Bryła sztywna
Jest to ciało, w którym odległości między dowolnymi dwoma elementami masy nie ulegają zmianie w trakcie trwania ruchu. Jeśli bryła sztywna bierze udział w ruchu złożonym, czyli oprócz ruchu obrotowego wykonuje ruch postępowy, to pełny opis ruchu bryły wymaga dodania do II zasady dynamiki ruchu obrotowego II zasady dynamiki ruchu postępowego środka masy tej bryły. II zasada dynamiki ruchu postępowego uwzględnia fakt, że środek masy jest punktem, który porusza się w przestrzeni tak, jakby cała masa bryły była w nim skupiona i wszystkie siły zewnętrzne działały właśnie na ten punkt.

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$$

$$M = \int dm$$

$$\vec{F} = M\, \vec{a_{śm}}$$

gdzie $\vec{a_{śm}}$ to przyspieszenie środka masy, M to masa całkowita bryły, a $\vec{F}$ to wszystkie siły działające na środek masy.

Moment siły
Inaczej moment obrotowy, definiujemy go jako iloczyn wektorowy wektora położenia i wektora siły przyłożonej do punktu materialnego.

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ oraz $M = r\, F \sin \sphericalangle(\vec{r}, \vec{F})$

$\vec{M} \perp \vec{r}$ oraz $\vec{M} \perp \vec{F}$. Zwrot wektora $\vec{M}$, z definicji iloczynu wektorowego, określony jest regułą śruby prawoskrętnej. Również z definicji iloczynu wektorowego, jeśli $\vec{r}(x, y, z)$ oraz $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$, to

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Moment pędu
Wielkość fizyczna, opisująca ruch ciała, zwłasza ruch obrotowy, definiujemy ją jako iloczyn wektorowy wektora położenia i wektora pędu punktu materialnego.

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ oraz $L = r\, p \sin \sphericalangle(\vec{r}, \vec{p})$

$\vec{L} \perp \vec{r}$ oraz $\vec{L} \perp \vec{p}$. Zwrot wektora $\vec{L}$, z definicji iloczynu wektorowego, określony jest regułą śruby prawoskrętnej. Również z definicji iloczynu wektorowego, jeśli $\vec{r}(x, y, z)$ oraz $\vec{p}(p_x, p_y, p_z)$, to

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

Moment pędu można inaczej wyrazić jako $\vec{L} = m\, r^2 \vec{\omega}$, a to dlatego, że

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \;\Rightarrow\; \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \;\Rightarrow\; \vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \;\Rightarrow\; \vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r})$$

Z własności iloczynu wektorowego wiemy, że $a \times b \times c = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$, a więc możemy zapisać, że

$$\vec{L} = m[\vec{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})] ,$$

a ponieważ wiemy, że $\vec{r} \perp \vec{\omega}$ zapis ten możemy uprościć do

$$\vec{L} = m\, r^2 \vec{\omega}$$

Związek między momentem siły działającej na cząsteczkę, a zmianą w czasie momentu pędu

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) \;\Rightarrow\; \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \;\Rightarrow\; \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Z własności iloczynu wektorowego wiemy, że jeśli dwa wektory są liniowo zależne, to ich iloczyn wektorowy = 0.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Teraz wykorzystujemy znajomość wzoru na siłę

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \;\Big|\times \vec{r} \;\Rightarrow\; \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \;\Rightarrow\; \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Tym samym udowodniliśmy, że moment siły wywołuje zmianę momentu pędu w czasie.

Moment bezwładności
Jest to wielkość decydująca o reakcji bryły sztywnej na działanie momentu siły. To miara bezwładności ciała w ruchu obrotowym względem określonej, ustalonej osi obrotu. Im większy moment bezwładności, tym trudniej zmienić ruch

obrotowy ciała, np. rozkręcić dane ciało lub zmniejszyć jego prędkość kątową. Moment bezwładności ciała zależy od wyboru osi obrotu, od kształtu ciała i od rozmieszczenia masy w ciele. Definiuje się go jako

$$I = mr^2$$

Pamiętając, że $\vec{L} = m r^2 \vec{\omega}$ moment pędu możemy zapisać jako $\vec{L} = I \vec{\omega}$.

Jeśli rozważalibyśmy bryłę sztywną, podzieloną na nieskończenie wiele nieskończenie małych fragmentów mas $dm_{1,} dm_{2,} \ldots , dm_n$ o odległościach od środka obrotu odpowiednio $r_{1,} r_{2,} \ldots , r_n$, to moment bezwładności moglibyśmy opisać jako

$$I = \int_m r^2 \, dm$$

lub też, korzystając ze wzoru na gęstość ciała

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

jako

$$I = \int_V \rho r^2 \, dV$$

Zależność między $\vec{M}$ a $\vec{\varepsilon}$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \vec{M} = \frac{d}{dt}(I \vec{\omega}) \Rightarrow \vec{M} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Rightarrow \vec{M} = I \vec{\varepsilon}$$

Zależność ta jest słuszna dla przypadku obrotu bryły względem jednej z osi symetrii lub względem jednej z osi głównych (osi, której kierunek i zwrot nie ulega zmianie podczas jej obrotu), w innym przypadku potrzeba dziewięciu liczb do określenia I.

Praca w mechanice

Praca W jest to skalarna wielkość fizyczna, miara ilości energii przekazywanej między układami fizycznymi w procesach mechanicznych, elektrycznych, termodynamicznych i innych. Z kolei dW jest to nieskończenie mała praca, tak zwana praca elementarna. Określa się ją jako iloczyn skalarny wektora siły i wektora przesunięcia.

$dW = \vec{F} \cdot \vec{dr}$, czyli $dW = F|\vec{dr}|\cos \sphericalangle(\vec{F}, \vec{dr})$

Pracę określa się więc jako

$$W_{A \to B} = \int_{A \to B} dW \Rightarrow W_{A \to B} = \int_{A \to B} \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

W ogólności praca wykonana na skończonej długości toru zależy od kształtu i długości tego toru. Mając konkretne współrzędne wektorów $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ oraz $\vec{dr}(dx, dy, dz)$ możemy zapisać dW jako

$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

i analogiczne, W jako

$$W_{A \to B} = \int_{A \to B} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

Oczywiście siła $\vec{F}$ występuje tu jako siła wypadkowa, która może być złożeniem kilku (n) innych sił.

Jak się za chwilę okaże, pracę można zapisać przy pomocy energii kinetycznej lub potencjalnej, które są ściśle związane z pracą.

$$W_{A \to B} = \int_{A \to B} \vec{F} \cdot \vec{dr} \Rightarrow W_{A \to B} = \int_A^B dE_k \Rightarrow W_{A \to B} = E_k(B) - E_k(A)$$

$$W_{A \to B} = \int_{A \to B} \vec{F} \cdot \vec{dr} \Rightarrow W_{A \to B} = -\int_A^B dE_p \Rightarrow W_{A \to B} = -(E_p(B) - E_p(A)) \Rightarrow W_{A \to B} = E_p(A) - E_p(B)$$

Energia kinetyczna

Jest to energia związana z ruchem ciała. Aby ją zdefiniować przekształcimy podany poprzednio wzór na dW.

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dr} \Rightarrow dW = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{dr} \Rightarrow dW = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \vec{dr} \Rightarrow dW = m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{dr} \Rightarrow dW = m \vec{dv} \frac{\vec{dr}}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dW = m \vec{v} \, \vec{dv} \Rightarrow dW = dE_k$$

Teraz chcemy otrzymać jawny wzór na energię kinetyczną. Przekształcamy więc dalej

$$dW = dE_k \Rightarrow dW = m \vec{v} \, \vec{dv} \Rightarrow dW = m(v \, dv \cos(0^o)) \Rightarrow dW = m v \, dv \Rightarrow dW = d(\frac{m v^2}{2})$$

Ze względu na to, że dW = dE_k, możemy zapisać, że

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=dE_k \Rightarrow E_k=\frac{mv^2}{2}$$

Moc
Jest to wielkość, która informuje nas o szybkości wykonania pracy. Z definicji moc określa się jako
$$P=\frac{dW}{dt} \Rightarrow P=\frac{\vec{F}\cdot\vec{dr}}{dt} \Rightarrow P=\vec{F}\frac{\vec{dr}}{dt} \Rightarrow P=\vec{F}\cdot\vec{v}$$
Z rozważań o energii kinetycznej wiemy, że dW = dE$_k$, a więc prawdziwy jest również wzór
$$P=\frac{dE_k}{dt}$$

Energia potencjalna
Związana jest ze wzajemnym położeniem cząstek. Jest to energia, której kosztem układ może zmienić wzgędne położenie swoich cząstek, energia jaką ma układ ciał umieszczony w polu sił zachowawczych, wynikająca z rozmieszczenia tych ciał. Równa jest pracy, jaką trzeba wykonać, aby uzyskać daną konfigurację ciał, wychodząc od innego rozmieszczenia, dla którego umownie przyjmuje się jej wartość równą zero.
Jeśli praca jest wykonowana przez siły zachowawcze, to prawdziwa jest równość
$$dW=-dE_p$$

Siły zachowawcze
Jest to pewna grupa sił, które „zachowują energię punktu". Z tymi siłami ściśle związana jest zasada zachowania energii. Praca wykonana przez te siły nie zależy od kształtu i długości toru, po którym porusza się cząstka, a zależy jedynie od położenia początkowego i końcowego tej cząstki.
Siła jest zachowawcza tylko wtedy, kiedy jest jedynie funkcją położenia i jeśli istnieje taka funkcja skalarna $E_p(x\,y\,z)$, jednoznaczna i ciągła wraz z drugimi pochodnymi, że spełnione jest równanie
$$\vec{F}=-grad\ E_p(x\,y\,z)$$
Operator grad to skalar, który przekształca pola wektorowe. Efektem jego działania jest trzyskładowy wektor, którego kierunek i zwrot pokazuje kierunek i zwrot najszybszego przyrostu funkcji skalarnej, na którą działa.
$$grad=\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$
Z tego wynika, że możemy zapisać siłę $\vec{F}$ jako
$$\vec{F}=-[\hat{i}\frac{\partial E_p}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial E_p}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial E_p}{\partial z}]$$
$$\begin{cases} F_x=\frac{-\partial E_p}{\partial x} \\ F_y=\frac{-\partial E_p}{\partial y} \\ F_z=\frac{-\partial E_p}{\partial z} \end{cases}$$
Teraz, mając współrzędne wektora położenia $\vec{dr}(dx\,\hat{i}, dy\,\hat{j}, dz\,\hat{k})$ możemy już obliczyć pracę elementarną wykonaną przez siły zachowawcze
$$dW=\vec{F}\cdot\vec{dr} \Rightarrow dW=-(grad\ E_p\cdot\vec{dr}) \Rightarrow dW=-(\hat{i}\frac{\partial E_p}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial E_p}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial E_p}{\partial z})(dx\,\hat{i}+dy\,\hat{j}+dz\,\hat{k}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow dW=-(\frac{\partial E_p}{\partial x}dx+\frac{\partial E_p}{\partial y}dy+\frac{\partial E_p}{\partial z}dz)$$
Praca wykonana przez siły zachowawcze może być też określona przy użyciu samej energii potencjalnej, zgodnie ze wzorem $dW=-dE_p$. Tak jak wspomniano wcześniej
$$W_{A\rightarrow B}=\int_{A\rightarrow B}\vec{F}\cdot\vec{dr} \Rightarrow W_{A\rightarrow B}=-\int_A^B dE_p \Rightarrow W_{A\rightarrow B}=-(E_p(B)-E_p(A)) \Rightarrow W_{A\rightarrow B}=E_p(A)-E_p(B)$$
Praca wykonana przez siły zachowawcze po drodze zamkniętej wynosi zawsze zero.
$$W_{A\rightarrow A}=\oint\vec{F}\vec{dr}=0$$
Powyższe rozważania prowadzą nas do określenia własności sił zachowawczych. Jeszcze raz więc powtórzmy:

$\vec{F} = -grad\, E_p$ - funkcja $\vec{F}$ musi być funkcją położenia punktu

$\oint \vec{F}\, \vec{dr} = 0$ - cyrkulacja wektora siły po krzywej geometrycznej o dowolnym kształcie = 0

Nasza druga własność może być rozpisana jako tak zwane warunki Schwartza:

$$\oint \vec{F}\, \vec{dr} = 0 \Leftrightarrow rot\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \end{cases}$$

Obliczanie E_p, kiedy dane jest pole zachowawcze

Są na to dwa sposoby, w których zaczynamy rozumowanie od tych samych równań

Sposób pierwszy:

$$dW = -dE_p$$

$$\vec{F}\, \vec{dr} = -dE_p$$

$$\int_A^B \vec{F}\, \vec{dr} = -\int_A^B dE_p \Rightarrow -[E_p(B) - E_p(A)] = \int_A^B \vec{F}\, \vec{dr} \Rightarrow E_p(A) - E_p(B) = \int_A^B \vec{F}\, \vec{dr} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_p(A) = E_p(B) + \int_A^B \vec{F}\, \vec{dr}$$

Najczęściej przyjmujemy wtedy, że $B \to \infty$, co oznacza, że $E_p(\infty) = 0$ i otrzymujemy, że

$$E_p(A) = \int_A^B \vec{F}\, \vec{dr}$$

Sposób drugi:

$$dW = -dE_p$$

$$\vec{F}\, \vec{dr} = -dE_p$$

$$E_p = -\int \vec{F}\, \vec{dr} + const$$

Wtedy E_p jest określona z dokładnością do jakiejś stałej.

Siły centralne

Jest to rodzaj sił zachowawczych, których wartość jest funkcją odległości cząstki od ustalonego punktu w przestrzeni zwanego centrum siły, a kierunek siły leży na prostej łączącej siłę z tym punktem.

$$\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r} = f(r)\hat{r}$$

Z własności sił zachowawczych wynika, że

$$\oint f(r)\, dr = 0$$

Do sił centralnych należą: siły oddziaływania grawitacyjnego, siły Coulombowskie, siły Hooka (przy oscylatorach harmonicznych)

Energia potencjalna w polu grawitacyjnym

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

Określmy stałą c jako $c = -G m_1 m_2$. Wtedy możemy uprościć zapis siły do

$$\vec{F} = \frac{c}{r^2}\hat{r}$$

Pamiętając, że $E_p = -\int \vec{F}\, \vec{dr} + const$ możemy zapisać, że

$$E_p = -\int \frac{c}{r^2}\hat{r}\, \vec{dr} + const \Rightarrow E_p = -\int \frac{c}{r^2}\hat{r}\,\hat{r}\, dr + const \Rightarrow E_p = -\int \frac{c}{r^2} dr + const \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_p = \frac{c}{r} + const$$

Podstawiając do wzoru naszą stałą c otrzymamy wzór na energię potencjalną pola grawitacyjnego

$$E_p = \frac{c}{r} \Rightarrow E_p = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

Jeśli na przykład przyjmiemy, że masa Ziemi $M_Z = m_1$, a m to masa cząstki, na którą oddziałuje pole grawitacyjne, to

$$E_p = -G \frac{M_Z m}{r}$$

Szczególnym przypadkiem, energii potencjalnej z którą spotykamy się na co dzień na Ziemi jest energia, dla której przyjmujemy, że jeśli promień r jest równy promieniowi Ziemi R_Z, to $E_p = 0$.

$$E_p = m g h$$

gdzie g to przyspieszenie Ziemskie $g \approx 9{,}80665$, a h to wysokość ciała na Ziemi.

Energia potencjalna w polu Coulombowskim

$$\vec{F} = \frac{1}{4 \Pi \varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

Określmy stałą c jako $c = \frac{1}{4 \Pi \varepsilon_0} q_1 q_2$. Wtedy możemy uprościć zapis siły do

$$\vec{F} = \frac{c}{r^2} \hat{r}$$

Pamiętając, że $E_p = -\int \vec{F}\, \vec{dr} + const$ możemy zapisać, że

$$E_p = -\int \frac{c}{r^2} \hat{r}\, \vec{dr} + const \Rightarrow E_p = -\int \frac{c}{r^2} \hat{r}\, \hat{r}\, dr + const \Rightarrow E_p = -\int \frac{c}{r^2} dr + const \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_p = \frac{c}{r} + const$$

Podstawiając do wzoru naszą stałą c otrzymamy wzór na energię potencjalną pola grawitacyjnego

$$E_p = \frac{c}{r} \Rightarrow E_p = \frac{1}{4 \Pi \varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

Do obliczeń wykorzystamy teraz jony wodoropodobne, czyli atomy, których powłoka zewnętrzna ma jeden elektron.

$$q_1 = -e$$

$$q_2 = e$$

$$q_1' = -z e$$

$$E_p = \frac{-1}{4 \Pi \varepsilon_0} \frac{z e^2}{r}$$

gdzie z to liczba porządkowa (atomowa) atomu, która określa ile protonów znajduje się w jądrze.

Elektron w atomie może się poruszać tylko po takiej orbicie kołowej, na której moment pędu tego elektronu jest wielkością skwantowaną.

$$m V r = n \hbar$$

gdzie $\hbar$ to stała Diraca

$$\hbar = \frac{h}{2 \Pi} = 1{,}054\,571\,68 \cdot 10^{-34}$$

Energia potencjalna w przypadku oscylatora harmonicznego

$$\vec{F} = -k x$$

gdzie k to stała charakteryzująca siły sprężystości, a x to wychylenie cząstki.

$$E_p = -\int \vec{F}\, \vec{dr} + const \Rightarrow E_p = -\int -k x\, dx + const \Rightarrow E_p = \int k x\, dx + const \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} k x^2 + const$$

Jeśli $x \to 0$ to $E_p \to 0$