 1$, $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $\cos \varphi = \frac{7}{\sqrt{65}}$ dla krzywych

$r(t)$ i $x_0 = 2$, $\cos \psi = \frac{4}{3\sqrt{221}}$ dla krzywych $r(t)$ i $y_0 = 1$; 3° $\sin \alpha = \frac{8}{3\sqrt{273}}$.

39.27. a) $x^2 + y^2 = 2z + 1$; b) $y^2 - z^2 = 2xz$; c) $y^2 = 4xz$.

39.28. Obwiednię otrzymujemy rugując parametr t z układu:

$$\begin{cases} (x - \varphi(t))^2 + (y - \psi(t))^2 + (z - \chi(t))^2 - a^2(t) = 0, \\ (x - \varphi(t))\varphi'(t) + (y - \psi(t))\psi'(t) + (z - \chi(t))\chi'(t) - a(t)a'(t) = 0. \end{cases}$$

39.29. Torus $(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$.

39.30. a) Obwiednia $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$, krawędź zwrotu $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$;

b) obwiednia $(y - 4)^2 = 4xz$, krawędź zwrotu: wierzchołek stożka $(0, 4, 0)$;

c) obwiednia $16yz + 3x = 64$, krawędź zwrotu $yz = 4$, $x = 0$;

d) obwiednia $y = 8(9x^2 - 4z^2 - 36)$, krawędź zwrotu $9x^2 - 4z^2 = 36$, $y = 0$.

ROZDZIAŁ VI

SZEREGI LICZBOWE I FUNKCYJNE

§ 40. SZEREGI LICZBOWE

Dany jest ciąg (a_n) , $a_n \in \mathbf{R}$. Ciąg $(s_n = \sum_{k=1}^n a_k)$ nazywamy *ciągami sum częściowych*.

Parę

$$(1) \quad ((a_n), (s_n))$$

nazywamy *szeregiem liczbowym* o wyrazie ogólnym a_n .

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbf{R}$, to szereg (1) nazywamy *zbieżnym*, liczbę s nazywamy *sumą szeregu*

(1) i piszemy $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Jeżeli szereg (1) nie jest zbieżny, to nazywa się *rozbieżny*. W dalszym ciągu zapis $\sum_1^{\infty} a_n < \infty$ będzie oznaczał, że szereg (1) jest zbieżny oraz $\sim \sum_1^{\infty} a_n < \infty$ – że (1) jest rozbieżny.

T_1 (warunek konieczny zbieżności szeregu).

$$\left(\sum_1^{\infty} a_n < \infty \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \right).$$

T_2 . Jeżeli $0 \leq a_n \leq b_n$ dla $n > n_0 \in \mathbf{N}$, n_0 ustalona liczba naturalna, to

$$(2) \quad \left(\sum_1^{\infty} b_n < \infty \right) \Rightarrow \left(\sum_1^{\infty} a_n < \infty \right),$$

$$(3) \quad \left(\sim \left(\sum_1^{\infty} a_n < \infty \right) \right) \Rightarrow \left(\sim \left(\sum_1^{\infty} b_n < \infty \right) \right).$$

T_3 . Niech $a_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$.

α) $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = g \right) \Rightarrow \left(\left(\sum_1^{\infty} a_n < \infty \text{ dla } g < 1 \right) \wedge \left(\sim \left(\sum_1^{\infty} a_n < \infty \right) \text{ dla } g > 1 \right) \right)$ (kryterium Cauchy'ego),

$\beta)$ $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g \right) \Rightarrow \left(\left(\sum_1^{\infty} a_n < \infty \text{ dla } g < 1 \right) \wedge \left(\sim \left(\sum_1^{\infty} a_n < \infty \right) \text{ dla } g > 1 \right) \right)$ (kryterium d'Alemberta).

Uwaga. Kryterium Cauchy'ego można sformułować w mocniejszej postaci, zakładając, że $g = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$. Kryterium d'Alemberta można sformułować w postaci:

$$1^\circ \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g < 1 \right) \Rightarrow \left(\sum_1^{\infty} a_n < \infty \right),$$

$$2^\circ \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \text{ dla } n \geq n_0 \in \mathbb{N}, \text{ gdzie } n_0 \text{ jest ustaloną liczbą} \right) \Rightarrow \sim \left(\sum_1^{\infty} a_n < \infty \right).$$

T_4 (kryterium całkowite). Jeżeli funkcja f jest malejąca i dodatnia na $\langle n_0, +\infty \rangle$, $n_0 \in \mathbb{N}$, to szereg $\left((f(n))_{n_0}^{\infty} \right)$, $\left(\sum_{k=n_0}^n f(k) \right)_{n_0}^{\infty}$ i całka $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$ są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne.

T_5 (kryterium Leibniza).

$$(a_n > 0, n \in \mathbb{N} \wedge (a_n) \text{ malejący} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0) \Rightarrow \sum_1^{\infty} (-1)^n a_n < \infty.$$

Szereg (1) nazywamy zbieżnym bezwzględnie, jeżeli $\sum_1^{\infty} |a_n| < \infty$.

T_6 . Jeżeli szereg jest zbieżny bezwzględnie, to jest zbieżny.

Szereg, który jest zbieżny, ale nie jest zbieżny bezwzględnie nazywa się zbieżny warunkowo.

Uwaga. W przykładach i zadaniach, zamiast poprawnego zapisu szeregu w postaci (1), będziemy czasem umownie szereg (1) oznaczali $\sum_1^{\infty} a_n$ lub $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Przykłady

40.1. Z badać zbieżność szeregów:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Rozwiązanie. W każdym z przykładów a), b) i c) badamy granicę ciągu sum częściowych.

$$\begin{aligned} a) \text{ Ponieważ } a_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \text{ (korzystaliśmy z rozkładu na ułamki proste), więc} \\ s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right), \end{aligned}$$

czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4}.$$

Zatem szereg jest zbieżny i ma sumę równą $\frac{3}{4}$, tzn.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}.$$

b) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ jest szeregiem geometrycznym. Stąd

$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} q^n,$$

a więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} q^n \right] = \frac{a_1}{1-q}$$

dla $|q| < 1$ (por. przykład 19.3a). Czyli dla $|q| < 1$ szereg geometryczny jest zbieżny do sumy $\frac{a_1}{1-q}$. Jeżeli $|q| \geq 1$, to nie istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, a więc szereg jest rozbieżny.

c) Mamy $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$; stąd

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \dots + [\ln(n+1) - \ln n] = \ln(n+1),$$

czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [\ln(n+1)] = +\infty$. Zatem szereg jest rozbieżny.

40.2. Zbadać zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+5}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+b^n}$ ($b > 0$); c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$ ($0 < x < 3\pi$); f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^3+1)}}$.

Rozwiązanie. a) Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{2n^2+5} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

więc badany szereg jest rozbieżny (por. T_1).

b) Jeżeli $b \leq 1$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+b^n} = \begin{cases} 1 & \text{dla } b < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } b = 1, \end{cases}$$

a więc szereg jest rozbieżny (por. T_1).

Jeżeli $b > 1$, to $\frac{1}{1+b^n} < \frac{1}{b^n}$, przy czym szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^n$ jest szeregiem geometrycznym o ilorazie $q = \frac{1}{b} < 1$, czyli szeregiem zbieżnym. Z twierdzenia T_2 wynika więc, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+b^n} < \infty$.

c) Korzystamy z T_2 (3). Otóż $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ dla $n > 1$, stąd z rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (por. zadanie 40.8) wnosimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ jest również rozbieżny.

d) Weźmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ różniący się od szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jednym wyrazem. Ponieważ

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+1)} < \frac{1}{n(n+1)},$$

więc ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (por. zadanie 40.7a) wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$. A więc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

e) Mamy

$$a_n = 2^n \sin \frac{x}{3^n} \leq 2^n \frac{x}{3^n} = x \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ jest zbieżny, zatem $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n} < \infty$.

f) Mamy

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n^3+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n^4+n}} < \frac{1}{n^2}.$$

Stąd na mocy przykładu d) badany szereg jest zbieżny.

40.3. Zbadać zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ($x > 0$); d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n^{3n}}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$ ($x > 0$); f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! - n!}{n^{2n} + n^2}$; g) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(2n)! - n^n}{(n!)^2 - n^3}$;

h) $\sum_1^{\infty} \frac{((-1)^n + 2 + \sin n \frac{1}{2}\pi)^n}{4^n}$.

Rozwiązanie. W przykładach a) i b) korzystamy z T_3 α), w przykładach c) - e) z T_3 β).

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$, zatem szereg jest zbieżny.

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n+2} = 3 > 1, \text{ tzn. szereg jest rozbieżny.}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1, \text{ zatem szereg jest zbieżny dla wszystkich } x > 0.$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+3)!n^{3n}}{(n+1)^{3n+3}(3n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!n^{3n}}{(n+1)^{3n}(n+1)^3(3n)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{27(n+\frac{3}{2})(n+\frac{1}{2})}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}} \right] = \frac{27}{e^3} = \left(\frac{3}{e}\right)^3 > 1, \end{aligned}$$

zatem szereg jest rozbieżny.

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}x^{n+1}n!}{(n+1)!n^n x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[x \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] = xe. \text{ Stąd dla } x < 1/e \text{ szereg}$$

jest zbieżny, a dla $x > 1/e$ rozbieżny. Dla $x = 1/e$ twierdzenie $T_3 \beta)$ nie rozstrzyga o zbieżności szeregu.

f) Zauważmy, że $a_n = \frac{(2n)! - n!}{n^{2n} + n^2} < \frac{(2n)!}{n^{2n}}$ oraz zbadajmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$ za pomocą twierdzenia $T_3 \beta)$. Otóż

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}(2n)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!n^{2n}}{(n+1)^{2n}(n+1)^2(2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n+\frac{1}{2})}{n+1} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{2n} = \frac{4}{e^2} < 1. \end{aligned}$$

A więc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! - n!}{n^{2n} + n^2} < \infty$.

g) W celu zbadania zbieżności szeregu

$$\text{(g) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(2n)! - n^n}{(n!)^2 - n^3}$$

zauważmy, że dla dużych n wyrażenie n^n jest małe w porównaniu z $(2n)!$. Analogicznie n^3 jest małe w porównaniu z $(n!)^2$. Zatem dla dużych n szereg (g) będzie się zachowywał podobnie jak szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, którego zbieżność zbadamy za pomocą twierdzenia $T_3 \beta)$.

Otóż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!(n!)^2}{(n+1)^2(n!)^2(2n)!} = 4 > 1,$$

czyli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ jest rozbieżny. Przypuszczamy zatem, że szereg (g) jest również rozbieżny. Należy więc znaleźć szereg rozbieżny o wyrazach mniejszych od wyrazów szeregu (g). Otóż

$$a_n = \frac{(2n)! - n^n}{(n!)^2 - n^3} > \frac{(2n)! - n^n}{(n!)^2}.$$

Ale $n^n < \frac{1}{2}(2n)!$. Istotnie, zbadamy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\frac{1}{2}(2n)!}$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^n (n+1)(2n)!}{2(2n+2)(2n+1)(2n)! n^n} = 0 < 1,$$

zatem na mocy twierdzenia T_1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{\frac{1}{2}(2n)!} = 0,$$

czyli dla dużych n mamy $n^n < \frac{1}{2}(2n)!$. Stąd wynika dalsze oszacowanie wyrazu a_n szeregu (g)

$$a_n > \frac{(2n)! - n^n}{(n!)^2} > \frac{(2n)! - \frac{1}{2}(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\frac{1}{2}(2n)!}{(n!)^2}.$$

Ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(2n)!}{(n!)^2}$ jest rozbieżny, zatem szereg (g) jest również rozbieżny.

h) Korzystając z T_3 a) otrzymujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + 2 + \sin n \frac{1}{2}\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Łatwo sprawdzić, że ciąg (b_n) ma podciągi zbieżne do różnych granic: $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{4n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{4n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$, zatem nie jest zbieżny. Stosujemy więc uogólnione

kryterium Cauchy'ego (por. T_3 Uwaga). Łatwo stwierdzamy (por. przykład 19.4), że wymienione podciągi są jedynymi podciągami zbieżnymi ciągu (b_n) oraz że ciąg (b_n) nie ma podciągów zbieżnych do nieskończoności ($0 \leq b_n \leq \frac{3}{4}$). Zatem istnieje

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sup \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right\} = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow \sum_1^{\infty} a_n < \infty.$$

40.4. Z badać zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ($s > 0$, $s \neq 1$); b) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$.

Rozwiązanie. Korzystamy z twierdzenia T_4 .

a) Niech $f(x) = \frac{1}{x^s}$ ($s \neq 1$), $x \geq 1$. Funkcja f spełnia założenia twierdzenia T_4 , więc

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{dx}{x^s} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{1-s}}{1-s} \right|_1^a =$$

$$= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1-s} \left(\frac{1}{a^{s-1}} - 1 \right) \right] = \begin{cases} \frac{1}{s-1} & \text{dla } s > 1, \\ +\infty & \text{dla } s < 1, \end{cases}$$

czyli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ jest zbieżny dla $s > 1$ i rozbieżny dla $0 < s < 1$.

b) Niech $f(x) = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$, $x \geq 3$. Funkcja f spełnia założenia T_4 , stąd

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_2^a \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} =$$

$$= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_3^a \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \{ \ln[\ln(\ln x)] \} \Big|_3^a =$$

$$= \lim_{a \rightarrow +\infty} \{ \ln[\ln(\ln a)] - \ln[\ln(\ln 3)] \} = +\infty.$$

Zatem szereg $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$ jest rozbieżny.

40.5. Z badać zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n)}$ ($x \neq -1$),

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n-1)/2} \left(\frac{n+1}{5n+3} \right)^n$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Rozwiązanie. W przykładach a) i b) badamy zbieżność bezwzględną szeregów (por. T_6).

a) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{|1+x| \cdot |1+x^2| \cdot \dots \cdot |1+x^n|}$. Stąd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n \cdot |x| \cdot |1+x| \cdot \dots \cdot |1+x^n|}{|1+x| \cdot |1+x^2| \cdot \dots \cdot |1+x^n| \cdot |1+x^{n+1}| \cdot |x|^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{|1+x^{n+1}|} = \begin{cases} |x| & \text{dla } |x| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = 1, \\ 0 & \text{dla } |x| > 1. \end{cases}$$

Zatem badany szereg jest zbieżny bezwzględnie dla wszystkich $x \neq -1$, a więc zbieżny.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n(n-1)/2} \left(\frac{n+1}{5n+3} \right)^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{5n+3} \right)^n$. Korzystamy z twierdzenia T_3 a),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{5n+3} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{5n+3} = \frac{1}{5} < 1,$$

tnz. badany szereg jest zbieżny.

W przykładzie c) korzystamy z twierdzenia T_5 .

c) Ponieważ ciąg $\left(\frac{1}{n} \right)$ jest malejący oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, więc badany szereg naprzemienny jest zbieżny.

Zadania

40.6. Wykazać, że dodanie skończonej liczby wyrazów do wyrazów danego szeregu nie wpływa na jego zbieżność [rozbieżność].

40.7. Z badać zbieżność szeregów i znaleźć ich sumy:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{4^n}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)}$, $a \in \mathbf{R} \wedge a \neq -1, -2, \dots$;

e) $\sum_1^{\infty} q^n \cos(n\alpha)$, $q, \alpha \in \mathbf{R} \wedge |q| < 1$; f) $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

40.8. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (harmoniczny) jest rozbieżny.

40.9. Wykazać, że

$$\left(\bigwedge_{n \in \mathbf{N}} a_n \geq a_{n+1} \wedge a_n \geq 0 \right) \Rightarrow \left(\sum_1^{\infty} a_n < \infty \Leftrightarrow \sum_1^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty \right).$$

40.10. Z badać zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+3}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$ ($p > 0$);

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$; f) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$;

g) $\sum_0^{\infty} a_n$, gdzie $a_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$.

40.11. Zbadać zbieżność szeregów:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$ ($x > 0$); b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{2n-1}\right)^n$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$;
 e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! 2^n}{n^{2n}}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3n}}{(3n)!}$; g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ ($x > 0$); h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}+2^n}$;
 i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!-n^3}{n^{2n}+n!}$; j) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!+2^n}{n^3-n}$; k) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2-n!}$;
 l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3n}+(n!)^2}{(3n)!+n!}$; ł) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3-n^n}{n^{2n}+n!}$; m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$;
 n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}$, $a \in \mathbb{R}$; o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$; p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} \sin(3n-1)\frac{1}{6}\pi$;
 r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} (2+(-1)^n)$.

40.12. Zbadać zbieżność szeregów:

- a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{1+s} n}$ ($s > 0$); b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$;
 c) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^p [\ln(\ln n)]^q}$; d) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n [\ln(\ln n)]^{1+s}}$ ($s > 0$).

40.13. Zbadać zbieżność szeregów:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ (x – dowolna liczba rzeczywista);
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (x – dowolna liczba rzeczywista);
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$;
 g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ (x – dowolna liczba rzeczywista); h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}$;
 i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$.

Odpowiedzi

40.7. a) Zbieżny, $s=1$; b) zbieżny, $s=\frac{1}{3}$;

c) zbieżny, $s=4$; d) zbieżny, $s=\frac{1}{a+1}$;

e) zbieżny $s=\frac{q \cos \alpha - q^2}{1 - 2q \cos \alpha + q^2}$; f) zbieżny, $s=\frac{1}{4}$.

40.10. a) Rozbieżny; b) rozbieżny; c) rozbieżny;

d) zbieżny; e) zbieżny; f) zbieżny; g) rozbieżny.

40.11. a) Zbieżny dla $x > 0$; b) zbieżny; c) zbieżny; d) rozbieżny;

e) rozbieżny; f) zbieżny; g) zbieżny dla $x > 0$; h) zbieżny;

i) zbieżny; j) rozbieżny; k) zbieżny; l) zbieżny; ł) rozbieżny, m) zbieżny,

n) zbieżny dla $a \in \mathbf{R}$, o) zbieżny, p) zbieżny, r) zbieżny.

40.12. a) Zbieżny; b) zbieżny;

c) zbieżny dla $p > 1$ i dowolnego q oraz dla $p=1$ i $q > 1$; d) zbieżny.

40.13. a) Zbieżny bezwzględnie;

b) zbieżny bezwzględnie dla $|x| < 1$, rozbieżny dla $|x| \geq 1$;

c) zbieżny bezwzględnie dla każdej wartości x ; d) zbieżny bezwzględnie;

e) zbieżny warunkowo; f) zbieżny warunkowo; g) zbieżny bezwzględnie dla $x \in \mathbf{R}$;

h) zbieżny bezwzględnie; i) zbieżny bezwzględnie dla $|x - k\pi| < \frac{1}{4}\pi$, $k \in \mathbf{C}$, zbieżny warunkowo dla $x = k\pi \pm \frac{1}{4}\pi$, $k \in \mathbf{C}$.

§ 41. CIĄGI I SZEREGI FUNKCYJNE

41.1. Ciąg (f_n) , gdzie $f_n: \mathbf{R} \supset X_p \rightarrow \mathbf{R}$, $n=1, 2, \dots$ nazywamy *ciągami funkcyjnymi*. Jeżeli dla każdego $x \in X_p$ ciąg liczbowy $(f_n(x))$ jest zbieżny, to mówimy, że *ciąg (f_n) jest zbieżny* i funkcję $f: X_p \rightarrow \mathbf{R}$, gdzie $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, nazywamy *funkcją graniczną*, przy

czym piszemy $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Mówimy, że *ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie na X_p* do funkcji $f: X_p \rightarrow \mathbf{R}$, jeżeli

$$(1) \quad \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n_0 \in \mathbf{N}} \bigwedge_{x \in X_p} \bigwedge_{n \in \mathbf{N}} (n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Parę

$$(2) \quad ((f_n), (\sum_{k=1}^n f_k))$$

nazywamy *szeregiem funkcyjnym*. Mówimy, że *szereg (2) jest zbieżny [zbieżny jednostajnie]*,

jeżeli ciąg funkcyjny $(\sum_{k=1}^n f_k)$ jest zbieżny [zbieżny jednostajnie]. Jeżeli (2) jest zbieżny,

to funkcję graniczną s ciągu $(\sum_{k=1}^n f_k)$ nazywamy *sumą szeregu (2)* i piszemy $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$.

Podobnie jak dla szeregów liczbowych zapis $\sum_1^{\infty} f_n(x) < \infty$ [$\sim (\sum_1^{\infty} f_n(x) < \infty)$] oznacza, że szereg (2) jest zbieżny [rozbieżny] na odpowiednim zbiorze X_p .

Uwaga. Często zamiast zapisu (f_n) , gdzie $f_n: \mathbf{R} \cap X_p \rightarrow \mathbf{R}$ będziemy pisali $(f_n(x))$, $x \in X_p$, oraz zamiast zapisu (2) umownie będziemy pisali $\sum_1^{\infty} f_n(x)$, $x \in X_p$.

T_1 (KRYTERIUM WEIERSTRASSA).

$$(|f_n(x)| \leq a_n, x \in X_p, \text{ dla } n \geq n_0 \in \mathbf{N}) \wedge (\sum_1^{\infty} a_n < \infty) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\sum_1^{\infty} f_n(x) < \infty, x \in X_p \text{ jednostajnie i bezwzględnie}).$$

41.2. Szereg funkcyjny o ogólnym wyrazie $a_n(x-x_0)^n$ nazywamy *szeregiem potęgowym o środku x_0* . Będziemy badali przede wszystkim szeregi potęgowe o środku $x_0=0$, tzn. szeregi

$$(3) \quad ((a_n x^n), (\sum_{k=0}^n a_k x^k)).$$

T_2 (twierdzenie o promieniu zbieżności). Jeżeli istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g$ (względnie granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g$), gdzie współczynniki $a_n \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$, to promień zbieżności R_1 szeregu potęgowego (3) jest określony wzorem

$$(4) \quad R_1 = \begin{cases} 0, & \text{gdy } g = +\infty, \\ \frac{1}{g}, & \text{gdy } g \in (0, +\infty), \\ +\infty, & \text{gdy } g = 0. \end{cases}$$

Uwaga. T_2 można sformułować mocniej, przyjmując

$$g = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Niech funkcja $s: \mathbf{R} \ni (-R_1, R_1) \rightarrow \mathbf{R}$ będzie sumą szeregu (3), tzn. $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-R_1, R_1)$.

T_3 . 1° szereg (3) jest zbieżny bezwzględnie na $(-R_1, R_1)$,

2° szereg (3) jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale $\langle a, b \rangle \subset (-R_1, R_1)$,

$$3^\circ \int_0^x s(t) dt = \sum_0^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt, x \in (-R_1, R_1),$$

$$4^\circ (s(x))' = \sum_0^{\infty} (a_n x^n)', x \in (-R_1, R_1).$$

Własności 3^o i 4^o formułujemy słownie następująco:

szereg potęgowy można całkować [różniczkować] wyraz po wyrazie na przedziale zbieżności.

Jeżeli $f \in C^\infty(U(x_0; \eta))$ oraz we wzorze Taylora (por. (2) § 23) $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, $x \in U(x_0; \eta)$, to funkcja f jest sumą szeregu potęgowego (mówimy, że funkcja f jest rozwijalna w szereg Taylora na otoczeniu $U(x_0; \eta)$):

$$(5) \quad f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n, \quad x \in U(x_0; \eta).$$

Jeżeli w (5) $x_0 = 0$, otrzymujemy rozwinięcia funkcji f w szereg Maclaurina:

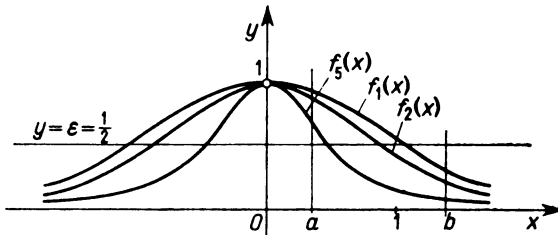
$$(6) \quad f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Przykłady

41.1. Zbadać zbieżność ciągów funkcyjnych:

a) (f_n) , gdzie $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$, $x \in \mathbf{R}$,

b) (f_n) , gdzie $f_n = \frac{x}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbf{R}$.



Rys. 41.1

Rozwiązanie. a) Rysujemy wykresy kilku wyrazów ciągu (f_n) , tzn. wykresy funkcji określonych wzorami: $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f_2(x) = \frac{1}{1+2x^2}$, ..., $f_5(x) = \frac{1}{1+5x^2}$ (rys. 41.1). Z rysunku 41.1 widzimy, że wykresy funkcji f_n dla $x \neq 0$ zbliżają się do osi Ox . Istotnie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+nx^2} = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x=0, \\ 0 & \text{dla } x \neq 0, \end{cases}$$

przy czym funkcja graniczna f jest nieciągła dla $x=0$. W celu zbadania jednostajnej zbież-

ności weźmy nierówność

$$\left| \frac{1}{1+nx^2} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad x \neq 0 \quad (\text{np. } 0 < \varepsilon < 1),$$

z której otrzymujemy $\frac{1}{1+nx^2} < \varepsilon$, czyli

$$(a) \quad n > \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right).$$

Z nierówności (a) wynika, że jeżeli x zbliża się do zera, to nie istnieje wskaźnik n spełniający tę nierówność, zatem ciąg nie jest zbieżny jednostajnie na żadnym przedziale zawierającym $x=0$. Natomiast na każdym przedziale domkniętym nie zawierającym zera, np. dla $0 < a \leq x \leq b$ ciąg jest zbieżny jednostajnie. Istotnie, z nierówności (a) wynika, że wystarczy wziąć

$$n_0 = \left[\frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \right]$$

(część całkowitą, por. zadanie 1.28).

Istnienie względnie nieistnienie wskaźnika n_0 jest oczywiste geometrycznie (por. rys. 41.1).

b) W celu narysowania wykresów funkcji f_n znajdujemy ich ekstrema. Otóż

$$[f_n(x)]'_x = \frac{1+n^2x^2-2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{-n^2\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x+\frac{1}{n}\right)}{(1+n^2x^2)^2},$$

skąd

$$y_{n(\max)} = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n}, \quad y_{n(\min)} = f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n}.$$

Z kolei

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = 0.$$

Korzystając z otrzymanych danych rysujemy wykresy funkcji f_n (rys. 41.2). Z rysunku przypuszczamy, że wykresy funkcji f_n dla dużych n zbliżają się do osi Ox . Istotnie,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = f(x) = 0 \quad \text{dla} \quad -\infty < x < +\infty,$$

a więc otrzymana funkcja graniczna jest ciągła dla $x \in \mathbf{R}$. Zbadamy zbieżność jednostajną. Otóż

$$\left| \frac{x}{1+n^2x^2} - 0 \right| = \left| \frac{x}{1+n^2x^2} \right| < \varepsilon,$$

a więc

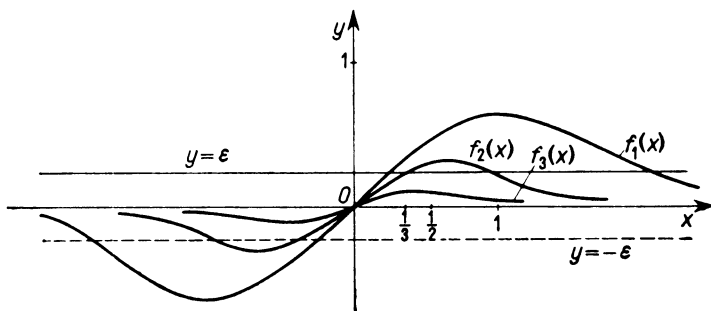
$$\frac{|x|}{1+n^2x^2} < \varepsilon.$$

Ale

$$(n|x| - 1)^2 = n^2x^2 - 2n|x| + 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{2n|x|}{1+n^2x^2} \leq 1, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Stąd

$$\frac{|x|}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2n|x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n} < \varepsilon, \quad x \in \mathbf{R}.$$



Rys. 41.2

Zatem dla $n > \frac{1}{2\varepsilon}$ i dla każdego $x \in \mathbf{R}$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{|x|}{1+n^2x^2} < \varepsilon.$$

Wynika stąd, że istnieje taki wskaźnik $n_0 = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil$, że dla $n > n_0$ i dla każdej wartości x prawdziwa jest nierówność $|f_n(x) - 0| < \varepsilon$, tzn. ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji $f: \mathbf{R} \ni x \rightarrow (f(x) = 0) \in \mathbf{R}$ na \mathbf{R} . Geometrycznie oznacza to, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ wykresy funkcji f_n dla $n > n_0$ mieszczą się w pasie ograniczonym prostymi $y = -\varepsilon$ i $y = \varepsilon$ (rys. 41.2).

41.2. Zbadać zbieżność szeregów funkcyjnych:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x};$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! x^n} \quad x \neq 0;$$

(c)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{e^{nx}}.$$

Rozwiązanie. Badanie zbieżności szeregu funkcyjnego sprowadzamy do badania szeregu liczbowego przez ustalenie zmiennej x . Dla szeregu (a) rozpatrzmy przypadki:

α) $0 < x < 1$; szereg (a) jest szeregiem naprzemiennym, przy czym $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^x} = 0$ oraz

ciąg $\frac{1}{n^x}$ jest malejący. Zatem szereg (a) zbieżny (por. T₅ § 40). Ponieważ szereg

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} \right|$ dla $x < 1$ jest rozbieżny, więc szereg (a) jest zbieżny warunkowo;

β) dla $x = 0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^0}$ jest rozbieżny;

γ) dla $x = 1$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ jest zbieżny warunkowo;

δ) $1 < x < +\infty$; szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} \right|$ jest zbieżny (por. 40.4a), zatem szereg (a) jest zbieżny bezwzględnie;

ε) $-\infty < x < 0$; $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-x}$ jest rozbieżny, ponieważ nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu.

Dla szeregu (b) ustalamy $x \neq 0$ i badamy szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! x^n}$, korzystając z twierdzenia T₃ β) § 40. Otóż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! |x|^n}{(n+1)! |x|^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1) |x|} = 0 < 1,$$

zatem szereg (b) jest zbieżny bezwzględnie dla każdej wartości $x \neq 0$.

Szereg (c) dla $x = 0$ jest zbieżny bezwzględnie. Jeżeli $x > 0$, to $|a_n| = \left| \frac{\sin nx}{e^{nx}} \right| \leq \frac{1}{e^{nx}}$. Ale

szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{nx}}$ dla $x > 0$ jest zbieżny, zatem szereg (c) dla $x > 0$ jest zbieżny bezwzględnie.

Jeżeli $x < 0$, to szereg (c) jest rozbieżny, ponieważ zakładając zbieżność szeregu mielibyśmy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{e^{nx}} = 0, \text{ a stąd } \sin nx < e^{nx} \text{ dla } n > n_0,$$

czyli nierówność sprzeczną.

41.3. Zbadać zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$, $x \in \mathbf{R}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$, $x \in \mathbf{R}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2}$, $x \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$.

Rozwiązanie. Stosujemy kryterium Weierstrassa (por. T_1).

a) $|f_n(x)| = \left| \frac{1}{x^2 + n^2} \right| = \frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Ale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, zatem badany szereg jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie.

b) $|f_n(x)| = \left| \frac{\sin nx}{n!} \right| \leq \frac{1}{n!}$, przy czym $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} < \infty$, ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie na przedziale $(-\infty, +\infty)$.

Uwaga. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ są zbieżne jednostajnie i bezwzględnie na każdym przedziale, jeżeli szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ bezwzględnie. Istotnie

$$|a_n \sin nx| \leq |a_n| \quad \text{oraz} \quad |a_n \cos nx| \leq |a_n|.$$

$$\text{c) } |f_n(x)| = \frac{x}{1+n^4 x^2} = \frac{1}{2n^2} \cdot \frac{2n^2 x}{1+n^4 x^2} \leq \frac{1}{2n^2} \quad (1+n^4 x^2 \geq 2n^2 x).$$

Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2} < \infty$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie na przedziale $(0, +\infty)$, ponieważ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} < \infty$.

41.4. Znaleźć promień zbieżności szeregów potęgowych:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 2^n}; \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2^n} x^n}{(2n)^2 5^n}; \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n \quad (a > 1);$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right)^n; \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n,$$

$$\text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(5 - 3 \sin \frac{n\pi}{3}\right)^n}{n} x^n; \quad \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n+1)}{6^n} x^{2n}.$$

Rozwiązanie. Korzystamy z twierdzenia T_2 .

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} x^n; \quad a_n = \frac{1}{n 2^n}. \quad \text{Stąd}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) 2^{n+1}}{n 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{n} = 2,$$

zatem szereg jest zbieżny dla $|x| < 2$ oraz rozbieżny dla $|x| > 2$. Badamy zbieżność szeregu

na końcach przedziału zbieżności, a więc w punktach $x = \mp 2$. Dla $x = -2$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} (-1)^n 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} < \infty.$$

Dla $x = 2$ otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

czyli szereg rozbieżny.

b) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2^n} (2n+2)^2 5^{n+1}}{(2n)^2 5^n \sqrt{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2n+2}{2n} \right)^2 \frac{5}{\sqrt{2}} \right] = \frac{5}{\sqrt{2}}$. Dla $x = \frac{5}{\sqrt{2}}$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2^n}}{(2n)^2 5^n} \cdot \frac{5^n}{\sqrt{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2}.$$

Ponieważ $\frac{1}{4n^2} < \frac{1}{n^2}$, więc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} < \infty$. Dla $x = -\frac{5}{\sqrt{2}}$ otrzymujemy $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n^2}$, zatem z przypadku poprzedniego wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2}$ jest zbieżny bezwzględnie, a więc zbieżny. Ostatecznie więc badany szereg jest zbieżny dla $|x| \leq \frac{5}{2} \sqrt{2}$ oraz rozbieżny dla $|x| > \frac{5}{2} \sqrt{2}$.

c) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! a^{(n+1)^2}}{a^{n^2} (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a a^{2n}}{n+1} = +\infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} a^{2n} = +\infty$ dla $a > 1$). Badany szereg jest zatem zbieżny dla $x \in \mathbb{R}$.

d) Ponieważ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \left(\frac{x-1}{2} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n \cdot 2^n} (x-1)^n$, więc

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n (2n+2) 2^{n+2}}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n \cdot 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) (2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2) \cdot 2}{2n+1} = 2.$$

Zatem badany szereg jest zbieżny dla $|x-1| < 2$, czyli dla $-1 < x < 3$ oraz rozbieżny dla $|x-1| > 2$, czyli dla $x < -1$ lub $x > 3$. Nie będziemy badać zbieżności na końcach przedziału zbieżności, tzn. w punktach $x = -1$ i $x = 3$.

$$e) R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n \left(\frac{n}{e} \right)^n (n+1)!}{(-1)^{n+1} n! \left(\frac{n+1}{e} \right)^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n e = \frac{e}{e} = 1,$$

zatem szereg jest zbieżny dla $|x| < 1$ oraz rozbieżny dla $|x| > 1$. Nie będziemy badać zbieżności szeregu na końcach przedziału zbieżności, tzn. w punktach $x = -1$ i $x = 1$.

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\left(5 - 3 \sin \frac{\pi n}{3} \right)^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - 3 \sin \frac{\pi n}{3}}{\sqrt[n]{n}};$$

ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ oraz nie istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - 3 \sin \frac{n\pi}{3}\right)$, więc nie istnieje granica

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Korzystamy zatem z uwagi po T_2 , tzn. badamy czy istnieje granica $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Można sprawdzić, że ciąg $(b_n) = (\sqrt[n]{|a_n|})$ jest ograniczony (tzn. nie ma podciągów zbieżnych do nieskończoności) oraz ma następujące jedyne podciągi zbieżne: (b_{k_n}) , (b_{l_n}) , (b_{p_n}) , (b_{m_n}) , (b_{r_n}) , gdzie $k_n = 6n - 5$, $l_n = 3n$, $p_n = 6n - 2$, $m_n = 6n - 4$, $r_n = 6n - 1$, przy czym

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{k_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{m_n} = 5 - \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{l_n} = 5 \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{r_n} = 5 + \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ponieważ $\sup \left\{5 - \frac{3\sqrt{3}}{2}, 5, 5 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right\} = 5 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$, zatem na mocy definicji granicy górnej mamy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 5 + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{R}.$$

Badany szereg jest zatem zbieżny na przedziale $\left(\frac{-2}{10+3\sqrt{3}}, \frac{2}{10+3\sqrt{3}}\right)$. W punktach

$$x = \frac{-2}{10+3\sqrt{3}}, \quad x = \frac{2}{10+3\sqrt{3}} \quad \text{szereg jest rozbieżny.}$$

g) W celu skorzystania z T_2 podstawiamy $z = x^2$, skąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n+1)}{6^n} z^n \Rightarrow R_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n+1)6^{n+1}}{6^n(n+1)(2n+3)} = 6,$$

zatem promień zbieżności badanego szeregu $R = \sqrt{6}$.

Dla $x = -\sqrt{6}$, $x = \sqrt{6}$ mamy $\sum_1^{\infty} \frac{n(2n+1)}{6^n} (\mp\sqrt{6})^{2n} = \sum_1^{\infty} n(2n+1)$, tzn. szereg rozbieżny.

Uwaga. Czasem wygodnie jest zamiast podstawienia korzystać bezpośrednio z $T_3\beta$) § 40. Mianowicie, dla $x \neq 0$ (dla $x = 0$ szereg potęgowy (3) jest zawsze zbieżny) mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)(2n+3)x^{2n+2}6^n}{6^n 6n(2n+1)x^{2n}} \right| = \frac{1}{6} |x|^2 \Rightarrow (\text{dla } |x| < \sqrt{6} \text{ badany szereg jest zbieżny oraz dla } |x| > \sqrt{6} \text{ - rozbieżny}) \Rightarrow R = \sqrt{6}.$$

41.5. Rozwinąć w szereg potęgowy w punkcie $x_0 = 0$ funkcje określone wzorami

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{1-x}; \quad \text{b) } f(x) = \frac{1}{1+x^2}; \quad \text{c) } f(x) = \frac{1}{(1+x)^2};$$

$$\text{d) } f(x) = \arctg x; \quad \text{e) } f(x) = \frac{7x+3}{(1-x)(4x+1)}.$$

Rozwiązanie. a) Podstawiając w przykładzie 40.1b $a_1=1$ i $q=x$, otrzymujemy dla $|x|<1$ wzór

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots,$$

czyli rozwinięcie funkcji f w szereg potęgowy na przedziale $(-1, 1)$.

b) Korzystając z przykładu poprzedniego otrzymujemy

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1-x^2+x^4-x^6+\dots \quad \text{dla } |x|<1.$$

c) W celu skorzystania z T_3 rozwijamy najpierw w szereg potęgowy dla $|x|<1$ funkcję określoną wzorem

$$f(x) = \frac{-1}{1+x} = -\frac{1}{1-(-x)} = -(1-x+x^2-x^3+\dots) = -1+x-x^2+x^3-\dots$$

Zatem

$$\left(\frac{-1}{1+x}\right)' = \frac{1}{(1+x)^2} = 1-2x+3x^2-\dots$$

d) Do szeregu $\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+\dots$, $|x|<1$ stosujemy T_3 . Stąd

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctg x = \int_0^x (1-t^2+t^4-\dots) dt = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots,$$

zatem

$$\arctg x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots \quad \text{dla } |x|<1.$$

Zauważmy, że dla $x=\mp 1$ otrzymujemy również szereg zbieżny, a więc otrzymane rozwinięcie jest prawdziwe dla $|x|\leq 1$.

e) Rozkładając funkcję f na ułamki proste, mamy

$$\frac{7x+3}{(1-x)(4x+1)} = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{4x+1}.$$

Z kolei

$$\frac{2}{1-x} = 2(1+x+x^2+\dots) \quad \text{dla } |x|<1$$

oraz

$$\frac{1}{4x+1} = \frac{1}{1-(-4x)} = 1-4x+16x^2-64x^3+\dots \quad \text{dla } |x|<\frac{1}{4}.$$

A więc dla $|x|<\frac{1}{4}$

$$\frac{7x+3}{(1-x)(4x+1)} = 2(1+x+x^2+\dots) + 1-4x+16x^2-64x^3+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} [2+(-1)^n 4^n] x^n.$$

41.6. Rozwinąć w szereg potęgowy w punkcie $x=0$ funkcje określone wzorami:

a) $f(x)=\sin x$; b) $f(x)=\sqrt{1+x}$; c) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; d) $f(x)=\arcsin x$.

Rozwiązanie. a) Aby móc skorzystać ze wzoru (6), wykażemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Istotnie, $f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{1}{2}\pi)$, czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n \sin(x + n \cdot \frac{1}{2}\pi)}{n!}$.

Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ dla każdego x oraz $|\sin(x + n \cdot \frac{1}{2}\pi)| \leq 1$, więc $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Otrzymujemy więc

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin 0 + \frac{x}{1} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{x^2}{2!} \sin \pi + \frac{x^3}{3!} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{x^4}{4!} \sin 2\pi + \dots = \\ &= x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

b) Korzystamy ze wzoru dwumiennego

(b) $(1+x)^s = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k = 1 + \binom{s}{1} x + \dots + \binom{s}{k-1} x^{k-1} + \binom{s}{k} x^k + \dots$, gdzie $|x| < 1$.

Zatem dla $|x| < 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} x + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2} x^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{16} x^3 - \frac{5}{128} x^4 + \dots \end{aligned}$$

c) Stosujemy wzór (b); dla $|x| < 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-1/2} = [1+(-x^2)]^{-1/2} = \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2)^1 + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})}{1 \cdot 2} (-x^2)^2 + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3} (-x^2)^3 + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \dots \end{aligned}$$

d) Korzystając z T_3 i przykładu poprzedniego otrzymujemy

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots,$$

czyli

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots \quad \text{dla } |x| < 1.$$

41.7. Rozwinąć w szereg potęgowy funkcje określone wzorami:

a) $f(x) = \ln x$ w punkcie $x_0 = 1$; b) $k(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$ w punkcie $x_0 = 2$;

c) $g(x) = \sqrt{x}$ w punkcie $x_0 = 4$; d) $h(x) = \cos^2 x$ w punkcie $x_0 = \frac{1}{2}\pi$.

Rozwiązanie. a) Przekształcamy funkcję f , $\ln x = \ln [1 + (x-1)]$, a następnie stosujemy wynik zadania 41.17d. Stąd

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + \dots$$

dla $0 < x \leq 2$.

b) Przekształcamy

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \\ &= \frac{1}{4+(x-2)} - \frac{1}{5+(x-2)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x-2}{4}\right)} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x-2}{5}\right)}. \end{aligned}$$

Otrzymane funkcje rozwijamy w szeregi geometryczne

$$k(x) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-2}{4}\right)^n - \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-2}{5}\right)^n,$$

przy czym dla pierwszego szeregu $\left|\frac{x-2}{4}\right| < 1$, dla drugiego $\left|\frac{x-2}{5}\right| < 1$. Zatem

$$k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-2)^n \left(\frac{1}{4^{n+1}} - \frac{1}{5^{n+1}} \right) \quad \text{dla } -2 < x < 6.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } g(x) &= \sqrt{x} = \sqrt{4 + (x-4)} = 2 \sqrt{1 + \frac{x-4}{4}} = 2 \left(1 + \frac{x-4}{4}\right)^{1/2} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \left(\frac{x-4}{4}\right)^n \\ &= 2 \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x-4}{4} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(x-4)^2}{4^2} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \cdot \frac{(x-4)^n}{4^n} + \dots \right] = \\ &= 2 \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x-4}{4} - \frac{1}{8} \cdot \frac{(x-4)^2}{4^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{(x-4)^n}{4^n} + \dots \right] \end{aligned}$$

dla $\left| \frac{x-4}{4} \right| < 1$, tzn. dla $0 < x < 8$.

$$\begin{aligned} \text{d) } \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \frac{1}{2}[1 - \sin(2x - \frac{1}{2}\pi)] = \frac{1}{2}[1 - \sin 2(x - \frac{1}{4}\pi)] = \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{[2(x - \frac{1}{4}\pi)]^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} (x - \frac{1}{4}\pi)^{2n+1} \end{aligned}$$

dla $x \in \mathbb{R}$.

41.8. Znaleźć promienie zbieżności i obliczyć sumy wewnątrz przedziałów zbieżności szeregów:

$$\text{a) } \sum_0^{\infty} \frac{2n+3}{3^n} x^n; \quad \text{b) } \sum_0^{\infty} \frac{(n+2)(n+3)}{2^n} x^{2n}.$$

Rozwiązanie. a) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)3^{n+1}}{3^n(2n+5)} = 3$, dla $x = -3$ oraz $x = 3$ szereg jest rozbieżny, zatem przedział zbieżności $(-3, 3)$. W celu znalezienia sumy w przedziale $(-3, 3)$ przekształcamy sumę s :

$$s(x) = \sum_0^{\infty} \frac{2n+3}{3^n} x^n = \sum_0^{\infty} \left(\frac{2n}{3^n} x^n + \frac{3}{3^n} x^n \right)$$

i poszukujemy sum szeregów $2 \sum_0^{\infty} \frac{n}{3^n} x^n$, $3 \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ (korzystamy z twierdzenia:

$$((s_1(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n, x \in (-R_1, R_1)) \wedge (s_2(x) = \sum_0^{\infty} b_n x^n, x \in (-R_2, R_2))) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ((\sum_0^{\infty} (a_n + b_n) x^n < \infty \text{ dla } x \in (-R_3, R_3), R_3 = \min(R_1, R_2)) \wedge$$

$$\wedge (\sum_0^{\infty} (a_n + b_n) x^n = s_1(x) + s_2(x))).$$

Mamy $\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{3^n} = \sum_0^{\infty} \left(\frac{x}{3} \right)^n = \frac{3}{3-x}$, $|x| < 3$, natomiast w przypadku szeregu $\sum_0^{\infty} \frac{n}{3^n} x^n$ korzystamy z T_3 3°:

$$s_1(x) = \sum_0^{\infty} \frac{n}{3^n} x^n = x \sum_0^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{3^n}.$$

Szereg $\sum_0^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{3^n}$ jest zbieżny w przedziale $(-3, 3)$, stąd

$$s_2(x) = \sum_0^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{3^n} \Rightarrow \int_0^x s_2(t) dt = \sum_0^{\infty} \left(\frac{x}{3} \right)^n = \frac{3}{3-x}, \quad |x| < 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_2(x) = \frac{3}{(3-x)^2} \Rightarrow s_1(x) = \frac{3x}{(3-x)^2}.$$

Ostatecznie

$$s(x) = 2 \frac{3x}{(3-x)^2} + 3 \frac{3}{3-x} = 3 \frac{9-x}{(3-x)^2} \quad \text{dla } |x| < 3.$$

b) Promień zbieżności obliczamy podobnie jak w przykładzie 41.4g; dla $x \neq 0$ mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+3)(n+4)x^{2n}x^{2^2}2^n}{2^n 2(n+2)(n+3)x^{2n}} \right| = \frac{1}{2} |x|^2$$

skąd wynika, że dla $0 < |x| < \sqrt{2}$ szereg jest zbieżny oraz dla $|x| > \sqrt{2}$ – rozbieżny, w punktach $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$ szereg jest rozbieżny, w punkcie $x = 0$ zbieżny do sumy 6, skąd $R = \sqrt{2}$, oraz przedział zbieżności $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. W celu znalezienia sumy szeregu korzystamy z T_3 3°. Otóż, dla $x \neq 0$

$$s(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(n+2)(n+3)}{2^n} x^{2n} = \frac{1}{x^2} \sum_0^{\infty} \frac{(n+2)(n+3)}{2^n} x^{2n+2}.$$

Podstawmy $x^2 = z$ i weźmy szereg $\sum_0^{\infty} \frac{(n+2)(n+3)z^{n+1}}{2^n}$. Łatwo sprawdzić, że otrzymany szereg jest zbieżny w przedziale $(-2, 2)$, skąd

$$s_1(z) = \sum_0^{\infty} \frac{(n+2)(n+3)z^{n+1}}{2^n}, \quad z \in (-2, 2).$$

Zatem (por. T_3 3°)

$$s_2(z) = \int_0^z s_1(t) dt = \sum_0^{\infty} \frac{n+3}{2^n} z^{n+2};$$

całkując jeszcze raz otrzymujemy

$$s_3(z) = \int_0^z s_2(t) dt = \sum_0^{\infty} \frac{z^{n+3}}{2^n} = z^3 \sum_0^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{2z^3}{2-z}.$$

Kolejno różniczkując (por. T_3 4°) mamy

$$s_2(z) = s_3'(z) = 4 \frac{3z^2 - z^3}{(2-z)^2}, \quad s_1(z) = s_2'(z) = 4 \frac{12z - 6z^2 + z^3}{(2-z)^3},$$

stąd

$$s(x) = \frac{1}{x^2} s_1(x^2) = 4 \frac{12 - 6x^2 + x^4}{(2-x^2)^3} \quad \text{dla } 0 < |x| < \sqrt{2}.$$

Ponieważ $s(0) = 6 \wedge \lim_{x \rightarrow 0} s(x) = 0$, więc dla $|x| < \sqrt{2}$ jest

$$s(x) = 12 \frac{12 - 6x^2 + x^4}{(2-x^2)^3}.$$

41.9. Obliczyć przybliżenie liczby π .

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzoru

$$(a) \quad \operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots,$$

gdzie $|x| \leq 1$ (por. przykład 41.5d). Weźmy np. $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Zatem

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}\pi, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^3} + \dots \right).$$

Z otrzymanego wzoru można obliczyć liczbę π z dowolną dokładnością, przy czym biorąc pierwsze n wyrazów popełniamy błąd mniejszy od modułu $(n+1)$ -go wyrazu. W celu uzyskania szeregu szybko zbieżnego postępujemy następująco. Do wzoru

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} \quad (xy < 1)$$

podstawiamy zamiast x i y liczby spełniające warunki:

$$|x| < 1 \quad \text{i} \quad |y| < 1 \quad \text{oraz} \quad \frac{x+y}{1-xy} = 1.$$

Stąd

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{4}\pi = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = (x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots) + (y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 - \dots).$$

Np. dla $x = \frac{1}{2}$ i $y = \frac{1}{3}$ otrzymujemy

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} - \dots \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} - \dots \right).$$

Biorąc pięć wyrazów pierwszego szeregu i cztery wyrazy drugiego szeregu możemy obliczyć liczbę π z błędem mniejszym od sumy

$$\frac{4}{11 \cdot 2^{11}} + \frac{4}{9 \cdot 3^9}.$$

Istnieją szeregi umożliwiające jeszcze szybsze obliczanie liczby π . Weźmy np. $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{5}$. Wówczas $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{120}{119}$. Ponieważ liczba $\frac{120}{119} > 1$ jest bliska jedności, więc kąt $4\alpha > \frac{1}{4}\pi$ jest bliski $\frac{1}{4}\pi$. Stąd wprowadzając kąt $\beta = 4\alpha - \frac{1}{4}\pi$, otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}, \quad \text{czyli} \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

A więc

$$\begin{aligned} \pi = 16\alpha - 4\beta = 16 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5^7} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5^9} - \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{5^{11}} + \dots \right) - \\ - 4 \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{239^3} + \dots \right). \end{aligned}$$

Korzystając z wyprowadzonego wzoru obliczymy liczbę π z dokładnością do siedmiu cyfr po przecinku. Okazuje się, że aby uzyskać tę dokładność, wystarczy wziąć wyrazy szeregu napisane powyżej. Ponieważ oba szeregi są naprzemienne, więc błędy odjemnej i odjemnika spowodowane opuszczeniem niewypisanych wyrazów spełniają odpowiednio nierówności

$$0 < \Delta_1 < \frac{16}{13 \cdot 5^{13}} < \frac{1}{10^8} \quad \text{i} \quad 0 < \Delta_2 < \frac{4}{5 \cdot 239^5} < \frac{1}{10^8}.$$

Obliczenia wykonujemy zamieniając ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne (znak + lub - w nawiasie wskazuje na znak poprawki);

$\frac{16}{5} = 3,20000000$	$\frac{16}{3 \cdot 5^3} = 0,04266667 (-)$
$+ \frac{16}{5 \cdot 5^5} = 0,00102400$	$+ \frac{16}{7 \cdot 5^7} = 0,00002926 (-)$
$\frac{16}{9 \cdot 5^9} = 0,00000091 (+)$	$\frac{16}{11 \cdot 5^{11}} = 0,00000003 (-)$
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>
3,20102491	0,04269596
3,20102491	$\frac{4}{239} = 0,01673640 (+)$
-	-
0,04269596	$\frac{4}{3 \cdot 239^3} = 0,00000010 (-)$
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>
3,15832895	0,01673630

Uwzględniając wszystkie poprawki, mamy

$$3,15832895 < 16\alpha < 3,15832898,$$

$$-0,01673632 < -4\beta < -0,01673630,$$

stąd $3,14159263 < \pi < 3,14159268$. Ostatecznie więc $\pi = 3,1415926 \dots$, przy czym wszystkie cyfry wypisane są dokładne.

41.10. Obliczyć $\sqrt[k]{2}$ z dokładnością do co najmniej ośmiu cyfr po przecinku.

Rozwiązanie. Będziemy korzystali ze wzoru dwumiennego (por. wzór (b) przykład 41.6b). Przypuśćmy, że chcemy obliczyć $\sqrt[k]{A}$, przy czym znane już jest przybliżenie a tego pierwiastka, natomiast chodzi o zwiększenie dokładności. Jeżeli przyjmiemy

$$\frac{A}{a^k} = 1 + x, \quad \text{gdzie} \quad |x| < 1, \quad \text{to} \quad \sqrt[k]{A} = a \sqrt[k]{\frac{A}{a^k}} = a(1+x)^{1/k},$$

czyli możemy korzystać ze wzoru dwumiennego. Czasem wygodniej jest stosować podstawienie

$$\frac{a^k}{A} = 1 + y, \quad \text{gdzie} \quad |y| < 1,$$

wówczas

$$\sqrt[k]{A} = \frac{a}{\sqrt[k]{a^k}} = a(1+y)^{-1/k}.$$

W przypadku liczby $\sqrt{2}$ jako przybliżenie weźmy liczbę 1,4. Stąd

$$\sqrt{2} = 1,4 \sqrt{\frac{2}{1,96}} = 1,4 \sqrt{1 + \frac{0,04}{1,96}} = 1,4 \left(1 + \frac{1}{49}\right)^{1/2}$$

lub według drugiego podstawienia

$$\sqrt{2} = \frac{1,4}{\sqrt{\frac{1,96}{2}}} = \frac{1,4}{\sqrt{1 - \frac{0,04}{2}}} = 1,4 \left(1 - \frac{1}{50}\right)^{-1/2}.$$

Do rachunku zastosujemy wygodniejszy wzór drugi. Zatem

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1,4 \left[1 + \left(\frac{-1}{50}\right)\right]^{-1/2} = 1,4 \left[1 + \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{-1}{50}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{50^2} + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(-\frac{1}{50^3}\right) + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{50^4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})(-\frac{9}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \left(-\frac{1}{50^5}\right) + \dots\right] = \\ &= 1,4 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{50} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{50^2} + \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{50^3} + \frac{35}{128} \cdot \frac{1}{50^4} + \frac{63}{256} \cdot \frac{1}{50^5} + \dots\right) = \\ &= 1,4(1 + 0,01 + 0,00015 + 0,0000025 + 0,00000004375 + 0,000000007875 + \Delta_1) = \\ &= 1,4(1,0101525445375 + \Delta_1) = 1,41421356235250 + 1,4\Delta_1. \end{aligned}$$

Błąd $\Delta = 1,4\Delta_1$ znajdujemy następująco:

$$\begin{aligned} \Delta &= 1,4\Delta_1 = 1,4 \left(\frac{231}{1024} \cdot \frac{1}{50^6} + \frac{429}{2048} \cdot \frac{1}{50^7} + \dots \right) < \\ &< 1,4 \frac{231}{1024 \cdot 50^6} \left(1 + \frac{1}{50} + \frac{1}{50^2} + \dots\right) = \frac{1,4 \cdot 231}{1024 \cdot 50^6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{50}} = \frac{1,4 \cdot 231}{1024 \cdot 50^5 \cdot 49} < \frac{2,1}{10^{11}}. \end{aligned}$$

Stąd

$$1,414213562352 < \sqrt{2} < 1,414213562373, \quad \text{czyli} \quad \sqrt{2} = 1,4142135623 \dots,$$

gdzie wszystkie dziesięć cyfr po przecinku jest pewne.

41.11. Obliczyć całkę $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ z dokładnością do 0,0001.

Rozwiązanie. Ponieważ całka $\int e^{-x^2} dx$ jest całką nieelementarną, rozwijamy najpierw funkcję podcałkową w szereg potęgowy, a następnie całkujemy wyraz po wyrazie,

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} dx = \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right) \Big|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} - \frac{1}{75600} + \dots$$

Biorąc pierwsze siedem wyrazów popelniamy błąd spełniający nierówność

$$|A| < \frac{1}{75600} < \frac{1,5}{10^5}.$$

Zatem

$$\begin{array}{r} 1 + \frac{1}{10} = 1,10000 \qquad \frac{1}{3} = 0,33333 (+) \\ + \frac{1}{216} = 0,00463 (-) \qquad + \frac{1}{42} = 0,02381 (-) \\ \frac{1}{9360} = 0,00011 (-) \qquad \frac{1}{1320} = 0,00076 (-) \\ \hline 1,10474 \qquad \qquad \qquad 0,35790 \end{array}$$

stąd

$$\begin{array}{r} 1,10474 \\ - 0,35790 \\ \hline 0,74684 \end{array}$$

Uwzględniając wszystkie błędy otrzymujemy

$$0,74681 < \int_0^1 e^{-x^2} dx < 0,74685, \quad \text{czyli} \quad \int_0^1 e^{-x^2} dx = 0,7468.$$

Zadania

41.12. Zbadać zbieżność ciągów funkcyjnych:

a) (x^n) dla: $\alpha) x \in \langle 0, 1 \rangle$, $\beta) x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$;

b) $\left(\frac{1}{1+nx} \right)$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$; c) $\left(\frac{nx}{1+n^2x^2} \right)$, $x \in \mathbf{R}$;

d) $\left(\frac{x^n}{1+x^n} \right)$ dla: $\alpha) x \in \langle 0, 1-k \rangle$, $\beta) x \in \langle 1-k, 1+k \rangle$, $\gamma) x \in \langle 1+k, +\infty \rangle$ ($k > 0$);

e) $\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \right)$, $x \in \mathbf{R}$; f) $\left(\frac{1}{n^n x^n} \right)$, $x \in \langle 1, +\infty \rangle$;

g) $(2n^2 x e^{-n^2 x^2})$, $x \in \mathbf{R}$.

41.13. Zapisać za pomocą kwantyfikatorów definicję zbieżności ciągu funkcyjnego.

41.14. Z badać zbieżność szeregów funkcyjnych:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\ln x}}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin [(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n)}$.

41.15. Za pomocą kryterium Weierstrassa zbadać jednostajną zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $x \in (-2, \infty)$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{n^{2n}} \cos 2nx$, $x \in \mathbf{R}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 x^2}}{n^2}$, $x \in \mathbf{R}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5 x^2}$, $x \in \langle a, +\infty \rangle \wedge a > 0$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}$, $x \in \mathbf{R}$.

41.16. Znaleźć promienie zbieżności szeregów potęgowych:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$; c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$; g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} x^{n+1}$;

h) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 x^n$; i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n 3^n}$; j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n+3} x^{2n+1}$;

k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3n+2)}{3^n} x^{2n}$; l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^{n-1} n^n}$;

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4+(-1)^n)^n}{n} x^n$; m) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1+2 \cos \frac{n\pi}{4}\right)^n}{\ln n} x^n$.

41.17. Rozwinąć w szeregi potęgowe w punkcie $x=0$ funkcje określone wzorami:

a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$; b) $g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$; c) $k(x) = \frac{1}{1+x^3}$; d) $h(x) = \ln(x+1)$;

e) $p(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$; f) $m(x) = \frac{x}{1+x-2x^2}$; g) $t(x) = \frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

41.18. Rozwinąć w szeregi potęgowe w punkcie $x=0$ funkcje określone wzorami:

a) $f(x) = e^x$; b) $g(x) = \cos x$; c) $k(x) = e^{-x^2}$;
d) $h(x) = xe^{-x}$; e) $r(x) = \sinh x$; f) $p(x) = \cosh x$;

- g) $n(x) = \cos^2 x$; h) $t(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$;
 i) $w(x) = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \ln \sqrt{1+x^2}$; j) $s(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$.

41.19. Rozwinąć w szeregi potęgowe funkcje określone wzorami:

- a) $f(x) = \frac{1}{x}$ w punkcie $x_0 = 1$; b) $h(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 7}$ w punkcie $x_0 = -2$;
 c) $m(x) = e^x$ w punkcie $x_0 = -2$;
 d) $k(x) = \cos x$ w punkcie $x_0 = \frac{1}{2}\pi$; e) $S(x) = \sin \frac{1}{4}\pi x$ w punkcie $x_0 = 2$.

41.20. Znaleźć promienie zbieżności, przedziały zbieżności oraz obliczyć sumy wewnątrz przedziałów zbieżności szeregów:

- a) $\sum_0^{\infty} \frac{2^n x^n}{n+1}$; b) $\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)4^n}$; c) $\sum_0^{\infty} \frac{3^n x^n}{5^n(n+1)}$;
 d) $\sum_0^{\infty} \frac{(n+2)x^n}{6^n}$; e) $\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{4^n(n+1)(n+2)}$;
 f) $\sum_0^{\infty} \frac{(2n+1)x^n}{4^n}$; g) $\sum_1^{\infty} \frac{3^{n+1}x^{2n}}{n4^n}$; h) $\sum_1^{\infty} \frac{n4^n x^n}{5^n}$;
 i) $\sum_0^{\infty} \frac{5^n(2n+3)x^{2n}}{4^n}$; j) $\sum_0^{\infty} \frac{2^{n+1}x^n}{2n+1}$;
 k) $\sum_1^{\infty} \frac{n(n+1)x^n}{2^n}$; l) $\sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$; ł) $\sum_1^{\infty} \frac{n(2n+1)x^{2n}}{4^n}$;
 m) $\sum_0^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n+1)(n+2)3^n}$.

41.21. Obliczyć sumy szeregów liczbowych, korzystając ze zbieżności odpowiednich szeregów potęgowych:

- a) $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n3^n}$; b) $\sum_0^{\infty} \frac{4^n}{5^n(n+1)}$; c) $\sum_0^{\infty} \frac{n+2}{4^n}$;
 d) $\sum_0^{\infty} \frac{(n+3)3^n}{4^n}$; e) $\sum_1^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$; f) $\sum_0^{\infty} \frac{(n+1)(2n+3)}{2^{2n+2}}$.

41.22. Obliczyć przybliżenie liczby $\sqrt[3]{e}$, biorąc trzy wyrazy rozwinięcia w szereg potęgowy funkcji $f: \mathbf{R} \ni x \rightarrow e^x \in \mathbf{R}$ i określić błąd znalezionej przybliżenia.

41.23. Korzystając z rozwinięcia w szeregi potęgowe funkcji: $f: \mathbf{R} \ni x \rightarrow e^x \in \mathbf{R}$, \sin , \cos , obliczyć:

- a) e^2 z dokładnością 0,001; b) $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ z dokładnością 0,0001;
 c) $\sin 1^\circ$ z dokładnością 0,0001; d) $\cos 10^\circ$ z dokładnością 0,0001.

41.24. Obliczyć przybliżenie liczby $\arctg 1,2$.

41.25. Stosując wzór $\frac{1}{4}\pi = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}$ (por. przykład 41.9) obliczyć liczbę π z dokładnością 0,001.

41.26. Stosując wzór $\frac{1}{6}\pi = \arcsin \frac{1}{2}$ obliczyć liczbę π z dokładnością 0,0001.

41.27. Obliczyć:

a) $\ln 3$ z dokładnością 0,00001;

b) $\log_{10} e = \frac{1}{\ln 10}$ z dokładnością 0,000001;

c) $\log_{10} 5$ z dokładnością 0,0001.

41.28. Obliczyć $\sqrt[3]{2}$ z dokładnością do dziesięciu miejsc po przecinku.

41.29. Obliczyć:

a) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{x} dx$, biorąc trzy wyrazy rozwinięcia funkcji podcałkowej w szereg potęgowy

oraz podać dokładność wyniku;

b) $\int_{0,1}^1 \frac{e^x}{x} dx$, biorąc sześć wyrazów rozwinięcia w szereg potęgowy funkcji podcałkowej

oraz podać dokładność wyniku;

c) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ z dokładnością 0,001.

41.30. Obliczyć z dokładnością 0,001 następujące całki:

a) $\int_2^4 e^{1/x} dx$; b) $\int_0^1 \cos^2 x dx$; c) $\int_0^1 \frac{\sinh x}{x} dx$;

d) $\int_{1/10}^{3/10} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$; e) $\int_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$; f) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Odpowiedzi

41.12. a) $\alpha) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{dla } x = 1, \end{cases}$ zbieżność zwykła,

$\beta) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ dla $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$, zbieżność jednostajna;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = 0, \\ 0 & \text{dla } 0 < x \leq 1, \end{cases}$ zbieżność zwykła;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ dla $-\infty < x < +\infty$, zbieżność zwykła;

d) a) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ dla $0 \leq x \leq 1 - k$, zbieżność jednostajna;

$$\beta) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 1 - k \leq x < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = 1, \\ 1 & \text{dla } 1 < x \leq 1 + k, \end{cases} \quad \text{zbieżność zwykła};$$

$\gamma) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$ dla $1 + k \leq x < +\infty$, zbieżność jednostajna;

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = |x|$ dla $-\infty < x < +\infty$, zbieżność jednostajna;

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ dla $1 \leq x < +\infty$, zbieżność jednostajna;

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ dla $-\infty < x < +\infty$, zbieżność zwykła.

$$41.13. \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigwedge_{x \in X} \bigvee_{n_0} \bigwedge_n [(n > n_0) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon].$$

41.14. a) Dla $x > 1$ zbieżny bezwzględnie, dla $x \leq 1$ rozbieżny;

b) dla $x > e$ zbieżny bezwzględnie, dla $1 < x \leq e$ zbieżny warunkowo, dla $x \leq 1$ rozbieżny;

c) zbieżny bezwzględnie dla $-\infty < x < +\infty$;

d) zbieżny bezwzględnie dla $x \neq -1$.

41.15. Szeregi w przykładach a) - e) są zbieżne jednostajnie we wskazanych przedziałach.

41.16. a) $R=1$, dla $x = \mp 1$ rozbieżny; b) $R=0$; c) $R=+\infty$;

d) $R=1$, dla $x = -1$ szereg zbieżny bezwzględnie, jeżeli $p > 1$, warunkowo, jeżeli $0 < p \leq 1$ oraz rozbieżny dla $p < 0$, dla $x = 1$ szereg zbieżny jeżeli $p > 1$ oraz rozbieżny dla $p \leq 1$;

e) $R=1$, dla $x = 1$ zbieżny, dla $x = -1$ zbieżny bezwzględnie;

f) $R=4$, dla $x = \mp 4$ rozbieżny;

g) $R=1$, dla $x = -1$ zbieżny warunkowo, dla $x = 1$ rozbieżny;

h) $R=1$, dla $x = \mp 1$ rozbieżny;

i) zbieżny w przedziale $2 < x \leq 8$; j) $R = \frac{1}{2}$, dla $x = \mp \frac{1}{2}$ rozbieżny;

k) $R = \sqrt{3}$, dla $x = \mp \sqrt{3}$ rozbieżny;

l) $R=1$, dla $x = -1$ zbieżny bezwzględnie, dla $x = 1$ zbieżny;

ł) $R = \frac{1}{2}$, dla $x = \mp \frac{1}{2}$ rozbieżny;

m) $R = \frac{1}{2}$, dla $x = \mp \frac{1}{2}$ rozbieżny.

41.17. a) $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$, $|x| < 1$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$, $|x| < 1$; c) $1 - x^3 + x^6 - x^9 + \dots$, $|x| < 1$,

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ dla $-1 < x \leq 1$; e) $2x(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \dots)$, $|x| < 1$;

f) $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-2)^n] x^n$, $|x| < \frac{1}{2}$; g) $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1 - (-1)^n}{2} \right) x^n$, $|x| < 1$.

$$41.18. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad -\infty < x < +\infty; \quad \text{ b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n!)} x^{2n}, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\text{ c) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}, \quad -\infty < x < +\infty; \quad \text{ d) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n!}, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\text{ e) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < +\infty; \quad \text{ f) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\text{ g) } 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\text{ h) } x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1;$$

$$\text{ i) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}, \quad |x| \leq 1;$$

$$\text{ j) } -1 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^4}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^6}{5} - \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n+2)} \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1.$$

$$41.19. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n, \quad 0 < x < 2; \quad \text{ b) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^{2n}}{3^{n+1}}, \quad -2 - \sqrt{3} < x < -2 + \sqrt{3};$$

$$\text{ c) } e^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}, \quad -\infty < x < +\infty; \quad \text{ d) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x - \frac{1}{2}\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\text{ e) } 1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \frac{(x-2)^2}{2!} + \dots + (-1)^{n+1} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n-2} \frac{(x-2)^{2n-2}}{(2n-2)!}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$41.20. \text{ a) } R = \frac{1}{2}, \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad S(x) = \begin{cases} \ln 2 & \text{dla } x = -\frac{1}{2}, \\ 1 & \text{dla } x = 0, \\ \frac{1}{2x} \ln \left| \frac{1}{1-2x} \right| & \text{dla } 0 < |x| < \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\text{ b) } R = 4, \quad (-4, 4), \quad S(x) = \begin{cases} \ln 2 - \frac{1}{2} & \text{dla } x = -4, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = 0, \\ \frac{1}{x^3} \left(-2x^2 - 16x + 64 \ln \frac{4}{4-x} \right) & \text{dla } 0 < |x| < 4; \end{cases}$$

$$\text{ c) } R = \frac{5}{3}, \quad \left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right), \quad S(x) = \begin{cases} \ln 2 & \text{dla } x = -\frac{5}{3}, \\ 1 & \text{dla } x = 0, \\ \frac{5}{3x} \ln \left| \frac{5}{5-3x} \right| & \text{dla } 0 < |x| < \frac{5}{3}; \end{cases}$$

$$d) R=6, (-6, 6), S(x)=6 \frac{12-x}{(6-x)^2};$$

$$e) R=4, (-4, 4), S(x)=\begin{cases} 2 \ln 2 - 1 & \text{dla } x = -4, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = 0, \\ \frac{4}{x^2} \left((x-4) \ln \left| \frac{4}{4-x} \right| + x \right) & \text{dla } 0 < |x| < 4, \\ 1 & \text{dla } x = 4; \end{cases}$$

$$f) R=4, (-4, 4), S(x)=4 \frac{4+x}{(4-x)^2};$$

$$g) R=\frac{2}{\sqrt{3}}, \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), S(x)=3 \ln \left| \frac{4}{4-3x^2} \right|;$$

$$h) R=\frac{5}{4}, \left(-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right), S(x)=\frac{20x}{(5-4x)^2};$$

$$i) R=\frac{2}{\sqrt{5}}, \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), S(x)=4 \frac{12-5x^2}{(4-5x^2)^2};$$

$$j) R=\frac{1}{2}, \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right);$$

$$S(x)=\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-2x}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{-2x} & \text{dla } -\frac{1}{2} \leq x < 0, \\ 2 & \text{dla } x = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2x}} \ln \frac{1+\sqrt{2x}}{1-\sqrt{2x}} & \text{dla } 0 < x < \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$k) R=2, (-2, 2), S(x)=\frac{8x}{(2-x)^3};$$

$$l) R=1, (-1, 1),$$

$$S(x)=\begin{cases} -\frac{1}{4} & \text{dla } x = -1, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{2} (1-x^2) \ln(1-x) + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} \right) & \text{dla } 0 < |x| < 1, \\ \frac{3}{4} & \text{dla } x = 1; \end{cases}$$

$$l) R=2, (-2, 2), S(x)=\frac{16x^2(x^2+12)}{(4-x^2)^3};$$

$$m) R=\sqrt{3}, \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right), S(x)=\frac{1}{x^4} \left(3(x^2-3) \ln \frac{3}{3-x^2} + 3x^2 \right) \quad \text{dla } 0 < |x| < \sqrt{3},$$

$$S(0)=\frac{1}{2}, S(\mp\sqrt{3})=1.$$

U w a g a. Przy znajdowaniu sum szeregów na końcach przedziału zbieżności w zadaniach a), b), c), e), j), l), m), należy korzystać z następującego twierdzenia Abela: suma szeregu potęgowego zbieżnego w punkcie $-R$ [R] (R – promień zbieżności $\wedge R \in (0, +\infty)$) jest w tym punkcie prawostronnie [lewostronnie] ciągła.

41.21. a) $\ln \frac{3}{2}$; b) $\frac{5}{4} \ln 5$; c) $\frac{28}{9}$; d) 24; e) 8; f) $\frac{208}{27}$.

Wskazówka do a): zbadać szereg $\sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n}$ i podstawić $x = \frac{1}{2}$.

41.22. 1,39, $\Delta = 0,01$.

41.23. a) 7,389; b) 0,7788; c) 0,0175; d) 0,9848.

41.24. 0,87606.

41.25. 3,141.

41.26. 3,1415.

41.27. a) 1,09861; b) 0,434294; c) 0,6990.

41.28. 1,2599210499. Wsk. $\sqrt[3]{2} = \frac{1}{4} \sqrt[3]{128} = \frac{5}{4} \sqrt[3]{1 + \frac{3}{125}}$.

41.29. a) 0,3230, $\Delta = 0,0001$; b) 3,518, $\Delta = 0,01$; c) 1,852.

41.30. a) 2,835; b) 0,905; c) 1,057; d) 0,183; e) 0,337; f) 0,927.

§ 42. SZEREGI ORTOGONALNE. SZEREGI FOURIERA

42.1. Rozpatrywać będziemy funkcje $f \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$. Iloczynem skalarnym funkcji f i g , który oznaczamy (f, g) nazywamy liczbę

$$(1) \quad (f, g) := \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Jeżeli $(f, g) = 0$, to f i g nazywamy wzajemnie ortogonalnymi.

Normę $\|f\|$ funkcji f określamy wzorem

$$(2) \quad \|f\| := \sqrt{(f, f)}.$$

Odległością kwadratową funkcji f i g , którą oznaczamy $d(f, g)$ nazywamy liczbę

$$(3) \quad d(f, g) := \|f - g\|.$$

Przyjmujemy określenia:

$$(4) \quad ((\varphi_n) \text{ ortogonalny na } \langle a, b \rangle) \Leftrightarrow \left(\bigwedge_{n \neq m} (\varphi_n, \varphi_m) = 0 \wedge \bigwedge_n (\varphi_n, \varphi_n) \neq 0 \right),$$

$$(5) \quad ((\varphi_n) \text{ ortonormalny (lub ortogonalny unormowany)}) \Leftrightarrow \left(\bigwedge_{n, m} (\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm} \right).$$

Jeżeli (φ_n) jest ortogonalny na $\langle a, b \rangle$ i (c_n) , $c_n \in \mathbf{R}$, jest dowolnym ciągiem, to

$$(6) \quad ((c_n \varphi_n), \left(\sum_0^n c_k \varphi_k \right))$$

nazywamy szeregiem ortogonalnym na $\langle a, b \rangle$.

Szereg (6), gdzie

$$(7) \quad c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|}, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \quad f \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$$

nazywamy *szeregiem Fouriera* funkcji f na $\langle a, b \rangle$ względem ciągu (φ_n) i piszemy

$$(8) \quad f(x) \sim \sum_0^{\infty} c_k \varphi_k.$$

Liczby c_n , $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ nazywamy *współczynnikami Eulera-Fouriera* funkcji f względem ciągu (φ_n) .

Funkcję s_N określoną wzorem

$$(9) \quad s_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(x),$$

gdzie $a_0, a_1, \dots, a_N \in \mathbf{R}$, $a_N \neq 0$, dowolne liczby, $(\varphi_n)_0^{\infty}$ ciąg ortogonalny na $\langle a, b \rangle$, nazywamy *wielomianem ortogonalnym rzędu N* .

Nierówność Bessela:

$$(10) \quad \sum_0^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2 \leq \|f\|^2,$$

gdzie c_n określone są wzorem (7), $(\varphi_n)_0^{\infty}$ – dowolny ciąg ortogonalny na $\langle a, b \rangle$, $f \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$.

Jeżeli w (10) zachodzi znak równości, tzn.

$$(11) \quad \sum_0^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2 = \|f\|^2,$$

to $(\varphi_n)_0^{\infty}$ nazywamy *układem zupełnym* na $\langle a, b \rangle$.

Ciąg (f_n) nazywamy *zbieżnym przeciętnie z kwadratem* na $\langle a, b \rangle$ do f , jeżeli

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f(x) - f_n(x))^2 dx = 0.$$

42.2. Weźmy ciąg $(\varphi_n)_0^{\infty}$, gdzie φ_n są określone wzorami:

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_{2n-1}(x) = \cos \frac{n\pi x}{p}, \quad \varphi_{2n}(x) = \sin \frac{n\pi x}{p},$$

$$x \in \langle -p, p \rangle.$$

Udowadnia się, że ciąg $(\varphi_n)_0^{\infty}$ jest ciągiem ortogonalnym i zupełnym na $\langle -p, p \rangle$.

Szereg Fouriera funkcji $f \in \mathcal{R}(\langle -p, p \rangle)$ względem ciągu $(\varphi_n)_0^{\infty}$ będziemy zapisywali w postaci

$$(13) \quad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right),$$

gdzie (por. (7))

$$(14) \quad a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx, \quad n=1, 2, \dots$$

Jeżeli funkcja f jest parzysta, to $b_n=0$, $n=1, 2, \dots$; jeżeli funkcja f jest nieparzysta, to $a_n=0$, $n=0, 1, 2, \dots$

Mówimy, że funkcja ograniczona f spełnia na przedziale $\langle a, b \rangle$ warunki Dirichleta, jeżeli:

α) f jest przedziałami monotoniczna na (a, b) (tzn. przedział (a, b) można podzielić na skończoną liczbę podprzedziałów, wewnątrz których funkcja f jest monotoniczna),

β) f jest ciągła na przedziale (a, b) z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów nieciągłości pierwszego rodzaju (por. § 20) przy czym w każdym punkcie nieciągłości x_0 jest

$$f(x_0) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2},$$

γ) Na końcach przedziału mamy

$$f(a) = f(b) = \frac{f(a^+) + f(b^-)}{2}.$$

T₁. Jeżeli funkcja f spełnia na przedziale $\langle -p, p \rangle$ warunki Dirichleta, to jest sumą swojego szeregu Fouriera dla każdego $x \in \langle -p, p \rangle$, a więc

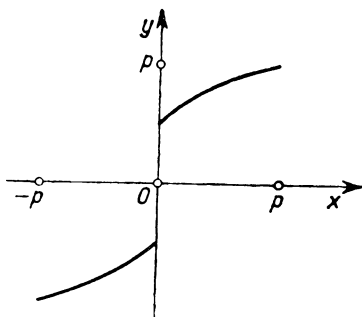
$$(15) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right),$$

gdzie współczynniki a_n i b_n określone są wzorami (14). Jeżeli ponadto funkcja f jest okresowa i ma okres $2p$, to wzór (15) jest prawdziwy na całej osi Ox .

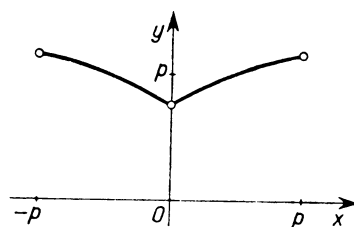
Uwaga 1. Jeżeli warunki dotyczące wartości funkcji w punktach nieciągłości lub w punktach końcowych przedziału $\langle -p, p \rangle$ nie są spełnione, to wzór (15) może nie być prawdziwy. Suma szeregu Fouriera funkcji f przedziałami monotonicznej w przedziale $(-p, p)$ i ciągłej w nim, z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów nieciągłości pierwszego rodzaju, jest wówczas pewną funkcją f^* , przy czym $f^*(x) = f(x)$ dla każdego $x \in (-p, p)$ z wyjątkiem wspomnianych punktów nieciągłości. W każdym punkcie nieciągłości x_0 , a także w punktach końcowych przedziału $\langle -p, p \rangle$ funkcja f^* ma „dirichletowskie” wartości

$$f^*(x_0) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}, \quad f^*(-p) = f^*(p) = \frac{f(-p^+) + f(p^-)}{2}.$$

Uwaga 2. Jeżeli f określona na przedziale $(0, p)$ spełnia na tym przedziale warunki Dirichleta α) i β) oraz ma granice jednostronne $f(0^+)$ i $f(p^-)$, to funkcję f można przedstawić w przedziale $(0, p)$ za pomocą szeregu Fouriera samych sinusów (tzn. we wzorze (15) $a_n=0$, $n=0, 1, 2, \dots$) albo samych cosinusów (tzn. we wzorze (15) $b_n=0$, $n=1, 2, \dots$) rozszerzając jej określenie (przedłużając ją) na przedział $\langle -p, p \rangle$.



Rys. 42.1



Rys. 42.2

W przypadku pierwszym chodzi o przedłużenie nieparzyste (rys. 42.1)

$$(16) \quad f^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = -p, \\ -f(-x) & \text{dla } -p < x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ f(x) & \text{dla } 0 < x < p, \\ 0 & \text{dla } x = p, \end{cases}$$

w przypadku drugim o przedłużenie parzyste (rys. 42.2)

$$(17) \quad f^{**}(x) = \begin{cases} f(p^-) & \text{dla } x = -p \\ f(-x) & \text{dla } -p < x < 0, \\ f(0^+) & \text{dla } x = 0, \\ f(x) & \text{dla } 0 < x < p, \\ f(p^-) & \text{dla } x = p. \end{cases}$$

Uwaga 3. Jeżeli w szczególności $p = \pi$, to wzór (15) przyjmuje postać

$$(18) \quad f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

gdzie

$$(19) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n=1, 2, \dots$$

Przykłady

42.1. Sprawdzić, że ciąg $\left(\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\right)$ jest ortonormalny na $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Rozwiązanie. Korzystamy z (5):

$$\left(\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n+m)x + \cos(n-m)x) dx = 0 \quad \text{dla } n \neq m$$

oraz

$$\left(\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = 1.$$

Wynika stąd, że

$$\bigwedge_{n,m} \left(\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}} \right) = \delta_{nm}. \quad \square$$

42.2. Niech (f_n) będzie ciągiem ortogonalnym funkcji całkowalnych na $\langle a, b \rangle$ i $f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N c_i f_i(x)$ (c_i są pewnymi stałymi współczynnikami) oznacza sumę szeregu jednostajnie zbieżnego na $\langle a, b \rangle$. Wykazać, że (por. (7))

$$(a) \quad c_n = \frac{(f, f_n)}{\|f_n\|}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Dowód. Z założeń mamy $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f_k(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$. Mnożąc ostatnią równość przez $f_n(x)$, otrzymujemy $f(x)f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f_k(x)f_n(x)$, przy czym można udowodnić, że szereg

$$\left((c_k f_k(x) f_n(x))_{k=1}^{\infty} \left(s_m(x) = \sum_{k=0}^m c_k f_k(x) f_n(x) \right)_{m=1}^{\infty} \right)$$

jest zbieżny jednostajnie na $\langle a, b \rangle$. Funkcje $c_k f_k f_n$ są całkowalne na $\langle a, b \rangle$, można więc całkować teraz szereg wyraz po wyrazie na $\langle a, b \rangle$. Ponieważ ciąg (f_n) jest ortogonalny na $\langle a, b \rangle$, więc

$$\int_a^b f(x) f_n(x) dx = c_n \int_a^b f_n^2(x) dx, \quad \text{czyli } (f, f_n) = c_n \|f_n\|^2,$$

$$\text{a więc } c_n = \frac{(f, f_n)}{\|f_n\|^2}, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad \square$$

42.3. Wykazać, że jeżeli

$$\left((f_1(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)) \wedge (f_2(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} C_k \varphi_k(x)), f_1^2, f_2^2 \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle) \right) \wedge$$

to

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k C_k \|\varphi_k\|^2.$$

Dowód. Suma $f_1 + f_2$ i różnica $f_1 - f_2$ są funkcjami całkowalnymi z kwadratem na $\langle a, b \rangle$, przy czym współczynnikami Fouriera tych funkcji są odpowiednio liczby $c_k + C_k$ i $c_k - C_k$. Z warunku zupełności układu $(\varphi_n)_0^{\infty}$ otrzymujemy

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))^2 dx = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k + C_k)^2 \|\varphi_k\|^2$$

oraz

$$\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))^2 dx = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k - C_k)^2 \|\varphi_k\|^2.$$

Odejmując stronami powyższe równości i przeprowadzając redukcję, mamy

$$4 \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} 4c_k C_k \|\varphi_k\|^2 \Rightarrow (f_1, f_2) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k C_k \|\varphi_k\|^2. \quad \square$$

42.4. Udowodnić, że ciąg $(x^n)_0^{\infty}$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$ jest zbieżny przeciętnie z kwadratem do funkcji $f: \langle 0, 1 \rangle \ni x \rightarrow 0 \in \mathbf{R}$.

Dowód. Korzystamy z (12):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (f_n(x) - f(x))^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (x^n - 0)^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0. \quad \square$$

Zauważmy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = g(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 1 & \text{dla } x = 1, \end{cases}$$

skąd wynika, że zbieżność z kwadratem nie musi pokrywać się ze zbieżnością zwykłą ($f(x) \neq g(x)$ na $\langle 0, 1 \rangle$). Z (12) widać jednak, że jeżeli ciąg $(f_n)_0^{\infty}$ jest zbieżny przeciętnie z kwadratem do pewnej funkcji f na $\langle a, b \rangle$, to jest zbieżny przeciętnie z kwadratem do każdej funkcji h określonej na $\langle a, b \rangle$ i różniącej się od f na zbiorze miary zero (nie zmienia się wartość odpowiednich całek).

W naszym przykładzie ciąg $(x^n)_0^{\infty}$ jest również zbieżny z kwadratem do funkcji g , będącej granicą w zwykłym sensie.

42.5. Udowodnić, że ciąg (f_n) , gdzie

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{dla } \frac{1}{n} < x \leq 1, \end{cases}$$

zbieżny w zwykłym sensie do funkcji $f: \langle 0, 1 \rangle \ni x \rightarrow 0 \in \mathbf{R}$ nie jest zbieżny przeciętnie z kwadratem do f .

Rozwiązanie. Korzystamy z (12):

$$\int_0^1 (f_n(x) - f(x))^2 dx = \int_0^{1/n} (n^2 x - 0)^2 dx = \int_0^{1/n} n^4 x^2 dx = n^4 \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{1/n} = \frac{n}{3}.$$

Całka ta nie dąży do zera, zatem ciąg nie jest zbieżny z kwadratem do f .

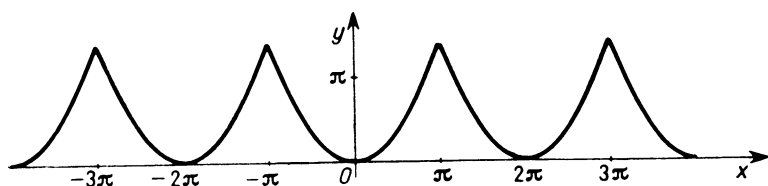
42.6. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcje określone wzorami

a) $f(x) = x^2$ dla $|x| \leq \pi$; b) $g(x) = x$ dla $|x| < \pi$.

Rozwiązanie. a) Funkcja f spełnia na przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$ warunki Dirichleta (rys. 42.3) oraz jest w tym przedziale parzysta. Korzystamy więc z twierdzenia T_1 (uwaga 3)

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2, \\
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} \sin nx x^2 \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right) = \\
 &= \frac{-4}{\pi n} \int_0^{\pi} x \left(\frac{-1}{n} \cos nx \right)' dx = \frac{-4}{\pi n} \left(\frac{-x}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) = \\
 &= \frac{4}{n^2} \cos \pi n = (-1)^n \frac{4}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots;
 \end{aligned}$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$



Rys. 42.3

Stąd dla $|x| \leq \pi$ otrzymujemy

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 - 4 \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right).$$

Z otrzymanego rozwinięcia można znaleźć sumy pewnych szeregów liczbowych. Np. dla $x=0$ mamy

$$0 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \right),$$

stąd

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Dla $x = \pi$ otrzymujemy

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Uwaga. Otrzymane rozwinięcie funkcji f na przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$ jest jednocześnie rozwinięciem funkcji f^* będącej okresowym przedłużeniem funkcji f na całą oś liczbową (por. rys. 42.3).

b) Funkcja g jest nieparzysta, ciągła i przedziałami monotoniczna, na przedziale $(-\pi, \pi)$ (rys. 42.4). Zatem korzystając z twierdzenia T_1 (uwaga 1 i uwaga 3), mamy $a_n = 0$, $n = 0, 1, \dots$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Stąd dla $|x| < \pi$

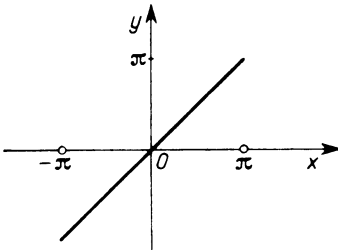
$$x = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right).$$

W punktach $x = -\pi$ i $x = \pi$ szereg jest zbieżny (por. rys. 42.4) do liczby

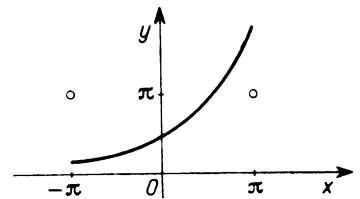
$$\frac{g(-\pi^+) + g(\pi^-)}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0.$$

Podstawiając w otrzymanym rozwinięciu $x = \frac{1}{2}\pi$, mamy

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$



Rys. 42.4



Rys. 42.5

42.7. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję $f: (-\pi, \pi) \ni x \rightarrow e^{ax} \in \mathbf{R}; a \neq 0$.

Rozwiązanie. Funkcja f jest ciągła i przedziałami monotoniczna na przedziale $(-\pi, \pi)$ (por. rys. 42.5, gdzie np. $a > 0$). Stosujemy więc twierdzenie T_1 (uwaga 1 i uwaga 3). Zatem

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \, dx = 2 \frac{\sinh \pi a}{\pi a},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a \cos nx + n \sin nx}{a^2 + n^2} e^{ax} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^n 2a}{\pi(a^2 + n^2)} \sinh \pi a, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \sin nx \, dx = \frac{(-1)^{n-1} 2n}{\pi(a^2 + n^2)} \sinh \pi a, \quad n = 1, 2, \dots$$

Stąd dla $|x| < \pi$ mamy

$$e^{ax} = \frac{2}{\pi} \sinh \pi a \left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} (a \cos nx - n \sin nx) \right].$$

W punktach $x = -\pi$ i $x = \pi$ szereg jest zbieżny do liczby $\frac{g(-\pi^+) + g(\pi^-)}{2} = \frac{1}{2}(e^{-\pi a} + e^{\pi a})$

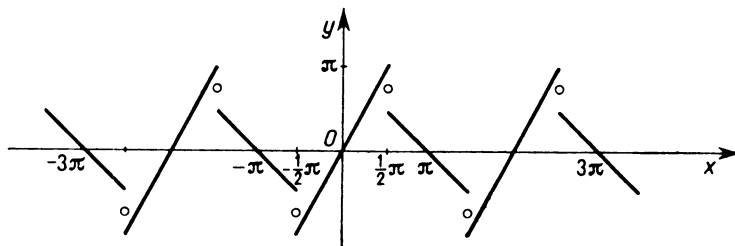
(por. rys. 42.5).

42.8. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję określoną wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x & \text{dla } -\pi \leq x < -\frac{1}{2}\pi, \\ -\frac{3}{2}\pi & \text{dla } x = -\frac{1}{2}\pi, \\ 2x & \text{dla } -\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi, \\ \frac{3}{2}\pi & \text{dla } x = \frac{1}{2}\pi, \\ \pi - x & \text{dla } \frac{1}{2}\pi < x \leq \pi. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Funkcja f spełnia warunki Dirichleta na przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$ (rys. 42.6). Zatem $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (funkcja f jest nieparzysta),

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} 2x \sin nx \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \sin nx \, dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{2x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{2}{n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\pi - x}{n} \cos nx \Big|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi n^2} \left[6 \sin \left(n \frac{\pi}{2} \right) - \pi n \cos \left(n \frac{\pi}{2} \right) \right], \end{aligned}$$



Rys. 42.6

$n=1, 2, \dots$ Stąd dla $|x| \leq \pi$ mamy

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2} \left[6 \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) - \pi n \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) \right] \sin nx = \\ &= \frac{6}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \dots \right) + \left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 6x}{6} - \dots \right). \end{aligned}$$

Otrzymane rozwinięcie funkcji f jest jednocześnie rozwinięciem funkcji f^* będącej okresowym przedłużeniem funkcji f na całą oś liczbową (por. rys. 42.6).

42.9. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję

$$f: (0, 2\pi) \ni x \rightarrow \frac{1}{2}(\pi - x).$$

Rozwiązanie. Twierdzenie T_1 sformułowane dla przedziału $\langle -p, p \rangle$ jest słuszne w dowolnym przedziale $\langle a, a+2p \rangle$ o długości $2p$, w którym funkcja f spełnia warunki Dirichleta. W szczególności dla przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$ wzory (14) są postaci

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n=1, 2, \dots$$

Funkcja f jest ciągła i przedziałami monotoniczna na przedziale $(0, 2\pi)$ (por. rys. 42.7). Zatem

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \, dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \cos nx \, dx = \frac{1}{2\pi} (\pi - x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \sin nx \, dx = 0, \quad n=1, 2, \dots,$$

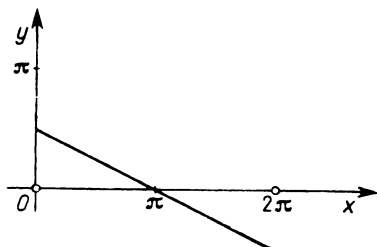
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx \, dx = \frac{-1}{2\pi} (\pi - x) \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx = \frac{1}{n}, \quad n=1, 2, \dots$$

Stąd dla $0 < x < 2\pi$ mamy

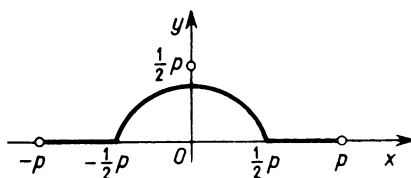
$$\frac{1}{2}(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Dla $x=0$ i $x=2\pi$ suma szeregu (rys. 42.7) jest równa

$$\frac{f(0^+) + f(2\pi^-)}{2} = \frac{\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi}{2} = 0.$$



Rys. 42.7



Rys. 42.8

42.10. Rozwinąć w szereg Fouriera według cosinusów funkcję określoną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{p} & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}p, \\ 0 & \text{dla } \frac{1}{2}p < x \leq p. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Weźmy przedłużenie parzyste funkcji f na przedział $\langle -p, p \rangle$ (por. uwagę 2 wzory (17)). Otóż (rys. 42.8):

$$f^{**}(x) = \begin{cases} f(p^-) = f(p) = 0 & \text{dla } x = -p, \\ f(-x) & \text{dla } -p < x < 0, \\ f(0^+) = f(0) = 1 & \text{dla } x = 0, \\ f(x) & \text{dla } 0 < x < p, \\ f(p^-) = f(p) = 0 & \text{dla } x = p. \end{cases}$$

Zatem

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) dx = \frac{2}{p} \left(\int_0^{p/2} \cos \frac{\pi x}{p} dx + \int_{p/2}^p 0 dx \right) = \frac{2}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{\pi n x}{p} dx = \frac{2}{p} \int_0^{p/2} \cos \frac{\pi x}{p} \cos \frac{\pi n x}{p} dx = \quad (1)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t \cos n t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} [\cos(n+1)t + \cos(n-1)t] dt.$$

Stąd

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos 2t + 1) dt = \frac{1}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n+1)t}{n+1} + \frac{\sin(n-1)t}{n-1} \right]_0^{\pi/2} \quad \text{dla } n > 1.$$

(1) Stosujemy podstawienie $t = (\pi/p)x$, więc $dt = (\pi/p) dx$.

Dla n nieparzystych $a_n=0$, a dla n parzystych $a_n = -\frac{2(-1)^{\frac{n}{2}}}{\pi(n^2-1)}$. Z kolei $b_n=0$, $n=1, 2, \dots$

Zatem dla $|x| \leq p$ otrzymujemy

$$f^{**}(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi x}{p} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} \cos \frac{2\pi n x}{p}.$$

A więc dla $0 \leq x \leq p$ mamy

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi x}{p} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} \cos \frac{2\pi n x}{p},$$

tzn. rozwinięcie funkcji f według cosinusów.

42.11. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję $f: (5, 15) \ni x \rightarrow (10-x) \in \mathbf{R}$.

Rozwiązanie. W celu zastosowania twierdzenia T_1 należy dokonać najpierw takiego podstawienia $x = \alpha x^* + \beta$, które przekształci (ogólnie) przedział $\langle a, b \rangle$ np. na przedział $\langle -\pi, \pi \rangle$. Otóż parametry α i β znajdujemy z układu

$$a = -\alpha\pi + \beta,$$

$$b = \alpha\pi + \beta.$$

Zatem

$$\alpha = \frac{b-a}{2\pi}, \quad \beta = \frac{a+b}{2}, \quad \text{czyli} \quad x = \frac{b-a}{2\pi} x^* + \frac{b+a}{2}.$$

Następnie rozwijamy funkcję określoną wzorem

$$f\left(\frac{b-a}{2\pi} x^* + \frac{b+a}{2}\right) = g(x^*)$$

zmiennej x^* w szereg Fouriera i w otrzymanym rozwinięciu podstawiamy

$$x^* = \frac{2\pi}{b-a} x - \pi \frac{b+a}{b-a}.$$

W przypadku danej funkcji f mamy: $b-a=10$, $b+a=20$, zatem $x = \frac{5}{\pi} x^* + 10$ oraz $g(x^*) = 10 - \left(\frac{5}{\pi} x^* + 10\right) = -\frac{5}{\pi} x^*$, gdzie $|x^*| < \pi$. Postępując podobnie jak w przykładzie

42.6b (por. rys. 42.9), otrzymujemy:

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{-5}{\pi} x^*\right) \sin nx^* dx = -\frac{10}{\pi^2} \left[\left(\frac{-x^* \cos nx^*}{n}\right) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx^* dx \right] =$$

$$= \frac{10}{\pi n} (-1)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

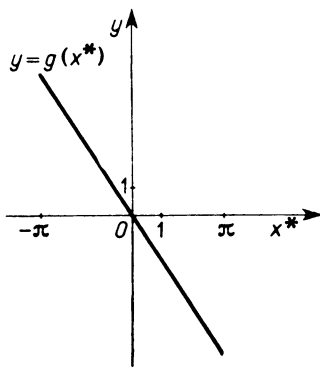
Zatem dla $|x^*| < \pi$ mamy

$$(a) \quad -\frac{5}{\pi} x^* = \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx^*}{n}.$$

Podstawiając w rozwinięciu (a) $x^* = \frac{1}{2}\pi x - 2\pi$, otrzymujemy rozwinięcie funkcji f ;

$$f(x) = 10 - x = \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{1}{2}\pi n x}{n} \quad \text{dla} \quad 5 < x < 15.$$

Dla $x=5$ i $x=15$ suma szeregu wynosi 0.



Rys. 42.9

Zadania

42.12. Sprawdzić, że iloczyn skalarny (f, g) ma następujące własności:

a) $(f, g) = (g, f)$; b) $k(f, g) = (kf, g)$, $k \in \mathbf{R}$;

c) $(f, g_1 + g_2) = (f, g_1) + (f, g_2)$.

42.13. Korzystając z zadania 42.12, wykazać, że

$$(k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3, h_1 g_1 + h_2 g_2 + h_3 g_3) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 k_j h_i (f_j, g_i), \quad k_j, h_i \in \mathbf{R}.$$

42.14. Sprawdzić, że funkcje określone wzorami:

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$, na $\langle -1, 1 \rangle$;

b) $h(x) = \sin 2x$, $k(x) = \cos x$, na $\langle 0, 2\pi \rangle$,

są ortogonalne.

42.15. Dla jakich wartości parametru k funkcje określone wzorami:

a) $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = 4x$; b) $f(x) = 2x$, $g(x) = 4 - x$,

c) $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = x$

są ortogonalne na $\langle 0, k \rangle$?

42.16. Znaleźć funkcje $f_i: \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ określone wzorami $f_i(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_ix^i$, $i = 0, 1, 2, 3$ wzajemnie ortogonalne na $\langle -1, 1 \rangle$ i znaleźć ich normy na tym przedziale.

42.17. Wykazać, że każdy ciąg (f_n) , $x \in \langle a, b \rangle$, $\|f_n\| < 0$ dla $n \in \mathbf{N}$, można unormować.

42.18. Znaleźć postać wyraźną wielomianów określonych wzorem (tzw. wielomianów Legendre'a)

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n,$$

dla $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Wykazać, że są one wzajemnie ortogonalne na $\langle -1, 1 \rangle$ oraz obliczyć ich normy na $\langle -1, 1 \rangle$.

42.19. Wykazać, że ciąg funkcyjny $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ jest ortogonalny na: a) $\langle -\pi, \pi \rangle$; b) $\langle a, a + 2\pi \rangle$, $a \in \mathbf{R}$.

Czy ciąg ten jest ortogonalny na $\langle 0, \pi \rangle$?

42.20. Wykazać, że:

a) ciąg $(\sin(2n+1)x)_0^\infty$ jest ortogonalny na $\langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$;

b) ciąg $\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx\right)$ jest ortonormalny na $\langle -\pi, \pi \rangle$;

c) ciągi $\left(\cos \frac{n\pi}{p} x\right)_0^\infty$, $\left(\sin \frac{n\pi}{p} x\right)_0^\infty$ są ortogonalne na $\langle 0, p \rangle$ oraz unormować te ciągi.

42.21. Można wykazać, że równanie $\operatorname{tg} u = ku$ [$\operatorname{ctg} v = kv$] (k – stała) ma nieskończenie wiele pierwiastków dodatnich $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ [$v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$].

Wykazać, że ciąg funkcyjny $\left(\sin \frac{u_n}{p} x\right) \left[\left(\cos \frac{v_n}{p} x\right)\right]$ jest ortogonalny na $\langle 0, p \rangle$.

42.22. Dana jest funkcja $f \in \mathcal{R}(\langle -\pi, \pi \rangle)$. Znaleźć współczynniki c_n szeregu Fouriera funkcji f na $\langle -\pi, \pi \rangle$ względem ciągu ortogonalnego danego w zadaniu 42.19.

42.23. Znaleźć odległości kwadratowe funkcji określonych wzorami:

a) $f(x) = x$ i $g(x) = x^2$ na $\langle 0, 1 \rangle$;

b) $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$ na $\langle 0, 2\pi \rangle$;

c) $f(x) = x^n$ i $g(x) = x^{n+1}$ na $\langle 0, 1 \rangle$, $n \geq 0$.

42.24. Dana jest funkcja $f \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$, ciąg ortogonalny $(f_n)_0^\infty$, $x \in \langle a, b \rangle$ oraz liczba $m \in \mathbf{N}$. Wykazać, że odległość kwadratowa $d(f, s_m(x))$ jest najmniejsza dla wielomianu s_m (por. (9)) o współczynnikach c_k określonych wzorem (7).

Uwaga. Mówimy, że wielomian s_m o współczynnikach określonych wzorami (7) daje najlepszą aproksymację kwadratową.

42.25. Udowodnić nierówność Bessela (nierówność (10)).

42.26. Jak zachowuje się odległość $d(f, s_m)$ (por. zadanie 42.24) przy zwiększaniu liczby m , jeżeli s_m jest wielomianem dającym najlepszą aproksymację kwadratową?

42.27. Znaleźć wielomiany ortogonalne zerowego, pierwszego i drugiego rzędu zbudowane z wielomianów Legendre'a, tzn. wielomiany określone wzorem

$$W_n(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \dots + c_n P_n(x)$$

($P_i, i=0, 1, 2, \dots, n$, wielomiany Legendre'a), które aproksymują najlepiej w sensie odległości kwadratowej funkcje określone wzorami:

a) $f(x) = e^x$; b) $g(x) = 2|x|$; c) $h(x) = \cos x$ na $\langle -1, 1 \rangle$. Obliczyć te odległości kwadratowe.

42.28. Znaleźć wielomiany ortogonalne zerowego, pierwszego, drugiego i trzeciego rzędu zbudowane z wielomianów Legendre'a, tzn. wielomiany określone wzorem

$$W_n(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \dots + c_n P_n(x)$$

($P_i, i=0, 1, 2, \dots, n$, wielomiany Legendre'a), które aproksymują najlepiej funkcję $f: \langle 0, 1 \rangle \ni x \rightarrow x^3 \in \mathbf{R}$. Co można powiedzieć o wielomianach wyższego rzędu?

42.29. Wykazać, że szereg $((c_n)_0^\infty, (\sum_{k=0}^n c_k^2)_0^\infty)$, gdzie liczby $c_k, k=0, 1, 2, \dots$ są określone wzorami (7), jest zbieżny oraz że $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$.

42.30. Udowodnić twierdzenie: ciąg $(f_n)_0^\infty, x \in \langle a, b \rangle$ ortogonalny na $\langle a, b \rangle$ jest układem zupełnym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej funkcji f takiej, że $f^2 \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$ zachodzi równość: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f(x) - \sum_{k=0}^n c_k f_k(x))^2 dx = 0$, gdzie c_k określone są wzorami (7).

42.31. Udowodnić twierdzenie: jeżeli ciąg $(f_n), x \in \langle a, b \rangle$ jest zupełny na $\langle a, b \rangle$, to nie istnieje funkcja ciągła $f (f \neq f_n, n=1, 2, \dots)$ nie równa tożsamościowo zeru i ortogonalna do wszystkich funkcji układu.

42.32. Korzystając z przykładu 42.5 podać przykład ciągu $(f_n), (x \in \langle 0, 1 \rangle) \wedge \bigwedge_{n \in \mathbf{N}} f_n \in C^0(\langle 0, 1 \rangle)$ zbieżnego w zwykłym sensie do funkcji $f: \langle 0, 1 \rangle \ni x \rightarrow 0 \in \mathbf{R}$, a nie zbieżnego przeciętnie z kwadratem do f .

42.33. Udowodnić, że ciąg $(\sqrt[n]{x^n}), x \in \langle 0, 1 \rangle$ jest zbieżny przeciętnie z kwadratem do funkcji $f: \langle 0, 1 \rangle \ni x \rightarrow 0 \in \mathbf{R}$, ale nie jest zbieżny w zwykłym sensie do f .

42.34. Czy ciąg (f_n) , gdzie

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x=0, \\ n \cos \frac{x}{n} & \text{dla } 0 < x \leq \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{dla } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

jest zbieżny w zwykłym sensie i przeciętnie z kwadratem do funkcji $f: \langle 0, 1 \rangle \ni x \rightarrow 1 \in \mathbf{R}$?

42.35. Wykazać, że ciąg $\left(\frac{1}{\sqrt{1+n^2x^2}}\right)$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$ jest zbieżny przeciętnie z kwadratem do funkcji $f: \langle 0, 1 \rangle \ni x \rightarrow 0 \in \mathbf{R}$. Do jakiej funkcji jest zbieżny ten ciąg w zwykłym sensie?

42.36. Rozwinąć w szeregi Fouriera funkcje określone wzorami:

- a) $f(x) = |x|$, $|x| \leq \pi$; b) $f(x) = |\sin x|$, $x \in \mathbf{R}$;
 c) $f(x) = \cosh ax$, $|x| \leq \pi$; d) $f(x) = x^3$, $|x| < \pi$;
 e) $f(x) = \sin ax$, $|x| < \pi$ (a nie jest liczbą całkowitą);
 f) $f(x) = \sinh ax$, $|x| < \pi$; g) $f(x) = 2x^2 - x + 3$, $|x| < \pi$;

$$h) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -\pi < x < 0, \\ x & \text{dla } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

oraz korzystając z otrzymanego rozwinięcia obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$;

$$i) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -\pi \leq x \leq 0, \\ \sin x & \text{dla } 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$j) f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{dla } 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$k) f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } -\pi < x \leq 0, \\ 2x & \text{dla } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

42.37. Rozwinąć w szeregi Fouriera funkcje określone wzorami:

$$a) f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\pi+x) & \text{dla } -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{dla } x=0, \\ \frac{1}{2}(\pi-x) & \text{dla } 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -\pi \leq x < -h, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = -h, \\ 1 & \text{dla } -h < x < h, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = h, \\ 0 & \text{dla } h < x \leq \pi; \end{cases} \quad c) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } -\pi < x < 0, \\ -\frac{1}{2} & \text{dla } x=0, \\ -2 & \text{dla } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

42.38. Rozwinąć w szeregi Fouriera funkcje określone wzorami:

$$a) f(x) = x, \quad 0 < x < 2\pi; \quad b) f(x) = x^2, \quad 0 < x < 2\pi; \quad c) f(x) = e^x - 1, \quad 0 < x < 2\pi.$$

42.39. Rozwinąć w szeregi Fouriera funkcje określone wzorami:

$$a) f(x) = e^x, \quad |x| < p; \quad b) f(x) = |x|, \quad |x| < 1; \quad c) f(x) = x \cos x, \quad |x| \leq \frac{1}{2}\pi.$$

42.40. Rozwinąć w szeregi Fouriera według cosinusów funkcje określone wzorami:

$$a) f(x) = \sin ax, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (a \text{ jest liczbą całkowitą}); \quad b) f(x) = e^{ax}, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad a \in \mathbf{R};$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2h} & \text{dla } 0 \leq x \leq 2h, \\ 0 & \text{dla } 2h < x \leq \pi. \end{cases}$$

42.41. Rozwinąć w szeregi Fouriera według sinusów funkcje określone wzorami
a) $f(x)=1, 0 < x < \pi$;

$$b) f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{p} & \text{dla } 0 \leq x < \frac{1}{2}p, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = \frac{1}{2}p, \\ 0 & \text{dla } \frac{1}{2}p < x \leq p; \end{cases} \quad c) f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{p} & \text{dla } 0 \leq x < \frac{1}{2}p, \\ 0 & \text{dla } x = \frac{1}{2}p, \\ -\sin \frac{\pi x}{p} & \text{dla } \frac{1}{2}p < x \leq p; \end{cases}$$

d) $f(x)=x(\pi-x), 0 \leq x \leq \pi$ oraz korzystając z otrzymanego rozwinięcia znaleźć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$.

42.42. Rozwinąć w szeregi Fouriera funkcje określone wzorami:

$$a) f(x)=2x, 0 < x < 1; \quad b) f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } 0 \leq x \leq 1. \\ 1 & \text{dla } 1 < x < 2. \\ 3-x & \text{dla } 2 \leq x \leq 3; \end{cases}$$

$$c) f(x)=|x+1|, -3 \leq x \leq 1.$$

42.43. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję $f: \langle 0, 2 \rangle \ni x \rightarrow (1-|x-1|) \in \mathbf{R}$ według:
a) sinusów; b) cosinusów.

42.44. Wykazać prawdziwość wzoru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{12} (3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2) \quad \text{dla } 0 \leq x \leq \pi.$$

42.45. Obliczyć sumy szeregów:

$$a) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots; \quad b) 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \dots; \quad c) 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \dots$$

Odpowiedzi

42.15. a) $k = \mp 2\sqrt{2}$; b) $k = 6$; c) $K = \{k \in \mathbf{R}: \operatorname{tg} 2k = 2k\}$.

42.16. Funkcje określone wzorami: $f_0(x) = b_0, f_1(x) = b_1x, f_2(x) = b_2(-3x^2 + 1), f_3(x) = b_3(x^3 - \frac{3}{5}x)$, gdzie $b_i, i = 0, 1, 2, 3$, dowolne stałe.

42.17. Ciąg $\left(\frac{1}{\|f_n\|} f_n\right)$ jest unormowany.

42.18. Funkcje określone wzorami: $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \|P_0\| = \sqrt{2}, \|P_1\| = \sqrt{\frac{2}{3}}, \|P_2\| = \sqrt{\frac{2}{5}}, \|P_3\| = \sqrt{\frac{2}{7}}, \|P_4\| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

42.19. Nie. **42.20.** c) $\left(\sqrt{\frac{2}{p}} \cos \frac{n\pi}{p} x\right)_0^{\infty}, \left(\sqrt{\frac{2}{p}} \sin \frac{n\pi}{p} x\right)^{\infty}$.

$$42.22. c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad c_{2k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2kx dx, \quad k=1, 2, \dots$$

$$c_{2k-1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(2k-1)x dx, \quad k=1, 2, \dots$$

$$42.23. a) \frac{1}{\sqrt{30}}; \quad b) \sqrt{2\pi}; \quad c) \frac{1}{\sqrt{(n+1)(2n+1)(2n+3)}}.$$

$$42.24. d^2(f, s_m) = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^m c_k^2 \|f_k\|^2, \quad \text{gdzie } c_k = \frac{(f, f_k)}{\|f_k\|^2}.$$

42.25. Wsk. Por. zadanie 42.24.

42.26. Zwiększając m nie zwiększamy odległości $d(f, s_m)$, tzn. aproksymację możemy jedynie polepszyć.

42.27. a) $W_0(x) \approx 1,175$, $W_1(x) \approx 1,175 + 1,104x$, $W_2(x) \approx 1,175 + 1,104x + 0,178(3x^2 - 1)$,
 $d_0 \approx 0,866$, $d_1 \approx 0,057$, $d_2 \approx 0,07$;

b) $W_0(x) = W_1(x) = 1$, $W_2(x) = \frac{15}{8}x^2 + \frac{3}{8}$, $d_0 = d_1 = \frac{2}{3}$, $d_2 = \frac{1}{24}$;

c) $W_0(x) \approx 0,841$, $W_1(x) = W_0(x)$, $W_2(x) \approx 0,996 - 0,465x^2$, $d_0 = d_1 \approx 0,03$, $d_2 \approx 0,015$.

42.28. $W_0(x) = 0$, $W_1(x) = \frac{3}{5}P_1(x) = \frac{3}{5}x = W_2(x)$, $W_3(x) = \frac{3}{5}P_1(x) + \frac{2}{5}P_3(x) = x^3$. Dla $n \geq 3$
 $W_n(x) = W_3(x)$.

42.29. Wsk. Zastosować nierówność Bessela.

$$42.32. \text{Np. } (f_n), \text{ gdzie } f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -n^2x + 2n & \text{dla } \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{dla } \frac{2}{n} < x \leq 1 \end{cases}.$$

42.34. (f_n) jest zbieżny w zwykłym sensie do funkcji $f: \langle 0, 1 \rangle \ni x \rightarrow 1 \in \mathbf{R}$, ale nie jest zbieżny do tej funkcji przeciętnie z kwadratem.

$$42.35. g: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbf{R}, \text{ gdzie } g(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x=0, \\ 0 & \text{dla } x \in (0, 1). \end{cases}$$

$$42.36. a) |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}; \quad b) |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1};$$

$$c) \cosh ax = \frac{2 \sinh \pi a}{\pi} \left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a \cos nx}{a^2 + n^2} \right];$$

$$d) x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right) \sin nx; \quad S(\mp \pi) = 0, \text{ gdzie } S \text{ oznacza sumę szeregu};$$

$$e) \sin ax = \frac{2 \sin \pi a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \sin nx}{n^2 - a^2}, \quad S(\mp \pi) = 0;$$

$$f) \sinh ax = \frac{2 \sinh \pi a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \sin nx}{n^2 + a^2}, \quad S(\mp \pi) = 0;$$

$$g) 2x^2 - x + 3 = \frac{2\pi^2}{3} + 3 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}, \quad S(\mp \pi) = 2\pi^2 + 3;$$

$$h) f(x) = \frac{1}{4}\pi - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + (-1)^n \frac{\sin nx}{n} \right], \quad S(\mp \pi) = \frac{1}{4}\pi, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{8}\pi^2;$$

$$i) f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{1-4n^2}; \quad j) f(x) = -\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{1-4n^2};$$

$$k) f(x) = \frac{1}{4}\pi - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + 3(-1)^n \frac{\sin nx}{n} \right], \quad S(\mp \pi) = \frac{1}{4}\pi.$$

$$42.37. \quad a) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}; \quad b) f(x) = \frac{2h}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{nh} \cos nx \right);$$

$$c) f(x) = -\frac{1}{2} - \frac{6}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}, \quad S(\mp \pi) = -\frac{1}{2}.$$

$$42.38. \quad a) x = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad S(0) = S(2\pi) = \pi;$$

$$b) x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n} \right), \quad S(0) = S(2\pi) = 2\pi^2;$$

$$c) e^x - 1 = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{1+n^2} - \frac{n \sin nx}{1+n^2} \right) \right] - 1, \quad S(0) = S(2\pi) = \frac{1}{2}(e^{2\pi} - 1).$$

$$42.39. \quad a) e^x = \sinh p \left[\frac{1}{p} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{p \cos \frac{\pi nx}{p} - \pi n \sin \frac{\pi nx}{p}}{p^2 + n^2 \pi^2} \right], \quad S(\mp p) = \cosh p;$$

$$b) |x| = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}; \quad c) x \cos x = \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \sin 2nx}{(4n^2-1)^2}.$$

$$42.40. \quad a) \sin ax = \begin{cases} \frac{4a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{a^2 - (2n+1)^2} & \text{dla } a \text{ parzystego,} \\ \frac{4a}{\pi} \left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{a^2 - (2n)^2} \right] & \text{dla } a \text{ nieparzystego;} \end{cases}$$

$$b) e^{ax} = \frac{e^{\pi a} - 1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{\pi a} - 1}{a^2 + n^2} \cos nx;$$

$$c) f(x) = \frac{2h}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 \cos nx \right].$$

$$42.41. a) 1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}, \quad S(0) = S(\pi) = 0;$$

$$b) f(x) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi x}{p} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4n^2 - 1} \sin \frac{2\pi n x}{p};$$

$$c) f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \sin \frac{2\pi n x}{p};$$

$$d) x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{1}{32} \pi^3.$$

$$42.42. a) 2x = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{n}, \quad S(0) = S(1) = 1;$$

$$b) f(x) = \frac{2}{3} - \frac{9}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2\pi n x}{3} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{n^2};$$

$$c) |x+1| = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(n+\frac{1}{2})\pi(x+1)]}{(2n+1)^2}.$$

$$42.43. a) 1 - |x-1| = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{\pi(2n+1)x}{2}}{(2n+1)^2};$$

$$b) 1 - |x-1| = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}.$$

42.45. Wsk. Skorzystać z rozwinięcia funkcji $f: (0, \pi) \ni x \rightarrow \frac{1}{4}\pi \in \mathbf{R}$ według sinusów.

$$a) \frac{1}{4}\pi; \quad b) \frac{1}{3}\pi; \quad c) \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

§ 43. UWAGI O MIERZE LEBESGUE'A I CAŁCE LEBESGUE'A

43.1. Dany jest zbiór $X \neq \emptyset$. Rodzinę G podzbiorów zbioru X nazywamy σ -ciałem (lub przeliczalnie addytywnym ciałem) podzbiorów zbioru X , jeżeli

1° $X \in G$, 2° jeżeli $A \in G$, to $X - A \in G$, 3° jeżeli $A_n \in G$, $n \in \mathbf{N}$, to $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in G$.

W szczególności, zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X jest σ -ciałem. Dla każdej rodziny podzbiorów zbioru X istnieje najmniejsze σ -ciało podzbiorów zbioru X zawierające

daną rodzinę (por. zadanie 43.8). Nazywamy je σ -ciałem generowanym przez daną rodzinę. σ -ciało generowane przez wszystkie przedziały otwarte w \mathbf{R}^n nazywamy σ -ciałem borelowskim i oznaczamy \mathcal{B} . Elementy rodziny \mathcal{B} nazywamy zbiorami borelowskimi. Można udowodnić, że σ -ciało generowane przez wszystkie przedziały domknięte w \mathbf{R}^n , względnie generowane przez wszystkie przedziały półotwarte w \mathbf{R}^n , pokrywa się z σ -ciałem borelowskim.

Def. 1. Funkcję $\mu: G \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_+$ określoną na σ -ciele G podzbiorów zbioru X nazywamy σ -miarą na G , jeżeli

$$\alpha) \mu(\emptyset) = 0,$$

$$\beta) (A_n \in G, n \in \mathbf{N} \wedge A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j) \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Wartość $\mu(A)$, $A \in G$ nazywamy miarą zbioru A . Miarę nazywamy skończoną, jeżeli $\mu(X) < +\infty$, miarę nazywamy unormowaną, jeżeli $\mu(X) = 1$. Jeżeli $\mu(A) = 0$, to A nazywamy zbiorem miary zero. Miarę nazywamy zupełną, jeżeli każdy podzbiór zbioru miary zero ma miarę zero.

Można udowodnić twierdzenia (por. zadanie 43.19):

T_1 . σ -miara na σ -ciele G jest ciągła z dołu, tzn. dla każdego ciągu wstępującego $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$, $A_i \in G$, $i = 1, 2, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right), \quad \text{gdzie} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

T_2 . σ -miara na σ -ciele G jest ciągła z góry, tzn. dla każdego ciągu zstępującego $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$, $A_i \in G$, $i = 1, 2, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right), \quad \text{gdzie} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Niech X oznacza zbiór wszystkich przedziałów domkniętych w \mathbf{R}^n , tzn. zbiór elementów postaci $A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$. Weźmy funkcję $\mu_1: X \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$ określoną wzorem $\mu_1(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$.

Udowadnia się, że funkcję tę można rozszerzyć jednoznacznie do σ -miary μ_2 na σ -ciele borelowskim. Okazuje się, że miara μ_2 nie jest zupełna. Aby otrzymać miarę zupełną, powiększamy najpierw σ -ciało borelowskie, biorąc zbiór \mathcal{M} utworzony z elementów postaci $A = B \cup C$, gdzie $B \in \mathcal{B}$, a C jest podzbiorem każdego zbioru borelowskiego miary zero. Udowadnia się, że \mathcal{M} jest σ -ciałem podzbiorów przestrzeni \mathbf{R}^n . Miara μ określona wzorem $\mu(A) = \mu(B \cup C) = \mu(B)$ dla każdego $A \in \mathcal{M}$ jest miarą zupełną. σ -ciało \mathcal{M} nazywamy ciałem zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a, a każdy element zbioru \mathcal{M} nazywamy zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a lub krótko zbiorem mierzalnym.

Z definicji zbioru mierzalnego w sensie Lebesgue'a wynika, że miara Lebesgue'a dowolnego zbioru $A \in \mathcal{M}$ jest kresem dolnym miary sumy przedziałów pokrywających zbiór A . Stąd, np. wynika, że miara płaska Lebesgue'a łuku zwykłego jest zerem.

Z twierdzenia T_2 i z def. 1 wynika, że miara Lebesgue'a zbioru przeliczalnego punktów jest równa zeru.

Def. 2. Funkcja $f: A \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$, ($\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$) określona na zbiorze mierzalnym A nazywa się *funkcją mierzalną*, jeżeli dla każdego $a \in \mathbf{R}$ zbiór $\{x : f(x) < a\}$ jest mierzalny.

Udowadnia się, że:

- a) kombinacja liniowa funkcji mierzalnych jest funkcją mierzalną,
- β) iloczyn i iloraz (jeżeli mianownik jest różny od zera) funkcji mierzalnych jest funkcją mierzalną.
- γ) jeżeli f jest mierzalna, to $|f|$ jest mierzalna,
- δ) granica ciągu zbieżnego funkcji mierzalnych jest funkcją mierzalną,
- ε) funkcja ciągła jest funkcją mierzalną.

43.2. Całka Lebesgue'a. Niech $f: A \rightarrow \langle c, d \rangle \subset \mathbf{R}$ będzie funkcją mierzalną i ograniczoną na zbiorze mierzalnym A o mierze skończonej. Weźmy ciąg normalny (Δ_n) podziałów (por. § 33) przedziału $\langle c, d \rangle$ i niech $\Delta_n: c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$ oraz $A_i = \{x : y_{i-1} \leq f(x) < y_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Utwórzmy sumy

$$\underline{s}_n = \sum_{i=1}^n y_{i-1} \mu(A_i), \quad \bar{s}_n = \sum_{i=1}^n y_i \mu(A_i),$$

$$s_n = \sum_{i=1}^n y'_i \mu(A_i), \quad \text{gdzie} \quad y'_i \in \langle y_{i-1}, y_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Łatwo wykazać, że $\underline{s}_n \leq s_n \leq \bar{s}_n$ dla $n \in \mathbf{N}$.

Dla funkcji mierzalnej i ograniczonej na zbiorze o mierze skończonej zawsze istnieje kres górny sum dolnych \underline{s}_n oraz kres dolny sum górnych \bar{s}_n (dla dowolnego ciągu normalnego (Δ_n)) i kresy te są równe. Wspólną wartość tych kresów nazywamy *całką Lebesgue'a funkcji f na A* i oznaczamy $\int_A f d\mu$. Jeżeli $A = \langle a, b \rangle$, to piszemy

$$\int_A f d\mu = \int_a^b f(x) dx.$$

Można udowodnić, że dla każdego ciągu normalnego podziałów (Δ_n) przedziału $\langle c, d \rangle$ i dla każdego wyboru punktów y'_i

$$\int_A f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{s}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{s}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Z twierdzenia tego wynika, że przy obliczaniu całki Lebesgue'a funkcji mierzalnej i ograniczonej na zbiorze miary skończonej wystarczy wziąć jakikolwiek ciąg normalny (Δ_n) podziałów przedziału $\langle c, d \rangle$ i jakiegokolwiek punkty pośrednie y'_i występujące w sumie s_n .

Zauważmy, że w przypadku całki Riemanna bierzemy ciąg normalny podziałów zbioru, na którym funkcja f jest określona, natomiast w przypadku całki Lebesgue'a bierzemy ciąg normalny podziałów zbioru zawierającego zbiór wartości funkcji.

Całka Lebesgue'a jest uogólnieniem całki Riemanna. Każda funkcja całkowna w sensie Riemanna jest całkowna w sensie Lebesgue'a i obie całki są równe. Istnieją jednak funkcje całkowne w sensie Lebesgue'a, a nie całkowne w sensie Riemanna,

np. funkcja określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \text{ wymiernych} \\ 1 & \text{dla } x \text{ niewymiernych} \end{cases} \quad (\text{por. zadanie 43.34a}).$$

Określa się również całki Lebesgue'a funkcji nieograniczonych oraz funkcji określonych na zbiorach o mierze nieskończonej. Załóżmy najpierw, że funkcja $f: A \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ jest mierzalna i przyjmuje tylko wartości nieujemne na A . Jeżeli f jest nieograniczona na A (gdzie $\mu(A) < +\infty$), to niech f_n oznacza funkcję określoną wzorem

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla tych } x, \text{ dla których } f(x) \leq n, \\ n & \text{dla tych } x, \text{ dla których } f(x) > n. \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że ciąg $(\int_A f_n d\mu)$ jest niemalejący, ma więc granicę skończoną, lub jest rozbieżny do $+\infty$.

Jeżeli granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu$ jest skończona, to nazywamy ją *całką niewłaściwą Lebesgue'a* i piszemy $\int_A f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu$ oraz funkcję f nazywamy *całkowalną* na A . Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu = +\infty$, to mówimy, że *całka istnieje* na A i równa się $+\infty$.

Jeżeli f jest mierzalna i nieujemna na zbiorze o mierze nieskończonej ($\mu(A) = +\infty$), to niech K_n oznacza kulę

$$K_n = \{x \in \mathbf{R}^n : d(0, x) \leq n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Zbiór $A \cap K_n$ ma miarę skończoną, zatem istnieje całka $\int_{A \cap K_n} f d\mu$. Jeżeli jedna z całek $\int_{A \cap K_n} f d\mu$ jest równa $+\infty$, to przyjmujemy $\int_A f d\mu = +\infty$, w przeciwnym przypadku określamy

$$\int_A f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A \cap K_n} f d\mu$$

i mówimy (podobnie jak w przypadku poprzednim), że f jest *całkowalna na A* , jeżeli granica po prawej stronie wzoru jest skończona, względnie że *całka istnieje*, jeżeli granica równa się $+\infty$. Jeżeli $A = \langle a, +\infty \rangle$ to piszemy

$$\int_A f d\mu = \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^n f(x) dx.$$

W przypadku gdy funkcja mierzalna f określona na A przyjmuje wartości dowolne (może być nieograniczona, lub $\mu(A) = +\infty$), to określamy

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu,$$

gdzie $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$, $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$ (por. zadanie 43.29) i co najmniej jedna z całek po prawej stronie wzoru jest skończona.

Przykłady

43.1. Dane jest σ -ciało G podzbiorów zbioru X . Wykazać, że jeżeli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $A_n \in G$, to $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in G$.

Dowód. Korzystamy z prawa De Morgana (por. zadanie 1.10e)

$$(a) \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = X - \bigcup_{n=1}^{\infty} (X - A_n).$$

Z warunku $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in G$ oraz z definicji σ -ciała (warunki 1°, 2°, 3°), otrzymujemy

$$\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X - A_n) \in G \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} (X - A_n) \in G \Rightarrow ((X - \bigcup_{n=1}^{\infty} (X - A_n)) \in G) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in G. \quad \square \right.$$

43.2. Niech μ będzie miarą na \mathcal{M} . Wykazać, że

a) jeżeli $A \subset B$, $A, B \in \mathcal{M}$, to

$$(a) \quad \mu(A) \leq \mu(B);$$

b) jeżeli $A_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$, to

$$(b) \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Dowód. a) Ponieważ $B - A \in \mathcal{M}$ oraz $B = A \cup (B - A)$, $A \cap (B - A) = \emptyset$, więc $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$ (por. zadanie 43.13a), stąd $\mu(A) \leq \mu(B)$. \square

b) Podstawiamy $B_1 = A_1$, $B_n = A_n - (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1})$ dla $n > 1$. Zbiory B_1, B_2, \dots są mierzalne, rozłączne oraz $B_n \subset A_n$, $n \in \mathbb{N}$ i $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ (por. przykład 1.2). Zatem z przeliczalnej addytywności miary μ i przykładu a) mamy

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

gdyż $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$. \square

43.3. Niech f i g będą funkcjami mierzalnymi na $A \in \mathcal{M}$. Wykazać, że zbiory

$$X_1 = \{x : f(x) < g(x), x \in A\},$$

$$X_2 = \{x : f(x) \leq g(x), x \in A\}, \quad X_3 = \{x : f(x) = g(x), x \in A\}$$

są mierzalne.

Dowód. Zbiór X_1 można przedstawić w postaci

$$X_1 = \bigcup_{w \in \mathbb{W}} (\{x : f(x) < w\} \cap \{x : g(x) > w\}) = Y_1,$$

gdzie \mathbb{W} oznacza zbiór liczb wymiernych. Istotnie, jeżeli $x \in X_1$, to $f(x) < g(x)$ i między

liczbami $f(x)$ i $g(x)$ istnieje taka liczba $w_0 \in W$, że

$$(f(x) < w_0 < g(x)) \Leftrightarrow (f(x) < w_0 \wedge g(x) > w_0),$$

tzn. $x \in Y_1$. Jeżeli $x \in Y_1$, to istnieje takie $w_1 \in W$, że

$$f(x) < w_1 < g(x) \Rightarrow f(x) < g(x),$$

a więc $x \in X_1$. Zatem $X_1 = Y_1$. Ponieważ W jest zbiorem przeliczalnym (por. § 4) oraz zbiory $\{x: f(x) < w\}$, $\{x: g(x) > w\}$ są mierzalne (por. def. funkcji mierzalnej i zadanie 43.21), więc X_1 jest sumą przeliczalnej liczby zbiorów mierzalnych, tzn. jest mierzalny.

Z kolei

$$X_2 = \{x: f(x) \leq g(x), x \in A\} = A - \{x: g(x) < f(x), x \in A\} \in \mathcal{M}$$

ponieważ $A \in \mathcal{M}$ i $\{x: g(x) < f(x), x \in A\} \in \mathcal{M}$ (wynika z udowodnionego przypadku) oraz

$$X_3 = \{x: f(x) \leq g(x), x \in A\} \cap \{x: g(x) \leq f(x), x \in A\} \Rightarrow X_3 \in \mathcal{M}$$

(na mocy udowodnionych przypadków).

43.4. Niech f będzie funkcją mierzalną na A oraz $Y \subset \mathbb{R}$ zbiorem otwartym. Wykazać, że zbiór $X = \{x: f(x) \in Y\}$ jest mierzalny.

Dowód. Ponieważ $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, gdzie I_n jest przedziałem (a_n, b_n) oraz $I_n \cap I_m = \emptyset$ dla $n \neq m$ (korzystamy z twierdzenia: każdy zbiór otwarty na \mathbb{R} można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy skończonej lub przeliczalnej liczby rozłącznych przedziałów otwartych), więc możemy napisać $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x: f(x) \in I_n\}$. Ale

$$\{x: f(x) \in I_n\} = (\{x: f(x) > a_n\} \cap \{x: f(x) < b_n\}) \in \mathcal{M}$$

(ponieważ f jest mierzalna), zatem Y jest sumą przeliczalnej liczby zbiorów mierzalnych, a więc jest mierzalny. \square

43.5. Niech $g: \mathbb{R} \supset X \rightarrow \mathbb{R}$, $f: g(X) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^0(g(X))$, g mierzalna na X . Wykazać, że funkcja złożona $h = f \circ g: X \rightarrow \mathbb{R}$ jest mierzalna.

Dowód. Niech $Z = \{y: f(y) < a\}$. Z ciągłości funkcji f wynika, że dla każdego $y_0 \in Z$, tzn. $f(y_0) < a$, istnieje takie otoczenie $U(y_0; \eta)$, że $\bigwedge_{x \in U(y_0; \eta)} f(y) < a \Rightarrow U(y_0; \eta) \subset Z$, tzn. Z jest zbiorem otwartym. Ale

$$X_1 = \{x: f(g(x)) < a\} = \{x: g(x) \in Z\} \in \mathcal{M}$$

na mocy zadania 43.4.

43.6. Korzystając z definicji obliczyć całki Lebesgue'a:

$$a) \int_{(0,2)} f(x) dx, \text{ jeżeli } f(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \text{ niewymiernych,} \\ 0 & \text{dla } x \text{ wymiernych;} \end{cases}$$

b) $\int_A f d\mu$, jeżeli $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}$ oraz

$$f(x, y) = \begin{cases} 4 & \text{dla } x = y, \\ 3 & \text{dla } x \neq y; \end{cases}$$

c) $\int_{\langle 0, 4 \rangle} \sqrt{x} dx$; d) $\int_{\langle 2, 4 \rangle} f(x) dx$, jeżeli $f(x) = \frac{1}{2}(2x - [x])$;

e) $\int_{(0, 1)} f(x) dx$, jeżeli $f(x) = \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \right]$; f) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Rozwiązanie. W każdym z przykładów a) - f) funkcje podcałkowe są określone na zbiorach mierzalnych i są mierzalne, przy czym w a) - d) funkcje są ograniczone na zbiorach o mierze skończonej, w e) mamy funkcję nieujemną i nieograniczoną na zbiorze o mierze skończonej oraz w f) mamy funkcję ograniczoną nieujemną na zbiorze o mierze nieskończonej. Wynika stąd, że funkcje podcałkowe w a) - d) są całkowalne oraz w e) i f) całki na pewno istnieją. Możemy zatem przy obliczaniu całek wybrać specjalne ciągi normalne i wziąć specjalne punkty y'_i w sumie s_n (por. punkt 43.2).

a) Weźmy np. przedział $\langle 0, 4 \rangle \supset \{0, 3\}$, dowolny ciąg normalny podziałów (A_n) przedziału $\langle 0, 4 \rangle$ i założmy, że dla każdego podziału A_n wśród liczb $y'_i \in \langle y_{i-1}, y_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$ znajdują się zawsze liczby 0 i 3. Wówczas

$$s_n = \sum_{i=1}^n y'_i \mu(A_i) = 0 \cdot \mu(\{x : f(x) = 0\}) + 3\mu(\{x : f(x) = 3\}) = 0 \cdot 0 + 3 \cdot (2 - 0) = 6,$$

tzn. ciąg (s_n) jest stały (miara $\mu(\{x : f(x) = 0\}) = 0$ jako miara zbioru przeliczalnego oraz $\mu(\{x : f(x) = 3\}) = \mu(\langle 0, 2 \rangle) - 0 = 2$), stąd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 6 = \int_{\langle 0, 2 \rangle} f(x) dx.$$

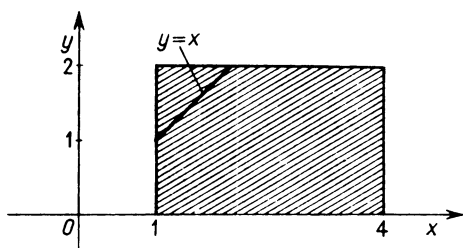
b) Postępując podobnie jak w przykładzie a) (postępujemy tak zawsze, jeżeli zbiór wartości funkcji podcałkowej jest zbiorem skończonym), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_A f d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n y'_i \mu(A_i) = \\ &= 4\mu(\{(x, y) : x = y \wedge (x, y) \in A\}) + 3 \cdot \mu(\{(x, y) : x \neq y \wedge (x, y) \in A\}) = \\ &= 4 \cdot 0 + 3 \cdot (3 \cdot 2) = 18, \end{aligned}$$

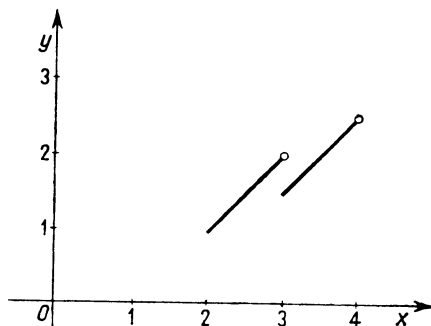
ponieważ miara odcinka jest zerem (por. punkt 43.2) i miara prostokąta równa się polu prostokąta (por. rys. 43.1).

c) Zbiorem wartości funkcji podcałkowej jest przedział $\langle 0, 2 \rangle$. Dla każdego $n \in \mathbf{N}$ dzielimy przedział $\langle 0, 2 \rangle$ na n równych części. Tak otrzymany ciąg podziałów (A_n) przedziału $\langle 0, 2 \rangle$ jest ciągiem normalnym, ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$. Weźmy sumę dolną

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n (k-1) \frac{2}{n} \mu \left(\left\{ x : (k-1) \frac{2}{n} \leq f(x) < k \frac{2}{n} \right\} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n (k-1) \frac{2}{n} \left(\left(\frac{2k}{n} \right)^2 - \left(\frac{2k-2}{n} \right)^2 \right) = \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^n (k-1)(2k-1) = \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^n (2k^2 - 3k + 1). \end{aligned}$$



Rys. 43.1



Rys. 43.2

Ale $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$, zatem

$$s_n = \frac{8}{n^3} \left(\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1) - \frac{3}{2}n(n+1) + n \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{16}{3}.$$

A więc $\int_{\langle 0, 4 \rangle} \sqrt{x} dx = \frac{16}{3}$.

d) Znajdujemy zbiór wartości funkcji (por. rys. 43.2):

jeżeli $2 \leq x < 3$, to $y = f(x) = \frac{1}{2}(2x-2) = x-1 \Rightarrow y \in \langle 1, 2 \rangle$,

jeżeli $3 \leq x < 4$, to $y = f(x) = \frac{1}{2}(2x-3) \Rightarrow y \in \langle \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \rangle$.

Zatem zbiór wartości funkcji $Y = \langle 1, \frac{5}{2} \rangle$. Dla każdego n przedział $\langle 1, \frac{5}{2} \rangle$ dzielimy na $3n$ równych części i znajdujemy dla otrzymanego ciągu normalnego podziałów (Δ_n) przedziału $\langle 1, \frac{5}{2} \rangle$ ciąg sum górnych. W tym celu zauważmy, że dla $f(x) \in \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$, tzn. dla $1 \leq k < n$ oraz dla $f(x) \in \langle 2, \frac{5}{2} \rangle$, tzn. dla $2n+1 \leq k < 3n$ miara

$$\mu \left(\left\{ x : 1 + \frac{k-1}{2n} \leq f(x) < 1 + \frac{k}{2n} \right\} \right) = \frac{1}{2n},$$

natomiast dla $f(x) \in \langle \frac{3}{2}, 2 \rangle$, tzn. dla $n+1 \leq k < 2n$ miara

$$\mu \left(\left\{ x : 1 + \frac{k-1}{2n} \leq f(x) < 1 + \frac{k}{2n} \right\} \right) = 2 \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}.$$

Zatem

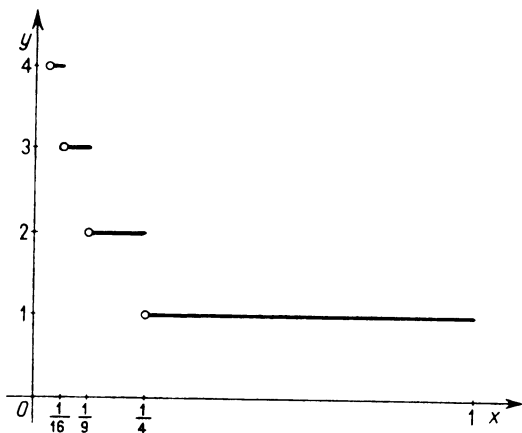
$$\bar{s}_n = \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{2n} \right) \frac{1}{2n} + \sum_{k=n+1}^{2n} \left(1 + \frac{k}{2n} \right) \frac{1}{n} + \sum_{k=2n+1}^{3n} \left(1 + \frac{k}{2n} \right) \frac{1}{2n} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n}{2n} + \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^n k + \frac{n}{n} + \frac{1}{2n^2} \sum_{k=n+1}^{2n} k + \frac{n}{2n} + \frac{1}{4n^2} \sum_{k=2n+1}^{3n} k = \\
 &= 2 + \frac{1}{8n^2} n(n+1) + \frac{1}{2n^2} \frac{(3n+1)n}{2} + \frac{1}{4n^2} \frac{(5n+1)n}{2} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2n},
 \end{aligned}$$

stąd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{s}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{2n} \right) = \frac{7}{2}.$$

A więc $\int_{\langle 2, 4 \rangle} \frac{2x - [x]}{2} dx = \frac{7}{2}$.



Rys. 43.3

e) Funkcja podcałkowa jest nieograniczona na przedziale $(0, 1)$ (por. rys. 43.3) znajdujemy więc funkcje f_n , a następnie całki $\int_{(0,1)} f_n dx$. Otóż

$$\left[\frac{1}{\sqrt{x}} \right] \leq n \quad \text{dla} \quad \frac{1}{(n+1)^2} < x \leq 1, \quad n=1, 2, \dots,$$

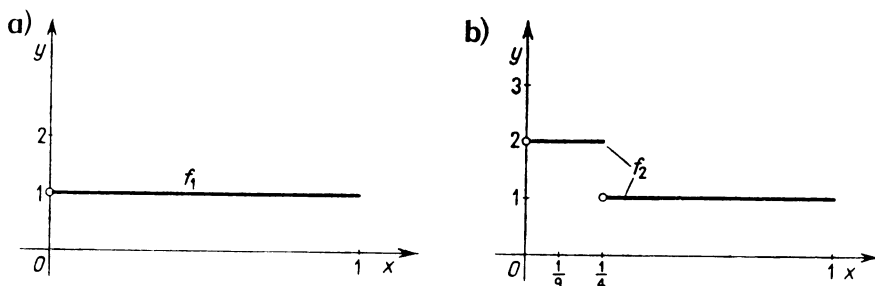
skąd

$$f_n(x) = \begin{cases} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \right] & \text{dla} \quad \frac{1}{(n+1)^2} < x \leq 1 \\ n & \text{dla} \quad 0 < x \leq \frac{1}{(n+1)^2}, \quad n=1, 2, \dots \end{cases}$$

(por. rys. 43.4).

Funkcja f_n przyjmuje na przedziale $(0, 1)$ tylko skończoną liczbę wartości: $1, 2, \dots, n-1, n$, zatem na podstawie definicji całki Lebesgue'a (por. też punkt a)) mamy

$$\begin{aligned} \int_{(0,1)} f_n(x) dx &= \sum_{i=1}^n i \mu(\{x : f_n(x) = i\}) = \sum_{i=1}^{n-1} i \left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+1)^2} \right) + n \frac{1}{n^2} = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{i} - \frac{i+1-1}{(i+1)^2} \right) + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(i+1)^2} + \frac{1}{n} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(i+1)^2} + \frac{1}{n} = \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(i+1)^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}. \end{aligned}$$



Rys. 43.4

Stąd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0,1)} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} = \frac{1}{6} \pi^2 \Rightarrow \int_{(0,1)} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \right] dx = \frac{1}{6} \pi^2$$

na podstawie definicji sumy szeregu (por. § 42) oraz przykładu 42.6a.

f) Przedział $\langle 1, +\infty \rangle$ ma miarę nieskończoną, bierzemy więc ciąg przedziałów $K_n = \{x : -n \leq x \leq n\}$ (kule $K_n \subset \mathbf{R}$ są przedziałami) oraz ciąg przedziałów $\langle 1, n \rangle = \langle 1, +\infty \rangle \cap K_n$, $n = 1, 2, \dots$. Należy znaleźć $\int_{\langle 1, n \rangle} f(x) dx$, a następnie $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\langle 1, n \rangle} f(x) dx$. W tym celu

zauważmy, że jeżeli $x \in \langle 1, n \rangle$, to $y = f(x) \in \left\langle \frac{1}{n^2}, 1 \right\rangle$. Dla każdego $n \in \mathbf{N}$ przedział $(0, 1) \supset \left\langle \frac{1}{n^2}, 1 \right\rangle$ dzielimy na n^2 równych części i w każdym z n^2 podprzedziałów (z wyjątkiem pierwszego) bierzemy jako punkty y'_i (punkty pośrednie) punkty $y'_i = \frac{\sqrt{k(k-1)}}{n}$

i tworzymy sumę

$$s_n = \sum_{k=2}^{n^2} \frac{\sqrt{k(k-1)}}{n} \mu \left(\left\{ x : \frac{k-1}{n^2} \leq f(x) < \frac{k}{n^2} \right\} \right) = \sum_{k=2}^{n^2} \frac{\sqrt{k(k-1)}}{n} \left(\frac{n}{\sqrt{k-1}} - \frac{n}{\sqrt{k}} \right) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n^2} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = \frac{1}{n} (\sqrt{n^2} - \sqrt{1}) = \frac{n-1}{n}.$$

Stąd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1 = \int_{(1, +\infty)} \frac{1}{x^2} dx.$$

Zadania

43.7. Dany jest niepusty zbiór X . Znaleźć:

- najmniejsze σ -ciało podzbiorów zbioru X zawierające zbiór X ;
- najmniejsze σ -ciało podzbiorów zbioru X zawierające podzbiór właściwy $A \subset X$.

43.8. Wykazać, że dla każdej rodziny podzbiorów zbioru $X \neq \emptyset$ istnieje najmniejsze σ -ciało podzbiorów zbioru X zawierające daną rodzinę.

43.9. Wykazać, że niepusta rodzina G podzbiorów zbioru X spełniająca warunki:

- $\alpha) \bigwedge_{A \in G} (X - A) \in G, \quad \beta) \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} A_n \in G \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in G$ jest σ -ciałem.

43.10. Wykazać, że część wspólna σ -ciał G_1 i G_2 podzbiorów zbioru X jest σ -ciałem.

43.11. Wykazać, że σ -ciało G podzbiorów zbioru X ma własności:

- 1) $\emptyset \in G, \quad 2) A, B \in G \rightarrow A - B \in G, \quad 3) (A_i \in G, i=1, 2, \dots, n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \in G \wedge \bigcap_{i=1}^n A_i \in G \right).$$

43.12. Niech X będzie zbiorem nieprzeliczalnym (por. § 4). Wykazać, że rodzina G wszystkich przeliczalnych zbiorów $A \subset X$ oraz ich dopełnień $X - A$ jest σ -ciałem.

43.13. Wykazać, że σ -miara μ (por. def. 1) ma własności:

- a) $(A_i \in G, i=1, 2, \dots, n \wedge A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j) \Rightarrow \mu \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$

(mówimy, że miara jest skończenie addytywną funkcją zbioru),

- b) $(A, B \in G \wedge A \subset B \wedge \mu(A) < +\infty) \Rightarrow (\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A));$

- c) $(A_i \in G, i=1, 2, \dots, n) \Rightarrow \mu \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i);$

- d) $A, B \in G \Rightarrow \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cup B);$

e) jeżeli $A_i \in G$, $i=1, 2, \dots, n$, to

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{(k_1)} \mu(A_{k_1}) - \sum_{(k_1, k_2)} \mu(A_{k_1} \cup A_{k_2}) + \sum_{(k_1, k_2, k_3)} \mu(A_{k_1} \cup A_{k_2} \cup A_{k_3}) - \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} \mu(A_{k_1} \cup A_{k_2} \cup \dots \cup A_{k_n})$$

oraz

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{(k_1)} \mu(A_{k_1}) - \sum_{(k_1, k_2)} \mu(A_{k_1} \cap A_{k_2}) + \sum_{(k_1, k_2, k_3)} \mu(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3}) - \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} \mu(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \dots \cap A_{k_n}),$$

gdzie $\sum_{(k_1, k_2, \dots, k_j)}$, $j=1, 2, \dots, n$ oznacza sumę rozciągniętą na wszystkie kombinacje bez powtórzeń j elementów z n elementów $1, 2, \dots, n$.

43.14. Wykazać, że suma przeliczalnej lub skończonej liczby zbiorów miary zero jest zbiorem miary zero.

43.15. Wykazać, że każdy podzbiór mierzalny zbioru miary zero jest zbiorem miary zero.

43.16. Niech G będzie σ -ciałem podzbiorów zbioru X . Wykazać, że

- a) $(A \in G \wedge \mu(B)=0) \Rightarrow (\mu(A \cup B)=\mu(A))$;
- b) $(A \in G \wedge \mu(B)=0) \Rightarrow (\mu(A - B)=\mu(A))$.

43.17. Niech \mathcal{B} rodzina podzbiorów borelowskich w \mathbb{R}^n oraz $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Czy funkcja $f: \mathcal{B} \rightarrow \{0, 1\}$ określona wzorem

$$f(A) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } x_0 \in A \in \mathcal{B}, \\ 0 & \text{jeżeli } x_0 \notin A \in \mathcal{B}, \end{cases}$$

jest miarą na \mathcal{B} ? Jeżeli tak, to czy jest to miara unormowana?

43.18. Wykazać, że zbiór Cantora ma miarę zero.

Uwaga. Zbiorem Cantora nazywamy zbiór $C_1 = \langle 0, 1 \rangle - A$, gdzie A otrzymujemy następująco: przedział $(0, 1)$ dzielimy na trzy równe części i bierzemy przedział $U_1^0 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (por. rys. 43.5). Pozostałe części przedziału $(0, 1)$, tzn. przedziały $(0, \frac{1}{3})$ i $(\frac{2}{3}, 1)$ dzielimy (każdy z nich) na trzy równe części i wybieramy środki, tzn. przedziały $U_2^1 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $U_2^2 = (\frac{2}{9}, \frac{8}{9})$. Pozostałe cztery przedziały $(0, \frac{1}{9})$, $(\frac{2}{9}, \frac{1}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{7}{9})$, $(\frac{8}{9}, 1)$ dzielimy ponownie na trzy równe części i wybieramy z nich środki tzn. przedziały $U_3^1 = (\frac{1}{27}, \frac{2}{27})$, $U_3^2 = (\frac{2}{27}, \frac{8}{27})$, $U_3^3 = (\frac{19}{27}, \frac{20}{27})$, $U_3^4 = (\frac{25}{27}, \frac{26}{27})$ itd. Zbiór A jest sumą wszystkich zbiorów U_k^i , tzn. $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=2}^{2^{k-1}} U_k^i$.



Rys. 43.5

43.19. Udowodnić twierdzenia T_1 i T_2 .

43.20. Wykazać, że funkcja f jest mierzalna (por. def. 2) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest którykolwiek z warunków:

1° zbiór $\{x : f(x) < w\}$, $w \in \mathbb{W}$ jest mierzalny,

2° zbiór $\{x : f(x) \leq w\}$, $w \in \mathbb{W}$ jest mierzalny.

43.21. Wykazać, że funkcja f jest mierzalna (por. def. 2) wtedy i tylko wtedy, gdy mierzalny jest którykolwiek ze zbiorów :

$$\{x : f(x) \leq a\}, \quad \{x : f(x) > a\}, \quad \{x : f(x) \geq a\}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Uwaga. W zadaniu 43.22 i w dalszych zakładamy, że rozpatrywane funkcje są określone na zbiorach mierzalnych.

43.22. Wykazać, że funkcja stała jest mierzalna.

43.23. Wykazać, że jeżeli f jest mierzalna, to dla każdego $a \in \bar{\mathbb{R}}$ zbiory $\{x : f(x) = a\}$, $\{x : f(x) \neq a\}$ są mierzalne.

43.24. Wykazać, że jeżeli f jest funkcją mierzalną na A i $B \subset A$ jest zbiorem mierzalnym, to funkcja $g = f|_B$ (obcięcie funkcji f) jest mierzalna.

43.25. Wykazać, że jeżeli f jest mierzalna na A oraz B jest podzbiorem mierzalnym zbioru A , to funkcja g określona wzorem

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in B, \\ 0 & \text{dla } x \in A - B \end{cases}$$

jest mierzalna.

43.26. Wykazać, że jeżeli f jest funkcją określoną na $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ i funkcje $g_n = f|_{A_n}$, $n \in \mathbb{N}$ są mierzalne, to f jest mierzalna na A .

43.27. Wykazać, że jeżeli funkcje f i g są mierzalne, to funkcje $c \cdot f$, $c \in \mathbb{R}$, $f + g$, $f - g$, $|f|$, f^2 , $f \cdot g$, $\frac{1}{g}$ dla $g \neq 0$, $\frac{f}{g}$ dla $g \neq 0$ są mierzalne.

43.28. Wykazać, że kombinacja liniowa skończonej liczby funkcji mierzalnych jest funkcją mierzalną.

43.29. Wykazać, że funkcje $f^+ = \max(f, 0) = \frac{1}{2}(|f| + f)$ (część nieujemna funkcji f), $f^- = \max(-f, 0) = \frac{1}{2}(|f| - f)$ (część niedodatnia funkcji f) są mierzalne.

43.30. Niech $A_i \in \mathcal{M}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$. Wykazać, że funkcja f określona na A wzorem $f(x) = c_i$ dla $x \in A_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, $c_i \neq c_j$ dla $i \neq j$ jest mierzalna.

43.31. Niech B będzie podzbiorem zbioru mierzalnego A . Funkcję f określoną wzorem

$$f_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in B, \\ 0 & \text{dla } x \in A - B \end{cases}$$

nazywamy *funkcją charakterystyczną podzbioru B zbioru A*. Wykazać, że jeżeli B jest zbiorem mierzalnym, to funkcja f_B jest mierzalna.

43.32. Funkcję $f: A \rightarrow Y$ nazywamy *funkcją prostą*, jeżeli Y jest zbiorem skończonym. Wykazać, że każdą funkcję prostą można przedstawić jako kombinację liniową funkcji charakterystycznych skończonej liczby zbiorów mierzalnych.

43.33. Niech Φ oznacza zbiór wszystkich funkcji prostych określonych na zbiorze mierzalnym A. Wykazać, że struktura $(\Phi, \square; \mathbf{R}, +, \cdot, \odot)$, gdzie \square oznacza zwykłe dodawanie funkcji oraz \odot oznacza zwykłe mnożenie funkcji przez liczby rzeczywiste, jest przestrzenią wektorową.

43.34. Korzystając z definicji, obliczyć całki Lebesgue'a:

a) $\int_{\langle 0, 1 \rangle} f(x) dx$, jeżeli $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \text{ wymiernych,} \\ 1 & \text{dla } x \text{ niewymiernych;} \end{cases}$

b) $\int_A f d\mu$, jeżeli $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, $A_i \in \mathcal{M}$, $i = 1, 2, \dots, n$ oraz $f(x) = \alpha_i$ dla $x \in A_i$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$ dla $i = 1, 2, \dots, n$;

c) $\int_{\langle 1, 7 \rangle} \left[\frac{x+4}{x} \right] dx$;

d) $\int_{\langle 0, 6 \rangle} f(x) dx$, jeżeli $f(x) = 3\eta(x) + 2\eta(x-1) + 4\eta(x-2)$, gdzie

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = 0, \\ 1 & \text{dla } x > 0; \end{cases}$$

e) $\int_0^2 (x - [x^2]) dx$; f) $\int_0^8 \sqrt[3]{x} dx$; g) $\int_{\langle -1, 4 \rangle} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1) dx$;

h) $\int_{\langle 0, 1 \rangle} f(x) dx$, jeżeli $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \text{ wymiernych,} \\ -x & \text{dla } x \text{ niewymiernych;} \end{cases}$

i) $\int_{\langle 0, 1 \rangle} f(x) dx$, jeżeli $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in C_1, \text{ gdzie } C_1 \text{ jest zbiorem Cantora} \\ & \text{(por. zadanie 43.18),} \\ x^3 & \text{dla } x \in \langle 0, 1 \rangle - C_1; \end{cases}$

j) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$; k) $\int_{\langle \frac{1}{2}, 2 \rangle} \left[\frac{1}{\sqrt{2x-1}} \right] dx$;

l) $\int_{\langle 0, 1 \rangle} f(x) dx$, jeżeli $f(x) = \begin{cases} n & \text{dla } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}, \\ 4 & \text{dla } x \neq \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}; \end{cases}$

$$l) \int_{\langle 0, 1 \rangle} f(x) dx, \text{ jeżeli}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in C_1 \text{ (} C_1 \text{ – zbiór Cantora),} \\ n & \text{dla } x \text{ należących do każdego z przedziałów o długości } 3^{-n} \text{ zbioru } A \\ & \text{zdefiniowanego w zadaniu 43.18;} \end{cases}$$

$$m) \int_{\langle 1, +\infty \rangle} \left[\frac{4}{x^2} \right] dx;$$

$$n) \int_A f d\mu, \text{ jeżeli } A = \mathbf{R}^2 \text{ oraz funkcja } f \text{ określona jest wzorem}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 4 & \text{dla } x^2 + y^2 = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbf{N}, \\ 6 & \text{dla } x^2 + y^2 \neq \frac{m}{n}, m, n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Odpowiedzi

43.7. a) $\{X, \emptyset\}$; b) $\{A, X-A, X, \emptyset\}$. 43.17. Tak, miara unormowana.

43.18. Wsk. Obliczyć miarę zbioru A . 43.19. Wsk. Skorzystać z zadania 1.10h.

43.34. a) 1; b) $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$; c) $\frac{31}{3}$; d) 26; e) $\sqrt{3} + \sqrt{2} - 3$;

f) 12; g) $\frac{25}{4}$; h) $-\frac{1}{2}$; i) $\frac{1}{4}$; j) $\frac{3}{2}$; k) $\frac{1}{12}\pi^2$;

l) 4; i) $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n = 3$. Wsk. Znaleźć sumę szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$;

m) $\frac{2}{3}\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$; n) 54π .

SPIS RZECZY

Przedmowa do piątego wydania	5
--	---

CZĘŚĆ A

Rozdział I. Elementy teorii zbiorów i logiki matematycznej. Liczby

§ 1. Uzupełnienia teorii zbiorów i logiki matematycznej	7
Przykłady	8
Zadania	12
Odpowiedzi	17
§ 2. Liczby naturalne, całkowite i wymierne. Kombinatoryka	21
Przykłady	23
Zadania	28
Odpowiedzi	31
§ 3. Liczby rzeczywiste	32
Przykłady	34
Zadania	39
Odpowiedzi	43
§ 4. Odwzorowania	45
Przykłady	46
Zadania	50
Odpowiedzi	54

Rozdział II. Elementy algebry i geometrii

§ 5. Grupy. Ciała. Pierścienie	58
Przykłady	59
Zadania	66
Odpowiedzi	70
§ 6. Macierze. Wyznaczniki. Równania liniowe	70
Przykłady	74
Zadania	91
Odpowiedzi	103
§ 7. Przestrzenie metryczne. Przestrzenie wektorowe	107
Przykłady	109
Zadania	113
Odpowiedzi	119
§ 8. Wektory w \mathbb{R}^n	121
Przykłady	126
Zadania	132
Odpowiedzi	138

Spis rzeczy

§ 9. Układ współrzędnych biegunowych. Zmiana układu współrzędnych. Przekształcenia geometryczne	140
Przykłady	142
Zadania	148
Odpowiedzi	154
§ 10. Odwzorowania liniowe. Formy kwadratowe	157
Przykłady	158
Zadania	162
Odpowiedzi	165
§ 11. Hiperpłaszczyzny w \mathbb{R}^n . Prosta na \mathbb{R}^2	167
Przykłady	170
Zadania	173
Odpowiedzi	176
§ 12. Płaszczyzna i prosta w \mathbb{R}^3	179
Przykłady	180
Zadania	190
Odpowiedzi	197
§ 13. Hiperpłaszczyzny w \mathbb{R}^n , $n > 3$	200
Przykłady	200
Zadania	205
Odpowiedzi	211
§ 14. Krzywe stożkowe	212
Przykłady	215
Zadania	222
Odpowiedzi	229
§ 15. Krzywe stopnia drugiego	232
Przykłady	235
Zadania	245
Odpowiedzi	248
§ 16. Powierzchnie stopnia drugiego. Powierzchnie obrotowe	250
Przykłady	254
Zadania	265
Odpowiedzi	271

CZĘŚĆ B

Rozdział III. Rachunek różniczkowy

§ 17. Wstępne wiadomości o funkcjach	275
Przykłady	277
Zadania	286
Odpowiedzi	294
§ 18. Superpozycja odwzorowań. Funkcje odwrotne	307
Przykłady	308
Zadania	311
Odpowiedzi	315
§ 19. Granica	320
Przykłady	323
Zadania	331
Odpowiedzi	338
§ 20. Ciągłość funkcji	339
Przykłady	340

Spis rzeczy

Zadania	347
Odpowiedzi	352
§ 21. Pochodna i różniczka funkcji $f: \mathbb{R} \supset X \rightarrow \mathbb{R}$	354
Przykłady	357
Zadania	364
Odpowiedzi	370
§ 22. Zastosowanie pochodnej i różniczki	375
Przykłady	377
Zadania	382
Odpowiedzi	386
§ 23. Twierdzenia: Rolle'a, Lagrange'a, Taylora	391
Przykłady	392
Zadania	396
Odpowiedzi	398
§ 24. Ekstrema funkcji $f: \mathbb{R} \supset X \rightarrow \mathbb{R}$	399
Przykłady	400
Zadania	405
Odpowiedzi	409
§ 25. Funkcje wypukłe, punkty przegięcia, wyrażenia nieoznaczone, asymptoty	410
Przykłady	412
Zadania	423
Odpowiedzi	427
§ 26. Przybliżone rozwiązywanie równań	428
Przykłady	430
Zadania	434
Odpowiedzi	434
§ 27. Badanie zmienności funkcji, wykresy funkcji	435
Przykłady	435
Zadania	449
Odpowiedzi	451
§ 28. Badanie zmienności funkcji określonych parametrycznie	454
Przykłady	456
Zadania	466
Odpowiedzi	467
§ 29. Pochodne cząstkowe. Różniczkowalność	468
Przykłady	471
Zadania	475
Odpowiedzi	479
§ 30. Pochodne superpozycji odwzorowań. Funkcje uwikłane	482
Przykłady	484
Zadania	490
Odpowiedzi	495
§ 31. Wzór Taylora. Ekstrema funkcji n zmiennych	497
Przykłady	499
Zadania	510
Odpowiedzi	514
 Rozdział IV. Rachunek całkowy	
§ 32. Funkcja pierwotna, całka nieoznaczona	518
Przykłady	523
Zadania	540
Odpowiedzi	545

§ 33. Całki oznaczone	552
Przykłady	556
Zadania	571
Odpowiedzi	575
§ 34. Całki pojedyncze niewłaściwe. Zastosowania geometryczne całek pojedynczych	577
Przykłady	580
Zadania	592
Odpowiedzi	596
§ 35. Zastosowania geometryczne całek wielokrotnych	598
Przykłady	599
Zadania	606
Odpowiedzi	608
§ 36. Zastosowania fizyczne całek	609
Przykłady	610
Zadania	616
Odpowiedzi	621

Rozdział V. Elementy geometrii różniczkowej

§ 37. Krzywe w \mathbb{R}^3	623
Przykłady	626
Zadania	631
Odpowiedzi	636
§ 38. Krzywe płaskie	638
Przykłady	640
Zadania	644
Odpowiedzi	648
§ 39. Powierzchnie w \mathbb{R}^3	651
Przykłady	653
Zadania	659
Odpowiedzi	663

Rozdział VI. Szeregi liczbowe i funkcyjne

§ 40. Szeregi liczbowe	668
Przykłady	669
Zadania	675
Odpowiedzi	677
§ 41. Ciągi i szeregi funkcyjne	677
Przykłady	679
Zadania	694
Odpowiedzi	697
§ 42. Szeregi ortogonalne. Szeregi Fouriera.	701
Przykłady	704
Zadania	713
Odpowiedzi	717
§ 43. Uwagi o mierze Lebesgue'a i całce Lebesgue'a	720
Przykłady	724
Zadania	730
Odpowiedzi	734