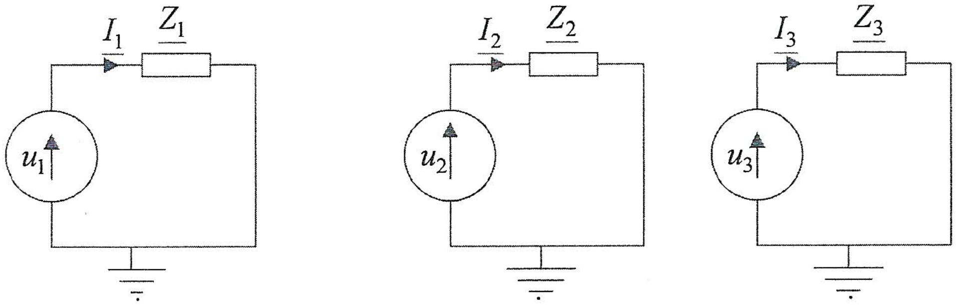
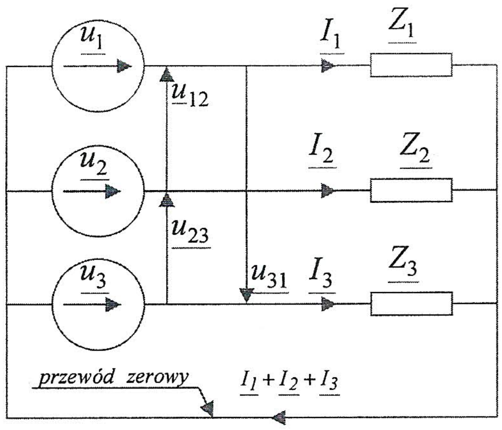
Wykład 9

Obwody trójfazowe

W teorii obwodów funkcjonuje teza, że każdy obwód można w jednym punkcie „uziemić" i nie spowoduje to zmiany rozpływu prądów i rozkładu napięć. Rozważmy zatem trzy obwody jak na rysunku:



Wobec powyższego przedstawione obwody można również narysować w następujący sposób:



Jeśli $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}$ oraz $\underline{u}_1 = \frac{U_{ph}}{\sqrt{2}} e^{j\omega t}$ $\underline{u}_2 = \frac{U_{ph}}{\sqrt{2}} e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{U_{ph}}{\sqrt{2}} \underline{a}^2 e^{j\omega t}$ $\underline{u}_3 = \frac{U_{ph}}{\sqrt{2}} e^{j\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{U_{ph}}{\sqrt{2}} \underline{a} e^{j\omega t}$ to obwód taki nazywamy trójfazowym symetrycznym. Tutaj przyjęto że $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$. Dla przypadku pełnej symetrii prąd w przewodach (przewodowy) jest równy $\underline{I}_k = \frac{U_{ph} e^{j\left[\omega t - (k-1)\frac{2\pi}{3}\right]}}{\sqrt{2}\underline{Z}}$. Problem nieco tylko się komplikuje, gdy chcemy uwzględnić impedancje przewodu zerowego Z_0. Z praw Kirchoffa wynika:

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \underline{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z} + \underline{Z}_0 & \underline{Z}_0 & \underline{Z}_0 \\ \underline{Z}_0 & \underline{Z} + \underline{Z}_0 & \underline{Z}_0 \\ \underline{Z}_0 & \underline{Z}_0 & \underline{Z} + \underline{Z}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{bmatrix}$$

stąd

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\underline{Z}(\underline{Z}+3\underline{Z}_0)} \begin{bmatrix} \underline{Z}+2\underline{Z}_0 & -\underline{Z}_0 & -\underline{Z}_0 \\ -\underline{Z}_0 & \underline{Z}+2\underline{Z}_0 & -\underline{Z}_0 \\ -\underline{Z}_0 & -\underline{Z}_0 & \underline{Z}+2\underline{Z}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \underline{u}_3 \end{bmatrix}$$

Jak z powyższego wynika, analiza nawet symetrycznego obwodu trójfazowego wymaga operowania na macierzach pełnych. Posługując się teoria algebry liniowej można niniejszy problem w znaczący sposób uprościć. W tym celu rozważmy zagadnienie diagonalizacji macierzy impedancji. Wartościami na diagonali, macierzy po diagonalizacji są jej wartości własne. Zatem:

$$det\begin{bmatrix} \underline{Z}+\underline{Z}_0-\lambda & \underline{Z}_0 & \underline{Z}_0 \\ \underline{Z}_0 & \underline{Z}+\underline{Z}_0-\lambda & \underline{Z}_0 \\ \underline{Z}_0 & \underline{Z}_0 & \underline{Z}+\underline{Z}_0-\lambda \end{bmatrix} = 0,$$

stąd

$$(\underline{Z}+\underline{Z}_0-\lambda)^3 + 2\underline{Z}_0^3 - 3(\underline{Z}+\underline{Z}_0-\lambda)\underline{Z}_0^2 = 0.$$

Wykonując zaznaczone działania otrzymujemy:

$$(\underline{Z}+\underline{Z}_0)^3 - 3(\underline{Z}+\underline{Z}_0)^2\lambda + 3(\underline{Z}+\underline{Z}_0)\lambda^2 - \lambda^3 + 2\underline{Z}_0^3 - 3(\underline{Z}+\underline{Z}_0)\underline{Z}_0^2 + 3\underline{Z}_0^2\lambda = 0$$

i dalej

$$\underline{Z}^2(\underline{Z}+3\underline{Z}_0) - 3\underline{Z}(\underline{Z}+2\underline{Z}_0)\lambda + 3(\underline{Z}+\underline{Z}_0)\lambda^2 - \lambda^3 = 0.$$

Poszukując rozwiązania powyższego równania ze względu na λ możemy napisać:

$$(\underline{Z}-\lambda)^2(\underline{Z}+3\underline{Z}_0-\lambda) = 0,$$

stąd poszukiwane wartości własne przyjmują postać: $\lambda_1 = \underline{Z}+3\underline{Z}_0$, $\lambda_{2,3} = \underline{Z}$.

Macierz, która „przeprowadza daną macierz do macierzy diagonalnej jest macierzą wektorów własnych, a zatem:

$$\begin{bmatrix} -2\underline{Z}_0 & \underline{Z}_0 & \underline{Z}_0 \\ \underline{Z}_0 & -2\underline{Z}_0 & \underline{Z}_0 \\ \underline{Z}_0 & \underline{Z}_0 & -2\underline{Z}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ w_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Powyższy układ równań jest od siebie wzajemnie zależny, zatem weźmiemy pod uwagę na przykład dwa pierwsze i tak

$$-2w_{11} + w_{21} + w_{31} = 0$$
$$w_{11} - 2w_{21} + w_{31} = 0.$$

Odejmując równania stronami otrzymujemy: $-3w_{11} + 3w_{21} = 0$, stąd $w_{11} = w_{21}$, w konsekwencji $w_{31} = w_{11}$.

Rozważmy obecnie drugi i trzeci wektor własny na bazie drugiej i trzeciej wartości własnej.

$$\underline{Z}_0\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{12} \\ w_{22} \\ w_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Powyższy układ równań prowadzi do wniosku, że istnieje tylko jedno niezależne równanie: $w_{12}+w_{22}+w_{32}=0$, stąd $w_{32}=-w_{12}-w_{22}$. Analogicznie będzie przedstawiało się równanie dla trzeciego wektora własnego, zatem możemy napisać poszukiwaną macierz wektorów własnych:

$$W=\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{11} & w_{22} & w_{23} \\ w_{11} & -w_{12}-w_{22} & -w_{13}-w_{23} \end{bmatrix}$$

Jak łatwo zauważyć, macierzy wektorów własnych jest nieskończenie wiele, ale fakt ten pozwala na narzucenie dodatkowych wymagań na tą macierz. Niech macierz W będzie macierzą o elementach zespolonych i spełnia warunek $W^{-1}=\breve{W}^{T}$ a zatem:

$$\begin{bmatrix} w_{11} & w_{11} & w_{11} \\ \underline{\breve{w}}_{12} & \underline{\breve{w}}_{22} & -\underline{\breve{w}}_{12}-\underline{\breve{w}}_{22} \\ \underline{\breve{w}}_{13} & \underline{\breve{w}}_{23} & -\underline{\breve{w}}_{13}-\underline{\breve{w}}_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_{11} & \underline{w}_{12} & \underline{w}_{13} \\ w_{11} & \underline{w}_{22} & \underline{w}_{23} \\ w_{11} & -\underline{w}_{12}-\underline{w}_{22} & -\underline{w}_{13}-\underline{w}_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przeprowadzając analizę poszczególnych działań mamy: $3w_{11}^{2}=1$, stąd $w_{11}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ następnie

$$\left|\underline{w}_{12}\right|^{2}+\left|\underline{w}_{22}\right|^{2}+\left(\underline{w}_{12}+\underline{w}_{22}\right)\left(\underline{\breve{w}}_{12}+\underline{\breve{w}}_{22}\right)=1.$$

Jak z powyższego równania widać, nadal dysponujemy sporą swobodą wyborze elementów macierzy wektorów własnych. Przyjmijmy zatem, w nawiązaniu do elementu w_{11}, że $\underline{w}_{12}=w_{12}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Podstawiając do powyższego równania wartość elementu w_{12} otrzymujemy: $\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\underline{w}_{22}+\underline{\breve{w}}_{22}\right)=-\frac{1}{3}$ stąd $Re\left(\underline{w}_{22}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Ponieważ $\left|\underline{w}_{22}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}$ zatem $Im\left(\underline{w}_{22}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$, ostatecznie więc $\underline{w}_{22}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{j\frac{2\pi}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{a}$. Trzeci wyraz tej kolumny macierzy wektorów własnych wyznaczamy ze wzoru: $-\left(\underline{w}_{12}+\underline{w}_{22}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{a}^{2}$. Ostatecznie więc, poszukiwana macierz wektorów własnych przyjmuje postać:

$$\underline{S}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^{2} \\ 1 & \underline{a}^{2} & \underline{a} \end{bmatrix}$$

i nosi nazwę macierzy składowych symetrycznych. Zgodnie z przyjętymi warunkami przy konstrukcji tej macierzy, macierz odwrotna jest równa macierzy transponowanej sprzężonej i ma postać:

$$\underline{S}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^{2} & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^{2} \end{bmatrix}.$$

Rozważmy teraz nasze zadanie poszukiwania wartości prądów w układzie trójfazowym symetrycznym z różną od zera impedancją przewodu zerowego. Równanie to miało postać:

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \underline{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}+\underline{Z}_0 & \underline{Z}_0 & \underline{Z}_0 \\ \underline{Z}_0 & \underline{Z}+\underline{Z}_0 & \underline{Z}_0 \\ \underline{Z}_0 & \underline{Z}_0 & \underline{Z}+\underline{Z}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{bmatrix}.$$

Dokonajmy przekształcenia tego równania za pomocą macierzy $\underline{S}$.

$$\underline{S}\begin{bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \underline{u}_3 \end{bmatrix} = \underline{S}\begin{bmatrix} \underline{Z}+\underline{Z}_0 & \underline{Z}_0 & \underline{Z}_0 \\ \underline{Z}_0 & \underline{Z}+\underline{Z}_0 & \underline{Z}_0 \\ \underline{Z}_0 & \underline{Z}_0 & \underline{Z}+\underline{Z}_0 \end{bmatrix} \underline{S}^{-1}\underline{S} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_I \\ \underline{U}_{II} \end{bmatrix} = \frac{U_{ph}}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{a}^2 \\ \underline{a} \end{bmatrix} e^{j\omega t} = \sqrt{\frac{3}{2}} U_{ph} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{j\omega t}.$$

Jeśli zastosować analogiczne indeksy dla prądów jak dla napięć to otrzymamy nowe równanie:

$$\sqrt{\frac{3}{2}} U_{ph} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{j\omega t} = \begin{bmatrix} \underline{Z}+3\underline{Z}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_I \\ \underline{I}_{II} \end{bmatrix}$$

$$\text{stąd } \underline{I}_0 = \underline{I}_{II} = 0,\ \underline{I}_I = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} U_{ph}}{\underline{Z}} e^{j\omega t}.$$

Poszukując wartości prądów w poszczególnych przewodach piszemy:

$$\begin{bmatrix} \underline{i}_1 \\ \underline{i}_2 \\ \underline{i}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} U_{ph}}{\underline{Z}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{j\omega t} = \frac{U_{ph}}{\sqrt{2}\underline{Z}} \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{a}^2 \\ \underline{a} \end{bmatrix} e^{j\omega t}.$$

Jak teraz łatwo zauważyć, impedancja przewodu zerowego w warunkach pełnej symetrii nie odgrywa żadnej roli.

Moc w układzie trójfazowym

Funkcja mocy w układzie trójfazowym ma postać:

$$p(t) = \sum_{k=1}^{3} u_k(t) i_k(t).$$

W przypadku układu symetrycznego mamy:

$$p(t) = 2U_{ph}I_{ph}\left[cos(\omega t)cos(\omega t - \varphi) + cos\left(\omega t - \tfrac{2\pi}{3}\right)cos\left(\omega t - \tfrac{2\pi}{3} - \varphi\right) + cos\left(\omega t - \tfrac{4\pi}{3}\right)cos\left(\omega t - \tfrac{4\pi}{3} - \varphi\right)\right].$$

Wykorzystując tożsamości trygonometryczne, otrzymujemy:

$$p(t) = U_{ph}I_{ph}\left[3cos(\varphi) + cos(2\omega t) + cos\left(\omega t - \tfrac{4\pi}{3}\right) + cos\left(\omega t - \tfrac{2\pi}{3}\right)\right].$$

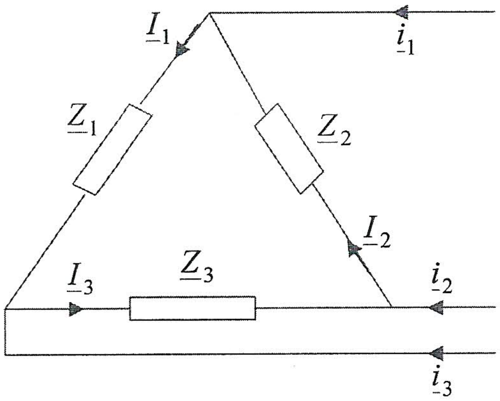
Zauważmy, że dla układu trójfazowego symetrycznego funkcja mocy jest tożsamościowo równa mocy czynnej i wynosi:

$$p(t)=P=3U_{ph}I_{ph}\cos(\varphi).$$

Rozważmy obecnie relacje między napięciami: $\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u}_3$ zwanymi fazowymi a napięciami $\underline{u}_{12},\underline{u}_{23},\underline{u}_{31}$ zwanymi przewodowymi. I tak na przykład:

$$\underline{u}_{12}=\underline{u}_1-\underline{u}_2=\sqrt{2}U_{sk}e^{j\omega t}\left(1-e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right)=\sqrt{2}U_{sk}e^{j\omega t}\left(\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}U_{ph}\right)e^{j\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right)}.$$

Z powyższego wynika, że napięcie przewodowe jest $\sqrt{3}$ razy większe od napięcia fazowego.
W układach trójfazowych odbiorniki łączone są nie tylko w gwiazdę ale także w trójkąt, jak na poniższym rysunku.



Zgodnie z węzłowym prawem Kirchoffa możemy napisać:

$$\begin{bmatrix}\underline{i}_1\\ \underline{i}_2\\ \underline{i}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\\ \underline{I}_3\end{bmatrix}.$$

Przeprowadzając analizę analogiczną jak w przypadku napięć mamy:

$$\underline{i}_1=\sqrt{2}I_{ph}e^{j\omega t}-\sqrt{2}I_{ph}\underline{a}^2e^{j\omega t}=\sqrt{2}I_{ph}\left(1+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{j\omega t}=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}I_{ph}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2}\right)e^{j\omega t}.$$

Powyższą relacje można zapisać w postaci:

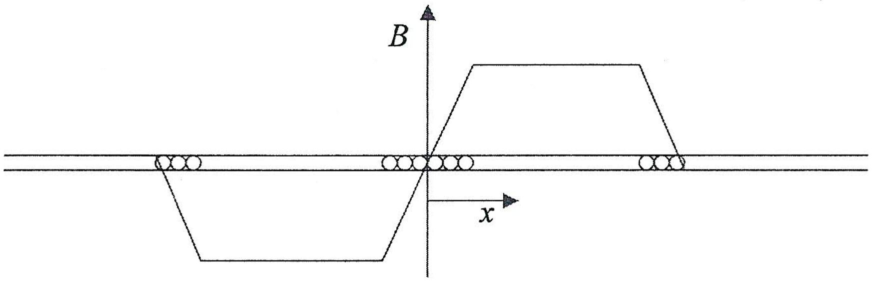
$$\underline{i}_1=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}I_{ph}\right)e^{j\frac{\pi}{6}}e^{j\omega t}.$$

W tym przypadku, podobnie jak w przypadku napięć, prąd przewodowy jest $\sqrt{3}$ razy większy od fazowego.
W układach trójfazowych, nie zawsze jest dostępny punkt gwiazdowy źródła zasilania czy też odbiornika połączonego w gwiazdę. Podobnie wygląda sytuacja dla odbiornika połączonego w trójkąt, gdzie pomiar prądu fazowego może być utrudniony. Z tych powodów w wyrażeniu na moc czynną posługujemy się wzorem:

$$P=\sqrt{3}UI\cos(\varphi),$$

przy czym U jest napięciem fazowym a I jest prądem przewodowym lub odwrotnie.

Rozważmy obecnie układ przestrzenny:



załóżmy dalej, że w uzwojeniu płynie prąd i_1 a samo uzwojenie „powtarza" się wzdłuż współrzędnej *x,* tak że można funkcję indukcji *B* rozwinąć w szereg Fouriera.

$$B(i_1)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k(i_1)sin(kx).$$

Jeśli w luce między bokami uzwojenia umieścić uzwojenie drugie i trzecie, to przeprowadzając analogiczne rozumowanie możemy napisać:

$$B(i_2)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k(i_2)sin\left[k\left(x-\tfrac{2\pi}{3}\right)\right]$$

oraz

$$B(i_3)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k(i_3)sin\left[k\left(x-\tfrac{4\pi}{3}\right)\right].$$

Przyjmijmy teraz, że obwody są zasilane trójfazowym prądem symetrycznym, a sam obwód magnetyczny jest liniowy.

$$B(i_1)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k(I_m)sin(kx)sin(\omega t)=\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}B_k(I_m)\{cos(kx-\omega t)-cos(kx+\omega t)\}$$

$$B(i_2)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k(I_m)sin\left[k\left(x-\tfrac{2\pi}{3}\right)\right]sin\left(\omega t-\tfrac{2\pi}{3}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k(I_m)}{2}\left\{cos\left[(kx-\omega t)-(k-1)\tfrac{2\pi}{3}\right]\right\}$$

$$B(i_3)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k(I_m)sin\left[k\left(x-\tfrac{4\pi}{3}\right)\right]sin\left(\omega t-\tfrac{4\pi}{3}\right).$$

Wykorzystując tożsamości trygonometryczne możemy napisać:

$$B(i_1)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k(I_m)}{2}\{cos(kx-\omega t)-cos(kx+\omega t)\}$$

$$B(i_2)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k(I_m)}{2}\left\{cos\left[(kx-\omega t)-(k-1)\tfrac{2\pi}{3}\right]-cos\left[(kx+\omega t)-(k+1)\tfrac{2\pi}{3}\right]\right\}$$

$$B(i_3)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k(I_m)}{2}\left\{cos\left[(kx-\omega t)-(k-1)\tfrac{4\pi}{3}\right]-cos\left[(kx+\omega t)-(k+1)\tfrac{4\pi}{3}\right]\right\}.$$

Wypadkowa indukcja jest sumą indukcji składowych, zatem $B=\sum_{j=1}^{3}B(i_j)$. Dokonując sumowania należy pamiętać, że w rozwinięciu w szereg Fouriera występują jedynie nieparzyste harmoniczne. I tak dla:

$$k=6n-5 \qquad B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{6n-5}(I_m)}{2}cos[(6n-5)x-\omega t],$$

$$k=6n-1 \qquad B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{6n-1}(I_m)}{2}cos[(6n-1)x+\omega t],$$

$$k=6n-3 \qquad B=0.$$

Interpretując otrzymane rezultaty możemy powiedzieć, że:

- Przedstawiony układ obwodów indukcyjnych zasilony trójfazowym symetrycznym układem prądów wywołuje ciąg fal biegnących (wirujących) w przeciwnych kierunkach o prędkościach kątowych $\dot{x}_n = \frac{\omega}{6n-5}$ oraz $\dot{x}_n = -\frac{\omega}{6n-1}$
- Nieparzyste wielokrotności trzeciej harmonicznej nie wywołują żadnego pola.

Możliwość tworzenia pola wirującego jest wykorzystywana w maszynach elektrycznych prądu przemiennego. Oczywistym jest, że najkorzystniejsza sytuacja ma miejsce wtedy, gdy istnieje tylko jedna fala biegnąca i to o największej amplitudzie. Konstrukcje uzwojeń takich maszyn muszą być tak pomyślane aby wyższe harmoniczne indukcji były jak najmniejsze.