

# Tablica Wzorów

## Rachunek Prawdopodobieństwa i Statystyki

---

### Spis treści

|   |   |
|---|---|
| <b>I. Wzory ogólne</b> .....  | 2 |
| 1. Średnia arytmetyczna:.....   | 2 |
| 2. Rozstęp:.....  | 2 |
| 3. Kwantyle:.....   | 2 |
| 4. Wariancja:.....  | 2 |
| 5. Odchylenie standardowe: .....  | 2 |
| <b>II. Współzależność danych</b> .....  | 3 |
| 1. Regresja Liniowa.....  | 3 |
| 2. Korelacja .....  | 3 |
| 3. Współczynnik determinacji: .....   | 3 |
| <b>III. Prawdopodobieństwo</b> .....  | 3 |
| 1. Prawdopodobieństwo .....   | 3 |
| 2. Zdarzenia dopełniające.....  | 3 |
| 3. Suma .....   | 3 |
| 4. Warunkowe .....  | 3 |
| 5. Schemat Bernoulliego .....   | 3 |
| 6. Kombinacje (kolejność bez znaczenia) .....   | 3 |
| 7. Wariacje (ważna kolejność).....  | 3 |
| <b>IV. Dyskretny Rozkład Prawdopodobieństwa</b> .....                                   | 4 |
| 1. Wartość oczekiwana.....  | 4 |
| 2. Wariancja.....   | 4 |
| 3. Odchylenie standardowe .....   | 4 |
| 4. Zmienne niezależne.....  | 4 |
| 5. Rozkład geometryczny (niezależne próby, sukces / porażka, kiedy sukces) .....        | 4 |
| 6. Rozkład dwumianowy (niezależne próby, sukces / porażka, skończona ilość prób).....   | 4 |
| 7. Rozkład Poissona (niezależne zdarzenia w przedziale, skończona liczba zdarzeń) ..... | 4 |
| 8. Jednostajny.....   | 4 |
| 9. Rozkład Normalny .....   | 5 |
| <b>V. Estymacja punktowa</b> .....  | 5 |
| 1. Ogólne .....   | 5 |
| 2. Rozkład częstości z próby .....  | 5 |
| 3. Rozkład z próby estymatora średniej .....  | 6 |

|              |  |   |
|--------------|--|---|
| 4.           | Rozkład estymatora .....               | 6 |
| <b>VI.</b>   | <b>Estymacja przedziałowa</b> .....    | 6 |
| 1.           | Przedziały ufności .....               | 6 |
| 2.           | Rozkład t-studenta .....               | 6 |
| <b>VII.</b>  | <b>Hipotezy</b> .....                  | 6 |
| 1.           | Testowanie hipotez .....               | 6 |
| <b>VIII.</b> | <b>Rozkład chi kwadrat</b> .....       | 6 |
| 1.           | Statystyka chi kwadrat .....           | 6 |
| 2.           | Parametr $\nu$ .....                   | 6 |
| 3.           | Testowanie hipotez .....               | 7 |
| <b>IX.</b>   | <b>Tabele</b> .....                    | 7 |
|              | Tabela 1. Liczebność "k" klas .....    | 7 |
|              | Tabela 2. Przedziały ufności .....     | 7 |
|              | Tabela 3. Tabela parametru $\nu$ ..... | 8 |

## I. Wzory ogólne

1. Średnia arytmetyczna:

$$\mu = \frac{\sum x}{n}$$

2. Rozstęp:

$$R = x_{max} - x_{min}$$

3. Kwantyle:

- a. Dolny:

$$q_1 = \frac{n}{4}$$

- b. Środkowy (mediana –wartość środkowa w uporządkowanym niemalejąco zbiorze):

$$q_2 = \frac{n}{2}$$

- c. Górny:

$$q_3 = \frac{3n}{4}$$

$q_1$  i  $q_3$  jeśli w wyniku otrzymamy liczbę całkowitą to kwantyl znajduje się w połowie odległości między pozycją wyznaczoną a następną.

4. Wariancja:

$$wariancja = \frac{\sum(x - \mu)^2}{n}$$

5. Odchylenie standardowe:

$$\sigma = \sqrt{wariancja}$$

## II. Współzależność danych

### 1. Regresja Liniowa

**I linia Regresji:**

$$x = a_x y + b$$

$$a_x = \frac{C(X,Y)}{S_y^2} = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum(y-\bar{y})^2}$$

$$b = \bar{x} - a_x \bar{y}$$

x – zmienna objaśniana (zależna)

y – zmienna objaśniająca

**II linia Regresji:**

$$y = a_y x + b$$

$$a_y = \frac{C(X,Y)}{S_x^2} = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum(x-\bar{x})^2}$$

$$b = \bar{y} - a_y \bar{x}$$

zmienna objaśniająca (niezależna)

zmienna objaśniana

### 2. Korelacja

a. Współczynnik korelacji liniowej Pearsona:

$$r_{xy} = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{S_x^2 S_y^2}} = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2 \sum(y-\bar{y})^2}} = \frac{C(X,Y)}{S_x S_y} = \sqrt{a_x a_y}$$

### 3. Współczynnik determinacji:

$$R^2 = (r_{xy})^2$$

$a_{x/y}$  – parametr regresji (współczynnik kierunkowy prostej)

b – parametr regresji

C(X,Y) – kowariancja cech

$S_{x/y^2}$  - Wariancja cechy X / Y

$S_{x/y}$  – odchylenie standardowe cechy X/Y.

## III. Prawdopodobieństwo

### 1. Prawdopodobieństwo

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

### 2. Zdarzenia dopełniające

$$P(A) + P(A') = 1$$

### 3. Suma

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

### 4. Warunkowe

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

### 5. Schemat Bernoulliego

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

### 6. Kombinacje (kolejność bez znaczenia)

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

### 7. Wariacje (ważna kolejność)

a. Z powtórzeniami

$$W_n^k = n^k$$

b. Bez powtórzeń

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

## IV. Dyskretny Rozkład Prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwo, że zmienna  $X$  przyjmie wartość  $x$ :  $P(X = x)$

1. Wartość oczekiwana

$$E(X) = \mu = \sum x P(X = x)$$

2. Wariancja

$$\text{Var}(X) = E(X - \mu)^2 = \sum (x - \mu)^2 P(X = x)$$

3. Odchylenie standardowe

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

4. Zmienne niezależne

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = nE(X)$$

$$\text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = n\text{Var}(X)$$

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

$$E(aX \pm bY) = aE(X) \pm bE(Y)$$

$$\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

$$\text{Var}(aX \pm bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y)$$

5. Rozkład geometryczny (niezależne próby, sukces / porażka, kiedy sukces)

$$P(X = r) = pq^{r-1}$$

$$P(X > r) = q^r$$

$$P(X \leq r) = 1 - q^r$$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$$

6. Rozkład dwumianowy (niezależne próby, sukces / porażka, skończona ilość prób)

$$P(X = r) = C_r^n p^r q^{n-r}$$

$$E(X) = np$$

$$\text{Var}(X) = npq$$

7. Rozkład Poissona (niezależne zdarzenia w przedziale, skończona liczba zdarzeń)

$$P(X = r) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^r}{r!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$\text{Var}(X) = \lambda$$

8. Jednostajny

Na przedziale  $(a, b)$

- a. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{dla } x \in (a, b) \\ 0 & \text{dla } x \notin (a, b) \end{cases}$$

b. Dystrybuanta

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{dla } x \in (a, b) \\ 1 & \text{dla } x > b \end{cases}$$
$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$
$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

9. Rozkład Normalny

a. Zmienna standaryzowana

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

b. Prawdopodobieństwo

$$P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$$

c. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

d. Dystrybuanta

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$
$$E(X) = \mu$$
$$Var(X) = \sigma^2$$

## V. Estymacja punktowa

1. Ogólne

a. Średnia z próby

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

b. Estymator średniej z populacji

$$\hat{\mu} = \bar{x}$$

c. Estymator wariancji z populacji

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}$$

d. Częstość względna sukcesów w próbie

$$p_s = \frac{\text{liczba sukcesow}}{\text{liczebność próby}}$$

e. Estymator punktowy nieznanego wskaźnika struktury

$$\hat{p} = p_s$$

2. Rozkład częstości z próby

$$E(P_s) = p$$
$$Var(P_s) = \frac{pq}{n}$$

a. Standardowy błąd szacunkowy

$$st\_blad = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

b. Poprawka na ciągłość

$$pop = \frac{\pm 1}{2n}$$

3. Rozkład z próby estymatora średniej

$$E(\bar{X}) = \mu$$
$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

- a. Średni błąd szacunku

$$sr\_blad = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

4. Rozkład estymatora

- a. Normalny

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

- b. Dwumianowy

$$\bar{X} \sim N(np, pq)$$

- c. Poissona

$$\bar{X} \sim N\left(\lambda, \frac{\lambda}{n}\right)$$

## VI. Estymacja przedziałowa

1. Przedziały ufności

- Wybierz parametr populacji
- Znajdź rozkład jego estymatora w próbie
- Wybierz poziom ufności (najczęściej 95%)
- Znajdź granice przedziału ufności (a,b)

$$P(\bar{X} < a) = P(\bar{X} > b) = 0,025$$

2. Rozkład t-studenta

- a. Wartość standaryzowana

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

## VII. Hipotezy

1. Testowanie hipotez

- Sformułowanie hipotezy
- Wybranie statystyki testowej
- Określ obszar odrzuceń testowanej hipotezy
- Znajdź prawdopodobieństwo p (p-wartość)
- Sprawdź czy sprawdzian testu wpada do obszaru odrzucen
- Podjmij decyzje

## VIII. Rozkład chi kwadrat

1. Statystyka chi kwadrat

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

2. Parametr  $\nu$

$$\nu = (\text{liczba przedziałów klasowych}) - (\text{liczba warunków})$$

3. Testowanie hipotez
  - a. Sformułowanie hipotezy
  - b. Wyznacz częstości teoretyczne oraz liczbę stopni swobody
  - c. Określ obszar odrzuceń testowanej hipotezy
  - d. Znajdź wartość statystyki testowej  $\nu^2$
  - e. Sprawdź czy sprawdzian testu wpada do obszaru odrzuceń
  - f. Podejmij decyzje

## IX. Tabele

**Tabela 1. Liczebność "k" klas**

|               |       |        |         |         |          |
|---------------|-------|--------|---------|---------|----------|
| Liczba danych | 30-60 | 60-100 | 100-200 | 200-500 | 500-1500 |
| Liczba klas   | 6-8   | 7-10   | 9-12    | 11-17   | 16-25    |

**Tabela 2. Przedziały ufności**

| Parametr populacji | Rozkład cechy w populacji | Dodatkowe warunki  | Przedział ufności  |
|--------------------|---------------------------|--|--|
| $\mu$              | Normalny                  | Znamy wartość $\sigma^2$<br>n dowolne<br>$\bar{x}$ średnia arytmetyczna z próby                              | $(\bar{x} - c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + c \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ |
| $\mu$              | Inny niż normalny         | Znamy wartość $\sigma^2$<br>N > 30<br>$\bar{x}$ średnia arytmetyczna z próby                                 | $(\bar{x} - c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + c \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ |
| $\mu$              | Dowolny                   | Nie znamy wartość $\sigma^2$<br>n > 30<br>$\bar{x}$ średnia arytmetyczna z próby<br>$s^2$ wariancja z próby  | $(\bar{x} - c \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + c \frac{s}{\sqrt{n}})$           |
| p                  | Dwumianowy                | n > 30<br>$p_s$ częstość względna w próbie<br>$q_s = 1 - p_s$  | $(p_s - c \sqrt{\frac{p_s q_s}{n}}, p_s + c \sqrt{\frac{p_s q_s}{n}})$       |
| $\mu$              | Dowolny                   | Nie znamy wartości $\sigma^2$<br>n < 30<br>$\bar{x}$ średnia arytmetyczna z próby<br>$s^2$ wariancja z próby | $(\bar{x} - t(v) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t(v) \frac{s}{\sqrt{n}})$     |

**Tabela 3. Tabela parametru  $v$** 

| Rozkład    | Uwagi dodatkowe                       | $v$     |
|------------|---------------------------------------|---------|
| Dwumianowy | Znamy wartość $p$                     | $V=n-1$ |
|            | Nie znamy wartości $p$                | $V=n-2$ |
| Poissona   | Znamy wartość $\lambda$               | $V=n-1$ |
|            | Nie znamy wartości $\lambda$          | $V=n-2$ |
| Normalny   | Znamy wartość $\mu$ i $\sigma^2$      | $V=n-1$ |
|            | Nie znamy wartości $\mu$ i $\sigma^2$ | $V=n-3$ |

**Tabela 4. Wartość Krytyczna**

| Poziom istotności $\alpha$              | 0,10           | 0,05             | 0,01           | 0,005          | 0,002          |
|---|----------------|------------------|----------------|----------------|----------------|
| Wartości krytyczne testu jednostronnego | -1,28 lub 1,28 | -1,645 lub 1,645 | -2,33 lub 2,33 | -2,58 lub 2,58 | -2,88 lub 2,88 |
| Wartość krytyczna testu dwustronnego    | -1,645 i 1,645 | -1,96 i 1,96     | -2,58 i 2,58   | -2,81 i 2,81   | -3,08 i 3,08   |