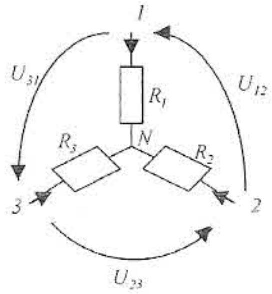
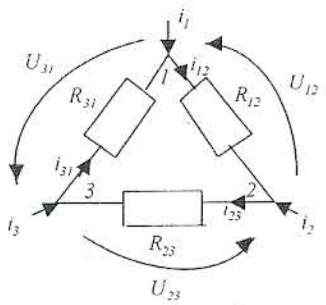
Wykład 3

Transfiguracje: gwiazda – trójkąt i trójkąt – gwiazda.

Przez obwód „gwiazdowy" rozumiemy układ połączeń:



Przez obwód „trójkąta" rozumiemy układ połączeń:



Transfiguracja polega na takim doborze wartości rezystancji R_{12}, R_{23}, R_{31} aby napięcia i prądy na „wejściu" trójkąta były identyczne jak w układzie gwiazdowym.
Wyznaczmy wartość potencjału w punkcie gwiazdowym N.

$$i_1 = (\varphi_1 - \varphi_N)G_1 \quad \text{3.1a}$$
$$i_2 = (\varphi_2 - \varphi_N)G_2 \quad \text{3.1b}$$
$$i_3 = (\varphi_3 - \varphi_N)G_3 \quad \text{3.1c}$$

Zauważmy, że zgodnie z węzłowym prawem Kirchoffa mamy:

$$\sum_{j=1}^{3} i_j = 0, \quad \text{3.2}$$

zatem

$$(\varphi_1 G_1 + \varphi_2 G_2 + \varphi_3 G_3) = \varphi_N (G_1 + G_2 + G_3) \quad \text{3.3}$$

stąd

$$\varphi_N = \frac{(\varphi_1 G_1 + \varphi_2 G_2 + \varphi_3 G_3)}{G_1 + G_2 + G_3}. \qquad 3.4$$

Teraz możemy napisać:

$$i_1 = \varphi_1 G_1 - \frac{\varphi_1 G_1 + \varphi_2 G_2 + \varphi_3 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} G_1$$

Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika mamy:

$$i_1 = \frac{\varphi_1 G_1^2 + \varphi_1 G_1 G_2 + \varphi_1 G_1 G_3 - \varphi_1 G_1^2 - \varphi_2 G_1 G_2 - \varphi_3 G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3},$$

ostatecznie zatem otrzymamy:

$$i_1 = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) G_1 G_2 + (\varphi_1 - \varphi_3) G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

lub

$$i_1 = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} U_{12} + \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} U_{13}. \qquad 3.5$$

Analogicznie dla prądu i_2

$$i_2 = \varphi_2 G_2 - \frac{\varphi_1 G_1 + \varphi_2 G_2 + \varphi_3 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} G_2,$$

następnie

$$i_2 = \frac{\varphi_2 G_2^2 + \varphi_2 G_1 G_2 + \varphi_2 G_2 G_3 - \varphi_2 G_2^2 - \varphi_1 G_1 G_2 - \varphi_3 G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

stąd

$$i_2 = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) G_1 G_2 + (\varphi_2 - \varphi_3) G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3},$$

lub

$$i_2 = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} U_{21} + \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} U_{23}. \qquad 3.6$$

Dla prądu i_3 mamy odpowiednio:

$$i_3 = \varphi_3 G_3 - \frac{\varphi_1 G_1 + \varphi_2 G_2 + \varphi_3 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} G_3$$

i dalej

$$i_3 = \frac{\varphi_3 G_3^2 + \varphi_3 G_3 G_2 + \varphi_3 G_3 G_1 - \varphi_3 G_3^2 - \varphi_1 G_1 G_3 - \varphi_2 G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

stad

$$i_3 = \frac{(\varphi_3 - \varphi_1) G_1 G_3 + (\varphi_3 - \varphi_2) G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

lub

$$i_3 = \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} U_{31} + \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} U_{32} \tag{3.7}$$

Dla obwodu połączonego w trójkąt obowiązują węzłowe prawa Kirchoffa:

$$i_1 + i_{31} = i_{12} \tag{3.8a}$$

$$i_2 + i_{12} = i_{23} \tag{3.8b}$$

$$i_3 + i_{23} = i_{31}. \tag{3.8c}$$

Powyższe relacje można przekształcić:

$$i_1 = i_{12} - i_{31}$$

$$i_2 = i_{23} - i_{12}$$

$$i_3 = i_{31} - i_{23}.$$

Na podstawie prawa Ohma możemy napisać:

$$i_1 = G_{12}U_{12} - G_{31}U_{31} = G_{12}U_{12} + G_{31}U_{13} \tag{3.9a}$$

$$i_2 = G_{23}U_{23} - G_{12}U_{12} = G_{23}U_{23} + G_{12}U_{21} \tag{3.9b}$$

$$i_3 = G_{31}U_{31} - G_{23}U_{23} = G_{31}U_{31} + G_{23}U_{32} \tag{3.9c}$$

Porównując wyrażenia 3.9 z wyrażeniami 3.5, 3.6 i 3.7 otrzymujemy:

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \tag{3.10a}$$

$$G_{31} = \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \tag{3.10b}$$

$$G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \tag{3.10c}$$

Dokonując przekształcenia w kierunku przeciwnym (trójkąt → gwiazda) otrzymujemy:

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \tag{3.11a}$$

$$R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \tag{3.11b}$$

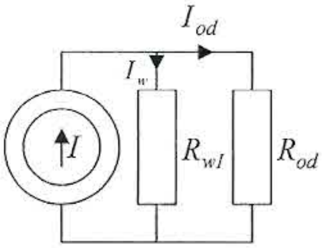
$$R_3 = \frac{R_{13} R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \tag{3.11c}$$

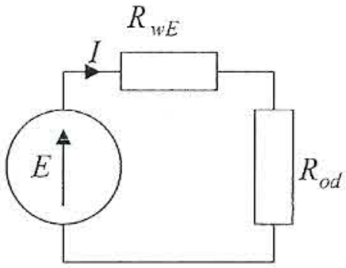
Zauważmy, że dla układu symetrycznego otrzymujemy:

gwiazda → trójkąt $G_{12} = G_{31} = G_{23} = \frac{1}{3} G$

trójkąt → gwiazda $R_1 = R_2 = R_3 = \frac{1}{3} R$

Równoważność źródła prądu i napięcia.





Dla obwodu ze źródłem prądowym obowiązują relacje:

$I = I_w + I_{od}$, oraz $I_w R_{wI} = I_{od} R_{od}$,
stąd

$$I = \left(\frac{R_{od}}{R_{wI}} + 1 \right) I_{od}$$

i ostatecznie

$$I_{od} = \frac{R_{wI}}{R_{wI} + R_{od}} I$$

Dla obwodu ze źródłem napięciowym obowiązuje relacja:

$$I_{od} = \frac{E}{R_{wE} + R_{od}}.$$

Pierwszym warunkiem równoważności jest równa wartość prądu wydawanego z obu źródeł, zatem:

$$\frac{R_{wI}}{R_{wI} + R_{od}} I = \frac{E}{R_{wE} + R_{od}}.$$

Drugim warunkiem równoważności rów jest równość napięć, zatem:

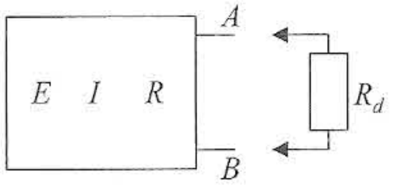
$$\frac{R_{od} R_{wI}}{R_{od} + R_{wI}} I = \frac{R_{od}}{R_{od} + R_{wE}} E.$$

Aby obydwa warunki były spełnione, muszą zachodzić relacje:

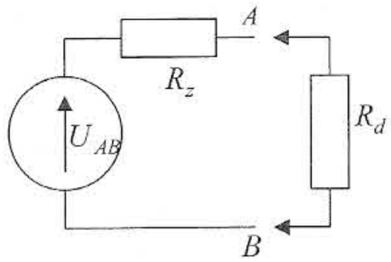
$$R_{wI} = R_{wE} \text{ oraz } E = R_{wI} I.$$

Twierdzenie Thevenina.

Rozważmy obwód o dowolnej konfiguracji wewnętrznej, zawierającej w sobie obok rezystancji także źródła napięcia i prądu.



Dowolny obwód można zastąpić źródłem napięcia i jego opornością wewnętrzną, tak jak na rysunku:



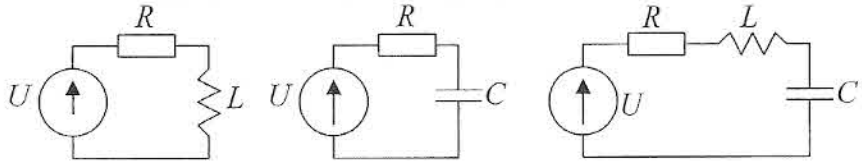
gdzie U_{AB} jest napięciem między punktami A i B w warunkach nie podłączonej do obwodu rezystancji dodatkowej R_d natomiast R_z jest rezystancją zwarcia i jest mierzona między punktami obwodu A i B przy zwartych wszystkich źródłach napięcia i przerwanych wszystkich źródłach prądowych.
Twierdzenie to ma zastosowanie w przypadkach, w których interesuje nas prąd w określonej gałęzi a obwód jest wielogałęziowy.

Obwody elektryczne z indukcyjnościami i pojemnościami.

Przypomnijmy:

$$U_R = Ri = R\frac{dq}{dt}, \qquad U_L = \frac{d\psi}{dt} = L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}, \qquad U_C = \frac{1}{C}\int_0^t i d\tau = \frac{q}{C}.$$

Rozważmy najprostsze obwody:



Zgodnie z powyższymi relacjami i oczkowym prawem Kirchoffa, dla każdego z tych obwodów możemy napisać:

(1) $U = Ri + L\dfrac{di}{dt}$, równanie różniczkowe pierwszego rzędu,

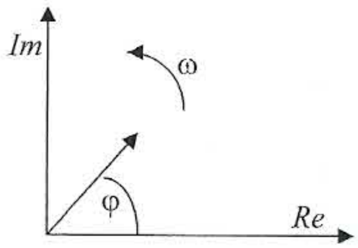
(2) $U = \dfrac{1}{C}q + R\dfrac{dq}{dt}$, równanie różniczkowe pierwszego rzędu,

(3) $U = \dfrac{1}{C}q + R\dfrac{dq}{dt} + L\dfrac{d^2q}{dt^2}$, równanie różniczkowe drugiego rzędu.

Jak widać nawet najprostsze obwody zawierające pojemności i indukcyjności są opisywane równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. W tym przypadku mamy jeszcze do czynienia równaniami liniowymi o stałych współczynnikach. Rozwiązanie takich równań składa się (jest sumą) z całki ogólnej (rozwiązanie równania jednorodnego) i całki szczególnej dla konkretnego „wymuszenia". Wymuszenie to może być sumą różnych funkcji $\sum_{i=1}^{m} f_i(t)$. Niech $Q_i(t)$ będzie całką szczególną dla wymuszenia $f_i(t)$. Wtedy całka szczególna od sumy takich wymuszeń spełnia warunek $q(t) = \sum_{i=1}^{m} Q_i(t)$. Właściwość ta nosi nazwę zasady superpozycji.
W tego typu równaniach całka ogólna zmierza do zera gdy czas zmierza do nieskończoności.
Obecnie zajmiemy się całką szczególną, w warunkach wymuszenia sinusoidalnego.
W tym celu przypomnimy sobie rachunek liczb zespolonych. I tak:

$$j = \sqrt{-1}\,;\ cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\,;\ sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\,;\ e^{j\omega t} = cos(\omega t) + j\,sin(\omega t).$$

Jeśli wprowadzić płaszczyznę Gaussa, to wyrażenie $e^{j(\omega t+\varphi)}$ można przedstawić jako wektor wirujący.



W przedstawionym przypadku długość wektora jest równy jedności.

Rozważmy całkę szczególną dla pierwszego z równań przy wymuszeniu sinusoidalnym.

$$L\frac{di}{dt} + Ri = U\,cos(\omega t).$$

Wykorzystując zasadę superpozycji rozważmy całkę szczególną przy wymuszeniu:

(a) $L\dfrac{d\underline{i}}{dt} + R\underline{i} = U\,cos(\omega t) + jU\,sin(\omega t)$, lub (b) $L\dfrac{d\underline{i}}{dt} + R\underline{i} = Ue^{j\omega t}$.

W równaniu (b) pochodna funkcji poszukiwanej i sama funkcja muszą być jednakowe i podobne do funkcji wymuszającej. Jedyną taką jest funkcją: $\underline{i} = \underline{I}\, e^{j\omega t}$.

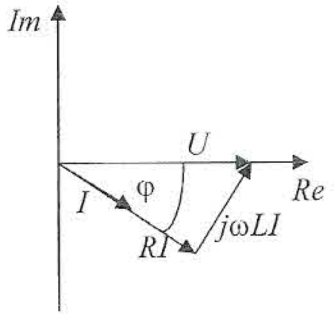
Po podstawieniu powyższej funkcji do równania (b) otrzymujemy:

$$j\omega L \underline{I} e^{j\omega t} + R\underline{I} e^{j\omega t} = U e^{j\omega t} \; / \; e^{-j\omega t}$$

stąd

$$(R + j\omega L)\underline{I} = U$$

Powyższe równanie można przedstawić na płaszczyźnie Gaussa.



Dokonując przeliczeń algebraicznych mamy:

$$\underline{I} = \frac{U}{R + j\omega L} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-j\varphi}$$

gdzie

$$\varphi = arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right).$$

Teraz możemy napisać:

$$\underline{i} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{j(\omega t - \varphi)}.$$

Ponieważ wymuszenie, które rzeczywiście działało w obwodzie stanowiło część rzeczywistą analizowanego tu wymuszenia, zatem zgodnie z zasadą superpozycji odpowiedź również będzie częścią rzeczywistą otrzymanego rozwiązania i tak:

$$i(t) = Re(\underline{i}) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} cos(\omega t - \varphi).$$

Rozważmy obecnie całkę szczególną dla drugiego z równań przy wymuszeniu sinusoidalnym.

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = U\,cos(\omega t).$$

Jak poprzednio wykorzystując zasadę superpozycji rozważmy całkę szczególną przy wymuszeniu:

$$R\frac{d\underline{q}}{dt} + \frac{1}{C}\underline{q} = U\,cos(\omega t) + jU\,sin(\omega t) \quad \text{lub} \quad R\frac{d\underline{q}}{dt} + \frac{1}{C}\underline{q} = Ue^{j\omega t}.$$

Przewidując rozwiązanie w analogicznej postaci jak poprzednio $\underline{q} = \underline{Q}e^{j\omega t}$ możemy napisać:

$$\frac{1}{C}\underline{Q}e^{j\omega t} + j\omega R\underline{Q}e^{j\omega t} = Ue^{j\omega t} \,/\, e^{-j\omega t},$$

stąd

$$\left(\frac{j\omega}{j\omega C} + j\omega R\right)\underline{Q} = U \text{ lub } j\omega\left(\frac{1}{j\omega C} + R\right)\underline{Q} = U$$

Po przekształceniu algebraicznym mamy:

$$\underline{Q} = \frac{U}{j\omega\left(R - j\frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{U}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}e^{-j\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)};$$

gdzie

$$\varphi = arctan(\omega RC).$$

I dalej

$$\underline{q} = \frac{Ue^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \varphi\right)}}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

stąd

$$q = \frac{U}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}cos\left(\omega t - \tfrac{\pi}{2} + \varphi\right) = \frac{U\,sin(\omega t + \varphi)}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Jeśli wielkością poszukiwaną jest prąd przeładowywania kondensatora to:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}cos(\omega t + \varphi).$$

Rozważmy jeszcze całkę szczególną dla trzeciego z równań przy wymuszeniu sinusoidalnym.

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = U\,cos(\omega t).$$

Jak w poprzednich przykładach, wykorzystując zasadę superpozycji, rozważmy całkę szczególną przy wymuszeniu:

$$L\frac{d^2\underline{q}}{dt^2} + R\frac{d\underline{q}}{dt} + \frac{1}{C}\underline{q} = U\,cos(\omega t) + jU\,sin(\omega t) \quad \text{lub} \quad L\frac{d^2\underline{q}}{dt^2} + R\frac{d\underline{q}}{dt} + \frac{1}{C}\underline{q} = Ue^{j\omega t}.$$

Przewidując rozwiązanie w analogicznej postaci jak poprzednio $\underline{q} = \underline{Q}e^{j\omega t}$ możemy napisać:

$$\frac{d\underline{q}}{dt} = j\omega\underline{Q}e^{j\omega t}, \quad \frac{d^2\underline{q}}{dt^2} = -\omega^2\underline{Q}e^{j\omega t}.$$

Podstawiając obliczone pochodne do analizowanego równania otrzymujemy:

$$\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L + j\omega R\right)\underline{Q}e^{j\omega t} = Ue^{j\omega t} \,/\, e^{-j\omega t},$$

stąd

$$j\omega\left[R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right]\underline{Q}=U \quad \text{lub} \quad \underline{Q}=\frac{U}{j\omega\left[R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right]} \quad \text{i dalej}$$

$$\underline{Q}=\frac{U}{\omega\sqrt{\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2+R^2}}e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)};$$

gdzie

$$\varphi=arctan\left(\frac{R}{\omega L-\frac{1}{\omega C}}\right).$$

Wykonując analogiczne przekształcenia jak poprzednio, możemy napisać:

$$\underline{q}=\frac{Ue^{j\omega t}}{j\omega\left[R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right]}=\frac{U}{\omega\sqrt{\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2+R^2}}e^{j\left(\omega t-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)},$$

a stąd już ostatecznie

$$q=\frac{U}{\omega\sqrt{\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2+R^2}}cos\left(\omega t-\tfrac{\pi}{2}-\varphi\right).$$

Jeśli poszukiwaną wielkością jest funkcja prądu, to różniczkując względem czasu otrzymujemy:

$$i=-\frac{U}{\sqrt{\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2+R^2}}sin\left(\omega t-\tfrac{\pi}{2}-\varphi\right),$$

lub

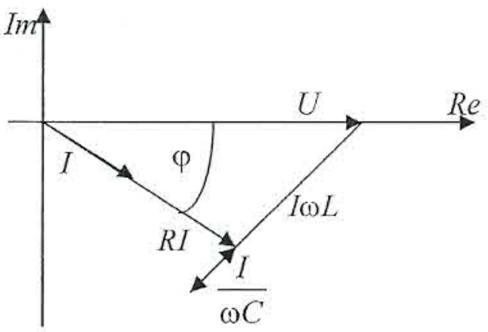
$$i=\frac{U}{\sqrt{\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2+R^2}}cos\left(\omega t-\varphi\right).$$

i dla przypomnienia

$$\varphi=arctan\left(\frac{R}{\omega L-\frac{1}{\omega C}}\right).$$

Jeśli chcemy otrzymać graficzny obraz rozwiązania na płaszczyźnie Gaussa, napiszemy:

$$\frac{d\underline{q}}{dt}=\underline{i}=j\omega\frac{Ue^{j\omega t}}{j\omega\left[R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right]}=\frac{Ue^{j\omega t}}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}.$$



Dla przebiegów sinusoidalnych stosujemy oznaczenia: $\omega L \Rightarrow X_L$ oraz $\dfrac{1}{\omega C} \Rightarrow X_C$ i nazywamy reaktancją odpowiednio indukcyjną i pojemnościową.