Wykład 6

Szereg Fouriera c d.

Poszukajmy obecnie postać szeregu dla funkcji przedstawionej na rysunku „a". Zauważmy, że funkcja tam przedstawiona jest pozbawiona wartości średniej i jest funkcją nieparzystą. Zatem $a_0 \equiv 0$, a w szeregu będą występowały jedynie funkcje typu sinus.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} A\,sin(kx)dx - \int_{\pi}^{2\pi} A\,sin(kx)dx\right] = \frac{A}{\pi k}\left[cos(kx)/_{\pi}^{0} - cos(kx)/_{2\pi}^{\pi}\right].$$

Zauważmy, że $cos(k0) - cos(k\pi) = 2\,sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = 2\,sin^2\left(k\frac{\pi}{2}\right)$ i analogicznie $cos(2k\pi) - cos(k\pi) = 2\,sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = 2\,sin^2\left(k\frac{\pi}{2}\right)$.

Poszukiwany szereg ma zatem postać:

$$f(x) = \frac{4A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{sin^2\left(k\frac{\pi}{2}\right)sin(kx)}{k} = \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin[(2n-1)x]}{2n-1}.$$

Rozwińmy w szereg Fouriera funkcje przedstawioną na rysunku „b". Tutaj podobnie jak poprzednio, funkcja jest pozbawiona wartości średniej i jest nieparzysta, zatem:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2A}{\pi}x\,sin(kx)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{2A}{\pi}(\pi - x)sin(kx)dx\right].$$

Rozważmy każdą z całek osobno:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\,sin(kx)dx = \frac{x}{k}cos(kx)/_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{k^2}sin(kx)/_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{k^2}sin\left(k\frac{\pi}{2}\right);$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(\pi - x)sin(kx)dx = \frac{\pi}{k}cos(kx)/_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{x}{k}cos(kx)/_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - \frac{1}{k^2}sin(kx)/_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{2}{k^2}sin\left(k\frac{\pi}{2}\right).$$

Teraz możemy napisać:

$$a_k = \frac{8A}{\pi^2 k^2}sin\left(k\frac{\pi}{2}\right).$$

Szereg Fouriera dla funkcji z rysunku „b” przyjmie postać:

$$f(x)=\frac{4A}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k^2}sin(kx)=-\frac{4A}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}sin[(2n-1)x].$$

Poszukajmy jeszcze szereg Fouriera dla funkcji z rysunku „c”. W tym przypadku funkcja jest parzysta, zatem w szeregu będą występowały jedynie funkcje kosinusoidalne.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}A\,sin(x)dx=\frac{2A}{\pi}cos(x)/_{\pi}^{0}=\frac{4A}{\pi}.$$

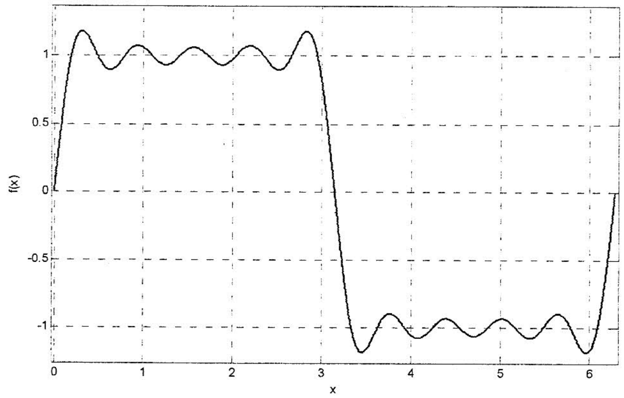
$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}A\,sin(x)cos(kx)dx=\frac{A}{\pi}\int_0^{\pi}\{sin[(k+1)x]-sin[(k-1)x]\}dx=$$

$$=\frac{A}{\pi}\left\{\frac{cos[(k+1)x]}{k+1}/_{\pi}^{0}-\frac{cos[(k-1)x]}{k-1}/_{\pi}^{0}\right\}=-\frac{4A\,cos^2\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{\pi\left(k^2-1\right)}=-\frac{4A}{\pi\left(4n^2-1\right)}.$$

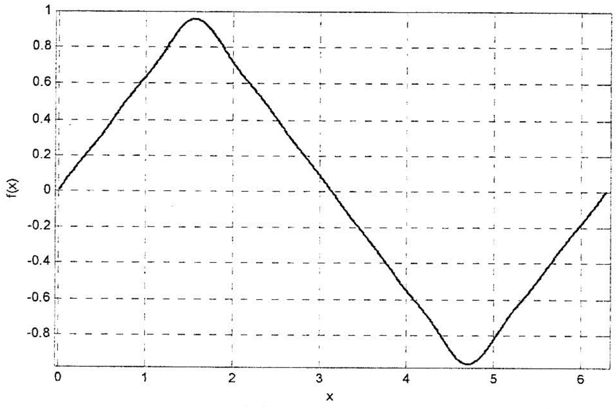
Ostatecznie poszukiwany szereg ma postać:

$$f(x)=\frac{2A}{\pi}-\frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos(2nx)}{4n^2-1}.$$

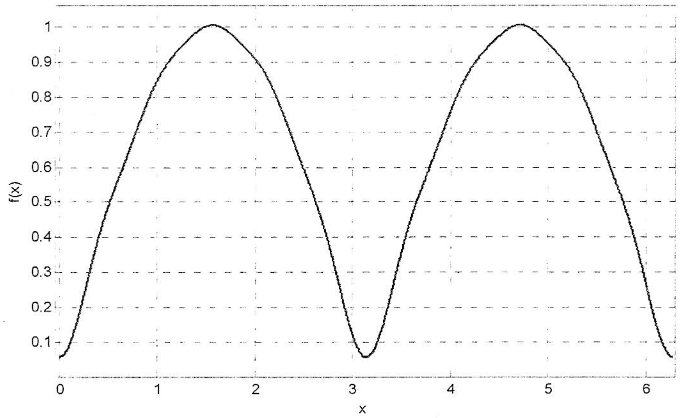
Obecnie zobaczmy, jak szereg Fouriera odzwierciedla rzeczywisty kształt funkcji.



Przebieg aproksymacji funkcji z rysunku „a” przy uwzględnieniu pięciu wyrazów szeregu Fouriera.



Przebieg aproksymacji funkcji z rysunku „b” przy uwzględnieniu pięciu wyrazów szeregu Fouriera.



Przebieg aproksymacji funkcji z rysunku „c” przy uwzględnieniu pięciu wyrazów szeregu Fouriera.

Moc czynna przebiegów okresowych, przemiennych

Jak o tym była mowa wcześniej, moc czynna określamy jako średnią wartość funkcji mocy, czyli:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt$$

Załóżmy, że funkcje okresowe napięcia i prądu są wyrażone za pomocą szeregów Fouriera:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cos(k\omega t),\ i(t) = \sum_{r=1}^{\infty} I_r \cos[(r\omega t + \varphi_r)]$$

to moc czynną zapiszemy:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} U_k I_r \cos(k\omega t)\cos[(r\omega t + \varphi_r)]dt =$$

$$= \frac{1}{2T}\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} U_k I_r \{\cos[(k-r)\omega t - \varphi_r] + \cos[(r+k)\omega t + \varphi_r]\}dt$$

Zauważmy, że tylko dla $k = r$ całka ta przyjmuje wartości niezerowe, zatem:

$$P = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty} U_r I_r \cos(\varphi_r).$$

Rozważmy jeszcze wartość mocy cieplnej wydzielającej się na rezystancji, przez którą przepływa odkształcony prąd przemienny. Niech $i(t) = \sum_{r=1}^{\infty} I_r \cos(r\omega t)$, to poszukiwana moc wyrazi się relacją:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T Ri^2(t)dt = \frac{R}{T}\int_0^T \left[\sum_{r=1}^{\infty} I_r \cos(\omega t)\right]^2 dt$$

Powyższą relację możemy zapisać:

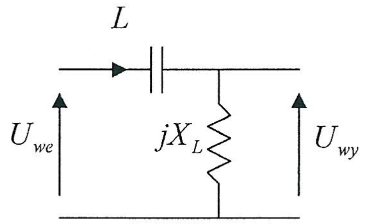
$$P=\frac{R}{T}\int_0^T\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}I_rI_k\,cos(r\omega t)cos(k\omega t)dt=\frac{R}{2T}\int_0^T\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}I_rI_k\{cos[(r-k)\omega t]+cos[(r+k)\omega t]\}dt\,.$$

W tym przypadku, analogicznie jak poprzednio całka oznaczona nie zeruje się w przypadku gdy $r=k$ zatem

$$P=\frac{R}{2}\sum_{r=1}^{\infty}I_r^2$$

Filtry elektryczne

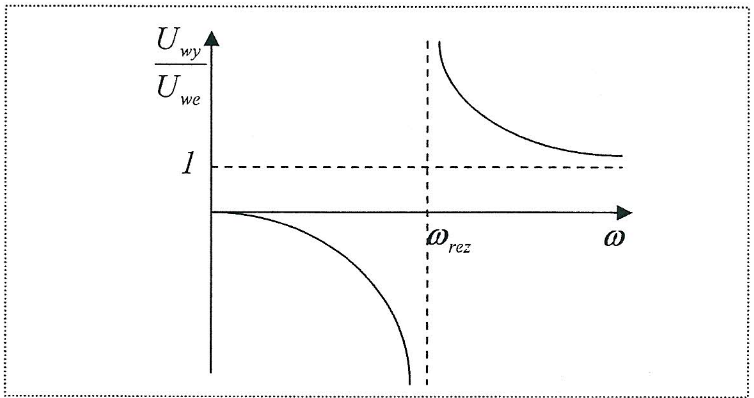
Istnieje wiele urządzeń elektrycznych, które poprawnie pracują jedynie przy sinusoidalnych przebiegach prądów i napięć.
Rozważmy relacje między napięciem wejściowym a wyjściowym dla obwodu:



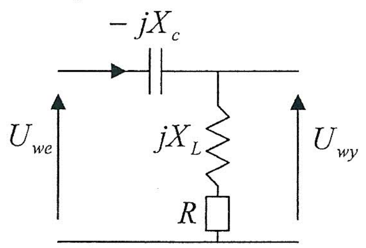
Napięcie wyjściowy dla powyższego obwodu wyrazi się wzorem:

$$\underline{U_{wy}}=\frac{jX_L}{j(X_L-X_C)}\underline{U_{we}}=\frac{\omega^2LC}{\omega^2LC-1}\underline{U_{we}}$$

Charakterystyka częstotliwościowa takiego czwórnika ma postać:



Rozważmy obecnie czwórnik, jak na rysunku:



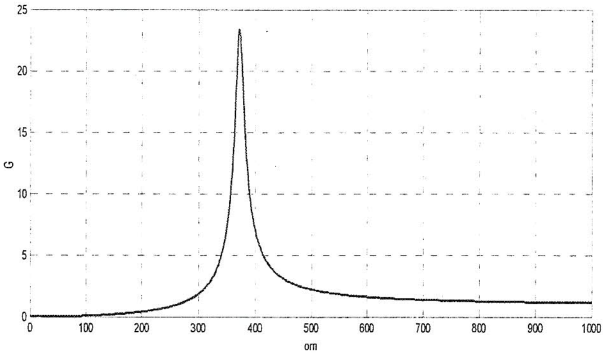
Napięcie wyjściowy dla powyższego obwodu wyrazi się wzorem:

$$\underline{U}_{wy} = \frac{R + jX_L}{R + j(X_L - X_C)}\underline{U}_{we} = \frac{\omega RC + j\omega^2 LC}{\omega RC + j(\omega^2 LC - 1)}\underline{U}_{we}$$

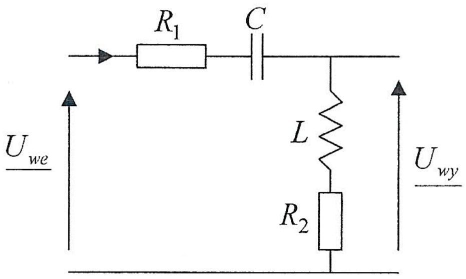
i dalej

$$\frac{|\underline{U}_{wy}|}{|\underline{U}_{we}|} = G = \frac{\sqrt{(\omega RC)^2 + (\omega^2 LC)^2}}{\sqrt{(\omega RC)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}$$

Charakterystyka częstotliwościowa takiego czwórnika ma postać:



Obecnie rozważmy obwód:



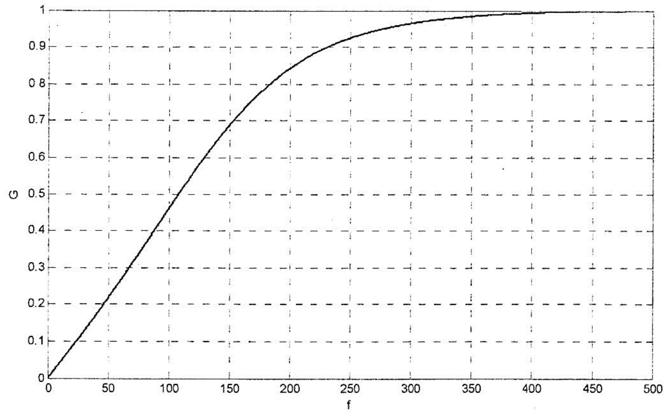
Napięcie wyjściowe wyrazi się tu wzorem:

$$\underline{U}_{wy} = \frac{R_2 + j\omega L}{R_1 + R_2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}\underline{U}_{we} = \frac{\omega R_2 C + j\omega^2 LC}{\omega(R_1 + R_2)C + j(\omega^2 LC - 1)}\underline{U}_{we}$$

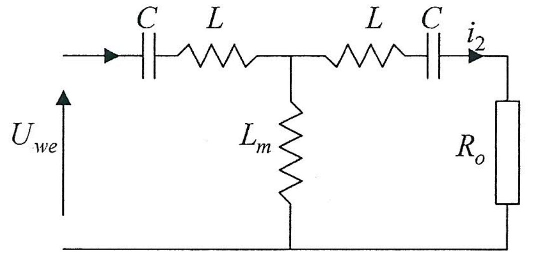
Charakterystykę częstotliwościową takiego czwórnika opisuje relacja:

$$\left|\frac{\underline{U}_{wy}}{\underline{U}_{we}}\right| = \sqrt{\frac{(\omega R_2 C)^2 + (\omega^2 LC)^2}{[\omega(R_1 + R_2)C]^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}$$

Charakterystykę taką dla przyjętych parametrów przedstawia poniższy rysunek.



Taka, jak powyższa charakterystyka pozwala czwórnik ten potraktować jako filtr górnoprzepustowy.
Rozważmy obecnie czwórnik jak na rysunku:



Korzystając z twierdzenia Thevenina wyznaczamy wartość napięcia na rezystancji odbiornika R_o

$$\underline{U}_{wy} = R_o \underline{i}_2 = \frac{j\omega L_m R_o \underline{U}_{we}}{j\left(\omega L + \omega L_m - \dfrac{1}{\omega C}\right)\left[\dfrac{j\omega L_m j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}{j\left(\omega L + \omega L_m - \dfrac{1}{\omega C}\right)} + R_o + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)\right]} =$$

$$= \frac{j\omega L_m R_o \underline{U}_{we}}{-\omega L_m\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right) - \left(\omega L + \omega L_m - \dfrac{1}{\omega C}\right)\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right) + jR_o\left(\omega L + \omega L_m - \dfrac{1}{\omega C}\right)}$$

Mnożąc licznik i mianownik przez $\omega^2 C^2$ otrzymujemy:

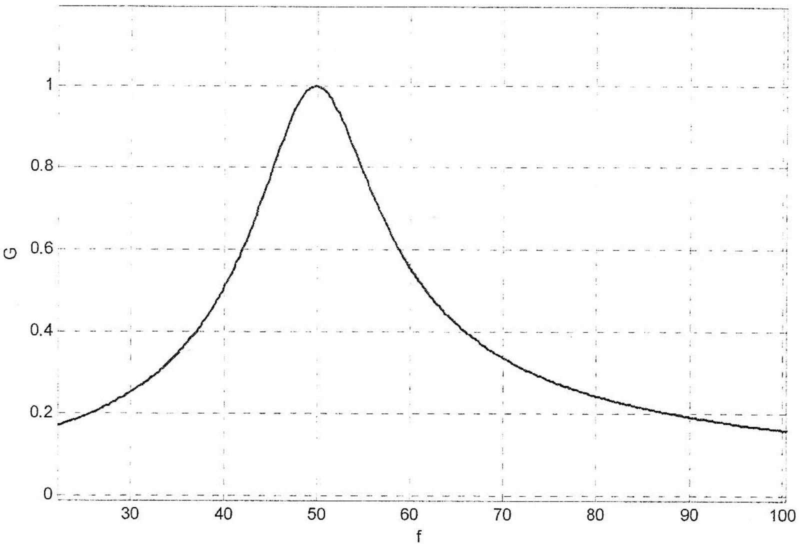
$$\underline{U}_{wy} = \frac{j\omega^3 C^2 L_m R_o \underline{U}_{we}}{-\omega^2 L_m C\left(\omega^2 LC - 1\right) - \left(\omega^2 L + \omega^2 L_m - 1\right)\left(\omega^2 LC - 1\right) + j\omega C R_o\left(\omega^2 LC + \omega^2 L_m C - 1\right)} =$$

$$= \frac{j\omega^3 C^2 L_m R_o}{-\left(\omega^2 LC + 2\omega^2 L_m C - 1\right)\left(\omega^2 LC - 1\right) + j\omega C R_o\left(\omega^2 LC + \omega^2 L_m C - 1\right)} \underline{U}_{we}$$

Ostatecznie charakterystyka częstotliwościowa czwórnika przyjmie postać:

$$\frac{|U_{wy}|}{|U_{we}|} = G = \frac{\omega^3 C^2 L_m R_o}{\sqrt{\left(\omega^2 LC + 2\omega^2 L_m C - 1\right)^2 \left(\omega^2 LC - 1\right)^2 + \omega^2 C^2 R_o^2 \left(\omega^2 LC + \omega^2 L_m C - 1\right)^2}}$$

Charakterystyka ta, dla przyjętych parametrów liczbowych przyjmuje postać:



Czwórnik ze względu na charakterystykę nosi nazwę filtru pasmowo przepustowego.