Wykład 4
Pojęcie mocy w układach prądu sinusoidalnie przemiennego.

Funkcje mocy opisuje wyrażenie:

$$p(t)=u(t)i(t).$$

Zgodnie z prawem Ohma mamy:

$$u(t)=Ri(t),$$

stąd

$$p(t)=Ri^2(t).$$

Jeśli przyjąć, że prąd przepływający przez rezystancję ma kształt sinusoidalny, wtedy:

$$p(t)=R[I_m \sin(\omega t)]^2=R\left\{\frac{I_m^2}{2}[1-\cos(2\omega t)]\right\}.$$

Dla przypadku prądu stałego mamy:

$$p(t)=P=RI^2.$$

Porównanie wyrażeń na wydzielaną na rezystancji moc, zwaną dalej czynną mamy:

$$RI^2=R\frac{I_m^2}{2} \quad \text{stąd} \quad I=\frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Tak zdefiniowaną wielkość nazywamy wartością skuteczną prądu sinusoidalnie przemiennego. W ogólnym przypadku, dla dowolnej funkcji okresowej obowiązuje relacja:

$$f_{sk}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} f^2(t)dt}.$$

Rozważmy obecnie sytuację gdy pod wpływem napięcia źródłowego $u(t)=\sqrt{2}U_{sk}\cos(\omega t)$ pobierany jest prąd $i(t)=\sqrt{2}I_{sk}\cos(\omega t+\varphi)$. Funkcja mocy wyrazi się wzorem:

$$p(t)=u(t)i(t)=2U_{sk}I_{sk}\cos(\omega t)\cos(\omega t+\varphi)=U_{sk}I_{sk}[\cos(\varphi)+\cos(2\omega t+\varphi)].$$

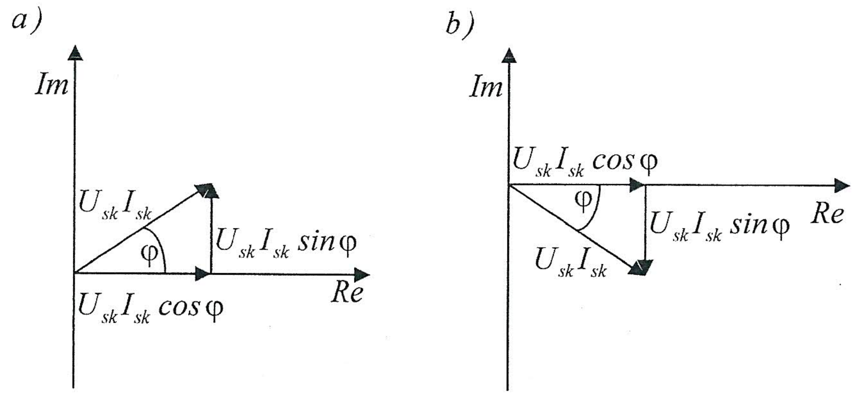
Moc tzw. czynną definiujemy jako:

$$P=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} p(t)dt,$$

stąd dla naszego przypadku mamy:

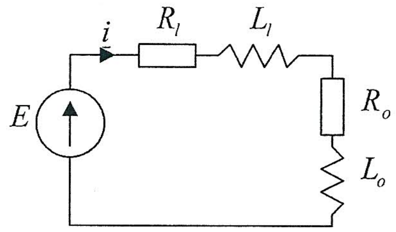
$$P=U_{sk}I_{sk}\cos(\varphi).$$

Posługiwanie się rachunkiem liczb zespolonych (rachunkiem symbolicznym) pozwala na bezpośrednie wyznaczanie wartości mocy czynnej. Jeśli $\underline{u}=U_{sk}e^{j\omega t}$, a $\underline{i}=I_{sk}e^{j(\omega t+\varphi)}$ to moc czynną wyznaczamy z relacji: $P=Re(\breve{\underline{u}}\underline{i})=Re(U_{sk}I_{sk}e^{j\varphi})=U_{sk}I_{sk}\cos(\varphi)$, lub $P=Re(\underline{u}\breve{\underline{i}})=Re(U_{sk}I_{sk}e^{-j\varphi})=U_{sk}I_{sk}\cos(\varphi)$. Na płaszczyźnie Gauss wygląda to następująco:



Iloczyn skutecznych wartości napięcia i prądu nosi nazwę mocy pozornej i oznaczany jest literą **S**. Przyprostokątna, zamykająca powyższy trójkąt, oznaczana jest literą **Q** i nosi nazwę mocy biernej. Moc bierna jest mocą pulsującą między źródłem a odbiornikiem, zatem jej znak zależy od tego czy interesuje nas moc bierna wydawana przez źródło czy też moc ta pobierana przez odbiornik. Rysunek „*a*" odpowiada odbiornikowi, natomiast „*b*" źródłu zasilania. Zauważmy, że dla przypadku odbiornika z przewagą reaktancji indukcyjnej rysunki *a* i *b* zamienią się miejscami.

Obecnie porównamy sprawność przesyłu mocy czynnej linią o parametrach R_l, L_l do odbiornika R_o, L_o prądem stałym i sinusoidalnie przemiennym. Zastępczy schemat takiego układu można przedstawić w postaci rysunku:



1) Przypadek przesyłu mocy czynnej prądem stałym, stąd $E = U$.

Zgodnie z prawem Ohma mamy: $i = \dfrac{U}{R_l + R_o}$,

stąd moc wydawana ze źródła $P_ź$ wynosi:

$$P_ź = Ui = \frac{U^2}{R_l + R_o},$$

natomiast moc wydzielana w odbiorniku P_o wyraża się wzorem:

$$P_o = i^2 R_o = \frac{U^2 R_o}{(R_l + R_o)^2}.$$

Sprawność η przesyłu mocy czynnej jest definiowana jako iloraz mocy wydzielanej w odbiorniku i mocy wydawanej ze źródła, zatem:

$$\eta = \frac{P_o}{P_ź} 100\% = \frac{U^2 R_o (R_l + R_o)}{(R_l + R_o)^2 U^2} 100\% = \frac{R_o}{R_l + R_o} 100\%.$$

2) Przypadek przesyłu mocy czynnej prądem sinusoidalnie przemiennym, stąd $E = \sqrt{2} U \cos(\omega t)$.

Zgodnie z uogólnionym prawem Ohma mamy: $\underline{i} = \dfrac{U}{R_l + R_o + j(X_l + X_o)}$,

stąd moc wydawana ze źródła $P_ź$ wynosi:

$$P_ź = Re\left(U\breve{\underline{i}}\right) = \frac{U^2(R_l + R_o)}{(R_l + R_o)^2 + (X_l + X_o)^2},$$

natomiast moc wydzielana w odbiorniku P_o wyraża się wzorem:

$$P_o = R_o \underline{i}\breve{\underline{i}} = R_o |\underline{i}|^2 = \frac{U^2 R_o}{(R_l + R_o)^2 + (X_l + X_o)^2}.$$

Teraz sprawność przesyłu mocy czynnej wyrazi się wzorem:

$$\eta = \frac{P_o}{P_ź} 100\% = \frac{U^2 R_o \left[(R_l + R_o)^2 + (X_l + X_o)^2\right]}{\left[(R_l + R_o)^2 + (X_l + X_o)^2\right] U^2 (R_l + R_o)} 100\% = \frac{R_o}{R_l + R_o} 100\%.$$

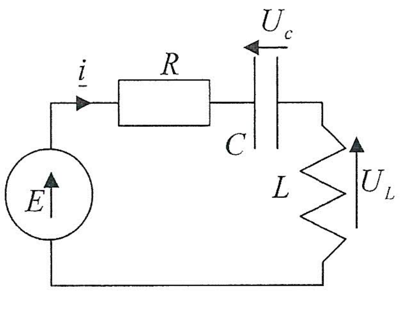
Aby móc porównać obydwie metody przesyłu mocy czynnej, załóżmy że moc czynna wydzielana w odbiorniku jest identyczna, zatem

$$i_=^2 R_o = \frac{U_=^2 R_o}{(R_l + R_o)^2} = R_o |\underline{i}_\approx|^2 = \frac{U_{sk}^2 R_o}{(R_l + R_o)^2 + (X_l + X_o)^2}$$

$$U_{sk} = U_= \sqrt{\frac{(R_l + R_o)^2 + (X_l + X_o)^2}{(R_l + R_o)^2}}.$$

Zjawisko rezonansu.

Rezonansem nazywamy stan, dla którego odpowiedź układu na wymuszenie harmoniczne o stałej amplitudzie osiąga ekstremum. Częstotliwość sygnału wymuszającego, dla którego stan taki ma miejsce, nosi nazwę częstotliwości rezonansowej. Rozważmy obwód:



Niech $E = \sqrt{2} U_{sk} \cos(\omega t)$, to stosując rachunek symboliczny możemy napisać:

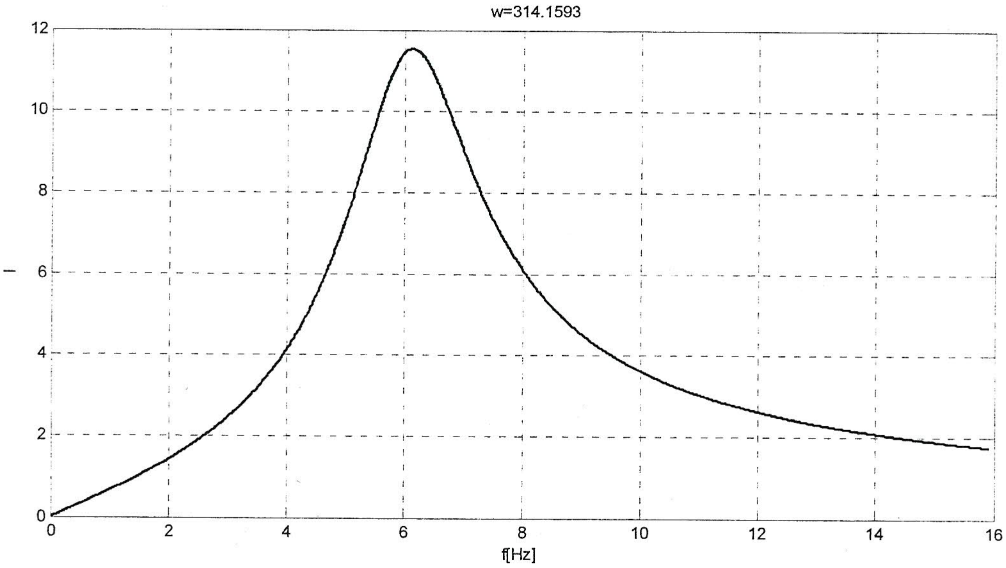
$$\underline{I} = \frac{U_{sk}}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\omega C U_{sk}}{\omega RC + j(\omega^2 LC - 1)}.$$

Stąd

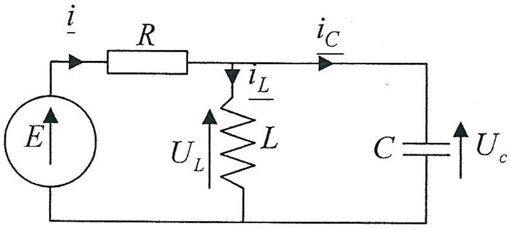
$$U_c = -j\frac{1}{\omega C} I = \frac{-jU_{sk}}{\omega RC + j(\omega^2 LC - 1)} \text{ oraz } U_L = j\omega L I = \frac{j\omega^2 LCU_{sk}}{\omega RC + j(\omega^2 LC - 1)}.$$

Zauważmy, że w przypadku gdy $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, wartość prądu osiąga maksimum równą $\frac{U_{sk}}{R}$, natomiast $U_L = -U_C = \frac{U_{sk}}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$. Stan taki nazywamy **rezonansem napięć.**

Charakterystyka rezonansowa „widziana" z zacisków źródła napięcia ma przykładową postać:



Obecnie rozważmy obwód:

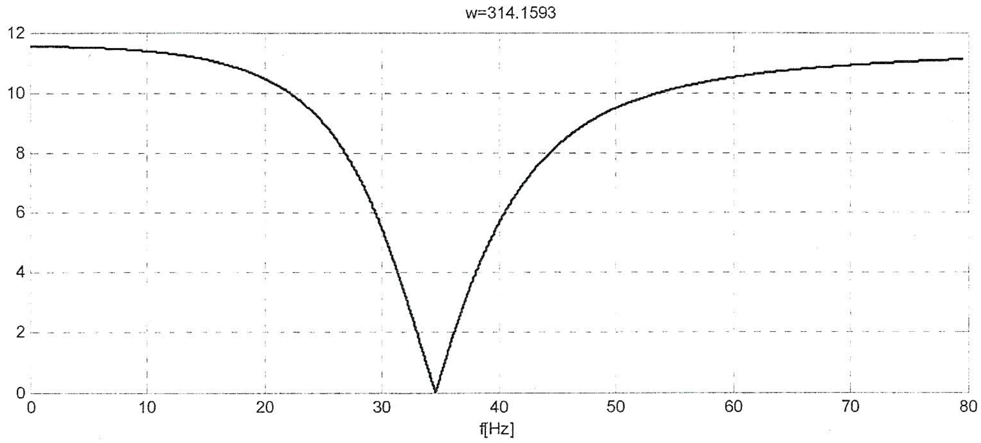


Przyjmując jak poprzednio, że $E = \sqrt{2}U_{sk}\,\boldsymbol{cos}(\omega t)$, to stosując rachunek symboliczny i twierdzenie Thevenina, możemy napisać:

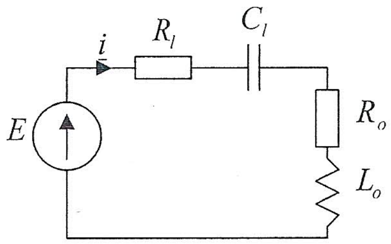
$$\underline{I_L} = \frac{U_{sk}\left(-j\frac{1}{\omega C}\right)}{\left(R - j\frac{1}{\omega C}\right)\left[\frac{R\left(-j\frac{1}{\omega C}\right)}{R - j\frac{1}{\omega C}} + j\omega L\right]} = \frac{U_{sk}}{R\left(-j\frac{1}{\omega C}\right) + j\omega LR + \frac{L}{C}} = \frac{-jU_{sk}}{\omega L + j\left(\omega^2 LC - 1\right)R},$$

$$\underline{I_C} = \frac{U_{sk} j\omega L}{(R + j\omega L)\left(\frac{Rj\omega L}{R + j\omega L} - j\frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{U_{sk} j\omega L}{Rj\omega L + \frac{L}{C} - j\frac{R}{\omega C}} = \frac{jU_{sk}\omega^2 LC}{\omega L + j\left(\omega^2 LC - 1\right)R},$$

Zauważmy, że dla $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ $\underline{I}_C = -\underline{I}_L = U_{sk}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$, natomiast prąd pobierany ze źródła napięcia jest równy zeru. Stan taki nazywamy **rezonansem prądów**. Przykładową charakterystykę obwodu w warunkach rezonansu prądów przedstawia poniższy rysunek.



Rozważmy obecnie obwód:



Niech $E = \sqrt{2}U_{sk}\cos(\omega t)$. Wartość prądu dla stanu ustalonego wyrazi się wzorem:

$$\underline{i} = \frac{U_{sk}}{R_l + R_o + j(X_o - X_l)}.$$

Natomiast napięcie na odbiorniku przedstawia relacja:

$$\underline{U_{sk}}_o = \frac{U_{sk}(R_o + jX_o)}{R_l + R_o + j(X_o - X_l)} = \frac{U_{sk}(R_o + jX_o)[R_l + R_o - j(X_o - X_l)]}{(R_l + R_o)^2 + (X_o - X_l)^2}.$$

Wykonując zaznaczone działania w liczniku mamy:

$$\underline{U_{sk}}_o = U_{sk}\frac{R_o(R_l + R_o) + X_o(X_o - X_l) + j[X_o(R_l + R_o) - R_o(X_o - X_l)]}{(R_l + R_o)^2 + (X_o - X_l)^2},$$

lub

$$\underline{U_{sk}}_o = U_{sk}\frac{\sqrt{R_o^2(R_l + R_o)^2 + X_o^2(X_o - X_l)^2 + X_o^2(R_l + R_o)^2 + R_o^2(X_o - X_l)^2}}{(R_l + R_o)^2 + (X_o - X_l)^2}e^{j\varphi}$$

i ostatecznie

$$\underline{U}_{sk_o} = U_{sk}\sqrt{\frac{R_o^2 + X_o^2}{(R_o + R_l)^2 + (X_o - X_l)^2}}\,e^{j\varphi},$$

gdzie

$$\varphi = a\,tan\left[\frac{X_o(R_l + R_o) - R_o(X_o - X_l)}{R_o(R_l + R_o) + X_o(X_o - X_l)}\right].$$

Wartość skuteczna na odbiorniku będzie większa od napięcia źródła wtedy, gdy będzie spełniona nierówność:

$$X_o - \sqrt{X_o^2 - R_o^2 - 2R_oR_l}\,\langle X_l \langle X_o + \sqrt{X_o^2 - R_o^2 - 2R_oR_l}\;.$$