Transformacje między układami inercjalnymi – transformacja Galileusza
W przypadku, kiedy dla układu punktów spełniona jest zasada zachowania pędu, to środek masy układu punktów albo pozostaje w spoczynku, albo porusza się ze stałą prędkością. Dlatego środek masy jest dobrym początkiem układu inercjalnego.
Rozważmy dwa układy inercjalne: S – układ nieruchomy oraz S\` – układ, który porusza się ze stałą prędkością V względem osi x. Prędkość międzyukładowa wynosi wtedy $\vec{V}=V\hat{i}$.
Jeśli obserwatorzy w obu układach będą śledzić cząstkę P, przy czym obserwator układu S zmierzy wektor $\vec{r}$, obserwator w układzie S\` zmierzy wektor $\vec{r}\,'$ , a odległość układu S\` od układu S w chwili obserwacji będzie wynosiła $\vec{r}_0$, to $\vec{r}_0+\vec{r}\,'=\vec{r} \;\Rightarrow\; \vec{r}\,'=\vec{r}-\vec{r}_0$. Jeśli przedstawilibyśmy to w formie trzyskładowych wektorów, to otrzymamy $(x', y', z')=(x, y, z)-(x_{0,}0,0)$. Pamiętając, że punkt x_0 zmienia się proporcjonalnie o Vt, mamy $(x', y', z')=(x, y, z)-(Vt, 0,0)$, a z tego możemy już zbudować układ równań, który określi nam związki między współrzędnymi w poszczególnych układach, czyli tak zwane związki transformacji Galileusza

$$\begin{cases} x'=x-Vt \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=t \end{cases}$$

Z tego z kolei możemy zbudować związki wiążące poszczególne współrzędne prędkości w obu układach

$$\begin{cases} \dfrac{dx'}{dt}=\dfrac{dx}{dt}-V \\ \dfrac{dy'}{dt}=\dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz'}{dt}=\dfrac{dz}{dt} \end{cases}$$

A to już prowadzi nas do klasycznego prawa składania prędkości.

Klasyczne prawo składania prędkości
Wynika wprost z poprzednich równań

$$\begin{cases} \dfrac{dx'}{dt}=\dfrac{dx}{dt}-V \\ \dfrac{dy'}{dt}=\dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz'}{dt}=\dfrac{dz}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathring{v}_x'=\mathring{v}_x-V \\ \mathring{v}_y'=\mathring{v}_y \\ \mathring{v}_z'=\mathring{v}_z \end{cases}$$

gdzie V to prędkość między układami, a $\mathring{v}$ to prędkość cząsteczki, która porusza się w poruszającym się układzie

Niezmienniki transformacji Galileusza
Idąc dalej, możemy przekształcić otrzymane równania tak, aby otrzymać przyspieszenie oraz siłę

$$\begin{cases} \mathring{v}_x'=\mathring{v}_x-V \\ \mathring{v}_y'=\mathring{v}_y \\ \mathring{v}_z'=\mathring{v}_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\mathring{v}_x'}{dt}=\dfrac{d\mathring{v}_x}{dt} \\ \dfrac{d\mathring{v}_y'}{dt}=\dfrac{d\mathring{v}_y}{dt} \\ \dfrac{d\mathring{v}_z'}{dt}=\dfrac{d\mathring{v}_z}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x'=a_x \\ a_y'=a_y \\ a_z'=a_z \end{cases} \Rightarrow \vec{a}\,'=\vec{a} \;\; |\cdot m \;\Rightarrow\; m\vec{a}\,'=m\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{F}\,'=\vec{F}$$

Tym samym udowodniliśmy, że przyspieszenie i siła są niezmiennikami transformacji Galileusza, to znaczy, że we wszystkich inercjalnych układach odniesienia będą takie same. Pozwala nam to sformułować zasadę względności Galileusza.

Zasada względności Galileusza
Prawa mechaniki we wszystkich inercjalnych układach odniesienia mają taką samą postać.

Transformacje między układami nieinercjalnymi (obecność sił bezwładności)
Załóżmy, że układ S\` przestaje być układem inercjalnym (może na przykład poruszać się z jakimś przyspieszeniem

$\vec{a}_0$ względem układu S, ma również przyspieszenie kątowe $\vec{\varepsilon}$ oraz prędkość kątową $\vec{\omega}$)

$$\vec{a}\,'=\vec{a}-\vec{a}_0-\vec{\varepsilon}\times\vec{r}\,'-2\vec{v}\,'\times\vec{r}\,'-\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}\,' \quad |\cdot m \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad m\vec{a}\,'=m\vec{a}-m\vec{a}_0-m\vec{\varepsilon}\times\vec{r}\,'-2\mathrm{m}\vec{v}\,'\times\vec{r}\,'-m\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}\,' \quad \Rightarrow \quad \vec{F}\,'=\vec{F}-\vec{F}_B$$

gdzie $-m\vec{a}_0-m\vec{\varepsilon}\times\vec{r}\,'-2\mathrm{m}\vec{v}\,'\times\vec{r}\,'-m\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}\,'$ to siły bezwładności, których obecność stwierdzi obserwator w układzie nieinercjalnym S`. Są to siły, które nie mają przyczyny w oddziaływaniach w przyrodzie, a są tylko skutkiem nieinercjalności układu odniesienia, w przeciwieństwie do sił $\vec{F}$, których przyczyna leży w oddziaływaniach w przyrodzie.

W układzie nieinercjalnym nie obowiązuje I i III zasada dynamiki Newtona, a II zasadę dynamiki Newtona możemy zastosować tylko wtedy, gdy dodamy siły bezwładności

$$m\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2}=\vec{F}+\vec{F}_B$$

Rozważmy teraz przypadek laboratorium, które znajduje się np. w Polsce, w Krakowie. Wektor $\vec{r}\,'$ zaczepiony jest w środku kuli Ziemskiej, a jego koniec wskazuje na nasze laboratorium. Wektor ten możemy rozłożyć na dwie składowe: $\vec{r}_\perp\,'$ - składową prostopadłą do osi obrotu oraz $\vec{r}_\parallel\,'$ - składową równoległą do osi obrotu. Wtedy $\vec{r}\,'=\vec{r}_\perp\,'+\vec{r}_\parallel\,'$.

Przyspeszenie $\vec{g}$, które zmierzylibyśmy w naszym laboratorium wyniosłoby

$\vec{g}=\vec{g}_0-\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}\,'$, gdzie $\vec{g}_0$ to przyspieszenie ziemskie mierzone na nieobracającej się Ziemi, dokładnie na biegunach. Możemy to również zapisać jako

$$\vec{g}=\vec{g}_0-\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times(\vec{r}_\perp\,'+\vec{r}_\parallel\,') \quad \Rightarrow \quad \vec{g}=\vec{g}_0-[\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}_\perp\,'+\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}_\parallel\,']$$

Wiedząc, że iloczyn wektorowy liniowo zależnych składowych wynosi zero, możemy wyeliminować drugi człon w nawiasie kwadratowym. Zostanie nam

$$\vec{g}=\vec{g}_0-\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}_\perp\,'$$

a to z kolei, z własności iloczynu wektorowego $a\times b\times c=b(a\cdot c)-c(a\cdot b)$ możemy zapisać jako

$$\vec{g}=\vec{g}_0-[\vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_\perp\,')-\vec{r}_\perp\,'(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})]$$

Teraz możemy wyeliminować pierwszy człon nawiasu kwadratowego, ze względu na to, że $\vec{\omega}\perp\vec{r}_\perp\,'$

$$\vec{g}=\vec{g}_0-(-\vec{r}_\perp\,'(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})) \quad \Rightarrow \quad \vec{g}=\vec{g}_0+\vec{r}_\perp\,'(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}) \quad \Rightarrow \quad \vec{g}=\vec{g}_0+\omega^2\vec{r}_\perp\,'$$

Przyspieszenie Ziemskie w laboratorium można teraz obliczyć wiedząc, że $\vec{r}_\perp\,'=R\cos\varphi$, gdzie R to promień kuli Ziemskiej, a φ to szerokość geograficzna, na której znajduje się laboratorium.

$$\vec{g}=\vec{g}_0+\omega^2 R\cos\varphi$$

Postulaty szczególnej teorii względności (teorii Einsteina)

1. Prędkość światła (w ogólności fali elektromagnetycznej) jest w próżni we wszystkich układach inercjalnych taka sama, to znaczy niezależna od wzajemnego ruchu źródła fali i obserwatora. Jest to zarazem maksymalna prędkość, z jaką mogą się rozchodzić sygnały w przyrodzie.
2. Uogólnienie zasady względności Galileusza mówi, że wszystkie prawa przyrody są niezmiennicze względem przekształceń współrzędnych i czasu przy przejściu z jednego układu inercjalnego do drugiego. Wszystkie prawa przyrody we wszystkich inercjalnych układach odniesienia mają taką samą postać.

Równania Maxwella (równania elektrodynamiki klasycznej)

$$rot\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial dt}$$

$$rot\,\frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial dt}$$

$$div\,\vec{D}=\rho$$

$$div\,\vec{B}=0$$

gdzie $\vec{E}$ - pole elektryczne, $\vec{B}$ - indukcja magnetyczna, μ - przenikalność magnetyczna, μ_0 - przenikalność magnetyczna w próżni, $\vec{j}$ - gęstość prądu przewodzenia, $\vec{D}$ - indukcja elektryczna, div – operator dywergencji, ρ - gęstość ładunku

$$\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{B}$$

$$\vec{B}=\mu\mu_0\vec{H}$$

$$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}$$

gdzie ε - przenikalność elektryczna, ε_0 - przenikalność elektryczna w próżni, $\vec{H}$ - natężenie pola magnetycznego.

Równania Maxwella nie spełniają warunków niezmienniczości Galileusza.

Transformacja Lorentza między inercjalnymi układami odniesienia, które poruszają się z prędkością $V \sim c$ między sobą

Transformacja ta stanowi podstawę związków transformacyjnych w szczególnej teorii względności. Pozwala ona spełniać wymogi postulatów, których nie spełniały równania Maxwella (równania elektrodynamiki klasycznej). Załóżmy, że prędkości obu układów są bliskie prędkości światła, układ S ma współrzędne (x, y, z) i mierzy czas t, a układ S` ma współrzędne (x`, y`, z`) i mierzy czas t`. Załóżmy też dla uproszczenia, że układ S` porusza się tylko względem swojej osi x oraz, że w chwili t = t` początki układów pokrywały się i wtedy został wysłany sygnał świetlny. Układ S` zaczyna wtedy wędrować wzdłuż swojej osi x z prędkością $V=V_i$. Równanie na czoło fali świetlnej widzianej przez obserwatorów w obu układach w chwili początkowej można zapisać następująco

$$x^2+y^2+z^2=r^2=c^2+t^2$$
$$x'^2+y'^2+z'^2=r'^2=c^2+t'^2$$

Z transformacji Galileusza wiemy, że w układach inercjalnych, dla prędkości dużo mniejszych od c zachodzi zależność $x'=x-Vt$, dlatego też, stosując tą zależność do naszych układów inercjalnych, przy prędkościach rzędu prędkości światła otrzymalibyśmy

$$(x-Vt)^2+y^2+z^2=c^2+t^2$$

Widzimy więc, że transformacja Galileusza nie daje poprawnego przejścia. Musimy wprowadzić do niej pewną poprawkę, która zapewni liniowe przejście między układami.

① $\begin{cases} x'=\gamma(x-Vt) \\ \gamma=\gamma(V) \end{cases}$

② $x=\gamma(x'+Vt')$

Teraz wymnóżmy ① i ② stronami.

$$x\,x'=\gamma^2(x-Vt)(x'+Vt')$$

x możemy utożsamić z ct, dlatego też

$$ct\,ct'=\gamma^2(ct-Vt)(ct'+Vt') \Rightarrow c^2 t\,t'=\gamma^2 t(c-V)t'(c+V) \Rightarrow c^2=\gamma^2(c-V)(c+V) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c^2=\gamma^2(c^2-V^2) \Rightarrow \gamma^2=\frac{c^2}{c^2-V^2} \Rightarrow \gamma^2=\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

Z tego ostatecznie wynika, że nasza poprawka ma mieć postać

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Dla prędkości rzędu prędkości światła $\gamma \geq 1$. Jeśli $V<c$, to γ maleje, a jeśli $V\rightarrow 0$, to $\gamma \rightarrow 1$, a więc staje się pomijalnie małe (np. w sytuacjach codziennych).

Aby określić związki transformacji, potrzebujemy znaleźć jeszcze sposób transformowania się czasu między układami. Jeśli $x=\gamma(x'+Vt')$ oraz $x'=\gamma(x-Vt)$, to

$$x=\gamma(x'+Vt') \Rightarrow x=\gamma(\gamma(x-Vt)+Vt') \Rightarrow x=\gamma^2(x-Vt)+\gamma Vt' \Rightarrow x=\gamma^2 x-\gamma^2 Vt+\gamma Vt' \quad |:\gamma V$$
$$\frac{x}{\gamma V}=\frac{\gamma x}{V}-\gamma t+t' \Rightarrow t'=\gamma t-\frac{\gamma x}{V}+\frac{x}{\gamma V} \Rightarrow t'=\gamma(t-\frac{x}{V}+\frac{x}{\gamma^2 V})$$

Teraz, pamiętając że

$$\frac{1}{\gamma^2}=1-\frac{V^2}{c^2}$$

możemy już zapisać, że

$$t'=\gamma[t-\frac{x}{V}+(1-\frac{V^2}{c^2})\frac{x}{V}] \Rightarrow t'=\gamma[t-\frac{x}{V}+\frac{x}{V}-\frac{xV^2}{c^2 V}]$$

I ostatecznie

$$t'=\gamma(t-\frac{V}{c^2}x)$$

Związki transformacji Lorentza są więc następujące

$$\begin{cases} x'=\gamma(x-Vt) \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\gamma(t-\frac{V}{c^2}x) \end{cases}$$

Natomiast transformacja odwrotna to

$$\begin{cases} x=\gamma(x'+Vt') \\ y=y' \\ z=z' \\ t=\gamma(t'+\frac{V}{c^2}x') \end{cases}$$

Kinematyczne skutki transformacji Lorentza

1. Skrócenie (kontrakcja) Lorentza, czyli skrócenie długości obiektów.
2. Dylatacja (wydłużenie) czasu.
3. Nowe, relatywistyczne prawo składania prędkości.
4. Jednoczesność i następstwo czasowe zdarzeń.

Skrócenie (kontrakcja) Lorentza, czyli skrócenie długości obiektów

Załóżmy, że z układem S` mamy związany na stałe pręt, położony wzdłuż osi x. Jego początek leży w punkcie, oznaczonym jako $x_1'$ , a koniec w punkcie $x_2'$ . Długość pręta mierzona w układzie, w którym pręt przebywa nosi nazwę długości własnej i oznaczana jest jako $l_0=x_2'-x_1'$ . Układ inercjalny S` porusza się z prędkością zbliżoną do prędkości światła względem nieruchomego układu S. Ważne jest, aby położenie obu końców pręta było mierzone w tym samym czasie, czyli aby $t_2=t_1$.

Z transformacji Lorentza, możemy obliczyć współrzędne punktów x_1' oraz x_2' , jakie zobaczy obserwator układu S

$$x_2'=\gamma(x_2-Vt_2)$$
$$x_1'=\gamma(x_1-Vt_1)$$

Odejmując powyższe równania stronami otrzymamy

$$x_2'-x_1'=\gamma[(x_2-Vt_2)-(x_1-Vt_1)] \Rightarrow x_2'-x_1'=\gamma(x_2-x_1)$$

Teraz, jeśli oznaczymy długość pręta mierzoną przez obserwatora O z układu S jako $l=x_2-x_1$, otrzymamy

$$l_0=\gamma l$$

A z tego już wprost wynika, że jeśli prędkość będzie rzędu prędkości światła, to $\gamma\geq 1$, a więc

$$l=\frac{l_0}{\gamma} \Rightarrow l=l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

Długość pręta mierzona z układu S w stosunku do długości własnej pręta będzie więc skrócona γ razy.

Gdyby pręt był położony wzdłuż osi y, podczas gdy układ S` poruszałby się wzdłuż osi x, to zgodnie z transformacją Lorentza długość pręta, mierzona przez obserwatora z układu S byłaby równa długości własnej pręta, dlatego, że

$$\left.\begin{matrix} y_2'=y_2 \\ y_1'=y_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow l_0=y_2-y_1=l$$

Wnioski: jeżeli cząstka (obiekt) porusza się względem obserwatora O z prędkością stałą V, to wymiary mierzone przez obserwatora w kierunku ruchu ulegają skróceniu γ razy, zaś wymiary mierzone przez obserwatora w kierunku poprzecznym do kierunku ruchu obiektu nie zmieniają się.

Tak samo jest z objętością obiektów. Jeśli obiekt związany jest na stałe z układem S`, który porusza się z prędkością rzędu prędkości światła wzdłuż osi x, Ω_0 to objętość własna obiektu, a Ω to objętość mierzona przez obserwatora z układu S, to ze związków transformacji Lorentza wiemy, że

$$\Omega=\frac{\Omega_0}{\gamma}$$

a więc objętość zmniejszy się γ razy. Co innego, gdyby układ S` pozostawał w spoczynku, wtedy $\Omega=\Omega_0$.

Wydłużenie (dylatacja) czasu

W szczególnej teorii względności, upływ czasu zależy od szybkości zegara, który ten czas mierzy. Jeśli określimy jako $t_{1,}t_2$ czasy między pewnymi dwoma zjawiskami, zmierzone przez obserwatora w układzie S, a t_1',t_2' czasy zmierzone przez obserwatora w układzie S`, to ze związków transformacji Lorentza mamy

$$t_2=\gamma(t_2'+\frac{V}{c^2}x_2')$$

$$t_1=\gamma(t_1'+\frac{V}{c^2}x_1')$$

Odejmijmy równania stronami

$$t_2-t_1=\gamma[(t_2'+\frac{V}{c^2}x_2')-(t_1'+\frac{V}{c^2}x_1')]$$

Jeśli zjawisko zaszło w tym samym punkcie na osi x, czyli jeśli $x_2'=x_1'$, to

$$t_2-t_1=\gamma(t_2'-t_1')$$

Dla uproszczenia zdefiniujmy $\Delta t_0=t_2'-t_1'$ oraz $\Delta t=t_2-t_1$. Wtedy

$$\Delta t=\gamma\,\Delta t_0 \;\Rightarrow\; \Delta t_0=\frac{\Delta t}{\gamma}$$

Wynika z tego, że odstępy czasu mierzone przez zegar, który porusza się z cząstką w układzie S` są mniejsze niż odstępy czasu mierzone przez zegar nieruchomy, związany z układem S. Czas w układzie S` płynie więc wolniej niż w układzie S.

Zjawisko dylatacji czasu wykorzystuje się na co dzień w systemach GPS, bo przy prędkości satelity ~ 4,5 km/h występuje przesunięcie czasu ~ 7μs na dzień, a to daje w sumie duży rozrzut przy lokalizacji obiektów. Dopiero uwzględnienie zjawiska dylatacji czasu pozwoliło na lokalizację obiektów z dokładnością do 1 m.

Nowe relatywistyczne prawo składania prędkości

Mówi nam, że przy składaniu prędkości nigdy nie otrzymamy prędkości większych niż prędkość światła c. Oznaczmy prędkość mierzoną w układzie S` jako $(\mathring{v}_x', \mathring{v}_y', \mathring{v}_z')$, a prędkość mierzoną w układzie S jako $(\mathring{v}_x, \mathring{v}_y, \mathring{v}_z)$.

Jeżeli $x'=\gamma(x-Vt)$, to możemy symbolicznie zapisać, że x` jest funkcją od x i od t $x'=x'(x,t)$, czyli że $dx'=d[\gamma(x-Vt)]$. Z kolei wiedząc, że

$$t'=\gamma(t-\frac{V}{c^2}x)$$

możemy zapisać, że t` jest funkcją od t i od x $t'=t'(t,x)$, czyli że

$$dt'=d[\gamma(t-\frac{V}{c^2}x)]$$

Teraz, za pomocą pochodnej cząstkowej możemy zdefiniować relatywistyczne prawo składania prędkości.

$$dx'=\frac{\partial x'}{\partial x}dx+\frac{\partial x'}{\partial t}dt \;=\; \gamma\,dx-\gamma V\,dt \;=\; \gamma(dx-V\,dt)$$

$$dt'=\frac{\partial t'}{\partial t}dt+\frac{\partial t'}{\partial x}dx \;=\; \gamma\,dt-\gamma\frac{V}{c^2}dx \;=\; \gamma(dt-\frac{V}{c^2}dx)$$

$$\begin{cases} \mathring{v}_x'=\dfrac{dx'}{dt'}=\dfrac{\gamma(dx-V\,dt)}{\gamma(dt-\frac{V}{c^2}dx)}=\dfrac{\gamma\,dt(\frac{dx}{dt}-V)}{\gamma\,dt(1-\frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt})}=\dfrac{\mathring{v}_x-V}{1-\frac{V}{c^2}\mathring{v}_x} \\[2ex] \mathring{v}_y'=\dfrac{dy'}{dt'}=\dfrac{dy}{\gamma(dt-\frac{V}{c^2}dx)}=\dfrac{dt(\frac{dy}{dt})}{\gamma\,dt(1-\frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt})}=\dfrac{\mathring{v}_y}{\gamma(1-\frac{V}{c^2}\mathring{v}_x)} \\[2ex] \mathring{v}_z'=\dfrac{dz'}{dt'}=\dfrac{dz}{\gamma(dt-\frac{V}{c^2}dx)}=\dfrac{dt(\frac{dz}{dt})}{\gamma\,dt(1-\frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt})}=\dfrac{\mathring{v}_z}{\gamma(1-\frac{V}{c^2}\mathring{v}_x)} \end{cases}$$

Transformacja Galileusza i klasyczne prawo składania prędkości są szczególnymi przypadkami transformacji Lorentza i relatywistycznego prawa składania prędkości.

Relatywistyczne prawo składania prędkości wygląda więc następująco

$$\begin{cases} \mathring{v}_x' = \dfrac{\mathring{v}_x - V}{1 - \dfrac{V}{c^2}\mathring{v}_x} \\ \mathring{v}_y' = \dfrac{\mathring{v}_y}{\gamma(1 - \dfrac{V}{c^2}\mathring{v}_x)} \\ \mathring{v}_z' = \dfrac{\mathring{v}_z}{\gamma(1 - \dfrac{V}{c^2}\mathring{v}_x)} \end{cases}$$

A transformacja odwrotna

$$\begin{cases} \mathring{v}_x = \dfrac{\mathring{v}_x' + V}{1 + \dfrac{V}{c^2}\mathring{v}_x'} \\ \mathring{v}_y = \dfrac{\mathring{v}_y'}{\gamma(1 + \dfrac{V}{c^2}\mathring{v}_x')} \\ \mathring{v}_z = \dfrac{\mathring{v}_z'}{\gamma(1 + \dfrac{V}{c^2}\mathring{v}_x')} \end{cases}$$

Jeśli $V \ll c$, to relatywistyczne prawo składania prędkości przechodzi w klasyczne prawo składania prędkości uzyskane z transformacji Galileusza. Relatywistyczne prawo składania prędkości zachowuje prędkość w taki sposób, że prędkość wypadkowa nigdy nie przekroczy prędkości c.

Jednoczesność i następstwo czasowe zdarzeń

Wiemy już, że prawdziwy jest wzór

$$t' = \gamma(t - \frac{V}{C^2}x)$$

Jeśli t_1' oraz t_2' oznaczymy jako zarejestrowane przez obserwatora w układzie S\` czasy dwóch zjawisk, przy czym $t_2' > t_1'$, to możemy zapisać, że różnica czasu między tymi dwoma zjawiskami wynosi

$$t_2' - t_1' = \gamma[(t_2 - \frac{V}{c^2}x_2) - (t_1 - \frac{V}{c^2}x_1)] \Rightarrow t_2' - t_1' = \gamma[(t_2 - t_1) - \frac{V}{c^2}(x_2 - x_1)]$$

Jeśli $t_2 - t_1 = 0$, czyli gdyby badane w laboratorium na Ziemi dwa zjawiska zaszły jednocześnie, nie byłyby równoczesne w układzie, który się porusza, a to dlatego, że

$$t_2' - t_1' = -\gamma \frac{V}{c^2}(x_2 - x_1)$$

l_0 oraz Δt_0 są niezmiennikami transformacji Lorentza – we wszystkich inercjalnych układach są takie same.

Dynamika relatywistyczna

I prawo dynamiki pozostaje bez zmian.

III prawo dynamiki $\vec{F}_A = -\vec{F}_R$ w dynamice relatywistycznej przestaje obowiązywać, bo prędkość rozchodzenia się oddziaływań jest skończona i wynosi tyle, ile prędkość fali elektromagnetycznej w próżni.

II prawo dynamiki

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

pozostaje słuszne pod warunkiem, że uwzględni się skutki relatywistyczne dla pędu cząstki

$$\vec{p} = m_r \vec{v}$$

gdzie m_r to tak zwana masa relatywistyczna, która wynosi

$$m_r=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=m\gamma$$

Wyprowadzenie na pęd relatywistyczny można teoretycznie uzyskać z wykorzystania zasady zachowania pędu przy zderzeniu cząstek lub z doświadczeń, które wykazują, że $m_r=m\gamma$. Jeśli $V\ll c$, to $m_r=m$.

$$\vec{F}=\frac{d}{dt}(m_r\vec{v})=\frac{dm_r}{dt}\vec{v}+m_r\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dm_r}{dt}\vec{v}+m_r\vec{a}$$

W mechanice relatywistycznej $\vec{F}$ i $\vec{a}$ nie są na ogół do siebie wektorami równoległymi. Jeśli wiemy, jaki jest wektor $\vec{F}$, to nie koniecznie wiemy, w którym kierunku porusza się ciało, dlatego, że $\vec{F}\neq\vec{F}'$ oraz $\vec{a}\neq\vec{a}'$

Energia relatywistyczna

W mechanice relatywistycznej energia relatywistyczna wyraża się wzorem

$$E=m_r c^2$$

Całkowita energia relatywistyczna cząstki to suma energii kinetycznej E_k i spoczynkowej E_0

$$E=E_k+E_0=m_r c^2$$

$E_0=mc^2$ oraz $E_k=E-E_0$

Ze wzoru Einsteina wynika, że każdej zmianie masy relatywistycznej o Δm_r będzie towarzyszyła zmiana energii

$\Delta m_r=\frac{\Delta E}{c^2}$ oraz $\Delta m=\frac{\Delta E_0}{c^2}$

Ten drugi fakt wykorzystują elektrownie atomowe.