Wykład 8

Stany nieustalone w obwodach elektrycznych

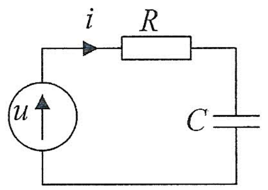
Powróćmy do poznanych już relacji pomiędzy prądami i napięciami dla typowych trzech elementów tworzących obwody.

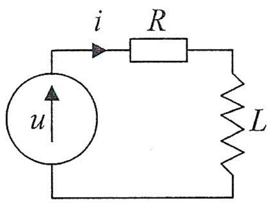
Dla pojemności $u_c = \frac{q}{C}$,

dla rezystancji $u_R = Ri = R\frac{dq}{dt}$,

dla indukcyjności $u_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}$.

Rozważmy teraz dwa najprostsze obwody przedstawione na poniższych rysunkach.





Na podstawie powyższych wzorów i oczkowego prawa Kirchoffa możemy napisać:

dla obwodu z pojemnością $R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = u$,

dla obwodu z indukcyjnością $L\frac{di}{dt} + Ri = u$.

Dla obydwu przypadków mamy do czynienia z równaniami różniczkowymi zwyczajnymi , liniowymi pierwszego rzędu.

Dla wszystkich równań różniczkowych zwyczajnych, liniowych rozwiązania sprowadza się do sumy całek równania jednorodnego i niejednorodnego. Rozważmy zatem przypadek obwodu z pojemnością.

Równanie jednorodne: $$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0.$$

Poszukujemy rozwiązania metodą przewidywania: $q_1 = Ke^{rt}$, stąd $\frac{dq_1}{dt} = rKe^{rt}$.

Podstawiając przewidywane rozwiązanie do równania jednorodnego otrzymujemy:

$$RrKe^{rt} + \frac{1}{C}Ke^{rt} = 0.$$

Rozwiązanie będzie nie trywialne jeśli $K \neq 0$, zatem mnożąc obustronnie powyższe równanie przez e^{-rt} otrzymamy:

$K\left(Rr + \frac{1}{C}\right) = 0$, stad $r = -\frac{1}{RC}$, zatem poszukiwane rozwiązanie równania jednorodnego będzie miało postać:

$$q_1 = Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

Przyjmijmy teraz, że napięcie u ma postać: $u=\sqrt{2}U_{sk}cos(\omega t)$, to rozwiązanie równania niejednorodnego będzie następujące:

$$\underline{q_2}=\frac{\sqrt{2}U_{sk}e^{j\omega t}}{\frac{1}{C}+j\omega R}=\frac{\sqrt{2}U_{sk}Ce^{j\omega t}}{1+j\omega RC}=\frac{\sqrt{2}U_{sk}Ce^{j(\omega t-\varphi)}}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}},$$

gdzie

$$\varphi=atg(\omega RC)$$

stąd

$$q_2=\frac{\sqrt{2}U_{sk}C}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}cos(\omega t-\varphi).$$

Teraz poszukiwane rozwiązanie, jako suma całek przyjmie postać:

$$q=q_1+q_2=Ke^{-\frac{t}{RC}}+\frac{\sqrt{2}U_{sk}C}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}cos(\omega t-\varphi).$$

Ostateczne rozwiązanie otrzymamy jeśli przyjmiemy istnienie określonych warunków początkowych, czyli wartość poszukiwanego rozwiązania dla $t=0$. Niech w chwili początkowej na pojemności panowało napięcie $u=U(0)$, stąd $q(0)=CU(0)$.
Wykorzystując powyższy związek możemy napisać:

$$CU(0)=K+\frac{\sqrt{2}U_{sk}C}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}cos(\varphi)$$

lub

$$CU(0)=K+\frac{\sqrt{2}U_{sk}C}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

stąd

$$K=CU(0)-\frac{\sqrt{2}U_{sk}C}{1+(\omega RC)^2}$$

$$q=\left[CU(0)-\frac{\sqrt{2}U_{sk}C}{1+(\omega RC)^2}\right]e^{-\frac{t}{RC}}+\frac{\sqrt{2}U_{sk}C}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}cos(\omega t-\varphi),$$

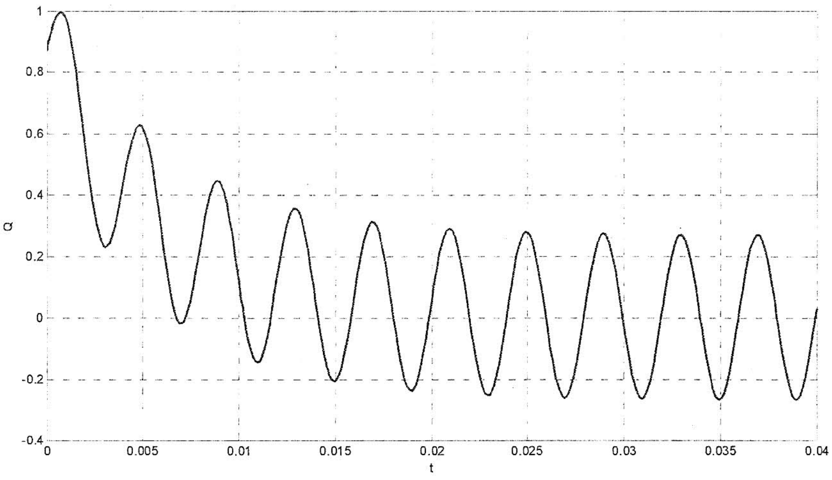
lub

$$q=\left[CU(0)-\frac{\sqrt{2}U_{sk}C}{1+(\omega RC)^2}\right]e^{-\frac{t}{RC}}+\frac{\sqrt{2}U_{sk}C}{1+(\omega RC)^2}[cos(\omega t)+\omega RC\,sin(\omega t)].$$

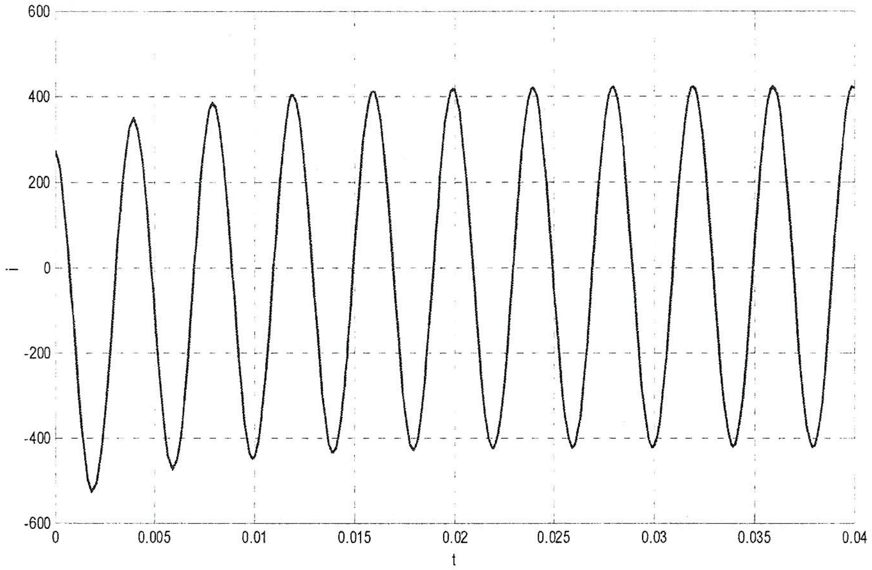
Przebieg prądu w tym obwodzie wyznaczamy ze związku:

$$i=\frac{dq}{dt}=\left[-\frac{U(0)}{R}+\frac{\sqrt{2}U_{sk}}{R+R(\omega RC)^2}\right]e^{-\frac{t}{RC}}+\frac{\sqrt{2}U_{sk}\omega C}{1+(\omega RC)^2}[\omega RC\,cos(\omega t)-sin(\omega t)].$$

Otrzymane przebiegi czasowe można przedstawić graficznie jak na poniższych rysunkach.



Przebieg w czasie ładunku na okładkach „kondensatora".



Przebieg w czasie prądu w analizowanym obwodzie.

Rozważmy obecnie ten sam obwód, ale przy zasilaniu napięciem stałym. Równanie różniczkowe będzie miało wtedy postać:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = U \text{, gdzie } U = const.$$

Rozwiązanie równania jednorodnego (całka ogólna) będzie miała znaną nam już postać:

$$q_1 = Ke^{-\frac{t}{RC}}.$$

Natomiast rozwiązanie naszego równania dla stanu ustalonego sprowadza się do relacji:

$$q_2 = CU.$$

W rezultacie $$q = q_1 + q_2 = Ke^{-\frac{t}{RC}} + CU\,.$$

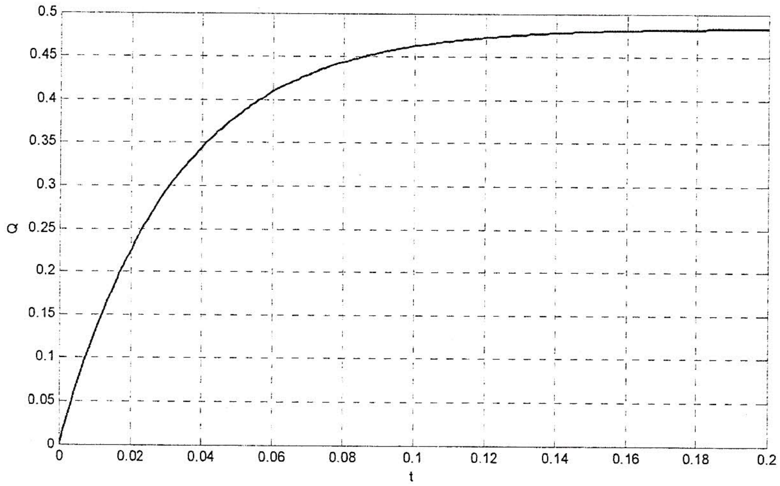
Jeśli tym razem przyjmiemy, że na pojemności nie był zgromadzony wcześniej żaden ładunek, to oznacza że dla $t=0$ $q(0) = 0 = K + CU$, stąd $K = -CU$. Ostatecznie czasowy przebieg ładowania pojemności przyjmie postać:

$$q = CU\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

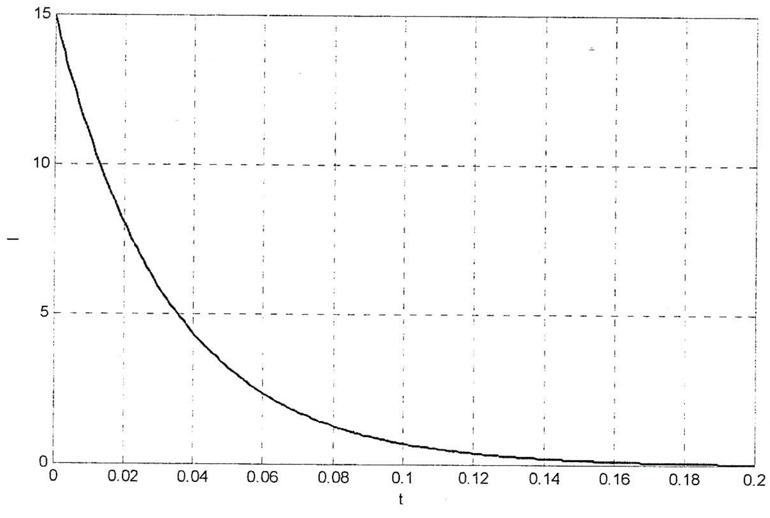
Na tej podstawie, możemy napisać wyrażenie na przebieg prądu ładowania „kondensatora".

$$\frac{dq}{dt} = i = \frac{U}{R}e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Graficzne obrazy otrzymanych wyników przedstawiają poniższe rysunki.



Przebieg w czasie ładunku na okładkach „kondensatora".



Przebieg w czasie prądu ładowania „kondensatora".

Rozważmy obecnie obwód z indukcyjnością. Równanie dla tego obwodu ma postać:

$$L\frac{di}{dt}+Ri=u\,.$$

Podobnie jak poprzednio, rozwiążmy równanie jednorodne, czyli: $L\frac{di}{dt}+Ri=0$. Stosując metodę przewidywania piszemy: $i_1=Ke^{rt}$, stąd

$$KLre^{rt}+K\,Re^{rt}=0\,.$$

Aby rozwiązanie nie było trywialne musimy przyjąć, że $K\neq 0$, zatem możemy obustronnie pomnożyć powyższe równanie przez $\frac{e^{-rt}}{K}$ i otrzymamy:

$$Lr+R=0\,,$$

stąd

$$r=-\frac{R}{L}\,.$$

Ostatecznie więc rozwiązanie równania jednorodnego przyjmie postać:

$$i_1=Ke^{-\frac{R}{L}t}\,.$$

Obecnie przyjmiemy, że $u=\sqrt{2}U_{sk}\,cos(\omega t)$. Wtedy rozwiązanie (całka) równania niejednorodnego ma postać:

$$i_2=\frac{\sqrt{2}U_{sk}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}cos(\omega t-\varphi)\,,$$

gdzie

$$\varphi=atg\left(\frac{\omega L}{R}\right).$$

Teraz możemy napisać rozwiązanie równania naszego obwodu:

$$i=i_1+i_2=Ke^{-\frac{R}{L}t}+\frac{\sqrt{2}U_{sk}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}cos(\omega t-\varphi)\,.$$

Ostateczna postać rozwiązania, będzie zależała od warunku początkowego. Przyjmijmy tym razem, że dla $t=0$ $i=0$, zatem

$$0=K+\frac{\sqrt{2}U_{sk}\,cos(\varphi)}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\,.$$

Rozwiązanie dla przyjętego warunku początkowego ma postać:

$$i = \frac{\sqrt{2}U_{sk}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \left[cos(\omega t - \varphi) - cos(\varphi) e^{-\frac{R}{L}t} \right].$$

Rozważmy obecnie ten sam obwód, ale przy zasilaniu napięciem stałym. Równanie różniczkowe będzie miało wtedy postać:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = u$$

Całka ogólna będzie miała znaną już postać:

$$i_1 = Ke^{-\frac{R}{L}t},$$

natomiast całka szczególna dla wymuszenia napięciem stałym mamy: $i_2 = \frac{U}{R}$, stąd

$$i = i_1 + i_2 = Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R}.$$

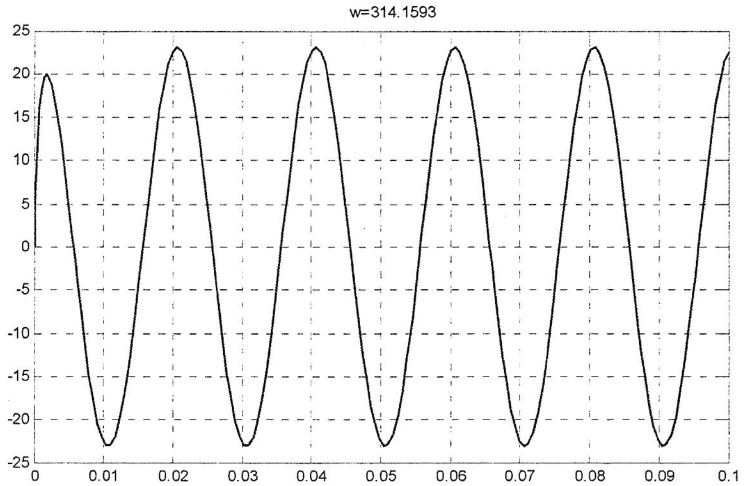
Teraz przyjmijmy, że w chwili $t=0$ prąd w obwodzie wynosił $i(0)$ wtedy

$$i(0) = K + \frac{U}{R} \text{ lub } K = i(0) - \frac{U}{R}$$

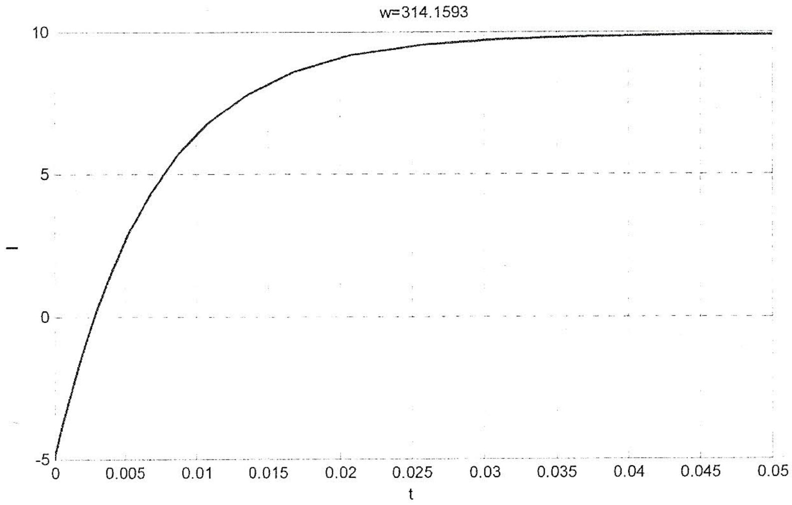
ostatecznie więc:

$$i = i(0)e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Wielkości RC dla obwodu z pojemnością i $\frac{L}{R}$ dla obwodu z indukcyjnością noszą nazwę stałych czasowych.

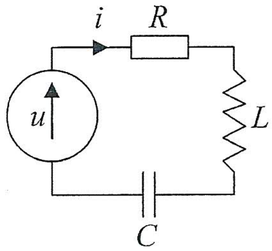


Przebieg w czasie prądu w analizowanym obwodzie warunkach harmonicznego wymuszenia i zerowych warunkach początkowych.



Przebieg w czasie prądu w analizowanym obwodzie warunkach wymuszenia napięcie stałym i niezerowych warunkach początkowych.

Rozważmy obecnie obwód przedstawiony na poniższym rysunku.



Równanie oczkowe dla powyższego obwodu ma postać:

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=u.$$

Równanie jednorodne ma postać jak wyżej, tyle tylko, że $u=0$. Stosując metodę przewidywania w postaci $q=Ke^{rt}$ otrzymujemy:

$$Lr^2+Rr+\frac{1}{C}=0.$$

Mamy zatem do rozwiązania równanie kwadratowe ze względu na niewiadomą r, zatem:

$$\Delta=R^2-4\frac{L}{C},$$

stąd

$$r_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\frac{\sqrt{R^2-4\frac{L}{C}}}{2L}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}.$$

Zauważmy, że obok powyższego rozwiązania mamy jeszcze możliwe dwa inne, a to:

- gdy $\frac{1}{LC} > \left(\frac{R}{2L}\right)^2$ wtedy $r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$;
- gdy $\frac{1}{LC} = \left(\frac{R}{2L}\right)^2$ wtedy $r_1 = r_2 = r = -\frac{R}{2L}$.

Dla pierwszych dwóch przypadków całka ogólna ma postać:

$$i_1 = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t}.$$

Nieco inaczej przedstawia się postać tej całki w trzecim przypadku i ma kształt:

$$i_1 = K_1 e^{rt} + K_2 t e^{rt} = (K_1 + K_2 t)e^{rt}.$$

Zauważmy, że w tym przypadku (równanie drugiego rzędu) mamy dwie stałe całkowania. Aby móc je wyznaczyć, konieczna jest znajomość nie tylko wartości poszukiwanego rozwiązania w chwili $t=0$, ale także wartości pierwszej pochodnej tej funkcji w chwili $t=0$. Przyjmijmy, że w naszym przypadku mamy: $q(0) = q_0$, natomiast $i(0) = \frac{dq}{dt}/_{t=0} = 0$. Rozważymy tu najciekawszy z przypadków, gdy pierwiastki są zespolone sprzężone. Dla jasności dalszych rozważań, przyjmijmy, że dla $t>0$ $u=0$. Dla takich warunków możemy napisać:

$$q = K_1 e^{-\frac{R}{2L}t}\left[cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\,t\right) + j\,sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\,t\right)\right] +$$
$$+ K_2 e^{-\frac{R}{2L}t}\left[cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\,t\right) - j\,sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\,t\right)\right].$$

Ponieważ dla $t=0$ $q=q_0$ zatem $K_1 + K_2 = q_0$. Teraz wyznaczymy prąd płynący w analizowanym obwodzie, zatem:

$$\frac{dq}{dt} = i = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\left\{K_1\left[-sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\,t\right) + j\,cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\,t\right)\right] - K_2\left[sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\,t\right)\right] + j\,cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\,t\right)\right\}e^{-\frac{R}{2L}t} +$$
$$-\frac{R}{2L}\left\{K_1\left[cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\,t\right) + j\,sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\,t\right)\right] + K_2\left[cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\,t\right) - j\,sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\,t\right)\right]\right\}e^{-\frac{R}{2L}t}$$

Dla spełnienia zerowego warunku początkowego musimy napisać:

$$0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\,(jK_1 - jK_2) - \frac{R}{2L}(K_1 + K_2), \text{ lub}$$

$$\left[-\frac{R}{2L} + j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right]K_1 + \left[-\frac{R}{2L} - j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right]K_2 = 0,$$

Ponieważ $K_2 = q_0 - K_1$ więc

$$\left[-\frac{R}{2L} + j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right]K_1 + \left[-\frac{R}{2L} - j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right](q_0 - K_1) = 0,$$

stąd

$$K_1 = q_0 \frac{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} - j\frac{R}{2L}}{2\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}$$

a to implikuje

$$K_2 = q_0 \frac{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} + j\frac{R}{2L}}{2\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}$$

Zatem przebieg zmian ładunku w procesie rozładowywania pojemności otrzymujemy:

$$q = \frac{q_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}RC\frac{R}{2L}}} cos\left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\, t - \varphi\right] e^{-\frac{R}{2L}t},$$

gdzie

$$\varphi = atg\left[\frac{\frac{R}{2L}}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}\right],$$

lub

$$q = q_0 e^{-\frac{R}{2L}t}\left\{cos\left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\, t\right] + \frac{R}{2L\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} sin\left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\, t\right]\right\}$$

Natomiast przebieg prądu rozładowywania pojemności wyrazi się równaniem:

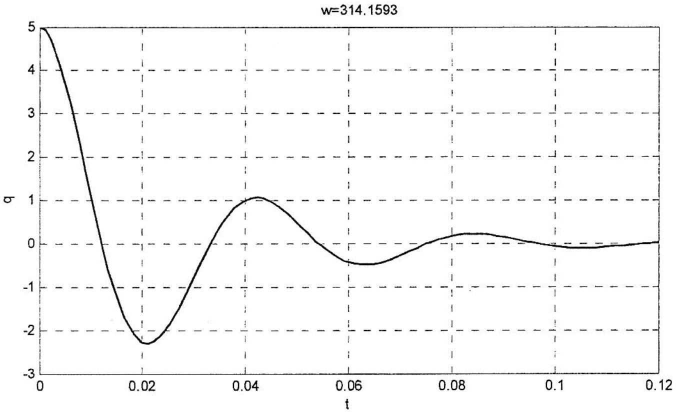
$$i = -q_0\left\{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\, sin\left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\, t\right] - \frac{R}{2L} cos\left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\, t\right]\right\} e^{-\frac{R}{2L}t},$$

lub

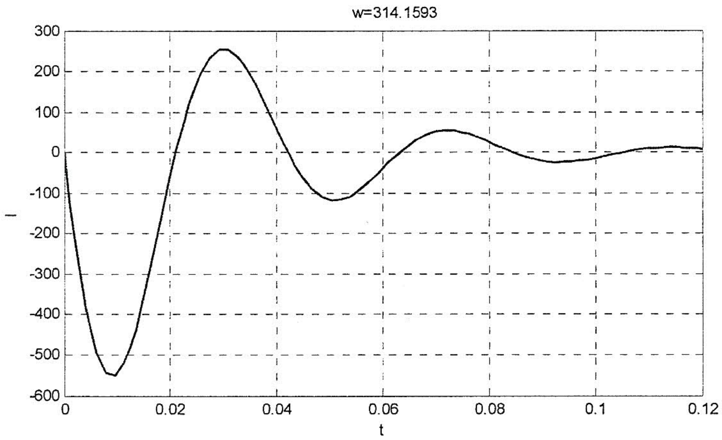
$$i = -\frac{q_0}{\sqrt{LC}} e^{-\frac{R}{2L}t} cos\left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\, t - \varphi\right],$$

gdzie

$$\varphi = atg\left(\frac{R}{2L\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}}\right)$$



Przykładowy przebieg zmian ładunku w procesie rozładowywania pojemności.



Przykładowy przebieg prądu rozładowywania pojemności