Przykłady rozwiązywania równań ruchu Newtona – ogólne przekształcenia

Rozważmy cząstkę o masie m , na którą działa siła $\vec{F}$ stała w czasie.

Potrzebujemy obliczyć wektor położenia $\vec{r}$ oraz wektor prędkości $\vec{v}$. Wychodzimy więc z podstawowej zależności

$$m\vec{a}=\vec{F} \Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{\vec{F}}{m}$$

Należy pamiętać, że powyższe zależności są słuszne jedynie w przypadku ruchu cząstki, na którą działa siła stała w czasie.

Załóżmy teraz, że mamy dane warunki początkowe $t_0=0,\ \vec{v}=\vec{v}_0\neq 0,\ \vec{r}=\vec{r}_0\neq 0$. Przekształcamy dalej:

$$d\vec{v}=\frac{\vec{F}}{m}dt \Rightarrow \int d\vec{v}=\int \frac{\vec{F}}{m}dt \Rightarrow \vec{v}=\frac{\vec{F}}{m}t+const$$

Stałą całkowania możemy teraz policzyć z warunków początkowych. Jeśli $t_0 = 0$, to

$$\vec{v}_0=\frac{\vec{F}}{m}\cdot 0+const \Rightarrow const=\vec{v}_0$$

Wracamy do naszego równania i wstawiamy tam policzoną stałą

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\frac{\vec{F}}{m}t$$

Wektor położenia możemy obliczyć przekształcając powyższe równanie na

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}_0+\frac{\vec{F}}{m}t \Rightarrow d\vec{r}=(\vec{v}_0+\frac{\vec{F}}{m}t)dt \Rightarrow \int d\vec{r}=\int(\vec{v}_0+\frac{\vec{F}}{m}t)dt \Rightarrow \int d\vec{r}=\int \vec{v}_0 dt+\int\frac{\vec{F}}{m}t\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r}=\vec{v}_0 t+\frac{\vec{F}}{2\mathrm{m}}t^2+const$$

Stałą całkowania ponownie liczymy z warunków początkowych

$$\vec{r}_0=\vec{v}_0\cdot 0+\frac{\vec{F}}{2\mathrm{m}}\cdot 0^2+const \Rightarrow const=\vec{r}_0$$

Otrzymujemy więc ostateczne równanie na wektor położenia

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}_0 t+\frac{\vec{F}}{2\mathrm{m}}t^2$$

Jeśli na cząstkę działają stałe siły, to rozwiązaniem ogólnym równania ruchu jest wektorowe równanie paraboli.

Rozwiązywanie równań ruchu – rzuty

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}=\vec{g} \text{ oraz } \vec{F}=m\vec{g}$$

Z rozważań ogólnych mamy

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\frac{\vec{F}}{m}t \Rightarrow \vec{v}=\vec{v}_0+\frac{m\vec{g}}{m}t \Rightarrow \vec{v}=\vec{v}_0+\vec{g}t$$

Wektor położenia ma z kolei postać

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}_0 t+\frac{\vec{F}}{2\mathrm{m}}t^2 \Rightarrow \vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}_0 t+\frac{m\vec{g}}{2\mathrm{m}}t^2 \Rightarrow \vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}_0 t+\frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

Rozwiązywanie równań ruchu – pole elektryczne

$$\vec{F}=q\vec{E} \text{ oraz } \vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}=\frac{q\vec{E}}{m}$$

gdzie $\vec{E}$ to wektor pola elektrycznego, a q to ładunek.

Z rozważań ogólnych mamy

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\frac{\vec{F}}{m}t \Rightarrow \vec{v}=\vec{v}_0+\frac{q\vec{E}}{m}t$$

Wektor położenia ma z kolei postać

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}_0 t+\frac{\vec{F}}{2\mathrm{m}}t^2 \Rightarrow \vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}_0 t+\frac{q\vec{E}}{2\mathrm{m}}t^2$$

Rzut ukośny

Załóżmy, że wyrzucamy nasze ciało z prędkością $\vec{v}_0$ pod kątem α do poziomu. Prędkość początkową możemy wtedy rozłożyć na dwie składowe v_{ox} - równoległą do osi ox, której wartość wynosi $v_{ox}=v_0\cos\alpha$ oraz v_{oy} -

równoległą do osi oy, której wartość wynosi $v_{oy}=v_0 \sin\alpha$. Warunki początkowe ustalamy jako $\vec{r}_0(0,0)$ oraz $\vec{v}_0(v_{ox}, v_{oy})$. Jako że mamy dwie składowe, również dla dwóch składowych wykorzystamy wyprowadzony poprzednio wzór

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}_0 t+\frac{\vec{F}}{2\mathrm{m}}t^2$$

$$(x, y)=(0,0)+(v_{ox}, v_{oy})t+\frac{(0,-m\vec{g})}{2\mathrm{m}}t^2$$

Równie dobrze możemy zapisać to w postaci układu równań

$$\begin{cases} x=v_{ox}t \\ y=v_{oy}t-\frac{1}{2}\vec{g}t^2 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyciągamy t, które potem wstawiamy do drugiego równania

$$\begin{cases} t=\frac{x}{v_{ox}} \\ y=\frac{v_{oy}}{v_{ox}}x-\frac{1}{2}\vec{g}\frac{x^2}{v_{ox}^2} \end{cases}$$

W ten sposób w drugim równaniu otrzymaliśmy równanie toru ruchu w postaci jawnej. Był to też przykład zastosowania II zasady dynamiki Newtona.

Ruch harmoniczny prosty i oscylator harmoniczny prosty

Jest to najprostszy w opisie matematycznym rodzaj drgań. Ruch ten opisywany jest sinusoidalną funkcją czasu. Ciało porusza się ruchem harmonicznym prostym, jeżeli znajduje się pod wpływem siły o wartości proporcjonalnej do wychylenia z położenia równowagi i skierowanej w stronę położenia równowagi. Okres T to czas trwania jednego pełnego cyklu, a częstość kołowa drgań ω to liczba takich cyklów (drgań) na jednostkę czasu.

Oscylator harmoniczny prosty to realizacja modelu oscylatora harmonicznego w ramach mechaniki klasycznej. Jednowymiarowym oscylatorem harmonicznym jest każdy układ fizyczny, którego zachowanie można opisać równaniem, zwanym równaniem oscylatora harmonicznego postaci $\ddot{x}+\omega^2 x=0$.

$\vec{F}=-kx$, gdzie k to stała.

Siła działająca na cząstkę jest proporcjonalna do wychylenia cząstki ze stanu równowagi. W mechanice tego typu siły pojawiają się przy niewielkich odkształceniach ciał stałych (siły typu Hooka). Ruch ten jest dokładnym lub przybliżonym modelem wielu zjawisk, zachodzących zarówno w fizyce klasycznej jak i w fizyce kwantowej.

W naszych rozważaniach będziemy chcieli znaleźć x(t). Rozpoczynamy od równania ruchu Newtona

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}$$

Zakładamy, że na nasz obiekt działa siła ograniczona do osi x, a więc $\vec{F}(-kx, 0)$.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}_x \Rightarrow m\frac{d\vec{v}_x}{dt}=-kx \Rightarrow a_x=-\frac{k}{m}x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x$$

Oznaczmy $\frac{k}{m}=\omega^2$, przyda nam się to później.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0$$

Różniczkowe równanie oscylatora harmonicznego nietłumionego w przypadku jednowymiarowym ma więc postać

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0$$

Jest to równanie różniczkowe jednorodne, drugiego rzędu i o stałych współczynnikach. Ogólnym sposobem rozwiązywania tego typu równań jest podstawienie funkcji $x=e^{rt}$, gdzie t – czas, r – ogólny współczynnik, którego będziemy szukać.

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}e^{rt}=re^{rt}$$

$$\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}(re^{rt})=r^2e^{rt}$$

Podstawiamy otrzymany $\ddot{x}$ do ogólnego równania różniczkowego oscylatora harmonicznego

$$r^2 e^{rt}+\omega^2 e^{rt}=0 \quad |:e^{rt}$$

$r^2+\omega^2=0$ - jest to nasze równanie charakterystyczne, z którego zaraz wyliczymy pierwiastki.

$$r^2=-\omega^2 \Rightarrow r^2=i^2\omega^2$$

$$\begin{cases} r_1=i\omega \\ r_2=-i\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=e^{i\omega t} \\ x_2=e^{-i\omega t} \end{cases}$$

Rozwiązanie ogólne będzie superpozycją liniową

$$x=C_1 e^{i\omega t}+C_2 e^{-i\omega t}$$

Stałe $C_{1,} C_2$ liczymy z warunków początkowych $t=0,\ x=0,\ \dot{x}_0=v_0$. Wtedy otrzymujemy

$$0=C_1 e^0+C_2 e^0 \Rightarrow C_1=-C_2$$

$$x=C_1 e^{i\omega t}-C_1 e^{-i\omega t}$$

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(C_1 e^{i\omega t})-\frac{d}{dt}(C_1 e^{-i\omega t}) \Rightarrow v=C_1 i\omega e^{i\omega t}+C_1 i\omega e^{-i\omega t}$$

Ponownie podstawiając warunki początkowe otrzymamy

$$v_0=C_1 i\omega+C_1 i\omega \Rightarrow v_0=2C_1 i\omega \Rightarrow C_1=\frac{v_0}{2i\omega}$$

Teraz, kiedy mamy już stałą opisaną wartościami, które znamy, możemy podstawić wszystko do wzoru na oscylator

$$x=\frac{v_0}{2i\omega}e^{i\omega t}-\frac{v_0}{2i\omega}e^{-i\omega t} \Rightarrow x=\frac{v_0}{\omega}\left(\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2\mathrm{i}}\right) \Rightarrow x=\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

Po czasie równym $T=\frac{2\Pi}{\omega}$ sinus osiąga tę samą wartość, a więc

$$x=\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega(t+T)) \Rightarrow x=\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t+\frac{2\Pi}{\omega}\omega) \Rightarrow x=\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t+2\Pi) \Rightarrow x=\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=A\sin(\omega t)$$

Rozwiązanie tego równania można równoważnie opisać za pomocą funkcji $x=C_1\sin(\omega t)+C_2\cos(\omega t)$ gdzie stałe $C_{1,} C_2$ policzylibyśmy ponownie z warunków początkowych.
Jeśli nie występują siły tłumiące, to amplituda będzie stała.

Składanie drgań

Każdy okresowy przebieg fizyczny określony funkcją matematyczną f(t) można przedstawić w postaci sumy nieskończonej liczby drgań harmonicznych prostych za pomocą szeregu Fouriera.

$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}[A_n\cos(n\omega t)+B_n\sin(n\omega t)]$, gdzie A_n, B_n to współczynniki Fouriera obliczane ze wzorów

Jeśli $n=0$, to $\begin{cases} A_0=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt \\ B_n=0 \end{cases}$

Jeśli $n\neq 0$, to $\begin{cases} A_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt \\ B_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt \end{cases}$

Założyliśmy wcześniej, że $\omega^2=\frac{k}{m} \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

Wiedząc, że $T=\frac{2\Pi}{\omega}$, do powyższych wzorów jako T powinniśmy więc wstawić $2\Pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Wahadło matematyczne jako przykład oscylatora harmonicznego

Jest to punkt materialny zawieszony na nieważkiej nierozciągliwej nici o długości l , króry porusza się ruchem harmonicznym na tyle, na ile pozwala mu nić (punkt niejako „buja się na boki”). Na punkt działa siła $m\,g$ skierowana do podłoża, którą możemy rozłożyć na dwie składowe $\vec{F}_s$ - równoległą do toru ruchu oraz $\vec{F}_n$ - prostopadłą do toru ruchu. Rozważmy przypadek, gdy kąt wychylenia jest równy $\alpha < 5^o$. Siła naciągu nici N równoważy się z $\vec{F}_n$ i nie wpływa na ruch kulki. $\sin\alpha = \frac{F_s}{mg} = \frac{x}{l}$ Możemy zapisać układ równań

$$\begin{cases} F_s = mg\sin\alpha \\ F_n = N \end{cases}$$

Siłą wypadkową całego układu jest więc $ma = -mg\sin\alpha$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\sin\alpha \;\Rightarrow\; \ddot{x} = -g\frac{x}{l} \;\Rightarrow\; \ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0$$

Jako ω^2 przyjmujemy to, co stoi „przy iksie”, czyli

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \;\Rightarrow\; \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Okres ruchu wahadła wynosi więc

$$T = \frac{2\Pi}{\omega} = 2\Pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Z tego równania moglibyśmy również obliczyć, po drobnych przekształceniach, przyspieszenie ziemskie.

Wahadło fizyczne jako przykład oscylatora harmonicznego

Jest to bryła sztywna wychylona ze swojego położenia równowagi. Środek obrotu oznaczony jest jako O , środek ciężkości przed obrotem jako S , a środek ciężkości po obrocie jako S' . Odległość między środkiem obrotu, a środkiem ciężkości wynosi d , a kąt obrotu bryły wynosi α . Na bryłę działa siła grawitacji $m\,g$, skierowana do dołu. Do obliczeń wykorzystamy teraz moment siły.

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = r\,F\sin\alpha$$

Przyjmiemy teraz, że $r = d$, oraz że $F = mg$

$\vec{M} = d\,mg\sin\alpha$, co dla małych kątów możemy przybliżyć do $\vec{M} = d\,mg\,\alpha$

Teraz jeśli $M = I\,\varepsilon$ oraz $M = d\,mg\,\alpha$ możemy zapisać, że

$$M = I\,\varepsilon = I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mg\,d\,\alpha$$

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mg\,d\,\alpha \quad |:I$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mg\,d}{I}\alpha = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

$$T = 2\Pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Układ elektryczny jako przykład oscylatora harmonicznego

Mamy układ, w którym szeregowo połączony jest kondensator i cewka. Spadek napięcia na kondensatorze oraz spadek napięcia na cewce, zgodnie z oczkowym prawem Kirchhoffa, ma być równy zero.

$$U_C + U_L = 0$$

Wiemy, że $C = \frac{Q}{U_C} \;\Rightarrow\; U_C = \frac{1}{C}Q$ oraz że $U_L = L\frac{dI}{dt}$. Podstawiając to do równania otrzymamy

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}Q = 0$$

Zróżniczkujmy teraz obustronnie nasze równanie

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = 0$$

Z definicji prądu wiemy, że $I=\frac{dQ}{dt}$, a więc

$$L\frac{d^2 I}{dt^2}+\frac{1}{C}I=0 \quad |:L \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 I}{dt^2}+\frac{1}{LC}I=0$$

Jako częstość kołową drgań obieramy to, co stoi przy I, czyli

$$\omega^2=\frac{1}{LC}$$

Ostatecznie więc, ogólne równanie ruchu harmonicznego w przypadku naszego obwodu będzie miało postać

$$\ddot{I}+\omega^2 I=0$$

Oscylator harmoniczny tłumiony

Na nasz oscylator będzie teraz działać, oprócz wcześniej już występującej siły $F=-kx$, również siła oporu $F_o=-bv=-b\dot{x}$, proporcjonalna do prędkości. Siła wypadkowa wyniesie $ma=F+F_o$.

$$m\frac{d^2 x}{dt^2}=-kx-b\frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{d^2 x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0 \quad |:m$$

$$\ddot{x}+\frac{b}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

Nasza ω^2 , to liczba, która stoi przy iksie, a więc $\omega^2=\frac{k}{m} \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$, natomiast stała, charakterystyzująca tłumienie to ε , czyli liczba, która stoi przy $\dot{x}$. ε należy jeszcze pomnożyć przez 2, aby otrzymać $2\varepsilon=\frac{b}{m}$.

Ogólne równanie ruchu harmonicznego tłumionego siłą proporcjonalną do prędkości możemy teraz wyrazić wzorem $\ddot{x}+2\varepsilon\dot{x}+\omega^2 x=0$. Można to rozwiązać przez $x=e^{rt}$.

Przypadek silnego tłumienia (tak zwany przypadek anharmoniczny)

$$\varepsilon^2>\omega^2$$

dla warunków początkowych $t=0,\ x=x_{0,}\ \dot{x}=0$ prawdziwy jest wzór (z wzorów Eulera)

$$x=\frac{\dot{x}}{\sqrt{\varepsilon^2-\omega^2}}e^{-\varepsilon t}\cdot\sinh(\sqrt{\varepsilon^2-\omega^2}\,t) \text{ , gdzie } \frac{\dot{x}}{\sqrt{\varepsilon^2-\omega^2}}e^{-\varepsilon t}=A(t)$$

Silne tłumienie wykorzystuje się na przykład w galwanometrach. Silne tłumienie występuje też np. przy ciężarku zawieszonym na sprężynie, który porusza się w cieczy o dużym współczynniku lepkości.

Przypadek małego tłumienia (tak zwany przypadek periodyczny)

$$\varepsilon^2<\omega^2$$

$$x=\frac{\dot{x}}{\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2}}e^{-\varepsilon t}\cdot\sin(\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2}\,t) \text{ , gdzie } \frac{\dot{x}}{\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2}}e^{-\varepsilon t}=A(t)$$

Małe tłumienie występuje np. przy ciężarku zawieszonym na sprężynie, który porusza się w cieczy o małym współczynniku lepkości.

Oscylator harmoniczny tłumiony i wymuszany siłą harmonicznie zmienną w czasie

Na nasz oscylator będzie teraz działać, oprócz wcześniej już występujących sił $F=-kx$ oraz $F_o=-bv=-b\dot{x}$, również siła wymuszająca $F_w=F_0\sin(\Omega t)$, gdzie Ω to częstość kołowa, z jaką będzie się zmieniać czynnik wymuszający. Siła wypadkowa wyniesie

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=F_0\sin(\Omega t) \quad |:m$$

$$\ddot{x}+\frac{b}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)$$

$\frac{b}{m}=2\varepsilon$ to nasz czynnik charakteryzujący tłumienie

$\frac{k}{m}=\omega^2$ to nasza częstość kołowa drgań podniesiona do kwadratu

Ogólne równanie ruchu harmonicznego tłumionego i wymuszanego siłą harmonicznie zmienną w czasie wygląda następująco

$$\ddot{x}+2\varepsilon\dot{x}+\omega^2 x=\frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)$$

W tym przypadku będziemy mieli do czynienia ze zjawiskiem rezonansu.

Rezonans

Gwałtowne narastanie amplitudy drgań przy pewnej częstotliwości współczynnika wymuszającego.

$x=A\sin(\Omega t-\varphi)$, gdzie φ to opóźnienie fazowe.

$$A=A(\Omega)=\frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega^2-\Omega^2)^2+(2\varepsilon\Omega)^2}}$$

Z warunku $\frac{dA}{d\Omega}=0$ znajdujemy $\Omega=\Omega_r$, przy którym to Ω_r występuje $A=A_{max}$, czyli znajdujemy częstość rezonansową.

$$\Omega_r=\sqrt{\omega^2-2\varepsilon^2}$$

Jeśli $\Omega\rightarrow\omega$, to $A\rightarrow\infty$.

Dla $\Omega_r=\omega$: $A=\infty$, $\varepsilon=0$.

Im mniejsza siła tłumiąca, tym bardziej Ω_r zbliża się do ω , czyli do częstotliwości drgań własnych układu.