Punkt materialny
Każdy obiekt obdarzony masą, którego rozmiary geometryczne $\rightarrow 0$ lub są znacznie mniejsze niż współrzędne, które opisują jego odległość od układu odniesienia.

Wektor położenia
Jest to wektor, którego początek leży w początku układu odniesienia, koniec zaś stowarzyszony jest z cząstką, której ruch śledzi ten wektor. Koniec wektora położenia kreśli w przestrzeni krzywą geometryczną, tak zwany tor cząstki, po którym cząstka się porusza. Wektorowe równanie toru ruchu cząstki $\vec{r}=\vec{r}(t)$ określa kształt tej krzywej.

Wektor prędkości
Odpowiedzialny jest za szybkość zmian wektora położenia (określa jak szybko cząstka się porusza).

$$\vec{v}_{śr}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Gdyby we wzorze tym mierzyć wektor położenia w bardzo małych odstępach czasu gdy $\Delta t\rightarrow 0$ otrzymalibyśmy wektor prędkości chwilowej, który można zdefiniować następująco

$$\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t)$$

Wynika z tego, że wektor prędkości jest pierwszą pochodną wektora położenia względem czasu.
Gdyby badać nieskończenie mały fragment toru, którego długość $\left|d\vec{r}\right|=ds$, z powyższego wzoru możemy otrzymać wartość wektora prędkości.

$$v(t)=\frac{\left|d\vec{r}\right|}{dt}=\frac{ds(t)}{dt}$$

Wektor prędkości $\vec{v}(t)$ będzie zawsze styczny do toru, po którym porusza się cząstka

Droga
Jest to długość krzywej geometrycznej, przebyta w pewnym czasie.

$$v(t)=\frac{ds(t)}{dt} \quad\Rightarrow\quad ds(t)=v(t)dt \quad\Rightarrow\quad \int ds(t)=\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt \quad\Rightarrow\quad s=\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$$

Jeśli zapiszemy $\vec{v}(t)$ w postaci trzyskładowej jako $\vec{v}(t)=v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k}$, otrzymamy równanie na drogę

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\,dt$$

Wektor przyspieszenia
Jest wielkością, która informuje nas o szybkości zmian wektora prędkości.

$$\vec{a}_{śr}(t)=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Gdyby we wzorze tym mierzyć wektor prędkości w bardzo małych odstępach czasu gdy $\Delta t\rightarrow 0$ otrzymalibyśmy wektor przyspieszenia chwilowego, który można zdefiniować następująco

$$\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{a}(t)$$

Wektor położenia w ruchu obrotowym (droga kątowa)
Jest to wektor, którego początek leży w początku układu odniesienia, koniec zaś stowarzyszony jest z cząstką, której ruch śledzi ten wektor. Koniec wektora położenia kreśli w przestrzeni okrąg, tak zwany tor cząstki, po którym cząstka się porusza.

Wektor prędkości kątowej

$$\vec{\omega}_{śr}=\frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$$

Gdyby we wzorze tym mierzyć wektor położenia w bardzo małych odstępach czasu gdy $\Delta t\rightarrow 0$ otrzymalibyśmy wektor prędkości kątowej chwilowej, który można zdefiniować następująco

$$\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\vec{\varphi}(t+\Delta t)-\vec{\varphi}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega}(t)$$

Wynika z tego, że wektor prędkości kątowej jest pierwszą pochodną wektora położenia względem czasu.

$$\vec{\omega}=\vec{\omega}(t)=\frac{d\,\vec{\varphi}(t)}{dt}$$

$d\,\vec{\varphi}$ oznacza tu nieskończenie mały fragment drogi kątowej. Początek wektora $d\,\vec{\varphi}$ leży w środku okręgu, kierunek na osi obrotu, a zwrot jest związany z kierunkiem na zasadzie śruby prawoskrętnej.
Początek wektora $\vec{\omega}(t)$ również leży w środku okręgu, kierunek na osi obrotu, a zwrot określony jest regułą śruby prawoskrętnej.

Wektor przyspieszenia kątowego

$$\vec{\varepsilon}_{śr}(t)=\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$$

Gdyby we wzorze tym mierzyć wektor prędkości kątowej w bardzo małych odstępach czasu gdy $\Delta t\rightarrow 0$ otrzymalibyśmy wektor przyspieszenia kątowego chwilowego, który można zdefiniować następująco

$$\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\vec{\omega}(t+\Delta t)-\vec{\omega}(t)}{\Delta t} = \frac{d\,\vec{\omega}(t)}{dt} = \vec{\varepsilon}(t)$$

Wartość wektora przyspieszenia kątowego wynosi

$$\varepsilon=\frac{d\,\omega}{dt}$$

Wektor $\vec{\varepsilon}$ zaczepiony jest w środku okręgu, leży na osi obrotu, a zwrot zależy od tego, czy ruch jest opóźniony, czy przyspieszony.
Jeśli ruch jest przyspieszony, czyli $\vec{\varepsilon}>0$, to $\vec{\varepsilon}\uparrow\uparrow\vec{\omega}$, z kolei jeśli ruch jest opóźniony, czyli $\vec{\varepsilon}<0$, to $\vec{\varepsilon}\downarrow\uparrow\vec{\omega}$.

Związek między $\vec{v}$ i $\vec{\omega}$

Jeśli wartość prędkości określiliśmy jako

$$v=\frac{ds}{dt},$$

gdzie ds to długość nieskończenie małego łuku w krzywej geometrycznej od A do B, kreślonej przez tor ruchu cząstki oraz jeśli r określimy jako długość promienia okręgu w ruchu obrotowym, a $d\,\varphi$ jako kąt między punktami A i B to długość ds w ruchu obrotowym możemy otrzymać ze wzoru na długość łuku okręgu

$$ds=\frac{d\,\varphi}{360^o}2\,\Pi\,r \quad\Rightarrow\quad ds=\frac{d\,\varphi}{2\,\Pi}2\,\Pi\,r \quad\Rightarrow\quad ds=d\,\varphi\cdot r$$

Podstawiając to do pierwszego równania otrzymamy

$$v=\frac{d}{dt}(r\cdot d\,\varphi) \quad\Rightarrow\quad v=r\frac{d\,\varphi}{dt} \quad\Rightarrow\quad v=r\,\omega$$

Pamiętając, że $\vec{v}\perp\vec{r}$, $\vec{v}\perp\vec{\omega}$, a $\vec{r}\perp\vec{\omega}$ możemy stwierdzić, że $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ i stąd właśnie otrzymaliśmy powyższą zależność: $v=\omega\,r\sin(90^o)=\omega\,r$.

Związek między $\vec{a}$ i $\vec{\varepsilon}$

Określiliśmy wektor $\vec{a}$ jako

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt},$$

a wektor $\vec{v}$ jako

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}.$$

Z tego wynika, że

$$\vec{a}=\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) \quad\Rightarrow\quad \vec{a}=\frac{d\,\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} \quad\Rightarrow\quad \vec{a}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v} \quad\Rightarrow\quad \vec{a}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}$$

Z własności iloczynu wektorowego wiemy, że $a\times b\times c = b(a\cdot c)-c(a\cdot b)$ i stąd otrzymujemy, że

$$\vec{a}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}+\vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\vec{r})-\vec{r}(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})$$

Wiedząc, że $\vec{\omega}\perp\vec{r}$, możemy pominąć drugi człon równania, gdyż $\vec{\omega}\cdot\vec{r}=\omega\,r\cos(90^o)=\omega\,r\cdot 0=0$.
Z tego otrzymujemy ostatecznie

$$\vec{a}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}-\omega^2\vec{r},$$

gdzie pierwszy człon oznacza styczną do toru składową wektora przyspieszenia, a drugi człon prostopadłą do toru składową przyspieszenia.

Klasyfikacja ruchów

Do klasyfikacji ruchów będziemy potrzebowali rozpisać składowe wzoru $\vec{a}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}-\omega^2\vec{r}$ do innej postaci, tak, żeby wiedzieć jak zależą one od wartości prędkości v .
Pamiętając, że

$$\varepsilon=\frac{d\,\omega}{dt} \text{ oraz } v=\omega r \text{ , a więc } \omega=\frac{v}{r}$$

możemy rozpisać ε jako

$$\varepsilon=\frac{d\,\omega}{dt} \quad\Rightarrow\quad \varepsilon=\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{r}\right) \quad\Rightarrow\quad \varepsilon=\frac{1}{r}\frac{dv}{dt}$$

Teraz, pamiętając, że $\vec{\varepsilon}\perp\vec{r}$ obliczamy długość wektora $\vec{\varepsilon}\times\vec{r}$

$$|\vec{\varepsilon}\times\vec{r}|=\varepsilon r\sin(90^o)=\varepsilon r$$

Z poprzednich obliczeń wynika, że

$$\varepsilon r=\frac{1}{r}\frac{dv}{dt}r \;,$$

a z tego z kolei wynika, że nasza pierwsza składowa wektora $\vec{a}$

$$\vec{\varepsilon}\times\vec{r}=\frac{dv}{dt} \quad\Rightarrow\quad \frac{dv}{dt}=a_\tau$$

a_τ to nasza szukana składowa styczna do wektora przyspieszenia $\vec{a}$, odpowiadająca za zmianę wartości wektora prędkości, która mówi nam, jak zależy pierwsza składowa wektora $\vec{a}$ od wartości v
Teraz, pamiętając, że

$$\omega=\frac{v}{r}$$

możemy zapisać naszą drugą składową $\omega^2\vec{r}$ jako

$$\omega^2\vec{r}=\frac{v^2}{r^2}\vec{r} \quad\Rightarrow\quad \omega^2\vec{r}=\frac{v^2}{r^2}r\hat{r} \quad\Rightarrow\quad \omega^2\vec{r}=\frac{v^2}{r}\hat{r} \quad\Rightarrow\quad \frac{v^2}{r}=a_n$$

gdzie a_n to nasza szukana składowa, skierowana do środka krzywizny toru (czyli prostopadła do toru), odpowiadająca za zmianę kierunku wektora prędkości, która mówi nam, jak zależy druga składowa wektora $\vec{a}$ od wartości v .
Nazywana jest też składową normalną.
Udało nam się przekształcić $\vec{a}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}-\omega^2\vec{r}$ na $\vec{a}=a_\tau\hat{\tau}+a_n\hat{n}$. Wersory $\hat{n}$ i $\hat{\tau}$ są do siebie prostopadłe.
Mając te wszystkie dane możemy w końcu sklasyfikować ruchy:

- $a_n=0\rightarrow$ ruch prostoliniowy
- $a_n\neq 0\rightarrow$ ruch krzywoliniowy
- $a_\tau=0\rightarrow$ ruch jednostajny
- $a_\tau\neq 0\wedge a_\tau=const\rightarrow$ ruch jednostajnie zmienny
- $a_\tau=a_\tau(t)\rightarrow$ ruch niejednostajnie zmienny
- $\rho=r=const\rightarrow$ (promień krzywizny toru = const) ruch po okręgu

Zasada niezależności ruchu
Jeżeli punkt materialny bierze udział w n ruchach jednocześnie, których wektory są określane $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_n$, to wypadkowe przesunięcie tego punktu równa się sumie wektorowej przesunięć w każdym z tych ruchów z osobna i wynosi $\vec{r}=\vec{r}_1+\vec{r}_2+\ldots+\vec{r}_n$. Każdy ze składowych ruchów odbywa się bez zakłóceń, tak jakby pozostałych ruchów nie było, a ruch wypadkowy możemy uzyskać składając poszczególne ruchy, w których bierze udział punkt materialny.

Zasada niezależności prędkości
Jeżeli punkt materialny bierze udział w n ruchach jednocześnie, których wektory prędkości są określane jako $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n$, to prędkość wypadkowa tego punktu równa się sumie wektorowej prędkości składowych, jakie ma ten punkt w każdym z tych ruchów z osobna i wynosi $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2+\ldots+\vec{v}_n$. Zasada niezależności prędkości wynika wprost z zasady niezależności ruchu.

$$\frac{d\,\vec{r}}{dt}=\frac{d\,\vec{r}_1}{dt}+\frac{d\,\vec{r}_2}{dt}+\ldots+\frac{d\,\vec{r}_n}{dt} \quad\Rightarrow\quad \vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2+\ldots+\vec{v}_n$$

Zasada niezależności przyspieszeń
Jeżeli punkt materialny bierze udział w n ruchach jednocześnie, których wektory przyspieszeń są określane jako $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$, to przyspieszenie wypadkowe tego punktu równa się sumie wektorowej przyspieszeń składowych,

jakie ma ten punkt w każdym z tych ruchów z osobna i wynosi $\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+...+\vec{a}_n$. Zasada niezależności przyspieszeń wynika wprost z zasady niezależności prędkości.

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{v}_1}{dt}+\frac{d\vec{v}_2}{dt}+...+\frac{d\vec{v}_n}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+...+\vec{a}_n$$

Zasada niezależności sił

Jeżeli na ciało działa n sił równocześnie, określanych jako $\vec{F}_{1,}\vec{F}_{2,}...,\vec{F}_n$, to siła wypadkowa, działająca na to ciało równa się sumie wektorowej sił działających na to ciało z osobna i wynosi $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+...+\vec{F}_n$. Zasada niezależności sił wynika z zasady niezależności przyspieszeń.

$$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+...+\vec{a}_n \quad |\cdot m \quad \Rightarrow \quad m\vec{a}=m\vec{a}_1+m\vec{a}_2+...+m\vec{a}_n \quad \Rightarrow \quad \vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+...+\vec{F}_n$$

Układ inercjalny

To układ, który może znajdować się względem obserwatora w spoczynku lub poruszać się względem niego ruchem jednostajnie prostoliniowym (bez przyspieszenia). Dobrym przykładem układu inercjalnego dla ludzi na Ziemi jest układ heliocentryczny, w którego centrum jest Słońce, a osie układu skierowane są na wybrane gwiazdy stałe. Na co dzień dobrym układem odniesienia jest też Ziemia. Inercjalny układ odniesienia można również zdefiniować jako taki układ, w którym nie pojawiają się pozorne siły bezwładności.

Prostokątny układ kartezjański

Jeden z najpopularniejszych układów współrzędnych, zbudowany jest na trzech wzajemnie prostopadle położonych wersorach, tworzących trójkę prawoskrętną. Zazwyczaj, dla ułatwienia, przyjmujemy, że początek układu odniesienia stowarzyszony jest z początkiem układu kartezjańskiego.

$$\hat{i}\cdot\hat{i}=1$$
$$\hat{j}\cdot\hat{j}=1$$
$$\hat{k}\cdot\hat{k}=1$$
$$\hat{i}\cdot\hat{j}=0$$
$$\hat{i}\cdot\hat{k}=0$$
$$\hat{j}\cdot\hat{k}=0$$
$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$$

W układzie tym położenie cząstki definiuje się jako $\vec{r}=(x,y,z)$ lub jako trójkę $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$.

Parametryczne równanie ruchu cząstki

Otrzymuje się z położenia cząstki w kartezjańskim układzie współrzędnych $\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}$.

$$\vec{r}=\begin{cases}\vec{r}_x(t)=x(t)\hat{i}\\ \vec{r}_y(t)=y(t)\hat{j}\\ \vec{r}_z(t)=z(t)\hat{k}\end{cases}$$

Parametryczne równanie prędkości cząstki

Po zróżniczkowaniu równania $\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}$ możemy otrzymać równanie prędkości postaci

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\hat{i}+\frac{dy}{dt}\hat{j}+\frac{dz}{dt}\hat{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}=v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k}$$

$$\vec{v}=\begin{cases}\frac{dx}{dt}=\dot{x}\\ \frac{dy}{dt}=\dot{y}\\ \frac{dz}{dt}=\dot{z}\end{cases}$$

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

Parametryczne równanie przyspieszenia cząstki

Otrzymamy je po zróżniczkowaniu wektora prędkości $\vec{v}(t)=v_x(t)\hat{i}+v_y(t)\hat{j}+v_z(t)\hat{k}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k}) \quad\Rightarrow\quad \frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv_x}{dt}\hat{i}+\frac{dv_y}{dt}\hat{j}+\frac{dv_z}{dt}\hat{k} \quad\Rightarrow\quad \vec{a}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}$$, a więc

$$\vec{a}=\begin{cases}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv_x}{dt}=\ddot{x}\\ \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv_y}{dt}=\ddot{y}\\ \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{dv_z}{dt}=\ddot{z}\end{cases}$$

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

Równanie ruchu cząstki w postaci jawnej
Otrzymamy je po wyeliminowaniu czasu z parametrycznego równania ruchu cząstki.

Dynamika
Dynamika punktu materialnego wiąże przyczynę, która wywołuje zmianę parametrów ruchu z tą zmianą bezpośrednio (relacja przyczyna – skutek). W dynamice rozważamy prędkości $v \ll c=299\,792\,458\,m/s$ (c – prędkość światła, prędkość rozchodzenia się fali elektromagnetycznej w próżni). Parametry ruchu zmieniają się przez oddziaływania, których fizyczną miarą jest siła.

I zasada dynamiki Newtona
Istnieje układ odniesienia, w którym ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnie prostoliniowym, jeżeli na to ciało nie działają żadne siły lub działające siły równoważą się wzajemnie.

$$\vec{F}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{v}=\overrightarrow{const}$$

II zasada dynamiki Newtona
Jeśli siły działające na ciało nie równoważą się (czyli siła wypadkowa jest różna od zera), to ciało porusza się z przyspieszeniem wprost proporcjonalnym do siły wypadkowej, a odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała. II zasada dynamiki wprowadza do opisu ruchu pęd ciała, czyli wartość $\vec{p}=m\vec{v}$. Siła niezrównoważona wywołuje taką zmianę pędu $d\vec{p}$ ciała w czasie dt, że

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$$

wektor przyrostu pędu $d\vec{p}$ jest równy co do kierunku, zwrotu i punktu przyłożenia sile $\vec{F}$.
Po przekształceniach można otrzymać

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F} \quad\Rightarrow\quad \vec{F}=\frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad\Rightarrow\quad \vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad\Rightarrow\quad \vec{F}=m\vec{a}$$

Wynika z tego, że $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{F}$ (mają ten sam kierunek i zwrot), gdyż $\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}$

Z II zasady dynamiki Newtona wynika, że przyrost pędu musi być równy polu powierzchni pod wykresem $\vec{F}(t)$

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F} \quad\Rightarrow\quad d\vec{p}=\vec{F}\,dt \quad\Rightarrow\quad \int_{p_1}^{p_2} d\vec{p}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,dt \quad\Rightarrow\quad \vec{p}_2-\vec{p}_1=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,dt \quad\Rightarrow\quad \Delta\vec{p}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,dt$$

Po wybraniu układu odniesienia równania wektorowe można zapisać w postaci trzech równań skalarnych $\vec{F}(F_x,F_y,F_z)$, $\vec{a}(a_x,a_y,a_z)$ wtedy

$$\begin{cases}F_x=ma_x\\ F_y=ma_y\\ F_z=ma_z\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}a_x=\frac{F_x}{m}\\ a_y=\frac{F_y}{m}\\ a_z=\frac{F_z}{m}\end{cases}$$

Wnioski z II zasady dynamiki Newtona

Podstawowe znaczenie II zasady dynamiki Newtona polega na tym, że przy znajomości warunków początkowych (czyli tego, co działo się z naszym punktem w chwili początkowej t_0: $\vec{r}_0, \vec{v}_0, \vec{a}_0$) można rozwiązać w sposób jednoznaczny podstawowe zagadnienie dynamiki, czyli określić wektor $\vec{r}$ w każdej chwili czasu, a więc znaleźć wektorowe równanie ruchu tej cząstki: $\vec{r}(t)$. II zasada dynamiki jest zasadą deterministyczną, oznacza to, że dzięki znajomości stanu początkowego pozwala nam „zaglądać w przyszłość i przeszłość" ruchu cząstki. II zasada dynamiki Newtona daje nam różniczkowe równania ruchu cząstki, z których przez pierwsze całkowanie uzyskujemy informację o wektorze $\vec{v}$, a przez drugie informację o wektorze $\vec{r}$.

Pierwsze całkowanie, które daje nam informację o prędkości cząstki

$$\vec{F}=m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{\vec{F}}{m}=\frac{d\vec{v}}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\vec{v}=\frac{\vec{F}}{m}dt$$

Jeżeli rozpatrujemy ruch w jakimś przedziale czasu $t=t_o\rightarrow t$, to po obustronnym scałkowaniu otrzymamy

$$\int_{t_0}^{t} d\vec{v}=\int_{t_0}^{t} \frac{\vec{F}}{m}dt \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t)-\vec{v}(t_0)=\int_{t_0}^{t} \frac{\vec{F}}{m}dt$$

Z kolei jeśli przyjmiemy, że wartość wektora prędkości w chwili początkowej t_0 równa się $\vec{v}(t_0)=v_0$, otrzymamy

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_o+\int_{t_0}^{t} \frac{\vec{F}}{m}dt$$

Drugie całkowanie, które daje nam informację o położeniu cząstki

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_o+\int_{t_0}^{t} \frac{\vec{F}}{m}dt \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}_0+\int_{t_0}^{t} \frac{\vec{F}}{m}dt \quad \Rightarrow \quad d\vec{r}=(\vec{v}_0+\int_{t_0}^{t} \frac{\vec{F}}{m}dt)dt \quad \Rightarrow \quad \int_{t_0}^{t} d\vec{r}=\int_{t_0}^{t} (\vec{v}_0+\int_{t_0}^{t} \frac{\vec{F}}{m}dt)dt$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)=\int_{t_0}^{t} (\vec{v}_0+\int_{t_0}^{t} \frac{\vec{F}}{m}dt)dt$$

Jeśli przyjmiemy, że wektor położenia w chwili początkowej t_0 wynosił $\vec{r}(t_0)=\vec{r}_0$, otrzymamy

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\int_{t_0}^{t} (\vec{v}_0+\int_{t_0}^{t} \frac{\vec{F}}{m}dt)dt$$

III zasada dynamiki Newtona

Zasada akcji i reakcji. Jeśli ciało A działa na ciało B jakąś siłą, to ciało B działa na ciało A z siłą o tym samym kierunku i wartości, ale innym zwrocie i punkcie przyłożenia.

Na przykład, jeśli na naszą cząstkę działają jakieś więzy (cząstka może się poruszać tylko po określonej płaszczyźnie lub po określonej przestrzeni) to pojawią się siły reakcji więzów $\vec{F}_R$. Z III zasady dynamiki Newtona wynika, że siły reakcji więzów są zawsze prostopadłe albo do powierzchni więzów, albo do linii, która tworzy te więzy.

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}+\vec{F}_R$$