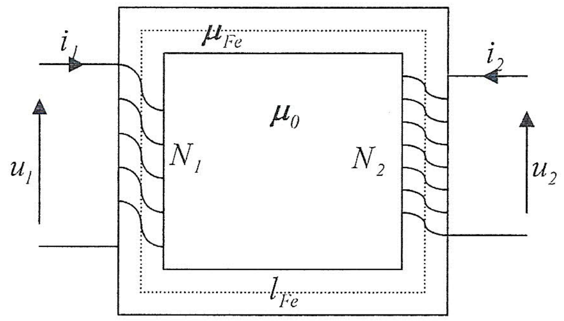
Wykład 7

Obwody elektryczne sprzężone magnetycznie.

Rozważmy układ elektromagnetyczny jak na rysunku:



Niech $i_2 = 0$, to zgodnie z prawem przepływu mamy:

$$\oint Hdl = N_1 i_1$$

Jeśli przyjąć, że obwód ferromagnetyczny jest jednorodny, o stałym przekroju S_{Fe} i izotropowy o stałej przenikalności magnetycznej μ_{Fe}, to możemy napisać:

$$Hl_{Fe} = N_1 i_1$$

stąd

$$B = \frac{\mu_{Fe} N_1 i_1}{l_{Fe}}.$$

Strumień magnetyczny Φ, który wyraża się wzorem $\Phi = \int \vec{B} d\vec{S}$, w rozważanym tu przypadku przyjmie postać:

$$\Phi = \frac{\mu_{Fe} S_{Fe} N_1 i_1}{l_{Fe}}.$$

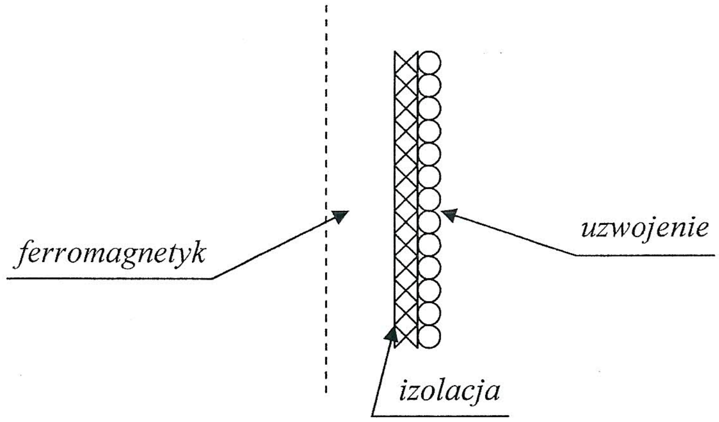
Strumień wyrażony powyższym wzorem przenika zarówno przez zwoje uzwojenia które go wywołały, jak i przez zwoje drugiego uzwojenia, zatem mamy w tym przypadku do czynienia z dwoma strumieniami skojarzonymi:

$$\psi_{11} = N_1 \Phi = \frac{N_1^2 \mu_{Fe} S_{Fe}}{l_{Fe}} i_1 \quad \text{oraz} \quad \psi_{12} = N_2 \Phi = \frac{N_1 N_2 \mu_{Fe} S_{Fe}}{l_{Fe}} i_1 .$$

Powtarzając to samo rozumowanie dla przypadku zasilania wyłącznie obwodu drugiego otrzymamy:

$$\psi_{22} = N_2 \Phi = \frac{N_2^2 \mu_{Fe} S_{Fe}}{l_{Fe}} i_2 \quad \text{oraz} \quad \psi_{21} = N_1 \Phi = \frac{N_1 N_2 \mu_{Fe} S_{Fe}}{l_{Fe}} i_2$$

Ze względu na konieczne działania konstrukcyjne związane z mechanicznym mocowaniem uzwojeń i elektryczną izolacją konieczne jest jeszcze uwzględnienie dodatkowych strumieni.



Jak łatwo zauważyć, mogą i istnieją linie pola magnetycznego, które zamykają się wokół przewodników nie wnikając do ferromagnetyka. Strumień, z natury rzeczy skojarzony wyłącznie z uzwojeniem, który go wzbudza nazywamy strumieniem rozproszenia i oznaczamy odpowiednio: $\psi_{\sigma 1}$ i $\psi_{\sigma 2}$.
Ostatecznie więc możemy napisać:

$$\psi_{11} = \psi_{\sigma 1} + N_1\Phi = \psi_{\sigma 1} + \frac{N_1^2 \mu_{Fe} S_{Fe}}{l_{Fe}} i_1 \quad , \quad \psi_{12} = N_2\Phi = \frac{N_1 N_2 \mu_{Fe} S_{Fe}}{l_{Fe}} i_1 ,$$

$$\psi_{22} = \psi_{\sigma 2} + N_2\Phi = \psi_{\sigma 2} + \frac{N_2^2 \mu_{Fe} S_{Fe}}{l_{Fe}} i_2 \quad \text{oraz} \quad \psi_{21} = N_1\Phi = \frac{N_1 N_2 \mu_{Fe} S_{Fe}}{l_{Fe}} i_2 .$$

Wprowadzając pojęcia indukcyjności własnej i wzajemnej możemy napisać:

$$M_{11} = \frac{\psi_{11}}{i_1} = \frac{\psi_{\sigma 1}}{i_1} + \frac{N_1^2 \mu_{Fe} S_{Fe}}{l_{Fe}} = L_{\sigma 1} + N_1^2 \Lambda = L_{\sigma 1} + L_{\mu 1}$$

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_1} = \frac{N_1 N_2 \mu_{Fe} S_{Fe}}{l_{Fe}} = \frac{N_2}{N_1} N_1^2 \Lambda = \frac{N_1}{N_2} N_2^2 \Lambda = \frac{N_2}{N_1} L_{\mu 1} = \frac{N_1}{N_2} L_{\mu 2}$$

$$M_{22} = \frac{\psi_{22}}{i_2} = \frac{\psi_{\sigma 2}}{i_2} + \frac{N_2^2 \mu_{Fe} S_{Fe}}{l_{Fe}} = L_{\sigma 2} + N_2^2 \Lambda = L_{\sigma 2} + L_{\mu 2}$$

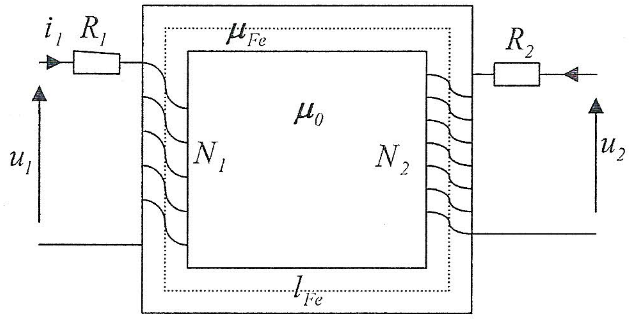
$$M_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_2} = \frac{N_1 N_2 \mu_{Fe} S_{Fe}}{l_{Fe}} = \frac{N_2}{N_1} N_1^2 \Lambda = \frac{N_1}{N_2} N_2^2 \Lambda = \frac{N_2}{N_1} L_{\mu 1} = \frac{N_1}{N_2} L_{\mu 2} .$$

Zauważmy zatem, że $M_{12} = M_{21}$.

Teraz strumień całkowity skojarzony z uzwojeniem pierwszym wyrazi się wzorem: $\psi_1 = M_{11} i_1 + M_{12} i_2$ natomiast z uzwojeniem drugim: $\psi_2 = M_{22} i_2 + M_{21} i_1$

Transformator jednofazowy

Rozważmy układ obwodów, analogiczny do poprzedniego. W tym przypadku mamy jednak wyodrębnione rezystancje uzwojeń.



Zgodnie z prawem Faradaya możemy napisać:

$$\frac{d\psi_j}{dt} = u_j - R_j i_j \text{ dla } j = 1,2.$$

Wykorzystując poprzednio wykazane zależności mamy:

$$(L_{\sigma 1} + L_{\mu 1})\frac{di_1}{dt} + L_{\mu 1}\frac{N_2}{N_1}\frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 = u_1$$

$$\left(L_{\sigma 2} + \frac{N_2^2}{N_1^2}L_{\mu 1}\right)\frac{di_2}{dt} + L_{\mu 1}\frac{N_2}{N_1}\frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 = u_2$$

Celem uzyskania bardziej zwartego zapisu wprowadźmy oznaczenia: $\frac{N_2}{N_1} = n_{21}$, $L_{\mu 1} = L_\mu$.

Teraz równania przyjmą postać:

$$(L_{\sigma 1} + L_\mu)\frac{di_1}{dt} + L_\mu n_{21}\frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 = u_1$$

$$(L_{\sigma 2} + n_{21}^2 L_\mu)\frac{di_2}{dt} + L_\mu n_{21}\frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 = u_2.$$

Po wprowadzeniu oznaczenia: $i_2' = n_{21} i_2$ mamy

$$(L_{\sigma 1} + L_\mu)\frac{di_1}{dt} + L_\mu\frac{di_2'}{dt} + R_1 i_1 = u_1$$

$$\left(\frac{L_{\sigma 2}}{n_{21}} + n_{21}L_\mu\right)\frac{di_2'}{dt} + L_\mu n_{21}\frac{di_1}{dt} + \frac{R_2}{n_{21}}i_2' = u_2$$

Jeśli drugie z równań podzielić obustronnie przez n_{21} to otrzymamy:

$$\left(\frac{L_{\sigma 2}}{n_{21}^2}+L_\mu\right)\frac{di_2'}{dt}+L_\mu\frac{di_1}{dt}+\frac{R_2}{n_{21}^2}i_2'=\frac{u_2}{n_{21}}.$$

Wprowadzając kolejne oznaczenia definicjami: $L'_{\sigma 2}=\dfrac{L_{\sigma 2}}{n_{21}^2}$, $R_2'=\dfrac{R_2}{n_{21}^2}$, $u_2'=\dfrac{u_2}{n_{21}}$,
otrzymamy ostateczny poszukiwany układ równań transformatora jednofazowego.

$$\left(L_{\sigma 1}+L_\mu\right)\frac{di_1}{dt}+L_\mu\frac{di_2'}{dt}+R_1 i_1=u_1$$

$$\left(L'_{\sigma 2}+L_\mu\right)\frac{di_2'}{dt}+L_\mu\frac{di_1}{dt}+R_2' i_2'=u_2'.$$

Rozważmy przypadek pracy tego transformatora w sieci prądu przemiennego w stanach ustalonych. Wtedy możemy posłużyć się rachunkiem symbolicznym.

$$\left[R_1+j\omega\left(L_{\sigma 1}+L_\mu\right)\right]\underline{I_1}+j\omega L_\mu \underline{I_2'}=\underline{U_1}$$

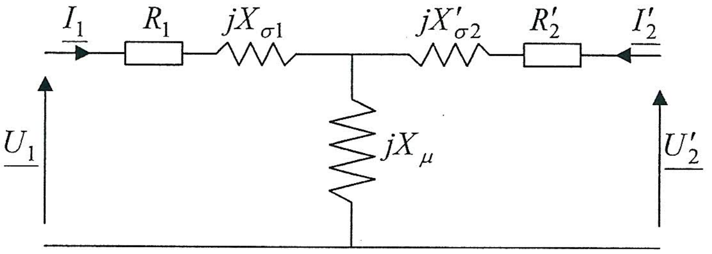
$$\left[R_2'+j\omega\left(L'_{\sigma 2}+L_\mu\right)\right]\underline{I_2'}+j\omega L_\mu \underline{I_1}=\underline{U_2'}$$

Wprowadzając oznaczenia $\omega L_{\sigma 1}=X_{\sigma 1}$, $\omega L'_{\sigma 2}=X'_{\sigma 2}$; $\omega L_\mu=X_\mu$ możemy napisać:

$$\left(R_1+jX_{\sigma 1}\right)\underline{I_1}+jX_\mu\left(\underline{I_1}+\underline{I_2'}\right)=\underline{U_1}$$

$$\left(R_2'+jX'_{\sigma 2}\right)\underline{\dot{I}_2}+jX_\mu\left(\underline{I_1}+\underline{I_2'}\right)=\underline{U_2'}$$

Łatwo zauważyć, że powyższy układ równań opisuje obwód elektryczny o dwóch oczkach.

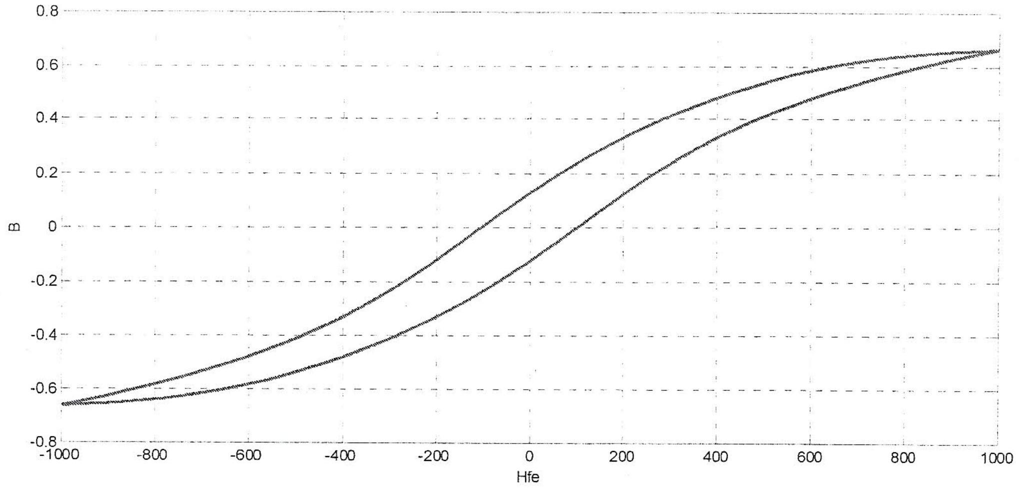


Wielkości n_{21}, a także n_{12} noszą nazwę przekładni zwojowej transformatora i są one równe z dobrym przybliżeniem ilorazowi wartości skutecznych napięć $\dfrac{|u_2|}{|u_1|}$ lub odpowiednio $\dfrac{|u_1|}{|u_2|}$.

Powyższy schemat zastępczy zbudowany dla stanów ustalonych, przy sinusoidalnym zasilaniu musi być uzupełniony o element, który będzie odzwierciedlał fakt istnienia ferromagnetycznego obwodu magnetycznego. Ferromagnetyk jest jednocześnie przewodnikiem a nie izolatorem. Z tego powodu zmieniająca się w czasie indukcja magnetyczna wyindukuje w nim prąd zwany prądem wirowym, on z kolei wywoła straty mocy cieplnej w ferromagnetyku. Z dobrym przybliżeniem można przyjąć, że straty te są proporcjonalne do kwadratu częstotliwości i skutecznej wartości napięcia, zatem:

$$\Delta P_w = k_w (Bf)^2 .$$

Drugim, istotnym zjawiskiem dotyczącym obwodu ferromagnetycznego jest fakt, że charakterystyka jego przemagnesowywania nie jest charakterystyką jednoznaczną. Ten typ charakterystyki nosi nazwę histerezy.



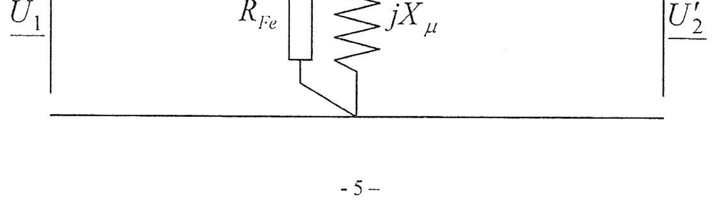
Energia pola elektromagnetycznego, przy założeniu równomiernego rozkładu indukcji na przekroju poprzecznym ferromagnetyka wyrazi się wzorem:

$E_{Fe} = BHV_{Fe} \approx kB^2$ stąd moc dla przebiegów okresowych $P_{Fe} = k\omega B^2$.

Zauważmy, że wynik powyższej relacji jest zależny od tego, na której gałęzi pętli histerezy się znajdujemy. Jeden pełny obieg po niej da różnicę proporcjonalną do pola powierzchni pętli, zatem jednostkowe straty mocy są do niej proporcjonalne. Całkowite straty z tego tytułu będą proporcjonalne do liczby obiegów pętli w jednostce czasu czyli do częstotliwości, zatem:

$$\Delta P_h = k_h B^2 f .$$

Zgodnie z prawem Faradaya dla przebiegów sinusoidalnych mamy: $|\underline{E}| = \omega N^2 S |\underline{B}|$, zatem element, który ma reprezentować te straty powinien być umieszczony w takim miejscu, w którym wydzielane na nim straty będą proporcjonalne do kwadratu napięcia.



Aby układ opisany powyżej mógł poprawnie pracować, kolumny i jarzmo transformatora muszą być w odpowiedni sposób skonstruowane. Najczęściej są one wykonane z pakietu blach odizolowanych od siebie. Widok przekroju poprzecznego takiej kolumny lub jarzma przedstawia poniższy rysunek.