Wydawnictwo Bila
ISBN-10:83-922733-4-6
ISBN-13:978-83-922733-4-9
9788392273349

Biblioteczka Opracowań Matematycznych

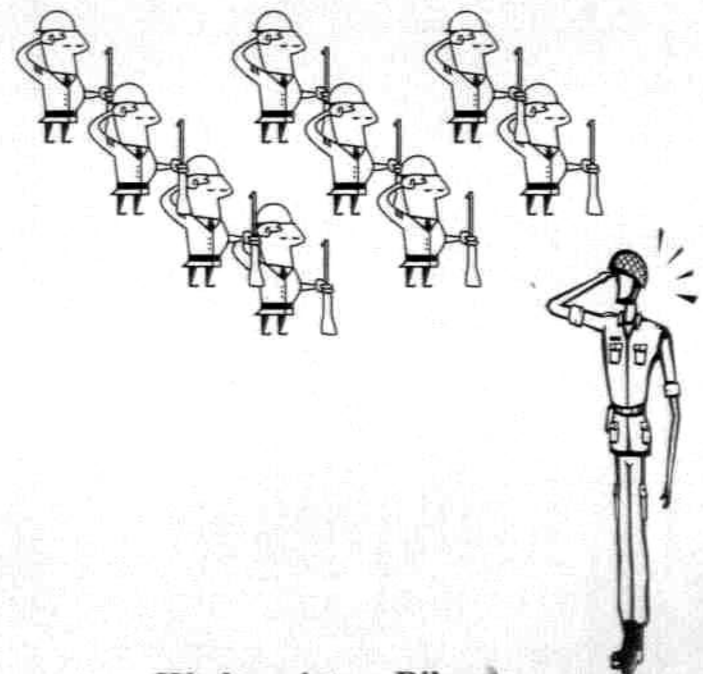
155 zadań o szeregach

z pełnymi rozwiązaniami krok po kroku...

ZESZYT 7

Biblioteczka Opracowań Matematycznych

Materiały pomocnicze do nauki dla studentów



Wydawnictwo Bila

ISBN-10: 83-922733-4-6
ISBN-13: 978-83-922733-4-9

Wydawnictwo ***Bila***
ul. Krajobrazowa 1/7
35-124 Rzeszów
tel: 608-503-856
e-mail: wydawnictwo_bila@poczta.fm

Spis treści:

1. Szeregi liczbowe o wyrazach dodatnich

Szereg liczbowy to wyrażenie postaci:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + .. + a_n + ..$$

gdzie $a_1, a_2, .. a_n ..$ to kolejne wyrazy szeregu.
Szereg nazywamy zbieżnym, jeżeli $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, gdzie S_n to suma n-początkowych wyrazów szeregu.
Warunek konieczny zbieżności szeregu:

(1.1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Szereg geometryczny:

(1.2) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + ..$

Suma n- początkowych wyrazów szeregu geometrycznego:

(1.3) $S_n = a\dfrac{1-q^n}{1-q}$

Dla | q | < 1 szereg geometryczny jest zbieżny.
Wśród szeregów liczbowych rozróżniamy szeregi o wyrazach dodatnich oraz szeregi o wyrazach dowolnych.
Dla szeregów o wyrazów dodatnich sformułowano twierdzenia zwane kryteriami zbieżności (rozbieżności) szeregów.

Kryterium porównawcze zbieżności szeregów:
(1.4) Jeżeli dane są dwa szeregi o wyrazach dodatnich: $\sum a_n$ i $\sum b_n$ i każdy wyraz pierwszego szeregu nie jest większy od odpowiadającemu mu wyrazowi drugiego szeregu tzn.: $a_1 \le b_1, a_2 \le b_2, .. a_n \le b_n ..$ to jeżeli szereg $\sum b_n$ jest zbieżny, to i szereg $\sum a_n$ też jest zbieżny.

Kryterium porównawcze rozbieżności szeregów:
(1.5) Jeżeli dane są dwa szeregi o wyrazach dodatnich: $\sum a_n$ i $\sum b_n$ takie, że dla każdego n zachodzi $a_n \ge b_n$, to jeżeli szereg $\sum b_n$ jest rozbieżny, to i szereg $\sum a_n$ jest także rozbieżny.

Kryterium d'Alemberta zbieżności (rozbieżności) szeregów:
(1.6) Jeżeli począwszy od pewnego n ∈ N, dla szeregu o wyrazach dodatnich zachodzi warunek:

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = k < 1$ to szereg jest zbieżny. Jeżeli natomiast począwszy od

pewnego n ∈ N, dla każdego wyrazu szeregu o wyrazach dodatnich zachodzi:

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ to szereg jest rozbieżny.

Podsumowując należy sprawdzić:

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = g < 1$ - szereg zbieżny

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = g > 1$ - szereg rozbieżny

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ - zbadać inną metodą.

Kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregów:
(1.7) Jeżeli dla szeregu $\sum a_n$ o wyrazach dodatnich, począwszy od pew--nego miejsca zachodzi warunek:
$\sqrt[n]{a_n} < 1$, to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, a jeżeli $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, to szereg jest rozbieżny.
Podsumowując należy sprawdzić:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g < 1$ - szereg zbieżny;

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g > 1$ - szereg rozbieżny;

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ - przypadek niewyjaśniony.

Kryterium całkowe zbieżności szeregów:
(1.8) Jeżeli wyrazy szeregu $\sum a_n$ są dodatnie i malejące oraz $a_n = f(n)$, gdzie funkcja f(x) jest również funkcją dodatnią i malejącą, to szereg jest zbieżny, gdy całka niewłaściwa $\int_1^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna tzn. jej wartość jest skończona. Jeżeli wartość całki wynosi ∞ to badany szereg jest rozbieżny.

Szereg przemienny – to szereg, którego wyrazy mają na przemian znaki „+" i „-„. Np. : $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+..$ Szereg taki nazywany także naprzemiennym.
Do badania szeregów przemiennych stosuje się kryterium Leibniza:

Kryterium Leibniza: (1.9)
Szereg $\sum a_n$, przemienny jest zbieżny, jeżeli bezwzględne wartości jego wyrazów tworzą ciąg malejący dążący do zera.

Bezwzględna zbieżność szeregu: (1.10)
Szereg $\sum a_n$ jest zbieżny bezwzględnie jeżeli szereg $\sum |a_n|$ jest zbieżny.
Jeżeli szereg jest zbieżny bezwzględnie to jest zbieżny.
Jeżeli szereg jest zbieżny, ale nie jest zbieżny bezwzględnie to jest on

zbieżny warunkowo.

Szereg harmoniczny - $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+..$ (1.11)

Szereg harmoniczny jest rozbieżny, chociaż spełnia warunek konieczny zbieżności szeregów.

Szereg anharmoniczny - $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...$ (1.12)

W poniższych przykładach pokazano jak badać zbieżność szeregów liczbowych wykorzystując wymienione kryteria zbieżności szeregów.

PRZYKŁADY

1/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Do zbadania zbieżności szeregu wykorzystamy kryterium całkowe. Zastępując n zmienną „x", zmieniającą się w sposób ciągły otrzymujemy funkcję f(x), która jest ciągła całym nieskończonym przedziale zmienności „x". Funkcja ma postać $f(x)=\frac{1}{x^2}$

Obliczamy całkę niewłaściwą:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{k\to\infty}\int_1^{k}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{k\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^k=\lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{k}+1\right)=0+1=1$$

Całka niewłaściwa jest zbieżna, a więc na podstawie (1.8) szereg jest zbieżny.

2/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$.

(*Kryterium całkowe*)

Tworzymy funkcję: $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ Funkcja jest malejąca i ciągła w D.

Aby obliczyć całkę niewłaściwą z funkcji f(x) rozkładamy ją na ułamki proste: $\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}$

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2-1}=\lim_{k\to\infty}\int_2^{k}\frac{dx}{x^2-1}=\lim_{k\to\infty}\int_2^{k}\left(\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}\right)dx=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|\right]_2^k=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\left(\ln\left|\frac{k-1}{k+1}\right|-\ln 1+\ln 3\right)=\frac{1}{2}\ln 3$$

Ponieważ całka niewłaściwa okazała się zbieżna, badany szereg też jest zbieżny.

3/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$.

(*Kryterium całkowe*)

Tworzymy funkcję: $f(x)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$. Funkcja jest malejąca i ciągła w D.

Obliczamy całkę niewłaściwą:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}=\left|\sqrt{x}=t;\quad x=t^2;\quad \frac{dx}{2\sqrt{x}}=dt\right|=\int_1^{\infty}\frac{2tdt}{(t^2+1)t}=2\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^2+1}=2\lim_{k\to\infty}[arctgt]_1^k=$$

$$=2\lim_{k\to\infty}(arctgk-arctg1)=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$$

Ponieważ całka jest zbieżna, szereg 3/ jest zbieżny.

4/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}$.

(*Kryterium całkowe*)

Tworzymy funkcję $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{(2x-3)^2}}$. Funkcja jest malejąca i ciągła w D.

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x-3)^2}}=\left|2x-3=t;\quad 2dx=dt;\quad dx=\frac{dt}{2}\right|=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^{2/3}}=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}t^{-2/3}dt=\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\int_1^{k}t^{-\frac{2}{3}}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\left[3t^{\frac{1}{3}}\right]_1^k=\frac{3}{2}\lim_{k\to\infty}\left[k^{\frac{1}{3}}-1\right]=\infty-1=\infty$$

Całka niewłaściwa okazała się rozbieżna, a zatem na podstawie kryterium całkowego badany szereg jest rozbieżny.

5/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$.

(*Kryterium całkowe*)

Tworzymy pomocniczo funkcję: $f(x)=\frac{1}{2x-1}$. Funkcja jest malejąca i ciągła dla x w przedziale (1, ∞).

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{2x-1}=\lim_{k\to\infty}\int_1^{k}\frac{dx}{2x-1}=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln|2x-1|\right]_1^k=\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}(\ln|2k-1|-\ln 1)=\frac{1}{2}\infty=\infty$$

Ponieważ całka jest rozbieżna, szereg także jest rozbieżny.

6/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n-2}}$.

(*Kryterium całkowe*)

Tworzymy funkcję: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x-2}}$.Funkcja jest malejąca i ciągła dla x ∈ (1, ∞).

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{3x-2}}\left|3x-2=t;\quad dx=\frac{dt}{3}\right|=\lim_{k\to\infty}\int_1^{k}\frac{dt}{3t^{1/2}}=\frac{1}{3}\lim_{k\to\infty}\left[2t^{1/2}\right]_1^{\infty}=\frac{2}{3}(\infty-1)=\infty$$

Ponieważ całka jest rozbieżna, szereg jest rozbieżny.

7/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$.

(*Kryterium całkowe*)

Tworzymy funkcję: $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Funkcja jest malejąca i ciągła dla x ∈ R.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{k\to\infty}\int_1^k \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{k\to\infty}\left[arctgx\right]_1^k = \lim_{k\to\infty}\left(arctgk - arctg1\right) = \frac{\pi}{4}$$

Szereg jest zbieżny ponieważ całka jest zbieżna.

8/ *Zbadać szereg:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-1}$.

(*K. całkowe*)

Tworzymy funkcję: $f(x)=\frac{1}{(2x+1)^2-1}$. Funkcja jest malejąca i ciągła dla $x \geq 1$.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(2x+1)^2-1} = \lim_{k\to\infty}\int_1^k \frac{dx}{(2x+1)^2-1} = I$$

Pomocniczo obliczamy całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{dx}{(2x+1)^2-1} = \left| 2x+1=t; \quad dx=\frac{dt}{2} \right| = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{4}\left(\ln|t-1|-\ln|t+1|\right)$$

Wracając do całki niewłaściwej:

$$I = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{4}\ln\frac{x}{x+1}\right]_1^k = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{4}\ln\frac{k}{k+1}-\frac{1}{4}\ln\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\ln 2.$$

Przy obliczaniu granicy wykorzystano fakt, że dla $k \to \infty$, $k \approx k+1$. Stąd

$$\frac{k}{k+1} \approx 1; \quad \ln\frac{k}{k+1} \approx \ln 1 = 0$$

Ponieważ całka jest zbieżna, szereg jest zbieżny.

9/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$.

(*Kryterium całkowe*)

Tworzymy funkcję: $f(x)=\frac{x}{(x+1)^3}$. Funkcja jest malejąca i ciągła dla $x \geq 1$.

$$\int_1^\infty \frac{xdx}{(x+1)^3} = \int_1^\infty\left(\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}\right)dx = \left|\begin{matrix} x+1=t \\ dx=dt \end{matrix}\right| = \int_2^\infty\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)dt = \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}\right]_2^k =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}\right]_1^k = \frac{3}{8}$$

Całka jest zbieżna a zatem szereg jest zbieżny.

10/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$.

(Kryterium całkowe)

Tworzymy funkcję: $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$. Funkcja jest ciągła i malejąca dla $x \geq 1$. Obliczamy całkę niewłaściwą.

$$\int_1^\infty \frac{xdx}{x^2+4} = \lim_{k\to\infty}\int_1^k \frac{xdx}{x^2+4} = \left|\begin{matrix} x^2+4=t \\ xdx=\frac{dt}{2} \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\int_5^\infty\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\left[\ln|x^2+4|\right]_1^k = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\left(\ln|k^2+4|-\ln 5\right) = \infty$$

Ponieważ całka jest rozbieżna, szereg jest też rozbieżny.

11/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$.

(Kryterium całkowe)

Tworzymy funkcję: $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$. $\alpha \neq 1$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{k\to\infty}\int_1^k x^{-\alpha}dx = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^k = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{k^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\frac{1}{-\alpha+1}\right] = \frac{1}{-\alpha+1}\lim_{k\to\infty}\left(k^{-\alpha+1}-1\right) = \frac{1}{\alpha-1}$$

Dla $\alpha > 1$ szereg jest zbieżny, dl $0 < \alpha < 1$ szereg jest rozbieżny. Dla $\alpha = 1$ całka nie istnieje.

12/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

(*Kryterium całkowe*)

Tworzymy funkcję: $f(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$. Funkcja jest malejąca dla $x > 1$.

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{k\to\infty}\int_2^k \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^k = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln k}+\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}$$

Pomocniczo obliczono całkę:

$$\int\frac{dx}{x\ln^2 x} = \left|\begin{matrix} \ln x = t \\ \frac{dx}{x}=dt \end{matrix}\right| = \int\frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\ln x}$$

Szereg jest zbieżny ponieważ całka jest zbieżna.

13/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$.

(*Kryterium całkowe*)

Tworzymy funkcję: $f(x)=\frac{1}{x\ln^3 x}$. Funkcja jest dodatnia i malejąca dla $x > 1$.

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^3 x} = \left|\begin{matrix} \ln x = t \\ \frac{dx}{x}=dt \end{matrix}\right| = \int_{\ln 2}^\infty\frac{dt}{t^3} = \lim_{k\to\infty}\int_{\ln 2}^k t^{-3}dt = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{-1}{2t^2}\right]_{\ln 2}^k = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{2\ln^2 k}+\frac{1}{2\ln^2 2}\right) = \frac{1}{2\ln^2 2}$$

Na mocy kryterium całkowego szereg 13/ jest zbieżny.

14/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$.

(*Kryterium całkowe*)

Tworzymy funkcję: $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$. Funkcja jest malejąca i dodatnia dla $x > 2$.

$$\int_2^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx = \lim_{k\to\infty}\int_2^k\frac{\ln x}{x^2} = \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right]_2^k = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{\ln k}{k}-\frac{1}{k}+\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(\ln 2 - 1)$$

$$\int\frac{\ln xdx}{x^2} = \left|\begin{matrix} u=\ln x & du=\frac{dx}{x} \\ dv=\frac{dx}{x^2} & v=-\frac{1}{x} \end{matrix}\right| = -\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$$

Szereg jest zbieżny na mocy kryterium całkowego.

15/ Zbadać zbieżność szeregu: $\sum_{3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)^d}$.

Tworzymy pomocniczo funkcję: $f(x)=\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)^d}$. Funkcja jest dodatnia i malejąca dla x>3.

Obliczamy pomocniczo całkę nieoznaczoną :

$$\int\frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)^d}=\left|\begin{matrix}\ln x=t\\ \frac{dx}{x}=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{t(\ln t)^d}=\left|\begin{matrix}\ln t=u\\ \frac{dt}{t}=du\end{matrix}\right|=\int\frac{du}{u^d}=\frac{u^{-d+1}}{-d+1}$$ Założenie: d>1.

$$\int_3^\infty\frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)^d}=\lim_{k\to\infty}\int_3^k\frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)^d}=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{u^{-d+1}}{-d+1}\right]_{\ln(\ln 3)}^k=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k^{-k+1}}{-d+1}+\frac{\ln(\ln 3)^{-d+1}}{-d+1}\right)=\frac{1}{(-d+1)u^{-d+1}}$$

Do obliczenia całki niewłaściwej wykorzystano obliczenia całki nieoznaczonej, wraz z zastosowanym podstawieniem.

Granice całkowania uległy zmianie po podstawieniu, ponieważ:

$t=\ln 3;\quad u=\ln t=\ln(\ln 3);\quad x\to\infty\quad u\to\infty.$

Dla d > 1 szereg jest zbieżny, a dla d <1 szereg jest rozbieżny.

Dla d < 1:

$$\int_3^\infty\frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{u^{-d+1}}{-d+1}\right]_{\ln(\ln 3)}^\infty=\infty$$

16/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{3^n}$.

(Kryterium d'Alemberta)

Znajdujemy następny wyraz *n+1 – szy* wyraz szeregu.

$$a_n=\frac{n^5}{3^n};\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)^5}{3^{n+1}}.$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5}{3^{n+1}}\frac{3^n}{n^5}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5}{3n^5}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5=\frac{1}{3}$$

Ponieważ ρ < 1, więc na mocy kryterium d'Alemberta szereg jest zbieżny.

17/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

(Kryterium d'Alemberta)

$$a_n=\frac{2n-1}{2^n};\quad a_{n+1}=\frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}=\frac{2n+1}{2^{n+1}}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{2^{n+1}}\frac{2^n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2(2n-1)}=\frac{1}{2}$$

Ponieważ ρ < 1, szereg 17/ jest zbieżny.

18/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n}$.

(Kryterium d'Alemberta)

$$a_n=\frac{2n}{3^n};\quad a_{n+1}=\frac{2n+2}{3^{n+1}};$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)}{3^{n+1}}\frac{3^n}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{6n}=\frac{1}{3}$$

Ponieważ ρ < 1, szereg 18/ jest zbieżny.

19/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)5^n}{2^n3^{n+1}}$.

(Kryterium d'Alemberta)

$$a_n=\frac{(n+1)5^n}{2^n3^{n+1}};\quad a_{n+1}=\frac{(n+2)5^{n+1}}{2^{n+1}3^{n+2}};$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)5^{n+1}2^n3^{n+1}}{2^{n+1}3^{n+2}(n+1)5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5(n+2)}{6(n+1)}=\frac{5}{6}$$

Szereg 19/ jest zbieżny ponieważ ρ < 1.

20/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(2n+1)}$

(Kryterium d'Alemberta)

$$a_n=\frac{3^n}{2^n(2n+1)};\quad a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}(2n+3)};$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}2^n(2n+1)}{2^{n+1}3^n(2n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\frac{(2n+1)}{(2n+3)}=\frac{3}{2}$$

Ponieważ ρ > 1, szereg 20/ jest rozbieżny.

21/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{(3n)!}$

(Kryterium d'Alemberta)

$$a_n=\frac{n^4}{(3n)!};\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)^4}{(3n+3)!};$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{(3n+3)!}\frac{(3n)!}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{n^4(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=0$$

Ponieważ ρ < 1 szereg jest zbieżny.

22/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{50^n}{n!}$

(Kryterium d'Alemberta)

$$a_n=\frac{50^n}{n!};\quad a_{n+1}=\frac{50^{n+1}}{(n+1)!};$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{50^{n+1}}{(n+1)n!}\frac{n!}{50^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{50}{n+1}=0$$

Ponieważ ρ < 1, szereg jest zbieżny.

23/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(2n)!}$

(Kryterium d'Alemberta)

$$a_n=\frac{n^{2n}}{(2n)!};\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)^{2n+2}}{(2n+2)!};$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{2n+2}(2n)!}{(2n+2)!n^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{e^2}{4}$$

Ponieważ otrzymane ρ >1, więc szereg 23/ jest rozbieżny.

24/ *Zbadać szereg :* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$. *(Kryterium d'Alemberta)*

$$a_n=\frac{n!}{n^n};\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{n+1}}{(n+1)^n(n+1)n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}\frac{n}{(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\left(1+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

Ponieważ $\rho<1$, szereg 24/ jest zbieżny.

25/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.
(Kryterium d'Alemberta)

$$a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!};\quad a_{n+1}=\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!};$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^2(2n)!}{(2n+2)!(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{4}$$

Ponieważ $\rho<1$, więc szereg jest zbieżny.

26/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}\frac{3n-5}{\sqrt{n3^n}}$. *(Kryterium d'Alemberta).*

$$a_n=\frac{3n-5}{\sqrt{n3^n}};\quad a_{n+1}=\frac{3n-8}{\sqrt{(n+1)3^{n+1}}}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-8}{\sqrt{(n+1)3^{n+1}}}\frac{\sqrt{n3^n}}{3n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-8}{3n-5}\sqrt{\frac{n}{3(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{n\to\infty}\frac{3n-8}{3n-5}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Szereg jest zbieżny, na mocy kryterium d'Alemberta.

27/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{\sqrt{n3^n}}$.
(Kryterium d'Alemberta)

$$a_n=\frac{4n-3}{\sqrt{n3^n}};\quad a_{n+1}=\frac{4n+1}{\sqrt{(n+1)3^{n+1}}}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{\sqrt{(n+1)3^{n+1}}}\frac{\sqrt{n3^n}}{(4n-3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{4n-3}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{3}\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ponieważ $\rho<1$, szereg jest zbieżny.

28/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$.
(Kryterium d'Alemberta)

$$a_n=n^2\sin\frac{\pi}{2^n};\quad a_{n+1}=(n+1)^2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}\frac{\frac{\pi}{2^n}\frac{1}{2}}{\sin\frac{\pi}{2^n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\frac{1}{2}$$

Szereg okazał się zbieżny.

Wykorzystano fakt, że $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=1$.

29/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.
(Kryterium porównawcze)

Porównajmy szereg 29/ z szeregiem harmonicznym rozbieżnym: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.
Ponieważ dla dowolnego n > 0:

$$\sqrt{n}<n$$

więc $\bigwedge_{n\ge2}\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n}$. A zatem badany szereg jest rozbieżny.

30/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n5^n}$.
(Kryterium porównawcze)
Dla każdego $n\ge2$, zachodzi: $\frac{1}{n5^n}<\frac{1}{5^n}$.
$\frac{1}{5^n}$ jest nieskończonym zbieżnym postępem geometrycznym o ilorazie $q=\frac{1}{5}<1$. Na mocy kryterium porównawczego szereg 30/ jest zbieżny.

31/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$. *(Kryterium porównawcze)*

Postęp $\frac{1}{2^n}$ jest nieskończonym postępem geometrycznym o ilorazie $q=½<1$. Jest zatem zbieżny. Dla każdego $n\in N$ zachodzi:

$$\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n}$$

Na mocy kryterium porównawczego, badany szereg jest zbieżny.

32/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$
(Kryterium porównawcze)
Ponieważ dla dowolnego $n\ge2$, zachodzi: $\sqrt[3]{n+1}<n$ więc $\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}>\frac{1}{n}$.
A zatem na mocy kryterium porównawczego, szereg jest zbieżny.

34/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n^2}}$.
(Kryterium porównawcze)
Dla każdego $n\ge2$ zachodzi: $ln(n+1)\ge1$ oraz $\sqrt[3]{n^2}<\sqrt[3]{n^3}$.
Stąd wnioskujemy, że:

$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}>\frac{1}{\sqrt[3]{n^3}}=\frac{1}{n}$ a więc także $\frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n^2}}>\frac{1}{n}$.

Na mocy kryterium porównawczego badany szereg jest rozbieżny.

35/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$.

Ponieważ ln(n) < n więc zachodzi, że: $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$

Na mocy **kryterium porównawczego** badany szereg jest więc rozbieżny.

36/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2}{n^4+2}$.

$$a_n = \frac{3^n+2}{n^4+2}; \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}+2}{(n+1)^4+2};$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(3^{n+1}+2)}{((n+1)^4+2)} \frac{(n^4+2)}{(3^n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^4+2}{3^n}}{\frac{(n+1)^4+2}{3^n}} \frac{3+\frac{2}{3^n}}{1+\frac{2}{3^n}} = 3\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2}{(n+1)^4+2} = 3$$

Ponieważ ρ > 1, więc na mocy kryterium d'Alemberta szereg jest rozbieżny.

37/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}99^n}{100^n}$.

$$a_n = \frac{n^{100}99^n}{100^n}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{100}99^{n+1}}{100^{n+1}};$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{100}99^{n+1}}{100^{n+1}} \frac{100^n}{n^{100}99^n} = \frac{99}{100}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{100}}{n^{100}} = \frac{99}{100} < 1$$

Na mocy **kryterium d'Alemberta** badany szereg jest zbieżny.

38/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!5^n(n+2)!}{(3n)!}$

$$a_n = \frac{n!5^n(n+2)!}{(3n)!}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!5^{n+1}(n+3)!}{(3n+3)!}$$

Do sprawdzenia zbieżności użyjemy kryterium d'Alemberta.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!5^{n+1}(n+3)!(3n)!}{(3n+3)!n!5^n(n+2)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{5(n+1)(n+3)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = 0 < 1$$

Ponieważ ρ <1 więc szereg jest zbieżny.

39/ *Obliczyć sumę:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+..+\frac{1}{n(n+1)}$$

W celu obliczenia sumy szeregu skorzystamy z zależności:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+..+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$$

40/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n^2+3}$.

(*Kryterium porównawcze*)

Wiadomo, że: $n^2+3 \ge n^2$;

A zatem: $\frac{1}{n^2+3} \le \frac{1}{n^2}$; $\quad \frac{5}{n^2+3} \le \frac{5}{n^2}$;

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n^2}$ jest zbieżny, więc na mocy kryterium porównawczego badany szereg jest zbieżny.

41/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3+2}$

Dla zbadania zbieżności szeregu wykorzystamy twierdzenie:

Twierdzenie:

Jeżeli $\sum a_n$ ***oraz*** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ***są zbieżne, to*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$

Niech zatem: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{n}{n^3+2}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{n^3+2}$

Obydwa szeregi są zbieżne na mocy kryterium porównawczego, ponieważ:

$$\bigwedge_{n\in N}\frac{n}{n^3+2} \le \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} \quad \text{oraz} \quad \bigwedge_{n\in N}\frac{1}{n^3+2} \le \frac{1}{n^3}$$

Na mocy twierdzenia o sumie szeregów zbieżnych wnioskujemy, że szereg 41/ jest zbieżny.

42/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2n$ *(Metoda nie wprost).*

Warunek konieczny zbieżności szeregu mówi, że $\lim_{n\to\infty}\cos 2n = 0$. Załóżmy, że warunek ten jest spełniony. Wybieramy dowolny podciąg badanego ciągu. Np. $a_n = \cos(4n)$. Warunek konieczny zbieżności powinien być spełniony dla każdego podciągu.

$$\cos 4n = \cos 2(2n) = 2\cos^2(2n)-1$$

Wykorzystując założenie otrzymujemy: $\lim_{n\to\infty} 2\cos^2(2n)-1 = 0-1 = -1$.

Wystąpiła zatem sprzeczność, ponieważ ciąg nie może mieć dwóch różnych granic. Ostatecznie badany szereg jest rozbieżny.

43/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$ *korzystając z definicji granicy.*

Niech: $u = \frac{\pi}{2^n}$. Dla n → ∞, czyli u → 0 oraz prawdziwe jest twierdzenie:

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$$

Inaczej: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} = 1$.

Z definicji granicy ciągu, dla dowolnego ε, istnieje takie n ∈ N, że:

$$\left|\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}-1\right|<\varepsilon; \qquad 1-\varepsilon<\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}<\varepsilon+1;$$

Przyjmijmy, że ε = ½ , wtedy: $\frac{1}{2}<\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}<\frac{3}{2}$.

Biorąc prawą stronę nierówności:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}<\frac{3}{2}; \qquad \sin\frac{\pi}{2^n}<\frac{3}{2}\frac{\pi}{2^n}=\frac{3\pi}{2^{n+1}}$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\pi}{2^{n+1}}=\frac{3\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ jest zbieżny, ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$

jest szeregiem geometrycznym o ilorazie | q | = ½ <1, czyli zbieżnym.
Badany szereg jest więc zbieżny.

44/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{\sqrt{2n}}\sin\frac{10}{2n}$.
Wykorzystajmy w tym celu zależność:

$$\sin x<x<tgx$$

Stąd wnioskujemy, że:

$$\sin\frac{10}{2n}<\frac{10}{2n} \Big/ \frac{10}{\sqrt{2n}}$$

$$\frac{10}{\sqrt{2n}}\sin\frac{10}{2n}<\frac{100}{2n\sqrt{2n}}$$

$$\frac{10}{\sqrt{2n}}\sin\frac{10}{2n}<\frac{100}{(2n)^{3/2}}$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100}{(2n)^{3/2}}=25\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ jest szeregiem harmonicznym dla α = 1,5, a więc jest szeregiem zbieżnym.
Ostatecznie na podstawie kryterium porównawczego szereg 44/ jest zbieżny.

45/ Zbadać zbieżność szeregu: $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\sin^2\frac{1}{n}$.
Dla każdego n ∈ N, zachodzi:

$$\sqrt{n}\sin^2\frac{1}{n}>0; oraz \quad \sin\frac{1}{n}<\frac{1}{n}$$

$\sin^2\frac{1}{n}=\sin\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}<\frac{1}{n}\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}$; Po pomnożeniu obustronnie przez $\sqrt{n}$:

$$\sqrt{n}\sin^2\frac{1}{n}<\frac{\sqrt{n}}{n^2}=\frac{1}{n^{3/2}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ jest szeregiem harmonicznym dla α >1, a zatem jest zbieżny.

Na mocy kryterium porównawczego szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\sin^2\frac{1}{n}$ jest zbieżny.

46/ *Obliczyć sumę szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
Wykorzystamy zależność:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1*2*3}+\frac{1}{2*3*4}+..+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{1*2}-\frac{1}{2*3}\right)..+..\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2*3}-\frac{1}{3*4}\right)+..+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{1}{4}$$

47/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}=\cos 1+\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cos\frac{1}{3}+..$$

Kolejne wyrazy postaci $\cos\frac{1}{n}$ mają wartości większe niż ½ , ponieważ argumenty postaci: $\frac{1}{n}\in(0,1)$

Wiadomo także z własności funkcji *cosx* (funkcja malejąca dla *x∈(0,π/2))*, że: $1<\frac{\pi}{3}$; *czyli* $\cos 1>\cos\frac{\pi}{3}$

$$\frac{1}{2}<\cos\frac{1}{n} \quad dla \quad \frac{1}{n}\in(0,1)$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{n}<\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ jest rozbieżny. Na mocy kryterium porównawczego badany szereg jest więc rozbieżny.

48/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2}{n}$

Z twierdzenia wiemy, że: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}=1$. Z definicji granicy otrzymujemy:

$$\left|\frac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}-1\right|<\varepsilon$$

począwszy od pewnego n ∈ N, dla dowolnego ε. Dla $\varepsilon=\frac{1}{2}$:

$$\left|\frac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}-1\right|<\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}<\frac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}<\frac{3}{2};\qquad \frac{1}{n}<\sin\frac{2}{n}$$

Mnożąc ostatnią nierówność obustronnie przez 2, otrzymujemy:

$$\frac{2}{n}<2\sin\frac{2}{n}=4\sin\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n};\qquad \frac{1}{2n}<\sin\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ jako szereg harmoniczny dla α = 1 jest rozbieżny, a zatem na mocy kryterium porównawczego badany szereg 48/ też jest rozbieżny.

49/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$.

Załóżmy, że szereg jest zbieżny. Wówczas warunek konieczny zbieżności szeregu musi być spełniony, tzn.: $\lim_{n\leftarrow\infty} n\sin\frac{1}{n}=0$

Warunek ten po przekształceniu możemy zapisać następująco:

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=0$ co pozostaje w sprzeczności z twierdzeniem: $\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$.

Otrzymując sprzeczność z założeniem udowodniliśmy, że badany szereg jest rozbieżny.

50/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Wiadomo, że:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$$

Z definicji granicy ciągu:

$\left|\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right|<\varepsilon$ gdzie ε można wybrać dowolnie. Niech więc $\varepsilon=\frac{1}{3}$.

$\left|\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right|<\frac{1}{3};\quad \frac{2}{3}<\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}<\frac{4}{3};$ Stąd: $\frac{2}{3}<\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}};\quad \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{n}}<\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$

Mnożąc obustronnie przez $\frac{5}{\sqrt{n}}$, mamy: $\frac{10}{3n}<\frac{5}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{3n}=\frac{10}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ jest rozbieżny jako szereg harmoniczny dla α = 1, więc na mocy kryterium porównawczego szeregów, badany szereg jest także rozbieżny.

51/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty} tgn$. *(dowód nie wprost)*

Warunkiem koniecznym zbieżności szeregu jest: $\lim_{n\to\infty} tgn=0$. Załóżmy, że warunek ten jest spełniony. Warunek powinien być spełniony także dla n +1, tzn.: $\lim_{n\to\infty} tg(n+1)=\lim_{n\to\infty}\frac{tgn+tg1}{1-tgntg1}=\lim_{n\to\infty}\frac{0+tg1}{1-0tg1}=tg1\neq 0$

Otrzymana sprzeczność z założeniem, że warunek konieczny szeregu jest spełniony, dowodzi, że szereg jest rozbieżny.

52/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3^n}{3^n}$

Prawdą jest, że $0<|\cos 3^n|<1$ dla każdego n ∈ N. A zatem po pomnożeniu obustronnym przez $1/3^n$, otrzymujemy: $0<\left|\frac{\cos 3^n}{3^n}\right|<\frac{1}{3^n}$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ jest to szereg geometryczny o ilorazie $q=\frac{1}{3}<1$, a więc jest zbieżny.

Na mocy kryterium porównawczego szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos 3^n}{3^n}\right|$ jest zbieżny.

Twierdzenie: (1.13)

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *jest zbieżny to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *jest także zbieżny.*

A zatem badany szereg jest zbieżny.

54/ *Obliczyć sumę szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{7n+7n^2}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{7n(1+n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{7}\left(\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+..+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\frac{5}{7}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{5}{7}$$

55/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 4^n}{4^n}$.

Wykorzystamy zależność:

$$0<|\sin 4^n|<1$$

Pomnóżmy obustronnie ostatnią nierówność przez $\frac{1}{4^n}$:

$$0<\left|\frac{\sin 4^n}{4^n}\right|<\frac{1}{4^n}$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ to szereg geometryczny nieskończony o ilorazie q = $\frac{1}{4}$, a więc jest zbieżny.

Na mocy kryterium porównawczego szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin 4^n}{4^n}\right|$ jest zbieżny.

Na mocy twierdzenia w zadaniu 53/ badany szereg jest zbieżny.

56/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *gdzie* a_n *jest równy:*

$$a_n = \begin{cases} \sin\frac{1}{\pi^n} & \text{dla } n \text{ nieparzystych;} \\ \frac{1}{e^n} & \text{dla } n \text{ parzystych.} \end{cases}$$

Dla każdego $n \in N$ zachodzi: $0 < \sin\frac{1}{\pi^n} < \frac{1}{\pi^n} < \frac{1}{e^n}$.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n}$ to szereg geometryczny o ilorazie q = 1/e. Na mocy kryterium porównawczego badany szereg jest zbieżny.

57/ *Obliczyć sumę szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+..+\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{3}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)...\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(\frac{1}{2}\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\frac{4}{3}\right)...\right.$$

$$\left....\left(\frac{n}{n+1}\frac{n+2}{n+1}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{2}\frac{n+2}{n+1}\right)=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$$

58/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

(Kryterium Cauchy'ego (1.7))

Zgodnie z tw. (1.7) obliczamy liczbę ρ:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)}=\sqrt{\frac{2}{3}}<1$$

A zatem szereg jest zbieżny.

59/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^{2n}}{(3n^3+1)^n}$.

(Kryterium Cauchy'ego)

Wyrazy szeregu są dodatnie.

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+2)^{2n}}{(3n^3+1)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3n^3+1}=0<1$$

A zatem szereg jest zbieżny.

60/ *Zbadać zbieżność szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{10^n}$.

(Kryterium Cauchy'ego)

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{10}}{10^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^{10}}}{\sqrt[n]{10^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{n})^{10}}{10}=\frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^{10}=\frac{1}{10}<1$$

Na mocy użytego kryterium szereg 60/ jest zbieżny.

61/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+6^{2n}}{7^n+8^n}$.

(Kryterium Cauchy'ego)

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{5^n+6^{2n}}{7^n+8^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{5}{8}\right)^n+\left(\frac{36}{8}\right)^n}{\left(\frac{7}{8}\right)^n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4{,}5^n}=4{,}5>1$$

A zatem szereg jest rozbieżny.

62/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{2^n}$.

(Kryterium Cauchy'ego)

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\log n}{2^n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\log n}=\frac{1}{2}<1$$

Wykorzystano fakt, że: $0<\log n<n$

$$0<\sqrt[n]{\log n}<\sqrt[n]{n}$$

$$\sqrt[n]{n}\to 1 \quad \textit{zatem} \quad \sqrt[n]{\log n}\to 1$$

Badany szereg jest więc zbieżny.

63/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n^{n^2}}{(3n+1)^{n^2}}$.

(Kryterium Cauchy'ego)

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{4^n n^{n^2}}{(3n+1)^{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt[n]{(n^2)^n}}{\sqrt[n]{((3n+1)^2)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{(3n+1)^2}=\frac{4}{3}>1$$

Czyli szereg jest rozbieżny.

64/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n$.

(Kryterium Cauchy'ego)

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{5}\right)^n\frac{1}{n}}=\frac{3}{5}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\frac{3}{5}<1$$

Na mocy kryterium Cauchy'ego szereg jest zbieżny.

65/ *Obliczyć sumę szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n+5^n}{6^n}$.

Wykorzystamy **własność szeregów zbieżnych:**

(1.14) $$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n+5^n}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{5}{6}\right)^n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}+\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}}=8$$

66 *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^n$, *gdzie* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *oraz* $a, b, a_n > 0$.
(Kryterium Cauchy'ego)

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt[n]{b_n}} = \frac{a}{b}$$

Szereg jest zbieżny dla a < b, a rozbieżny dla b < a.

67/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\arccos^{2n}\frac{1}{n^3}$.
(Kryterium Cauchy'ego)

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\arccos^{2n}\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\arccos^2\frac{1}{n^3})^n} = \lim_{n\to\infty}\arccos^2\frac{1}{n^3} = \frac{\pi^2}{4} > 1$$

A zatem na mocy kryterium Cauchy'ego szereg jest rozbieżny.

(1.15) **Kryterium ilorazowe zbieżności szeregów.**
Niech $a_n, b_n > 0$ *(* $a_n, b_n < 0$ *) dla każdego* $n \in N$ *i* $n \geq n_0$ *oraz niech*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = k \text{ gdzie } 0 < k < \infty.$$

Wówczas szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne.*

68/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.
(Kryterium ilorazowe)
Dobieramy szereg zbieżny $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^3}}$.
Obliczamy granicę zgodnie z kryterium ilorazowym:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} = 1$$

Ponieważ jako granicę otrzymaliśmy liczbę skończoną oraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ był zbieżny, więc na podstawie kryterium (1.15) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ też jest zbieżny.

69/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3-n}\right)$.
(Kryterium ilorazowe)
Dobierzmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Szereg jako szereg harmoniczny jest szeregiem rozbieżnym.

$$k = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3-n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3-n}\right)n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^3+n-(n^3-n)\right)n}{\sqrt[3]{(n^3+n)^2} + \sqrt[3]{(n^3+n)(n^3-n)} + \sqrt[3]{(n^3-n^2)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{\sqrt[3]{n^6+2n^4+n^2} + \sqrt[3]{n^6-n^2} + \sqrt[3]{n^6-2n^4+n^2}} = \frac{2}{3}$$

szereg b_n był szeregiem rozbieżnym a otrzymana liczba k jest skończona więc badany szereg 69/ jest także rozbieżny.

70/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2} - n\right)$.
(Kryterium ilorazowe)
Dobierzmy szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{n^2}$.

Obliczamy liczbę k zgodnie z kryterium ilorazowym (1.15).

$$k = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2} - n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n^3+2-n^3)n^2}{\sqrt[3]{(n^3+2)^2} + n\sqrt[3]{n^3+2} + n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{\sqrt[3]{n^6+4n^3+4} + \sqrt[3]{n^6+2n^3} + n^2} = \frac{2}{3}$$

Ponieważ $0 < k < \infty$ oraz szereg b_n był zbieżny więc na mocy kryterium Ilorazowego badany szereg 70/ jest zbieżny.

71/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3n+2}{2n^3-5}$.
(Kryterium ilorazowe)
Niech szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{n}$.

$$k = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n^2+3n+2)n}{2n^3-5} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+2n}{2n^3-5} = 1$$

Otrzymaliśmy liczbę k = 1 skończoną. Ponieważ szereg b_n jest rozbieżny wnioskujemy, że badany szereg 71/ też jest rozbieżny.

72/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{(\ln 5)^n}$.
(Kryterium porównawcze)
Wiadomo, że $|\sin n\alpha| \leq 1$. Pomnóżmy obustronnie tę zależność przez $\frac{1}{(\ln 5)^n}$.

$$\left|\frac{\sin n\alpha}{(\ln 5)^n}\right| \leq \frac{1}{(\ln 5)^n}$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln 5)^n}$ jest szeregiem geometrycz. zbieżnym o ilorazie $q = \frac{1}{\ln 5}$.
Na mocy kryterium porównawczego szereg 72/ jest bezwzględnie zbieżny a więc jest także zbieżny.

73/ *Zbadać zbieżność szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\frac{5}{n^2}$.
(Kryterium ilorazowe)
Wybieramy szereg : $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

$$k=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{arctg\frac{5}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5arctg\frac{5}{n^2}}{\frac{5}{n^2}}=5\lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin\frac{5}{n^2}}{\frac{5}{n^2}\arccos\frac{5}{n^2}}=5*\frac{2}{\pi}=\frac{10}{\pi}$$

Na mocy kryterium ilorazowego, ponieważ szereg b_n jest zbieżny szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ też jest zbieżny.

74/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\log_3\left(1+\frac{1}{3^n}\right)$.
(Kryterium ilorazowe)
Jako szereg b_n wybierzmy np.: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$.

Wykorzystamy równość:

$$\lim_{n\to 0}\frac{\log_a(1+n)}{n}=\frac{1}{\ln a}$$

$$k=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_3\left(1+\frac{1}{3^n}\right)}{\frac{1}{3^n}}=\frac{1}{\ln 3}$$

Ponieważ obliczona liczba k jest skończona oraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ jest zbieżny, wnioskujemy, że badany szereg jest zbieżny.

2. Szeregi liczbowe przemienne

W pierwszym rozdziale została sformułowana definicja szeregu przemiennego oraz kryterium Leibniza do badania zbieżności takich szeregów (1.9). Od razu zatem przejdziemy do prezentacji przykładów dotyczących badania zbieżności szeregów przemiennych.

PRZYKŁADY

75/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{5}-1\right)$.
Do zbadania zbieżności wykorzystamy kryterium Leibniza (1.9).
Sprawdzamy warunek czy granica bezwzględnej wartości wyrazu ogólnego szeregu dąży do zera :
$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{5}-1\right)=0$ ponieważ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}=1$

A zatem warunek jest spełniony. Należy jeszcze sprawdzić czy bezwzględne wartości wyrazów szeregu tworzą ciąg malejący:

Niech: $|a_{n+1}|=\sqrt[n+1]{5}-1;\quad |a_n|=\sqrt[n]{5}-1;$
Zachodzi: $\sqrt[n+1]{5}-1<\sqrt[n]{5}-1;\quad bo\quad \sqrt[n+1]{5}<\sqrt[n]{5}$

Ponieważ warunki kryterium Leibniza są spełnione, szereg jest zbieżny.

76/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=1\left(\frac{1}{3}\right)^0-2\left(\frac{1}{3}\right)^1+3\left(\frac{1}{3}\right)^2-..$$

Rozpatrzmy szereg bezwzględnych wartości wyrazów tego szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}\qquad(*)$$

Do zbadania (*) wykorzystamy kryterium d'Alemberta:

$$k=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^{n-1}}{3^n n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\frac{3^n}{3^n*3}=\frac{1}{3}<1$$

Na podstawie kryterium d'Alemberta szereg jest zbieżny bezwzględnie. Każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest także zbieżny. A zatem szereg 76/ jest zbieżny.

77/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$.
Jest to szereg przemienny .
W celu zbadania zbieżności skorzystamy z kryterium Leibniza.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}=1-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{4\sqrt[3]{4}}+..$$

Mianowniki kolejnych wyrazów szeregu rosną, więc wartości bezwzględne wyrazów szeregu maleją. Spełniony jest zatem jeden z warunków kryter- -ium. Zbadajmy więc czy ciąg utworzony z bezwzględnych wartości wyrazów szeregu jest zbieżny.
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}$ jest to szereg harmoniczny rzędu $\alpha=\frac{4}{3}$. A zatem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{4/3}}=0$$

Badany szereg jest zatem zbieżny bezwzględnie.

78/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{5n+4}}$.
Szereg 78/ jest przemienny.
Dla n $\to\infty$, $\sqrt{5n+4}\to\infty$; *zatem* $\frac{1}{\sqrt{5n+4}}\to 0$, czyli:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{5n+4}}=0$$

Wartości bezwzględne kolejnych wyrazów szeregu przemiennego maleją. Na mocy kryterium Leibniza jest to szereg zbieżny. Ustalmy jeszcze czy jest on zbieżny bezwzględnie. W tym celu należy zbadać szereg o wy- razach będących bezwzględnymi wartościami wyjściowego szeregu. Zastosujmy kryterium całkowe:

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{5x+4}}=\lim_{k\to\infty}\int_0^k\frac{\frac{dt}{5}}{t^{1/2}}\left|\begin{matrix}t=5x+4\\ dt=5dx\end{matrix}\right|=\frac{1}{5}\lim_{k\to\infty}\left[2\sqrt{5x+4}\right]_0^k=\frac{1}{5}\lim_{k\to\infty}\left(2\sqrt{5k+4}-4\right)=\infty$$

Ponieważ szereg o wyrazach dodatnich jest rozbieżny, stwierdzamy, że szereg jest zbieżny tylko warunkowo.

79/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{2n-3}}{3n+5}$

(*Kryterium Leibniza*)

Sprawdźmy czy: $\bigwedge_{n>N}|u_{n+1}|<|u_n|$.

$$u_{n+1}=\frac{\sqrt{2n-3}}{3n+8};\quad u_n=\frac{\sqrt{2n-5}}{3n+5};$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{\sqrt{2n-3}}{3n+8}-\frac{\sqrt{2n-5}}{3n+5}=\frac{\sqrt{2n-3}(3n+5)-\sqrt{2n-5}(3n+8)}{(3n+8)(3n+5)}$$

Należy zbadać dla jakich n ∈ N, licznik powyższego wyrażenia jest mniejszy od 0.

$$\sqrt{2n-3}(3n+5)<\sqrt{2n-5}(3n+8)/^2$$

$$-18n^2+72n+245<0$$

Nierówność ta jest spełniona dla n naturalnych większych od „6". A zatem ciąg jest malejący dla n > 6.

Sprawdzamy warunek konieczny zbieżności:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n-5}}{3n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{2n}{n^2}-\frac{5}{n^2}}}{\frac{3n}{n}+\frac{5}{n}}=0$$

Ostatecznie na mocy kryterium Leibniza szereg jest zbieżny. Zbadajmy jeszcze czy szereg jest zbieżny bezwzględnie.

Badamy zatem szereg: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n-5}}{3n+5}$. Wykorzystamy do tego kryterium ilorazowe. Niech szereg $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-5}}$ będzie szeregiem pomocni- -czym.

$$k=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n-5}\sqrt{2n-5}}{3n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-5}{3n+5}=\frac{2}{3}$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-5}}$ jest rozbieżny więc na mocy kryterium ilorazo- -wego szereg badany jest także rozbieżny. Ostatecznie szereg przemienny: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{2n-3}}{3n+5}$ jest zbieżny warunkowo.

80/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n+2}$.

(*Kryterium Leibniza*)

Badamy warunek konieczny zbieżności: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n+2}=0$. Warunek jest spełniony.

Badamy czy ciąg bezwzględnych wartości wyrazów szeregu jest malejący:

$$a_{n+1}=\frac{1}{3^{n+1}+2};\quad a_n=\frac{1}{3^n+2};\qquad \bigwedge_{n\in N}a_{n+1}<a_n$$

Ponieważ $3^{n+1}+2>3^n+2$

to $\frac{1}{3^{n+1}+2}<\frac{1}{3^n+2}$

A zatem ciąg bezwzględnych wartości wyrazów szeregu jest malejący. Na mocy kryterium Leibniza szereg jest zbieżny.

Zbadajmy jeszcze czy szereg jest zbieżny bezwzględnie. Na mocy kryter- -ium porównawczego zachodzi:

$$\bigwedge_{n\in N}\frac{1}{3^n+2}<\frac{1}{3^n}$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ jest szeregiem geometrycznym zbieżnym o ilorazie $q=\frac{1}{3}$. Stąd szereg $\sum_{n=1}\frac{1}{3^n+2}$ jest zbieżny. Ostatecznie wyjściowy szereg **80/** jest bezwzględnie zbieżny.

81/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{n^3-2}$.

(*Kryterium Leibniza*)

Sprawdzamy warunek konieczny zbieżności: $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3-2}=0$. Warunek ten jest spełniony.

Sprawdzamy, czy ciąg bezwzględnych wartości szeregu jest malejący.

$$a_n=\frac{n^2}{n^3-2};\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)^3-2};$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{(n+1)^2}{(n+1)^3-2}-\frac{n^2}{n^3-2}=\frac{-n^4-2n^3-5n^2-4n-2}{\left[(n+1)^3-2\right](n^3-2)}=\frac{-(n^4+2n^3+5n^2+4n+2)}{\left[(n+1)^3-2\right](n^3-2)}$$

Powyższe wyrażenie jest mniejsze od 0 dla każdego n ∈ N. Szereg jest więc zbieżny na mocy kryterium Leibniza

Zbadajmy jeszcze czy szereg jest zbieżny bezwzględnie.

Z dowolnego kryterium zbadamy czy szereg: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3-2}$ jest zbieżny. Niech to będzie kryterium ilorazowe.

Wybieramy pomocniczy szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, rozbieżny.

$$k=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^3-2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3-2}=1$$

Otrzymując skończoną liczbę k wykazaliśmy, że szereg: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3-2}$ jest rozbieżny. Ostatecznie szereg 81/ jest zbieżny tylko warunkowo.

82/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-4n}{10n-3}\right)^{2n}$.

Badamy warunek konieczny:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-4n}{10n-3}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{4}{10-\frac{3}{n}}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{16}{100}\right)^{n}=0$$

Warunek konieczny jest spełniony.
Badamy czy szereg jest zbieżny przy pomocy kryterium Cauchy'ego:

$$k=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{-4n}{10n-3}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-4n}{10n-3}\right)^{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{16n^2}{100n^2-60n+9}=\frac{16}{100}<1$$

Na mocy kryterium Cauchy'ego szereg jest zbieżny.

83/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$.

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}=1-\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}-\frac{1}{\ln 4}+..$$

Sprawdzamy czy warunek konieczny jest spełniony: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0$.
Warunek konieczny jest spełniony.
Aby sprawdzić czy ciąg bezwzględnych wartości wyrazów szeregu jest malejący, wykorzystamy fakt, że funkcja $y = lnx$ jest rosnąca.

Ponieważ $\ln(n+1)>\ln n$ *to* $\frac{1}{\ln(n+1)}<\frac{1}{\ln n}$

Własność ta obowiązuje dla wszystkich $n \geq 2$. Ciąg bezwzględnych wartości wyrazów szeregu jest zatem malejący.
Zgodnie z kryterium Leibniza szereg jest zbieżny.

Sprawdzamy czy szereg jest bezwzględnie zbieżny.

Ponieważ $\ln n<n$ *zatem* $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ jest rozbieżny, więc na mocy kryterium porównawczego badany szereg jest rozbieżny. Ostatecznie szereg 83/ nie jest bezwzględnie zbieżny. Szereg 83/ jest zbieżny warunkowo.

84/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n}$.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n}=\frac{\ln 2}{2}-\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}-..$$

Sprawdzamy warunek konieczny zbieżności:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{H}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

Warunek konieczny jest zatem spełniony.

Ponieważ dla każdego $n \in N$, $\ln(n) < n$, oraz $n+1 > n$ więc można zapisać:

$$n+1>n,\quad \frac{1}{n+1}<\frac{1}{n};$$

Ponieważ $\ln(n+1)>\ln n$ *zatem* $\frac{\ln(n+1)}{n+1}<\frac{\ln(n)}{n}$

Powyższy zapis dowodzi, że bezwzględne wartości wyrazów szeregu tworzą ciąg malejący.
Sprawdźmy jeszcze czy szereg jest zbieżny bezwzględnie.
Wykorzystajmy do tego celu kryterium porównawcze.

Badamy zatem szereg: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$. Dla $n>2$ prawdą jest, że $\ln n>1$. Mnożąc obustronnie ostatnią zależność przez $1/n$ otrzymujemy: $\frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n}$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ jest rozbieżny, stąd na mocy kryterium porównawczego rozpatrywany szereg także jest rozbieżny. Ostatecznie szereg 84/ jest zbieżny warunkowo.

85/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{\pi}{6n}$.

Wiadomo, że jest prawdą:

$$0<\left|\cos\frac{\pi}{6n}\right|<1;\quad \textit{oraz}\quad \frac{1}{2}<\left|\cos\frac{\pi}{6n}\right|$$

Dla $n \to \infty \quad u = \frac{\pi}{6n} \to 0; \quad \lim_{u \to 0} \cos u = 1$. A zatem warunek konieczny zbieżności szeregu nie jest spełniony. Szereg jest więc rozbieżny.

3. Wyznaczanie przedziałów zbieżności dla szeregów funkcyjnych

Szereg funkcyjny – to taki szereg, którego wyrazy są funkcjami:

(3.1) $$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ..$$

Obszar zbieżności szeregu – zbiór takich wartości x, dla których szereg funkcyjny jest zbieżny.

Szereg potęgowy – to szereg funkcyjny postaci:

(3.2) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ..$$

lub

(3.3) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ..$$

Obszar zbieżności dla szeregów potęgowych to przedział, symetryczny względem punktu x = 0 dla szeregu (3.2) oraz symetryczny względem x = x_0 dla szeregu (3.3).

Aby wyznaczyć obszar zbieżności szeregu funkcyjnego, korzystamy np. z kryterium d'Alemberta, a z pomocą innych kryteriów rozstrzyga się o zbieżności dla tych wartości x, dla których kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga zbieżności.

Promień zbieżności szeregu potęgowego to takie $R \geq 0$, że dany szereg jest zbieżny dla wartości x spełniających nierówność $|x| < R$.

Jeżeli istnieje zatem granica: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g \neq 0$

to promień zbieżności tego szeregu wynosi $R = \frac{1}{g}$. Jeżeli g = 0, to R = ∞.

Jeżeli g = ∞, to R = 0.

PRZYKŁADY

86/ *Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{1}{n}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + ..$$

Zapisujemy wyraz *n – ty* oraz *n+1 – szy:* $a_n = \frac{x^n}{n}; \quad a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1};$

Zgodnie z kryterium d'Alemberta szukamy granicy:

$$k = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1} n}{(n+1)x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{nx}{n+1} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = |x|$$

Badamy dla jakich wartości x granica ta jest mniejsza od jedności.

Stąd $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

Na mocy kryterium d'Alemberta szereg jest zbieżny w przedziale (-1,1).

Następnie badamy zbieżność szeregu na końcach przedziału.

Dla x = 1 otrzymujemy szereg liczbowy: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Jest to szereg harmoniczny, rozbieżny.

Dla x = -1 otrzymujemy szereg naprzemienny: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Wartości bez--względne wyrazów tego szeregu maleją, oraz szereg spełnia warunek konieczny zbieżności: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Na mocy kryterium Leibniza szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ jest zbieżny. Nie jest to jednak zbieżność bezwzględna a tylko warunkowa ponieważ szereg bezwzglę--dnych wartości wyrazów szeregu jest szeregiem harmonicznym rzędu pierwszego a więc rozbieżnym.

Ostatecznie przedziałem zbieżności rozpatrywanego szeregu potęgowego jest przedział $-1 \leq x < 1$.

87/ *Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu:* $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)!\, x^n$.

Wyznaczamy dwa kolejne wyrazy szeregu:

$$a_{n+1} = (n+2)!\, x^{n+1}; \qquad a_n = (n+1)!\, x^n;$$

Do określenia liczby „*g*", skorzystamy z kryterium d'Alemberta.

$$g = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+2)!\, x^{n+1}}{(n+1)!\, x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} |(n+2)x| = |x| \lim_{n\to\infty} |n+2| = \infty$$

A więc R = 0, a szereg jest zbieżny tylko dla x = 0.

88/ *Wyznaczyć przedział zbieżności* $\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n x^{2n}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n x^{2n} = 1 - 3x^2 + 3^2 x^4 - 3^3 x^6 + ...$$

$$a_{n+1} = (-3)^{n+1} x^{2n+2}; \qquad a_n = (-3)^n x^{2n};$$

$$g = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-3)^{n+1} x^{2n+2}}{(-3)^n x^{2n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| -3x^2 \right| = 3x^2$$

Zbadamy dla jakich *x* zachodzi $3x^2 < 1$.

$x^2 < \frac{1}{3}$; $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$;

Dla $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ otrzymujemy szereg liczbowy: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$.

Otrzymany szereg jest rozbieżny, a więc przedział zbieżności szeregu 88/ jest następujący: $(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}})$.

89/ *Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.

Podobnie jak poprzednie przykłady badamy szereg przy pomocy kryter--ium d'Alemberta.

$$g = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{((n+1)!)^2 x^{n+1}(2n)!}{(2n+2)!(n!)^2 x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2 x}{(2n+1)(2n+2)}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{4n^2+6n+2}\right| = \frac{1}{4}|x|$$

Zbadajmy dla jakich x zachodzi:

$$\frac{1}{4}|x| < 1; \quad |x| < 4; \quad -4 < x < 4;$$

Przedział zbieżności: *-4 < x < 4.*

90/ *Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$

Dla szeregu 90/ : $a_n = (-1)^{n-1}\frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$; $a_{n+1} = (-1)^n\frac{(x-4)^{2n+1}}{2n+1}$;

Z kryterium d'Alemberta obliczamy g:

$$g = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-4)^{2n+1}(2n-1)}{(2n+1)(x-4)^{2n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-4)^2(2n-1)}{(2n+1)}\right| = (x-4)^2\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n-1}{2n+1}\right| = (x-4)^2$$

Badamy dla jakich „*x*" zachodzi: $(x-4)^2 < 1$.

$$|x-4| < 1; \quad -1 < x-4 < 1; \quad 3 < x < 5;$$

Szereg jest zatem zbieżny w przedziale (3, 5).

Zbadamy jeszcze zbieżność szeregu na końcach przedziału.

Dla x = 3 otrzymujemy szereg liczbowy:

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n-2}}{2n-1}$$

Szereg (*) spełnia warunek konieczny zbieżności: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1} = 0$.

Ciąg bezwzględnych wartości wyrazów szeregu jest malejący ponieważ: $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} = \frac{-2}{(2n+1)(2n-1)} < 0$

Więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n-2}}{2n-1}$ jest zbieżny. Zbieżność ta jest tylko warunkowa ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ jest rozbieżny na mocy kryt. porównawczego:

Zachodzi bowiem: $2n-1 < 2n \quad n \in N$; $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$

a szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ to szereg harmoniczny, rozbieżny.

Dla x = 5 otrzymujemy szereg: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$, który podobnie jak poprzedni jest zbieżny warunkowo.

Ostatecznie więc przedział zbieżności szeregu 90/ to <3, 5>.

91/ *Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}$

Badamy szereg przy pomocy kryterium d'Alemberta:

$$g = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^5(x+5)^{2n+3}(n+1)!}{(n+2)!\,n^5(x+5)^{2n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^5}{n^5(n+2)}(x+5)^2\right| = (x+5)^2\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^5}{n^5(n+2)}\right| = 0 < 1$$

Okazało się więc, że szereg jest zbieżny dla dowolnego x. Przedział zbież--ności szeregu to: (-∞, +∞).

92/ *Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n+2}x^n$.

Do wyznaczenia przedziału zbieżności wykorzystamy kryterium d'Alemberta:

$$g = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^{n+1}x^{n+1}(n+2)}{(n+3)4^n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4x(n+2)}{n+3}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4(n+2)}{n+3}\right| = 4|x|$$

Badamy dla jakich x spełniony jest warunek: $4|x| < 1$.

$$4|x| < 1; \quad |x| < \frac{1}{4}; \quad -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4};$$

Badamy szereg na końcach otrzymanego przedziału.

Dla $x = \frac{1}{4}$ otrzymujemy szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n+2}$.

Szereg ten jest rozbieżny na mocy kryterium ilorazowego. Niech $b_n = \frac{1}{n}$

$$k = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n+2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+2} = 4$$ (Patrz (1.15) str. 22)

Dla $x = -\frac{1}{4}$ otrzymujemy szereg: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\left(-\frac{1}{4}\right)^n}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$. Szereg ten jest zbieżny warunkowo na mocy kryterium Leibniza co łatwo sprawdzić.

Ostatecznie przedziałem zbieżności szeregu jest przedział: $<-\frac{1}{4};\frac{1}{4})$

93/ *Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$

Skorzystamy z kryterium Cauchy'ego:

$$g = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n^{\frac{1}{2}}}\right|} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}}}} = |x|$$

Sprawdzamy kiedy zachodzi: $|x|<1$. Warunek ten jest spełniony dla:
$-1<x<1$.
Badamy szereg na końcach przedziału.
Dla $x = 1$ otrzymujemy szereg liczbowy: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$. Jest to szereg harmoniczny rzędu $\alpha = ½$. Na mocy kryterium porównawczego jest on rozbieżny.
Prawdą jest bowiem, że: $n^{1/2} < n$; *zatem* $\frac{1}{n^{1/2}} > \frac{1}{n}$ a szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

Dla $x = -1$ otrzymujemy szereg: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{1/2}}$. Szereg ten spełnia warunek konieczny zbieżności szeregu: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Wartości bezwzględne wyrazów szeregu tworzą ciąg malejący.
Na mocy kryterium Leibniza szereg dla $x = -1$ jest zbieżny warunkowo, ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ jest rozbieżny (co wykazano powyżej).
Ostatecznie przedziałem zbieżności szeregu 93/ jest przedział: $\langle -1, 1)$.

94/ *Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu:* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{10^n}x^n$.

Do obliczeń wykorzystamy kryterium d'Alemberta.

$$g = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{(n+1)!}\,x^{n+1}10^n}{10^{n+1}x^n\sqrt{n!}}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n+1}}{10}\right| = \infty$$

Szereg 94/ jest zatem rozbieżny a promień zbieżności wynosi 0.

95/ *Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n^2}{4^n+n^3}x^n$.
Skorzystamy z kryterium d'Alemberta.

$$g = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3^{n+1}+(n+1)^2)x^{n+1}(4^n+n^3)}{(4^{n+1}+(n+1)^3)(3^n+n^2)x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3+\frac{3n^3}{4^n}+\frac{(n+1)^2}{3^n}+\frac{n^3(n+1)^2}{3^n4^n}}{4+\frac{4n^2}{3^n}+\frac{(n+1)^3}{4^n}+\frac{n^2(n+1)^3}{3^n4^n}}\right| = \frac{3}{4}|x|$$

Szereg jest zbieżny dla x, które spełniają warunek:

$$\frac{3}{4}|x|<1;\quad |x|<\frac{4}{3};\quad -\frac{4}{3}<x<\frac{4}{3}$$

Dla $x = \frac{4}{3}$ otrzymujemy szereg: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3}\frac{3^n+n^2}{4^n+n^3}$

Szereg ten nie spełnia warunku koniecznego zbieżności, ponieważ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\frac{(3^n+n^2)}{(4^n+n^3)} = \frac{4}{3} \neq 0$$

A zatem szereg nie jest zbieżny dla $x = 4/3$. Podobnie dla $x = -4/3$ nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności.
Ostatecznie przedział zbieżności dla szeregu 95/ ma postać: $(-\frac{4}{3},\frac{4}{3})$.

96/ *Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{a^{n^2}}$ *dla* $a > 1$.
Z kryterium d'Alemberta obliczamy g:

$$g = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}a^{n^2}}{a^{(n+1)^2}n!\,x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a^{n^2}}{a^{(n+1)^2}} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{na^{n^2}+a^{n^2}}{a^{(n+1)^2}} = 0$$

A zatem szereg 96/ jest zbieżny dla każdego $n \in N$. Promień zbieżności szeregu wynosi $R = +\infty$.

97/ *Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin^2\frac{2}{n}\right)x^n$
Przy pomocy kryterium d'Alemberta obliczamy g:

$$g = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\sin^2\frac{2}{n+1}}{x^n\sin^2\frac{2}{n}}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{4}{(n+1)^2}\sin^2\frac{2}{n+1}}{\frac{4}{(n+1)^2}}\cdot\frac{\frac{4}{n^2}}{\frac{4}{n^2}\sin^2\frac{2}{n}}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = |x|$$

Określamy dla jakich x spełniony jest warunek: g < 1.

$$|x|<1;\quad -1<x<1;$$

Dla x = 1 otrzymujemy szereg liczbowy: $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{2}{n}$

$$\bigwedge_{n\in N} 0 < \sin^2\frac{2}{n} < \frac{2}{n}\frac{2}{n} = \frac{4}{n^2}$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{2}{n}$ na mocy kryterium porównawczego jest także zbieżny.
Dla x = -1 otrzymujemy szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin^2\frac{2}{n}$
Jest to szereg przemienny. Sprawdzamy czy spełnia kryterium Leibniza.
Warunek konieczny zbieżności jest spełniony, ponieważ:

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{2}{n} = 0$$

Dla $n\to\infty$, $\sin\frac{2}{n}\to 0$ więc ciąg jest malejący.
Warunki kryterium Leibniza są spełnione. Szereg jest także zbieżny bezwzględnie ponieważ szereg bezwzględnych wartości wyrazów jest zbieżny. Ostatecznie przedział zbieżności szeregu ma postać:
$-1 \le x \le 1$.

98/ *Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{tg^n x}{n^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{tg^n x}{n^2}=tgx+\frac{tg^2 x}{2^2}+\frac{tg^3 x}{3^2}+\frac{tg^4 x}{4^2}+..$$

Zbadamy szereg przy pomocy kryterium d'Alemberta:

$$g=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2 tg^{n+1}x}{(n+1)^2 tg^n x}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2 tgx}{(n+1)^2}\right|=|tgx|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=|tgx|$$

Sprawdzamy dla jakich x szereg jest zbieżny:

$$|tgx|<1;\quad -1<tgx<1;$$

$$k\pi-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}+k\pi;\quad \pi\left(k-\frac{1}{4}\right)<x<\pi\left(k+\frac{1}{4}\right)$$

Ostatnia nierówność określa jednocześnie przedział zbieżności szeregu dla $k\in Z$(całkowite). Badamy szereg na końcach przedziału:
Dla $x=\frac{\pi}{4}$ otrzymujemy szereg liczbowy, zbieżny:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{tg^n\frac{\pi}{4}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Powyższy szereg jest to szereg harmoniczny rzędu drugiego, a więc zbieżny. Dla $x=-\pi/_4$ otrzymujemy szereg liczbowy:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ Na mocy kryterium Leibniza szereg ten jest zbieżny. Jest także zbieżny bezwzględnie co łatwo wykazać. Ostatecznie przedział zbieżności ma postać : $<-\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi>$

99/ *Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lg^n x}{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lg^n x}{n}=\frac{\lg x}{1}+\frac{\lg^2 x}{2}+..$$

Szereg badamy przy pomocy kryterium d'Alemberta:

$$g=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\log^{n+1}x}{(n+1)\log^n x}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\log x}{n+1}\right|=|\log x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|=|\log x|$$

Szereg jest zbieżny dla g < 1. A zatem:

$$|\log x|<1;\quad -1<\log x<1;$$

$$\frac{1}{10}<x<10$$

Badamy szereg na końcach przedziału:
Dla $x=1/_{10}$ szereg przybiera postać: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^n\frac{1}{10}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$
Szereg jest zbieżny warunkowo.
Spełnia on kryterium Leibniza ale jako szereg bezwzględnych wartości

jest rozbieżny jako szereg harmoniczny pierwszego rzędu.
Dla x = 10 szereg ma postać: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^n 10}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$
Jest to szereg harmoniczny pierwszego rzędu i jest on rozbieżny.
Ostatecznie więc przedział zbieżności szeregu to : <1/10; 10)

100/ *Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu:* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x^n}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x^n}=1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+..$$

Z kryterium d'Alemberta: $g=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{x^{n+1}}}{\frac{1}{x^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{|x|}$

$$\frac{1}{|x|}<1$$

$$x>1\ \vee\ x<-1$$

Dla x = 1 oraz x = -1 otrzymujemy szeregi rozbieżne, ponieważ nie nie spełniają warunku koniecznego zbieżności.

4. Rozwijanie funkcji w szereg Taylora i Maclaurina

Jeżeli funkcja f(x) spełnia następujące warunki w przedziale: $(x_0-\delta;x_0+\delta)$
a/ funkcja ma pochodne każdego rzędu w przedziale;
b/ $\lim_{n\to\infty}R_n=0$, gdzie R_n oznacza resztę szeregu postaci:

$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$ gdzie $c\in(x_0-\delta;x_0+\delta)$. Reszta znana jest pod nazwą reszty Lagrange'a. ,
to funkcję można rozwinąć w szereg zwany wielomianem Taylora postaci:
(4.1)

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+..+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^2+R_n(x)$$

Dla $x_0=0$ szereg Taylora nazywamy szeregiem Maclaurina.
Praktycznie, aby rozwinąć funkcję w szereg Taylora należy:
a/ Obliczyć wartość tej funkcji i jej pochodnych dla $x=x_0$;
b/ Podstawić obliczone wartości do ogólnego wyrażenia szeregu Taylora;
c/ Zbadać resztę R_n dla danej funkcji i określić zbiór wartości, dla których szereg jest zbieżny.
Zazwyczaj przedział zbieżności szeregu Taylora pokrywa się ze zbiorem tych wartości x, dla których reszta $R_n\to 0$. Dlatego ograniczamy się do

badania przedziału zbieżności szeregu Taylora, jako zwykłego szeregu potęgowego.

PRZYKŁADY

101/ *Rozwinąć funkcję* $y=e^x$ *w szereg Maclaurina.*
Obliczamy wartości danej funkcji i jej pochodnych dla x = 0:

$$f(a)=e^0=1;\ f'(x)=f''(x)=..=f^{(k)}(x)=e^x;$$
$$f'(0)=f''(0)=..f^{(k)}(0)=1$$

Wstawiając otrzymane wartości do wzoru Maclaurina, otrzymujemy po-szukiwane przybliżenie funkcji $y=e^x$:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+..+\frac{x^n}{n!}$$

Badamy resztę R_n :

$$R_n=\frac{f^{n+1}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1};0<\theta<1;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}=0;$$

Wynika z tego, że dla każdej wartości x funkcję $y=e^x$ można aproksymo-wać przy pomocy szeregu Maclaurina z dowolną dokładnością.

102/ *Rozwinąć funkcję y = sinx w szereg Maclaurina.*
Obliczamy wartości funkcji i jej pochodnych dla x = 0.

$$f(x)=\sin x \quad f(0)=0$$
$$f'(x)=\cos x \quad f'(0)=1$$
$$f''(x)=-\sin x \quad f''(x)=0$$
$$f'''(x)=-\cos x \quad f'''(x)=-1$$

Warto zauważyć, że wszystkie pochodne parzystego rzędu są dla x = 0 równe 0. W rozwinięciu Maclaurina będą zatem tylko wyrazy o niepa-rzystych potęgach.

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-..+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Badamy także resztę:

$$R_n=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(\theta x+(2n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$
$$|\sin x|\le 1\to \lim_{n\to\infty}R_n=0.$$

Wykorzystano fakt, że dla każdej wartości x zachodzi: $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$.

Dla dowolnej liczby x, zawsze można znaleźć takie dwie kolejne liczby naturalne k oraz k +1, między którymi zawiera się | x |: k < | x | < k +1. Otrzymujemy zatem oczywistą nierówność:

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right|=\left|\frac{x^k}{k!}\frac{x}{k+1}\frac{x}{k+2}..\frac{x}{n}\right|<\left|\frac{x^k}{k!}\right|\left|\frac{x}{k+1}\right|^{n-k}$$

Pierwszy z czynników nie zależy od n i dla dowolnej ustalonej wartości x jest wielkością stałą.

Drugi czynnik $\left|\frac{x}{k+1}\right|^{n-k}$ jest wielkością nieskończenie małą, ponieważ $\left|\frac{x}{k+1}\right|<1$

103/ *Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję y = cosx.*
Podobnie jak w poprzednich przykładach obliczamy wartości funkcji oraz jej pochodnych dla x = 0.

$$f(x)=\cos x \quad f(0)=1$$
$$f'(x)=-\sin x \quad f'(0)=0$$
$$f''(x)=-\cos x \quad f''(0)=-1$$
$$f'''(x)=\sin x \quad f'''(0)=0$$

Dla funkcji y = cosx wszystkie wartości pochodnych nieparzystego rzędu są równe 0 dla x = 0. Wynika stąd, że w szeregu Maclaurina znajdą się tylko wartości pochodnych dla x = 0 parzystego rzędu.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+..+(-1)^{n+2}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie reszta dla $n\to\infty$, dąży do 0.

104/ *Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję* $f(x)=(2+x)e^x$.
Wykorzystamy możliwość wykonywania działań na szeregach potęgowych w przedziale, w którym obydwa szeregi są zbieżne równocześnie.

Własność (4.2)

Dwa szeregi potęgowe można dodawać wyraz do wyrazu tak jak dodaje się wielomiany.

Własność (4.3)

Dwa szeregi potęgowe można mnożyć wyraz po wyrazie podobnie jak mnoży się wielomiany.

Własność (4.4)

W przedziale zbieżności szereg potęgowy można całkować wyraz po wyrazie, a wewnątrz tego przedziału można go różniczkować wyraz po wyrazie.

Własności te są bardzo przydatne przy rozwijaniu funkcji w szeregi.
Aby rozwinąć funkcję w szereg potęgowy wykorzystamy zad 101/.

$f(x)=2e^x+xe^x$

$$e^x=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+..\right)$$

$$xe^x=x+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+..$$

$$2e^x=2+\frac{2x}{1!}+\frac{2x^2}{2!}+\frac{2x^3}{3!}+..$$

$$(2+x)e^x=\left(2+\frac{2x}{1!}+\frac{2x^2}{2!}+\frac{2x^3}{3!}+..\right)+\left(x+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+..\right)=$$

$$2+\left(\frac{3x}{1!}+\frac{4x^2}{2!}+\frac{5x^3}{3!}+..+\frac{(n+2)}{n!}x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)}{n!}x^n$$

105/ *Rozwinąć funkcję* $y=\frac{1}{x}$ *w otoczeniu punktu* $x_0 = 2$ *w szereg Taylora.*
Obliczamy wartość funkcji oraz wartości pochodnych dla $x_0 = 2$.

$$f(x)=\frac{1}{x};\quad f(2)=\frac{1}{2};$$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}=(-1)x^{-2};\quad f'(2)=-\frac{1}{4};$$

$$f''(x)=2x^{-3}=1*2x^{-3};\quad f''(2)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4};$$

$$f'''(x)=-6x^{-4}=-1*2*3x^{-4};\quad f'''(2)=-\frac{3}{8};$$

$$f^{(4)}(x)=1*2*3*4x^{-5};\quad f^{(4)}(2)=\frac{3}{8};$$

Na podstawie obliczeń wnioskujemy o postaci n - tej pochodnej:

$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!x^{-(n+1)}$

Stąd podstawiając do wzoru (4.1) na szereg Taylora otrzymujemy:

$$f(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2-..+(-1)^k\frac{(x-2)^k}{2^{k+1}}+..(-1)^n\frac{(x-2)^n}{(c)^{n+1}}$$

Ostatecznie otrzymujemy szereg:

$$\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}$$

Szereg ten jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\left|\frac{2-x}{2}\right|<1$.
Stąd funkcję można rozwinąć w szereg Taylora w otoczeniu $x_0 = 2$ tylko dla x: $|x-2|<2;\quad 0<x<4$

106/ *Rozwinąć funkcję* $f(x)=\frac{1}{1-x}$ *w szereg Taylora w otoczeniu* $x_0 = 2$.
Obliczamy wartość funkcji oraz wartości kolejnych pochodnych dla $x_0 = 2$.

$$f(x)=\frac{1}{1-x};\quad f(2)=\frac{1}{-1}=-1$$

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=(1-x)^{-2};\quad f'(2)=(-1)^{-2};$$

$$f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}=2(1-x)^{-3};\quad f''(2)=2(-1)^{-3};$$

$$f'''(x)=\frac{6}{(1-x)^4}=6(1-x)^{-4};\quad f'''(2)=6(-1)^{-4};$$

$\vdots$

$$f^{(k)}(x)=\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}=k!(1-x)^{-(k+1)};\quad f^{(k)}(2)=k!(-1)^{-(k+1)};$$

Ostatecznie szereg Taylora dla funkcji $f(x)=\frac{1}{1-x}$, dla $x_0 = 2$ ma postać:

$$f(x)=(-1)+\frac{1!(-1)^{-2}}{1!}(x-2)^1+\frac{2!(-1)^{-3}}{2!}(x-2)^2+..+\frac{k!(-1)^{-k}}{k!}(x-2)^k+..=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-2)^n$$

W otoczeniu dowolnego punktu x_0 szereg ma postać:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1-x_0}\right)^{n+1}(x-x_0)^n$$

Szereg powyższy można zapisać następująco: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_0}{1-x_0}\right)^n$.
Jest on zbieżny tylko wtedy gdy:

$$\left|\frac{x-x_0}{1-x_0}\right|<1;\ \textit{czyli}\quad |x-x_0|<|1-x_0|$$

$$x_0-|1-x_0|<x<|1-x_0|+x_0$$

Dla $x_0 = 2$ otrzymujemy przedział (1, 3), jako przedział, w którym funkcję można rozwinąć w szereg Taylora.

107/ *Rozwinąć funkcję* $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ *w szereg Maclaurina dla* $|x| < 1$.
Obliczamy wartości funkcji i pochodnych dla $x_0 = 0$:

$$f(0)=1=\binom{\alpha}{0}$$

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1};\quad f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2};\quad f'''(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3};$$

$$f^k(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

Wobec tego szereg Maclaurina dla $x_0 = 0$ zapiszemy:

$$f(x)=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).(\alpha-n+1)}{n!}x^n+..=\binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+...+\binom{\alpha}{k}x^k+..=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

Obliczymy promień zbieżności tego szeregu korzystając z kryterium d'Alemberta:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)..(\alpha-n)}{n!(n+1)}\frac{n!}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)..(\alpha-n+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|=1$$

Stąd szereg można rozwinąć w szereg Maclaurina dla dowolnego α, w przedziale (-1, 1).

108/ *Rozwinąć funkcję f(x) = ln(x) w szereg Taylora w otoczeniu $x_0=1$.*

Obliczamy wartość funkcji oraz wartości kolejnych pochodnych dla $x_0 = 0$.

$$f(x)=\ln x;\quad f(1)=0;$$

$$f'(x)=\frac{1}{x};\quad f'(1)=1;$$

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}=-1x^{-2};\qquad f''(1)=-1;$$

$$f'''(x)=(-1)(-2)x^{-3};\quad f'''(1)=1*2!;$$

$$f^{(4)}(x)=(-1)(-2)(-3)x^{-4};\quad f^{(4)}(1)=-1*3!;$$

$$f^{(k)}(x)=(-1)(-2)(-3)..(-k-1)x^{-k}=(-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k};\quad f^{(k)}(1)=(-1)^{k-1}(k-1)!$$

Stąd:

$$f(x)=\ln x=\frac{x-1}{1}-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-..+\frac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k}+..$$

Na koniec badamy resztę R_n:

$$R_n=\frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{(n+1)(\theta x)^{n+1}}=\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x-1}{1+\theta(x-1)}\right)^{n+1}\quad dla\quad 0<\theta<1;$$

dla $n\to\infty$ oraz $-1\le x-1\le 1$, $R_n\to 0$.

109/ *Rozwinąć w szereg Maclaurina tzn. w otoczeniu punktu 0, funkcję y = ln(x+1).*

Aby rozwinąć powyższą funkcję w szereg możemy wykorzystać poprzednie zadanie. Zamiast zmiennej x wystarczy bowiem wstawić x + 1. $f(x)=\ln(x+1)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-..+\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}+..=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

Na mocy kryterium d'Alemberta szereg jest zbieżny dla | x | < 1:

$$g=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n}{(n+1)x^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|=|x|$$

dla x = 1 otrzymujemy szereg liczbowy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

zbieżny na mocy kryterium Leibniza. Dla x = -1 otrzymujemy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{-1}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ a zatem szereg rozbieżny.

Ostatecznie funkcję f(x) = ln(1+x) można rozwinąć w szereg Maclaurina w przedziale $-1 < x \le 1$.

110/ *Rozwinąć funkcję y = ln(3x + 1) w szereg Taylora w otoczeniu $x_0 = 1$.*

Aby rozwinąć funkcję y = ln(3x+1) w szereg Taylora wykorzystamy rozwiązanie zadania 108/.

Wystarczy podstawić w otrzymanym w zadaniu 108/ rozwinięciu, 3x + 1 zamiast x.

Otrzymujemy wówczas:

$$\ln(3x+1)=\frac{(3x+1-1)}{1}-\frac{(3x+1-1)^2}{2}+\frac{(3x+1-1)^3}{3}-..+\frac{(-1)^{k-1}(3x+1-1)}{k}+..=$$

$$=\frac{3x}{1}-\frac{(3x)^2}{2}+\frac{(3x)^3}{3}-...+\frac{(-1)^{k-1}(3x)^k}{k}+..=\sum_{n+1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n x^n}{n}$$

Szereg ten jest zbieżny dla $-\frac{1}{3}<x\le\frac{1}{3}$. Prosty dowód pozostawiam czytelnikowi.

111/ *Rozwinąć funkcję* $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ *w szereg potęgowy.*

Korzystając z własności funkcji logarytmicznej zapisujemy:

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$$

Z zadania 109/ wiemy, że: $\ln(1+x)=\sum^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$.

Wykorzystując rozwiązanie zadania 108/, zapiszemy wstawiając za x „1-x":

$$\ln(1-x)=\frac{(-x)}{1}-\frac{(-x)^2}{2}+\frac{(-x)^3}{3}-..+\frac{(-1)^{k-1}(-x)^k}{k}+..=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

Ostatecznie korzystając z własności (4.2) otrzymujemy rozwiniecie:

$$\ln(x+1)-\ln(1-x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+..+\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}+..+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+..+\frac{x^k}{k}+..=$$

$$=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+..+\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}$$

112/ *Rozwinąć w szereg potęgowy funkcję $y = e^{-x}$.*
Do rozwiązania zadania wykorzystamy rozwiązanie zadania 101/. Wstawiając w rozwinięciu funkcji $y = e^x$, (-x) zamiast x, otrzymamy rozwinięcie żądanej funkcji.

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + .. + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + ..$$

113/ *Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję* $y = \frac{1}{x^2+2x+1}$.

Korzystając z własności (4.4) można otrzymać szereg potęgowy poprzez różniczkowanie innego szeregu wyraz po wyrazie wewnątrz przedziału zbieżności. Wykorzystamy w tym celu zadanie 107/.
Zauważmy, że:

$$y = \left(-\frac{1}{1+x}\right)' = \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{x^2+2x+1}$$

$$\left(\frac{-1}{1+x}\right)^1 = -(1+x)^{-1} = -\left(1 + \frac{(-1)x}{1!} + \frac{(-1)(-2)}{2!}x^2 + .. + \frac{(-1)(-2)(-3).(-1-k+1)}{k!}x^k + ...\right) =$$
$$= -1 + x - x^2 + x^3 - .. + (-1)^k x^k + ..$$

Różniczkując wyraz po wyrazie otrzymujemy rozwinięcie w szereg funkcji 113/ :

$$f(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + .. + k(-1)x^k + ..$$

114/ *Rozwinąć w szereg potęgowy funkcję:* $y = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

Wykorzystamy rozwinięcie funkcji w szereg potęgowy z zadania 107/. Jako α przyjmijmy – ½ . Otrzymujemy wówczas:

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = 1 + \binom{-1/2}{1}x + \binom{-1/2}{2}x^2 + ... + \binom{-1/2}{k}x^k + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}x^n =$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{3}{4}x^2 + ...$$

W obliczeniach wykorzystano zależności:

$$\binom{-1/2}{1} = -\frac{1}{2}; \quad \binom{-1/2}{2} = \frac{\frac{-1}{2}\left(\frac{-3}{2}\right)}{1*2} = \frac{1}{2}*\frac{3}{4}; \quad \binom{-1/2}{3} = \left(\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)}{1*2*3}\right) = -\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6};$$

$$... \quad \binom{-1/2}{n} = (-1)^n \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}...\frac{2n-1}{2n}$$

115/ *Rozwinąć w szereg funkcję:* $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2}$.

Do rozwinięcia w szereg żądanej funkcji wykorzystamy poprzednie za-
-danie. Stąd, podstawiając za x, (-x) otrzymujemy rozwinięcie funkcji w szereg potęgowy:

$$y = (1-x)^{-1/2} = (1+(-x))^{-1/2} = 1 + \binom{-1/2}{1}(-x) + \binom{-1/2}{2}(-x)^2 + .. + \binom{-1/2}{n}(-x)^n + .. = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-1)^{n+1}x^n$$

116/ *Rozwinąć w szereg potęgowy funkcję :* $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Do rozwiązania zadania wykorzystamy poprzednie zadanie. A mianowicie wystarczy zamiast (-x) wstawić ($-x^2$). Otrzymamy wówczas:

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 - \binom{-1/2}{1}x^2 + \binom{-1/2}{2}x^4 + .. + (-1)^n\binom{-1/2}{n}x^{2n} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-1/2}{n}x^{2n}$$

117/ *Rozwinąć w szereg funkcję:* $y = \arcsin x$
Ponownie wykorzystamy gotowe już rozwinięcie. Jeżeli bowiem sze-
-reg 116/, wykorzystując własność szeregów potęgowych (4.4) zcałkujemy stronami w przedziale <0; x>, to otrzymamy rozwinięcie w szereg funkcji y = arcsin x. Stąd:

$$y = \arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + ... + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}*.*\frac{2n-1}{2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ..$$

118/ *Rozwinąć funkcję w szereg:* $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.

Do rozwiązania zadania wykorzystamy zadanie 114/. Zamiast (x) zapisze-
-my x^3 . A zatem:

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = (1+x^3)^{-1/2} = 1 + \binom{-1/2}{1}x^3 + \binom{-1/2}{2}x^6 + \binom{-1/2}{3}x^9 + .. + \binom{-1/2}{k}x^{3k} + .. = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}x^{3n}$$

119/ *Rozwinąć w szereg funkcję:* $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.

Podobnie jak poprzedni szereg otrzymamy rozwinięcie w szereg funkcji 119/. Wystarczy w zadaniu 114, zamiast (x) wstawić x^4.

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = (1+x^4)^{-1/2} = 1 + \binom{-1/2}{1}x^4 + \binom{-1/2}{2}x^8 + ... + \binom{-1/2}{k}x^{4k} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}x^{4n}$$

***Uwaga!** Wykorzystując rozwinięcie pewnej funkcji w szereg potęgowy do otrzymania rozwinięcia w szereg innej funkcji, przyjmujemy jako przedział zbieżności, przedział zbieżności szeregu wyjściowego czyli pomocniczego.*

120/ *Rozwinąć w szereg potęgowy funkcję:* $y=\sqrt{1-x^3}$.
Wykorzystamy zadanie 114/. Zastępujemy (x), ($-x^3$) oraz jako α przyjmijmy ½ . Stąd:

$$y=\sqrt{1-x^3}=\left(1-x^3\right)^{1/2}=1+\binom{1/2}{1}\left(-x^3\right)+\binom{1/2}{2}\left(-x^3\right)^2+\binom{1/2}{3}\left(-x^3\right)^3+\ldots+\binom{1/2}{k}\left(-x^3\right)^k+..=$$

$$=1-\frac{1}{1!*2}x^3-\frac{1}{2!*2^2}x^6-\frac{1*3}{3!*2^3}x^9-..=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-1)^n x^{3n}$$

Wykorzystaliśmy zależności:

$$\binom{1/2}{1}=\frac{1}{2};\binom{1/2}{2}=\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}=-\frac{1}{2!*2^2};\quad \binom{1/2}{3}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}=\frac{1*3}{3!*2^3};$$

$$\binom{1/2}{n}=(-1)^{n+1}\frac{1*3*5...*n}{n!*2^n}$$

***Uwaga!* Rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji $y=(1+x)^m$ jest tzw. szeregiem dwumiennym. Dla wykładnika m naturalnego szereg będzie zwierał skończoną ilość wyrazów równą m +1. W tych przy- -padkach powyższy szereg sprowadza się do wzoru na dwumian Newtona. Gdy m nie jest liczba naturalną na mocy kryterium d'Alemberta szereg dwumienny jest zbieżny w przedziale (-1, 1).**

121/ *Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję:* $y=\frac{1}{1+x^2}$.
Funkcję 121/ zapiszmy następująco:

$$y=\frac{1}{1+x^2}=\left(1+x^2\right)^{-1}$$

Wykorzystamy tu szereg dwumienny (zad. 107/), przyjmując zamiast (x), (x^2) oraz α = -1. A zatem:

$$\binom{-1}{0}=1;\quad \binom{-1}{1}=-1;\quad \binom{-1}{2}=\frac{(-1)(-2)}{2!};\quad \binom{-1}{3}=\frac{(-1)(-2)(-3)}{3!};$$

$$\ldots\quad \binom{-1}{n}=\frac{(-1)(-2).(-n)}{n!};$$

Funkcja po rozwinięciu w szereg:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+..+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+..=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}$$

122/ *Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję y = arctgx.*
Wykorzystując własność szeregów potęgowych (4.4) i całkując szereg z zadania 121/ w granicach od 0 do x otrzymamy szukany szereg:

$$\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+..=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

123/ *Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję* $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Aby rozwinąć funkcję w szereg wykorzystamy rozwinięcie funkcji $y=e^x$.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+..$$

$$\sinh(x)=\frac{\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)-\left(1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)}{2}=\frac{\frac{2x}{1!}+\frac{2x^3}{3!}+\frac{2x^5}{5!}+\ldots}{2}=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

124/ *Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję* $y=\sqrt{x+1}$
Zapiszmy funkcję w postaci: $\sqrt{x+1}=(x+1)^{1/2}$

Ponownie skorzystajmy z szeregu dwumiennego dla α = ½ .

$$(1+x)^{1/2}=1+\binom{1/2}{1}x+\binom{1/2}{2}x^2+\binom{1/2}{3}x^3+..+\binom{1/2}{n}x^n+..=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2!2^2}x^2+\frac{1*3}{3!2^3}x^3+..=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}x^n$$

125/ *Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję y = sin* x^2.
W rozwinięciu funkcji y = sinx wystarczy wstawić (x^2) zamiast (x).
Dla przypomnienia rozwiniecie funkcji y = sinx ma postać:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+..+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

A zatem rozwinięcie funkcji y = sin x^2.

$$\sin x^2=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\ldots$$

126/ Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $y = a^x$ dla $a > 0$.
Obliczamy wartość funkcji oraz wartości kolejnych pochodnych dla $x = 0$.

$$f(0)=a^0=1;\quad f'(x)=a^x\ln a\quad f'(0)=\ln a;$$
$$f''(x)=a^x(\ln a)^2;\quad f''(0)=(\ln a)^2$$
$$f'''(x)=a^x(\ln a)^3\quad f'''(0)=(\ln a)^3$$
$$f^k(x)=a^x(\ln a)^k\quad f^k(0)=(\ln a)^k$$
$$y=a^x=1+\frac{\ln a}{1!}x+\frac{(\ln a)^2}{2!}x^2+..+\frac{(\ln a)^k}{k!}x^k+..=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n$$

5. Szeregi Fouriera

Szereg trygonometryczny postaci (5.1) dla funkcji f(x):

(5.1)
$$\frac{a_0}{2}+\left(a_1\cos\frac{\pi x}{l}+b_1\sin\frac{\pi x}{l}\right)+\left(a_2\cos\frac{2\pi x}{l}+b_2\sin\frac{2\pi x}{l}\right)+..=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

w przedziale $<-l, l>$ nazywamy szeregiem Fouriera jeżeli współczynniki a_n i b_n zostały obliczone ze wzorów Fouriera:

(5.2)
$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\qquad n=0,1,2..$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\qquad n=1,2,3..$$

Warunkiem dostatecznym rozwijalności funkcji w szereg Fouriera jest spełnianie warunków **tw. Dirichleta**:
Jeżeli funkcja f(x) ma w przedziale <-l, l> skończoną ilość punktów nieciągłości pierwszego rodzaju (lub jest ciągła) i ma w nim skończoną liczbę ekstremów (albo nie ma ich wcale), to jej szereg Fouriera jest zbieżny. Przy tym:
a/ w punktach ciągłości funkcji f(x) szereg jest zbieżny do samej funkcji S(x) = f(x);
b/ w każdym punkcie x_k nieciągłości funkcji szereg jest zbieżny do średniej arytmetycznej obu granic jednostronnych:

$$S(x_k)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_k^-}f(x)+\lim_{x\to x_k^+}f(x)\right]$$

c/ na krańcach przedziału <-l, l> szereg jest zbieżny do średniej arytmetycznej jednostronnych granic funkcji, przy x zmierzającym do tych punktów od wewnątrz przedziału.

$$S(-l)=S(l)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to -l^+}f(x)+\lim_{x\to l^-}f(x)\right]$$

Dodatkowo warto zapamiętać, że ***dla funkcji parzystej*** wszystkie współ-czynniki b_n są równe 0, a szereg Fouriera odpowiadający takiej funkcji nie zawiera sinusów.
Dla funkcji nieparzystej wszystkie współczynniki a_n są równe 0, a szereg odpowiadający takiej funkcji zawiera wyłącznie sinusy.
Niektóre wzory dotyczące rozwijania funkcji w szereg Fouriera znajdzie czytelnik przy okazji rozwiązywania konkretnych zadań.

PRZYKŁADY

127/ *Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję: f(x) = π – x w przedziale (0, 2π).*
Do obliczenia współczynników szeregu Fouriera wykorzystamy wzory (5.2) a dla obliczenia wyrazu a_0 wykorzystamy wzór (5.3):

(5.3)
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(x)dx$$

Jako *l* przyjmiemy π, a jako granice całkowania przyjmiemy granice prze-działu (0, 2π).

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\pi x-\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi}=0$$
$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}\sin nx-\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{2\pi}=\frac{\sin 2\pi n}{n}-\frac{2}{n}\sin 2\pi n+\frac{1}{n\pi}\cos 2\pi n-$$
$$-\frac{1}{n\pi}\cos 0$$

Dla n parzystych i n nieparzystych współczynniki $a_k = 0$.

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2}\cos nx+\frac{1}{n}x\cos nx-\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{2\pi}=-\frac{1}{n}\cos 2\pi n+\frac{2}{n}\cos 2\pi n-$$
$$-\frac{\pi}{n^2}\sin 2\pi n+\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\cos 2\pi n+\frac{1}{n}$$

Obliczamy kilka kolejnych współczynników b_k:

$$b_1=1+1=2;\quad b_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1;\quad b_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\ldots b_n=2\frac{1}{n};$$
$$n\in<1,\infty>$$

Ostatecznie szereg Fouriera dla funkcji 127/ ma postać:

$$f(x)=2\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

128/ *Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję f(x) = | x | w przedziale (-π, π).*

Funkcja f(x) = | x | jest parzysta a zatem wszystkie współczynniki b_k będą równe 0. Do obliczenia pozostały zatem współczynniki a_0 oraz a_k. Funkcja spełnia warunki Dirichleta.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-xdx+\int_{0}^{\pi}xdx\right)=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{\pi}=\pi$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-x\cos kxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos kxdx=\frac{1}{\pi k^2}(2\cos k\pi-2)$$

(*Szczegółowe wyliczenie całek przez części pozostawiam czytelnikowi*)

Jeżeli k = 2, 4, 6.. ,czyli k jest liczbą parzystą wyrażenie wa nawiasie przyjmuje wartość 0.

Jeżeli k jest liczbą nieparzystą otrzymujemy następujące wartości a_k:

$$Dla\quad k=1\quad a_1=-\frac{4}{\pi};$$

$$Dla\quad k=3\quad a_3=-\frac{4}{3^2\pi};$$

$$\vdots$$

$$Dla\quad k=n\quad a_n=-\frac{4}{n^2\pi}.$$

Szereg Fouriera będzie zawierał wyrazy tylko z cosinusami:

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4\cos x}{1^2\pi}-\frac{4\cos 3x}{3^2\pi}-\frac{4\cos 5x}{5^2\pi}-...$$

129/ *Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję y = x dla x ∈ (-π, π).*

Funkcja jest nieparzysta a zatem wszystkie współczynniki a_k będą równe 0. Pozostały więc do obliczenia współczynniki b_k.

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin kxdx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-2\pi\cos k\pi}{k}+\frac{2\sin k\pi}{k^2}\right)$$

Dla k parzystych współczynniki b_k przyjmują postać: $b_k=-\frac{2}{k}$.

Dla k nieparzystych współczynniki b_k przyjmują postać:

$$b_k=\frac{2}{n}.$$

Podstawiając bowiem kolejne liczby k = 1, 2, 3.., otrzymujemy:

$$k=1\rightarrow\ b_1=2;\quad k=3\rightarrow\ b_3=\frac{2}{3};...k=2n-1\rightarrow\ b_k=\frac{2}{n}$$

$$k=2\rightarrow\ b_2=-1;\quad k=4\rightarrow\ b_4=\frac{-1}{2};...k=2n\rightarrow\ b_k=-\frac{2}{n}$$

A zatem szereg Fouriera dla funkcji y = x ma postać:

$$x=\frac{2\sin x}{1}-\frac{2\sin 2x}{2}+\frac{2\sin 3x}{3}-\frac{2\sin 4x}{4}+....=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

130/ *Rozwinąć funkcję w szereg Fouriera:*

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x<-\frac{\pi}{2}\\ \pi & -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$$

Funkcja f(x) jest parzysta więc wszystkie współczynniki b_k są równe 0.

Obliczamy zatem jedynie współczynniki a_0 oraz a_k.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi/2}0dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\pi dx+\int_{\pi/2}^{\pi}0dx=\frac{1}{\pi}[\pi x]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\pi$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\pi\cos kxdx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos kxdx=\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{2}{k}\sin\frac{k\pi}{2}$$

Dla n parzystych współczynniki a_k są równe 0.

Dla n nieparzystych współczynniki a_k mają postać:

$$a_n=\frac{2}{2n-1}(-1)^{n+1}$$

Szereg przyjmuje zatem postać:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+2\cos x-\frac{2}{3}\cos 3x+\frac{2}{5}\cos 5x-\frac{2}{7}\cos 7x-..=\frac{\pi}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(2n-1)}{2n-1}$$

131/ *Rozwinąć funkcję w szereg Fouriera:*

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ \pi & 0<x<\pi\end{cases}$$

Obliczamy kolejne współczynniki:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos kxdx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{k}\sin kx+\frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos\pi k}{k^2}-\frac{1}{k^2}\right)$$

Dla k parzystych $a_k = 0$, co łatwo sprawdzić obliczając kilka po-
-czątkowych wyrazów parzystych.
Dla k nieparzystych otrzymujemy:

$$k=1 \to \quad a_1 = -\frac{2}{\pi}; \quad k=3 \to \quad a_3 = -\frac{2}{9\pi};$$

$$\cdots k = n \to \quad a_n = -\frac{2}{\pi n^2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{k}\cos \pi k\right) = -\frac{\cos \pi k}{k}$$

Dla k parzystych otrzymujemy, współczynniki $b_k = -\frac{1}{n}$.
Dla k nieparzystych otrzymujemy, współczynniki b_k : $b_k = \frac{1}{n}$
Ostatecznie szereg ma postać:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x + \sin x - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{2\cos 3x}{3^2\pi} + \frac{\sin 3x}{3} - .. = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

132/ *Rozwinąć funkcję w szereg Fouriera*:

$f(x) = x - n \quad n \le x \le n+1 \quad n \in Z$

Jest to funkcja okresowa o okresie 1, stąd jako l przyjmujemy ½ .
Do rozwinięcia funkcji w szereg wykorzystamy wzory (5.4):

(5.4)

$$a_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)dx$$

Wzory (5.4) stosuje się przy rozwijaniu w szereg Fouriera funkcji o dowolnym okresie.

$$a_0 = 2\int_0^1 x dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1$$

$a_n = 2\int_0^1 x\cos 2\pi n x dx = 0$ ponieważ funkcja jest nieparzysta.

$$b_n = 2\int_0^1 x\sin 2n\pi x dx = 2\left[-\frac{x}{2n\pi}\cos 2\pi n x + \frac{1}{4\pi^2 n^2}\sin 2n\pi x\right]_0^1 = -\frac{1}{\pi n}$$

Ostatecznie otrzymujemy szereg:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi n x}{n} \qquad x \ne n.$$

133/ *Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję:* $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$
w przedziale $(-\pi,\pi)$.

Funkcja jest nieparzysta więc wszystkie współczynniki a_n równe 0.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx = \frac{2}{n\pi}[\cos nx]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & n = 2k; \\ \frac{4}{\pi n} & n = 2k-1; \end{cases}$$

Ostatecznie więc szereg Fouriera dla funkcji 133/ ma postać:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$ *(ponieważ w szeregu są tylko wyrazy z sinusami dla n nieparzystych).*

134/ *Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję $y = x\sin(x)$ dla $x \in \langle -\pi,\pi \rangle$.*

Przedział całkowania jest symetryczny względem x = 0.
Funkcja jest parzysta, więc wszystkie współczynniki b_n = są równe 0.
Obliczamy zatem współczynniki a_n :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x dx = \frac{1}{\pi}(-\pi\cos\pi + \sin\pi - \pi\cos\pi + \sin\pi) = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos nx dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(\sin(n+1)x + \sin x(1-n))dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(n+1)x dx +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(1-n)x dx = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{x}{n+1}\cos(n+1)x + \frac{1}{(n+1)^2}\sin(n+1)x\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-x}{1-n}\cos(1-n)x + \frac{1}{(1-n)^2}\sin(1-n)x\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\pi}{n+1}\cos(n+1)\pi + 0 - \frac{\pi}{n+1}\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1} - \frac{\pi}{1-n}\cos(1-n)\pi - \frac{\pi}{1-n}\cos(1-n)\pi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-2\cos(n+1)\pi}{n+1} - \frac{2\cos(1-n)\pi}{1-n}\right) = -\left(\frac{(1-n)\cos(n+1)\pi + (n+1)\cos(1-n)\pi}{1-n^2}\right) = \frac{-2\cos(n+1)\pi}{1-n^2} =$$

$$= \frac{2(-1)^n}{1-n^2}$$

(Przy obliczaniu całek wykorzystano metodę całkowania przez części)

Ostatecznie szereg Fouriera dla funkcji $y = x\sin x$ ma postać:

$$x\sin x = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{1-n^2}\cos nx$$

135/ *Rozwinąć funkcję $y = e^x$ w przedziale $(-\pi,\pi)$ w szereg Fouriera.*
O funkcji wiadomo także, że:
$f(x + 2\pi) = f(x)$; $f(-\pi) = f(\pi) = ½\,(e^{\pi} + e^{-\pi})$
Obliczamy kolejne współczynniki dla szeregu:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{1}{\pi}\left[e^x\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{ne^x \sin nx + e^x \cos nx}{n^2+1}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{\pi}\cos n\pi - e^{-\pi}\cos n\pi}{n^2+1}\right)$$

(Do obliczenia całki wykorzystano metodę całkowania przez części)
Przykładowo współczynniki a_n wynoszą:

$$a_1 = -\frac{1}{2\pi}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right);\quad a_2 = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{5\pi};\quad a_3 = \frac{-1}{10\pi}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right);$$

$$a_k = \frac{(-1)^n}{(n^2+1)\pi}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{\pi}\sin n\pi - ne^{\pi}\cos n\pi - e^{-\pi}\sin n(-\pi) + ne^{-\pi}\cos n(-\pi)}{n^2+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-ne^{\pi}\cos n\pi + ne^{-\pi}\cos n\pi}{n^2+1}\right) = -\frac{(-1)^n n\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)}{(n^2+1)\pi}$$

Ostatecznie szereg Fouriera dla funkcji $y = e^x$ wynosi:

$$e^x = \frac{1}{2\pi}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2+1)\pi}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)\cos nx - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n^2+1)\pi}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)\sin nx$$

136/ *Znaleźć rozwinięcie funkcji $y = e^x$ w szereg Fouriera w przedziale $(0, 2\pi)$.*
Aby otrzymać żądane rozwinięcie w przedziale: $(0, 2\pi)$ wystarczy całki z poprzedniego zadania obliczyć w nowych granicach zgodnych z granicami przedziału. A zatem otrzymujemy:
a

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x dx = \frac{e^{2\pi} - e^0}{\pi} = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{ne^x \sin nx + e^x \cos nx}{n^2+1}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{2\pi}\cos 2\pi n - 1}{n^2+1}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{e^{2\pi} - 1}{n^2+1}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x \sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^x \sin nx - ne^x \cos nx}{n^2+1}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-ne^{2\pi} + n}{n^2+1}\right) = \frac{-n}{\pi}\left(\frac{e^{2\pi} - 1}{n^2+1}\right)$$

$$f(x) = e^x = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx - n\sin nx}{n^2+1}\right)$$

137/ *Znaleźć rozwinięcie funkcji $y = e^x$ w szereg Fouriera w przedziale $(-2, 2)$.*
Podobnie jak w poprzednim zadaniu obliczymy całki dla znalezienia współ -czynników w nowych granicach (-2, 2).

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^x dx = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} = \frac{e^4 - 1}{2e^2}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^x \cos\frac{\pi n x}{2} dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(2e^x \sin\frac{\pi n x}{2}\right)\pi n}{\pi^2 n^2 + 4} + \frac{4e^x \cos\frac{\pi n x}{2}}{\pi^2 n^2 + 4}\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{4e^2(-1)^n}{\pi^2 n^2 + 4} - \frac{4(-1)^n}{e^2\left(\pi^2 n^2 + 4\right)}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{e^4 - 1}{e^2}\right)\frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2 + 4}$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^x \sin\frac{\pi n x}{2} dx = \frac{1}{2}\frac{\left(-2e^x \cos\frac{\pi n x}{2}\right)\pi n}{\pi^2 n^2 + 4} + \frac{1}{2}\frac{4e^x \sin\frac{\pi n x}{2}}{\pi^2 n^2 + 4} = \frac{1}{2}\left(\frac{-2e^4 \pi n \cos\pi n + (2\cos\pi n)\pi n}{e^2\left(\pi^2 n^2 + 4\right)}\right) =$$

$$= -\frac{\pi n(-1)^n}{\pi^2 n^2 + 4}\left(\frac{e^4 - 1}{e^2}\right)$$

W przedziale (-2, 2) funkcję $y = e^x$ można rozwinąć w szereg Fouriera następująco:

$$e^x = \frac{e^4 - 1}{4e^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^4 - 1)}{e^2}\frac{(-1)^n}{4 + \pi^2 n^2}\cos\frac{n\pi x}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^4 - 1)}{e^2}\frac{\pi n(-1)^n}{4 + \pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi x}{2} =$$

$$= \frac{e^4 - 1}{2e^2}\left(\frac{1}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4 + \pi^2 n^2}\left(2\cos\frac{n\pi x}{2} - \sin\frac{n\pi x}{2}\right)\right)$$

Do rozwinięcia funkcji w szereg wykorzystano wzory (5.2), gdzie $l = 2$.
138/ *Znaleźć rozwinięcie funkcji $y = x^2$ w szereg Fouriera w przedziale $(0, 2\pi)$, wiedząc że: $f(x + 2\pi) = f(x)$, $f(0) = f(2\pi) = 2\pi^2$.*

Obliczamy kolejne współczynniki ze wzorów Fouriera (5.2):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{8\pi^3}{3}\right)=\frac{8\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin nx+\frac{2}{n^2}x\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx\right]_0^{2\pi}=\frac{1}{\pi}\frac{4\pi}{n^2}\cos 2\pi n=\frac{4}{n^2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2}{n}\cos nx+\frac{2x\sin nx}{n^2}+\frac{2}{n^3}\cos nx\right]_0^{2\pi}=-\frac{1}{\pi}\frac{4\pi^2}{n}\cos 2n\pi=-\frac{4\pi}{n}$$

Ostatecznie rozwinięcie funkcji w szereg Fouriera ma postać:

$$x^2=\frac{8\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4\pi}{n}\sin nx=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\pi\sin nx}{n}\right)$$

139/ *Rozwinąć funkcję f(x) w szereg Fouriera według cosinusów:*

$$f(x)=\begin{cases}x & 0\le x<1\\ 2-x & 1\le x<2\end{cases}$$

Można rozwijać funkcję w niepełny szereg Fouriera zawierający tylko sinusy – ***przedłużenie nieparzyste*** lub zawierający same cosinusy - - ***przedłużenie parzyste***.

Jeżeli więc chcemy otrzymać rozwinięcie funkcji według cosinusów, zakładamy, że funkcja jest parzysta, przedłużamy ją parzyście na przedział sąsiadujący z lewej strony. Wszystkie współczynniki b_n są równe 0. Obliczamy zatem tylko współczynniki a_n, a jako *l* przyjmujemy długość wyjściowego przedziału.

Dla funkcji 139/ przyjmujemy, że: l = 2.

$$a_0=\frac{2}{2}\left(\int_0^1 xdx+\int_1^2(2-x)dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_1^2=1\right.$$

$$a_n=\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\left[\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^1+$$

$$+\left[\frac{(2-x)2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_1^2=\frac{4}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$a_n=\begin{cases}0 & n=2k\\ \dfrac{4}{n^2\pi^2} & n=2k-1;\end{cases}$$

Rozwinięcie funkcji 139/ w szereg Fouriera według cosinusów ma postać:

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}$$

140/ *Rozwinąć funkcję f(x) = xcosx w przedziale <0, π> w szereg Fouriera według samych sinusów.*

Jeżeli funkcję chcemy rozwinąć w szereg Fouriera według sinusów przedłużamy ją nieparzyście na sąsiedni z lewej strony przedział. Wszystkie współczynniki a_n są równe 0. Jako *l* przyjmiemy π.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos x\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{2}(\cos x\sin nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x(\sin(1+nx)-\sin(1-n))dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos(1+n)x}{(1+n)}+\frac{1}{(1+n^2)}\sin(1-n)x+\frac{x\cos(1-n)x}{(1-n)}-\frac{1}{(1-n)^2}\sin(1-n)x\right]_0^{\pi}=$$

$$=\frac{(-n+1)\cos(1+n)\pi-(1+n)\cos(n-1)\pi}{n^2-1}=\frac{(-1)^n2n}{n^2-1}\quad \text{dla } n\ge 2.$$

Dla n = 1 współczynnik b_1 obliczamy osobno:

$$b_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin xdx=-\frac{1}{2}$$

Ostatecznie szereg Fouriera dla funkcji 140/ ma postać:

$$y=x\cos x=-\frac{\sin x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{n^2-1}\sin nx$$

141/ *Rozwinąć funkcję f(x) w szereg Fouriera w przedziale (-2, 2).*

$$f(x)=\begin{cases}0 & -2<x<0\\ 2 & 0<x<2\end{cases}$$

Do obliczenia współczynników wykorzystamy wzory (5.2). Jako *l* Przyjmiemy l = 2.

$$a_o=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}0dx+\int_0^2 2dx\right)=\frac{1}{2}[2x]_0^2=2$$

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}0\cos\frac{\pi nx}{2}dx+\int_0^2 2\cos\frac{\pi nx}{2}dx\right)=\left[\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\right]_0^2=0$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^2 2\sin\frac{\pi nx}{2}dx=-\frac{2}{\pi n}\left[\cos\frac{\pi nx}{2}\right]_0^2=\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi n} dla & n = 2k-1; \\ 0\, dla & n = 2k; \end{cases}$$

Ostatecznie szereg Fouriera dla funkcji 141/ ma postać:

$$f(x) = 2 + \frac{4}{\pi(2n-1)} \sum \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

6. Zbieżność jednostajna szeregów

Zbieżność jednostajną szeregu oznaczamy:

(6.1) $$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \vec{\to} f(x)$$

Mówimy, że szereg jest zbieżny jednostajnie w zbiorze E, gdy:

(6.2) $$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{x\in E} \bigwedge_{n \geq n_0} |r_n(x)| < \varepsilon$$

gdzie $r_n(x)$ jest n – tą resztą szeregu.
Czyli szereg jest zbieżny jednostajnie w zbiorze E wtedy, gdy ciąg reszt jest zbieżny jednostajnie w zbiorze E do 0.
Do badania jednostajnej zbieżności szeregów wykorzystuje się kryterium Weierstrassa zbieżności jednostajnej szeregów.

Kryterium Weierstrassa:

(6.3)

Jeżeli spełnione są warunki:

a/ $\bigvee_{a_n} \bigwedge_{x\in<a,b>} |f_n(x)| \leq a_n \qquad n = 1,2,3..$

b/ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *jest jednostajnie zbieżny w* <a, b>.

PRZYKŁADY

142/ *Zbadać jednostajna zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n^2}$.

Wykorzystamy zależność: $$|\sin nx| \leq 1$$ $$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \left|\frac{1}{n^2}\right|.$$

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny oraz zachodzi:

$$\left|(-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

dla wszystkich $x \in R$.
Zatem na mocy kryterium Weierstrassa szereg jest jednostajnie zbieżny.

143/ *Zbadać zbieżność jednostajną szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{x}{n}}$ *w przedziale* $(0, \infty)$.
Dla dowolnego $x \in R$ i dowolnego $n \in N$ zachodzi:

$\left|\frac{1}{n^2} e^{-\frac{x}{n}}\right| = \frac{1}{n^2} e^{-\frac{x}{n}} < \frac{1}{n^2}$ a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny. Zatem na mocy (6.3) kryterium Weierstrassa badany szereg jest zbieżny jednostajnie dla $x \in (0, \infty)$

144/ *Zbadać zbieżność jednostajną szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *w przedziale* <-5, 5>.

Dla dowolnego $x \in$ <-5, 5> i dowolnego $n \in N$ zachodzi:
$\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \frac{5^n}{n!}$. Na mocy kryterium d'Alemberta szereg: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$ jest zbieżny, a zatem szereg 144/ jest jednostajnie zbieżny na mocy kryterium (6.3).

145/ *Zbadać zbieżność jednostajną szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(arctg\frac{x}{n}\right)^n$ *w przedziale* $\left(-\pi/4; \pi/4\right)$.

W przedziale $\left(-\pi/4; \pi/4\right)$ zachodzi:

$$|arctgx| \leq arctga = k < arctg\frac{\pi}{4} = 1$$

oraz szereg liczbowy nk^n jest zbieżny na mocy kryterium d'Alemberta.
A zatem szereg 145/ jest jednostajnie zbieżny na mocy (6.3).

146/ *Zbadać zbieżność jednostajną szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}$

Zbieżność szeregu zbadamy z kryterium Leibniza.
Jest to szereg przemienny. Bezwzględne wartości wyrazów szeregu tworzą ciąg malejący oraz dla każdego x,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = 0 .$$

Aby stwierdzić czy szereg jest zbieżny jednostajnie można badać resztę r_n.

$$|r_n(x)| < \frac{x^2}{1+\binom{n+1}{1}x^2+...+x^{2n+2}} < \frac{x^2}{(n+1)x^2} = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

Na podstawie definicji (6.2) szereg jest jednostajnie zbieżny dla

$$n+1 > \frac{1}{\varepsilon}; \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = n_0$$

7. Zadania różne dotyczące zastosowania szeregów

147/ *Obliczyć z dokładnością do 0,001 wartość ln (1,2).*

Do obliczeń wykorzystujemy rozwinięcie funkcji ln(1 + x) w szereg potęgowy.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ..$$

Jako x przyjmujemy 0,2 , otrzymując:

$$\ln(1+0{,}2) = \ln 1{,}2 = 0{,}2 - \frac{(0{,}2)^2}{2} + \frac{(0{,}2)^3}{3} + .. \approx 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}0026 = 0{,}2226$$

Aby obliczyć wartość ln(1,2) z dokładnością 0,001 sprawdzamy, wartość którego wyrazu jest mniejsza niż 0,001.
Wartość trzeciego wyrazu szeregu jest równa 0,0026.
Wartość czwartego wyrazu szeregu jest równa 0,0004.
Wystarczy zatem obliczyć sumę trzech pierwszych wyrazów szeregu ponieważ błąd sumy będzie mniejszy od wartości pierwszego odrzuconego wyrazu.

148/ *Obliczyć $\sqrt{e}$ z dokładnością do 0,001.*

Do obliczeń wykorzystamy rozwinięcie funkcji e^x w szereg potęgowy.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

Jako x przyjmujemy ½ i wstawiamy do powyższego szeregu:

$$e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!} + \frac{(\frac{1}{2})^2}{2!} + \frac{(\frac{1}{2})^3}{3!} + ... \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + 0{,}021 = 1{,}646$$

Czwarty wyraz szeregu dla x = ½ wynosi:

$$\frac{(\frac{1}{2})^4}{4!} = \frac{0{,}0625}{24} = 2{,}604*10^{-3} = 0{,}0026 > 0{,}001$$

Ponieważ czwarty wyraz szeregu jest większy od żądanej dokładności, obliczamy piąty wyraz szeregu dla x = ½ :

$$\frac{(\frac{1}{2})^5}{5!} = \frac{0{,}0312}{120} = 2{,}604*10^{-4} = 0{,}00026 < 0{,}001$$

A zatem wystarczy zsumować pierwsze 4 wyrazy aby uzyskać żadaną dokładność:

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + 0{,}0026 = 1{,}6486 =\approx 1{,}649$$

<u>Sposób II</u>

Zapiszmy resztę szeregu dla x = ½ :

$$\left|\sqrt{e} - \left(1 + \frac{(\frac{1}{2})}{1!} + \frac{(\frac{1}{2})^2}{2!} + .. + \frac{(\frac{1}{2})^{n-1}}{n-1}\right)\right| = \left|\frac{e^c(\frac{1}{2})^n}{n!}\right| < 10^{-3} \; dla \quad c \in (0,1)$$

Dla tak dobranego c zachodzi:

$$e^c < e < 3 \; / : n!2^n$$

$$\frac{e^c}{2^n n!} < \frac{e}{2^n n!} < \frac{3}{2^n n!}$$

$$\frac{(\frac{1}{2})^n e^c}{n!} < \frac{3}{2^n n!} < 10^{-3}$$

$$2^n n! > 3000$$

Podstawiając kolejne liczby naturalne okazuje się, że nierówność jest spełniona dla n ≥ 5. Stąd wystarczy obliczyć i zsumować cztery pierwsze wyrazy szeregu.

149/ *Obliczyć* $\sqrt[4]{205}$

Do obliczeń wykorzystamy rozwinięcie funkcji: $(1+x)^n$.

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

$$\sqrt[4]{260} = \sqrt[4]{256+4} = 4\sqrt[4]{1+\frac{4}{256}} = 4\sqrt[4]{1+\frac{1}{64}} = 4\left(1+\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{4}} = 4\left[1+\binom{\frac{1}{4}}{1}\left(\frac{1}{64}\right)+\binom{\frac{1}{4}}{2}\left(\frac{1}{64}\right)^2+..\right]$$

$$= 4\left(1 + \frac{1}{4}*\frac{1}{64} - \frac{1*3}{4*8}*\frac{1}{64^2} + \frac{1*3*7}{4*8*12}*\frac{1}{64^3} + ...\right)$$

$a_1 = 1$; $a_2 = 0,0039$; $a_3 = 0,000028$.
Już trzeci wyraz jest mniejszy niż żądana dokładność, a zatem wystarczy zsumować dwa pierwsze wyrazy szeregu.

$$\sqrt[4]{260} \approx 4(1+0.0039-0.0000228) = 4*1,0038772 \approx 4,0155$$

150/ *Obliczyć sin2 z dokładnością do 0,01.*

Do obliczeń wykorzystamy rozwinięcie funkcji sin x w szereg .

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ..$$

$$\sin 2 = 2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} + .. = 2 - \frac{8}{6} + \frac{32}{120} - \frac{5}{256} + ... \approx 0,913$$

151/ *Znaleźć sumę szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(2n+3)(2n+5)}$ *dla* $x \in R$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(2n+3)(2n+5)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{2}\left(\frac{1}{5*7} + \frac{1}{7*9} + \frac{1}{9*11} + ... + \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{2}\left(\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) + ... + \left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2n+5}\right) = \frac{x}{10}$$

152/ *Rozwiązać równanie:* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{2n-1} + 3x^{2n}\right) = \frac{5}{3}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(x + 3x^2 + x^3 + 3x^4 + .. + x^{2n-1} + 3x^{2n}\right) = \frac{5}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(x + x^3 + .. + x^{2n-1}\right) + \left(3x^2 + 3x^4 + .. + 3x^{2n}\right)\right) = \frac{5}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x\left(1 - x^{2n}\right)}{1 - x^2} + \frac{3x^2\left(1 - x^{2n}\right)}{1 - x^2}\right) = \frac{5}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - x^{2n}\right)\frac{x + 3x^2}{1 - x^2}\right) = \frac{5}{3}$$

$$|x| < 1 \quad i \quad \frac{x + 3x^2}{1 - x^2} = \frac{5}{3}$$

$$|x| < 1 \quad i \quad 14x^2 + 3x - 5 = 0;$$

$$|x| < 1 \quad i \quad x = -\frac{5}{7} \quad \text{lub} \quad x = \frac{1}{2}.$$

153/ *Obliczyć:* $x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + ...$ *dla* $|x| < 1$

Zapiszmy pomocniczo szereg geometryczny zbieżny:

$$x^3 + x^4 + x^5 + .. = \frac{x^3}{1-x} \qquad dla \quad |x| < 1$$

Wiadomo, że szereg możemy różniczkować wyraz po wyrazie w tym samym obszarze zbieżności. Stąd po zróżniczkowaniu otrzymamy szereg:

$$3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + ... = \frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2}$$

Do obydwu stron dodajemy x, otrzymując:

$$x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + .. = \frac{x\left(1 + x - x^2\right)}{(1-x)^2}$$

154/ *Rozwinąć w szereg potęgowy funkcję:* $\bigwedge_{x\in(-3,3)} f(x) = \frac{7-2x}{x^2 - 7x + 12}$

Rozłóżmy pomocniczo funkcję na ułamki proste:

$$\frac{7-2x}{x^2 - 7x + 12} = \frac{-1}{x-3} + \frac{-1}{x-4} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{x}{3}} + \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{x}{4}} = \left(\frac{1}{3} + \frac{x}{3^2} + \frac{x^2}{3^3} + ... + \frac{x^{n-1}}{3^n} + ..\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{4} + \frac{x}{4^2} + \frac{x^2}{4^3} + .. + \frac{x^{n-1}}{4^n} + ..\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}\right) x^{n-1}$$

155/ *Zbadać zbieżność szeregu:* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1+2+3+..n}{n^3}$ *oraz obliczyć jego sumę.*

Szereg jest naprzemienny. Sprawdźmy czy spełnia założenia tw. Leibniza. Sprawdzamy czy ciąg bezwzględnych wartości wyrazów szeregu jest malejący:

$$a_n = \frac{1+2+..+n}{n^3} = \frac{\frac{n+1}{2}n}{n^3} = \frac{n+1}{2n^2}; \qquad a_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)^2}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{2(n+1)^2} - \frac{n+1}{2n^2} = \frac{-n^2 - 2n - 1}{2n^2(n+1)^2} < 0$$

Sprawdźmy jeszcze warunek konieczny zbieżności:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}} = 0$$

Szereg spełnia kryterium Leibniza więc jest zbieżny.

Aby obliczyć sumę szeregu zauważmy, że szereg 155/ jest sumą arytmetyczną dwóch szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} \quad oraz \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

Wiadomo, że $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ *oraz* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\ln 2$ a zatem suma szeregu 155/ wynosi:

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{12}+\ln 2\right)$$

8. Ważniejsze szeregi

1/ ***Szereg Dirichleta*** (uogólniony szereg harmoniczny);

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} \quad \alpha\in R$$

Szereg ten jest zbieżny dla $\alpha>1$, a rozbieżny dla $\alpha\leq 1$.

2/ ***Szereg anharmoniczny***:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

jest zbieżny a jego suma wynosi ln2.

3/ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$

4/ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

5/ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$

6/ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n!}=\frac{1}{e}$

7/ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$

8/ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\ln 2$

9/ $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+..dla \quad x\in R;$

10/ $(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \quad dla \quad -1<x<1$

11/ $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$

12/ $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$

13/ ***Reszta Lagrange'a*** ma postać:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n \; dla \quad c\in(x,x_0).$$

14/ **Szereg Fouriera**:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right)$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx;\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx;$$

15/ **Szereg Brounckera**:

$$\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+\dots$$

$$u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Bibliografia:

1/ Fichtenholz G. M.; Rachunek różniczkowy i całkowy, tom 3, PWN, Warszawa 1999;
2/ Hajłasz R.; Metodyka rozwiązywania zadań z analizy matematycznej PWN, Warszawa 1988;
3/ Krysicki W., Włodarski L.; Analiza matematyczna w zadaniach, cz. I, PWN, Warszawa 1987;
4/ Minorski W.; Zbiór zadań z matematyki wyższej, WNT, Warszawa 1969;
5/ Otto E.; Matematyka – podręcznik dla inżynierskich studiów zawodo-wych, tom III, PWN, Warszawa 1971;
6/ Szałajko K; Matematyka t. II; PWN, Warszawa 1985.
7/ Wrona W., Romanowski Ś.; Matematyka wyższa dla studiów tech-nicznych;
8/ Zaporożec G. I.; Metody rozwiązywania zadań z analizy matematycz-nej; WNT, Warszawa 1973.
9/ Żakowski W; Matematyka – ćwiczenia problemowe dla politechnik, WNT, Warszawa 1987.