

POLITECHNIKA KRAKOWSKA  
im. Tadeusza Kościuszki

WŁODZIMIERZ DZIURDA, TERESA STĘPIEŃ,  
WOJCIECH OTOWSKI

ZBIÓR ZADAŃ Z FIZYKI  
Z ROZWIĄZANIAMI

Część I

MECHANIKA KLASYCZNA, MECHANIKA RELATYWISTYCZNA,  
FIZYKA STATYCZNA Z ELEMENTAMI TEORII TRANSPORTU

POMOC DYDAKTYCZNA

Wydanie piąte poprawione



Kraków 2000

## SPIS TREŚCI

Przedmowa .....		5
	Zadania	Odpowiedzi i rozwiązania
I. Mechanika klasyczna		
1. Kinematyka .....	6	38
2. Dynamika .....	11	61
II. Mechanika relatywistyczna		
3. Efekty kinematyczne transformacji Lorentza	25	139
4. Dynamika relatywistyczna .....	29	149
III. Fizyka statystyczna z elementami teorii transportu		
5. Elementy kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa .....	31	154
6. Równanie Maxwella i Boltzmanna .....	33	160
7. Zjawiska transportu .....	35	176
Literatura .....		182

## ZADANIA

### I. MECHANIKA KLASYCZNA

#### 1. KINEMATYKA

1.1. Dwie cząstki zostały wysłane z początku układu współrzędnych i po pewnym czasie ich położenia opisano wektorami:

$$\vec{r}_1 = 4 \vec{i} + 3 \vec{j} + 8 \vec{k} \quad [\text{m}],$$

$$\vec{r}_2 = 2 \vec{i} + 10 \vec{j} + 5 \vec{k} \quad [\text{m}],$$

gdzie:  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  są wersorami. Znaleźć:

- długość każdego wektora,
- wektor położenia cząstki drugiej względem cząstki pierwszej,
- kąty między wszystkimi parami tych trzech wektorów,
- rzut wektora  $\vec{r}_2$  na  $\vec{r}_1$ .

1.2. Dwie cząstki poruszają się w prostokątnym układzie współrzędnych z prędkościami:  $\vec{v}_1 = 2 \vec{i} [\text{m/s}]$  i  $\vec{v}_2 = 3 \vec{j} [\text{m/s}]$ . W chwili  $t = 0$  cząstki te znajdują się odpowiednio w punktach o współrzędnych:  $x_1 = -3 [\text{m}]$ ,  $y_1 = 0 [\text{m}]$  oraz  $x_2 = 0 [\text{m}]$ ,  $y_2 = -3 [\text{m}]$ .

- Znaleźć wektor określający położenie cząstki pierwszej względem drugiej.
- Wyznaczyć czas oraz położenia cząstek w chwili ich największego zbliżenia.

1.3. Równania ruchu dwóch punktów, obserwowanych z danego układu współrzędnych, wyglądają następująco:

$$\vec{r}_1(t) = (0, 2, 0) + (3, 1, 2) t + (1, 1, 0) t^2 \quad [\text{m}],$$

$$\vec{r}_2(t) = (1, 0, 1) + (0, 2, 1) t \quad [\text{m}].$$

Znaleźć:

- prędkość punktu drugiego względem pierwszego,
- przyspieszenie punktu drugiego względem pierwszego.

1.4. W ciągu czasu  $t_1$  wartość prędkości ciała zmienia się wg wzoru

$$v = at^2 + bt, \quad 0 \leq t \leq t_1,$$

gdzie:  $a$  i  $b$  są stałymi dodatnimi. Jaka jest średnia wartość prędkości ciała w ciągu czasu  $t_1$ ?

1.5. Odcinek  $\overline{AB}$  o stałej długości porusza się tak, że jego punkty końcowe  $A$  i  $B$  ślizgają się po osiach  $x, y$  prostokątnego układu współrzędnych. Wyznaczyć tor, jaki będzie zakreślał przy tym ruchu dowolnie obrany punkt  $M$  na odcinku  $\overline{AB}$ .

1.6. Z powierzchni Ziemi wyrzucono piłkę pionowo do góry z prędkością  $v_0$ . Równocześnie z wysokości, na jaką wzniesie się piłka, zaczyna spadać w dół kamień z tą samą prędkością  $v_0$ . Obliczyć po jakim czasie i na jakiej wysokości te ciała miną się, a także prędkości obu ciał w chwili mijania. Zaniedbać opór powietrza.

1.7. Środek jabłka znajduje się w odległości  $d$  od obserwatora, pod kątem widzenia  $\alpha$ . Pod jakim kątem  $\beta$  należy wystrzelić pocisk, aby przy prędkości początkowej  $v_0$  trafił w środek jabłka, które w chwili wystrzału zaczyna swobodnie spadać. Opór powietrza pominąć.

1.8. Ciało wyrzucono pod kątem  $\alpha$  do poziomu z prędkością początkową  $v_0$ . Zaniedbując opór powietrza i przyjmując wartość przyspieszenia ziemskiego  $g$ , znaleźć:

- równania ruchu ciała,
- równanie toru ciała,
- wartość promienia krzywizny toru  $\rho$  w zależności od odciętej  $x$  położenia ciała.

Przedyskutować wartości promienia krzywizny dla przypadków:  $y = 0$  i  $y = H_{maks}$ .

1.9. Po rzece płynie łódka ze stałą względem wody prędkością  $v_1$ , prostopadłą do kierunku prądu. Woda w rzece płynie wszędzie równoległe do brzegów, ale wartość jej prędkości zależy od odległości od brzegów i dana jest wzorem

$$v_2 = v_0 \sin \frac{\pi y}{L},$$

gdzie  $v_0$  i  $L$  są stałymi ( $L$  jest szerokością rzeki). Znaleźć:

- wartość wektora prędkości łódki względem nieruchomych brzegów,
- kształt toru łódki.

✓ 1.10. Łódź przepływa rzekę ze stałą względem wody prędkością  $v$ , prostopadłą do kierunku prądu. Prędkość prądu rzeki, której szerokość wynosi  $L$ , jest równa zero przy brzegach i wzrasta liniowo w miarę zbliżania się ku środkowi nurtu, gdzie osiąga wartość  $u$ . Znaleźć:

- kształt toru łodzi,
- odległość  $x_0$ , o którą prąd znosi łódź od punktu startu do miejsca przybicia na przeciwnym brzegu.

22 ✱ 1.11. Rozpatrzyć ruch punktu materialnego po jednej z gałęzi paraboli o równaniu  $y^2 = 2px$ , gdy rzut wektora prędkości na kierunek stycznej do wierzchołka paraboli ma stałą wartość  $v_0$ . Znaleźć:

- równania ruchu punktu,
- wektor prędkości i jego wartość,
- wektor przyspieszenia i jego wartość,
- składowe wektora przyspieszenia: styczną i normalną,
- promień krzywizny toru punktu w funkcji czasu,
- promień krzywizny paraboli w funkcji odległości punktu od stycznej do wierzchołka.

Przyjąć warunki początkowe:  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ .

✓ 1.12. Punkt materialny porusza się po elipsie o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

przy czym  $\ddot{x} = 0$ . Stosując metodę różniczkowania równania toru, znaleźć  $\dot{y}$  i  $\ddot{y}$  jako funkcje  $\dot{x}$  oraz położenia punktu.

27 ✓ 1.13. Ruch punktu wzdłuż osi  $x$  jest określony równaniem  $x^2 = at^2 + bt + c$ , gdzie  $a$ ,  $b$ ,  $c$  są stałe, a  $t$  oznacza czas.

- Zbadać zależność przyspieszenia od położenia punktu.
- Wyznaczyć zależność, jaka musi zachodzić między stałymi, by ruch był jednostajny i znaleźć prędkość tego ruchu.

28 1.14. Punkt porusza się po okręgu o promieniu  $r$  w ten sposób, że wektor przyspieszenia tworzy stały kąt  $\alpha$  z promieniem wodzącym.

- a. Wyznaczyć zależność prędkości kątowej  $\dot{\varphi}$  oraz kąta  $\varphi$  od czasu przy założeniu, że w chwili  $t = 0$   $\dot{\varphi} = \omega_0$ .
- b. Jaką krzywą tworzy hodograf?

1.15. Ruch punktu wzdłuż osi  $x$  jest określony równaniem  $t = ax^2 + bx + c$ , gdzie  $a, b, c$  są stałe, a  $t$  oznacza czas. Wykazać, że przyspieszenie jest odwrotnie proporcjonalne do trzeciej potęgi odległości od pewnego ustalonego punktu. Wyznaczyć położenie tego punktu.

1.16. Koło o promieniu  $r$  toczy się po prostej. Wyznaczyć tor, po którym porusza się stały punkt  $P$ , położony na obwodzie koła. Zbadać ruch tego punktu, w szczególności wyznaczyć przyspieszenia styczne  $a_s$  i normalne  $a_n$ , gdy:

- a) koło toczy się ze stałą prędkością kątową  $\omega$ ,  
 b) wartość prędkości obranego punktu jest stała.

1.17. Ruch punktu jest określony za pomocą współrzędnych biegunowych  $r$  i  $\varphi$ , gdzie:

$$r = a e^{ct},$$

$$\varphi = bt, \quad (a, b, c, - \text{stałe}, t - \text{czas}).$$

Wyznaczyć wektor prędkości  $\vec{v}$  i wektor przyspieszenia  $\vec{a}$  tego punktu oraz obliczyć kąt zawarty między tymi wektorami.

1.18. Ruch punktu dany jest układem równań:

$$x = ct \cos(bt),$$

$$y = ct \sin(bt),$$

gdzie  $b$  i  $c$  są stałymi dodatnimi. Znaleźć w biegunowym układzie współrzędnych:

- równania ruchu punktu,
- równanie toru punktu,
- wartość wektora prędkości punktu,
- wartość wektora przyspieszenia punktu,
- składowe wektora przyspieszenia – styczną i normalną,
- promień krzywizny toru punktu jako funkcję położenia punktu.

1.19. Ruch punktu na płaszczyźnie dany jest równaniami:

$$x = bt^2,$$

$$y = ct^2,$$

gdzie  $b$  i  $c$  są stałymi dodatnimi. Znaleźć w biegunowym układzie współrzędnych:

- ruch punktu,
- prędkość i przyspieszenie.

1.20. Znaleźć tor, po którym w płaszczyźnie pionowej  $xy$  leci samolotem ponadźwiękowym pilot, który chce, aby jego koledzy stojący na lotnisku usłyszeli w tym samym momencie huk silnika z całego toru. Podać współrzędne końca toru. Wartość prędkości samolotu jest stała i równa  $v$ .

W chwili  $t = 0$  samolot znajdował się w odległości  $r_0$  od punktu, w którym stoją koledzy pilota, a wektor  $\vec{r}_0$  tworzył kąt  $\alpha$  z płaszczyzną poziomą.

1.21. Mrówka porusza się po krzywej, której długość  $s$  dana jest wzorem  $s = s_0 \exp(ct)$ , gdzie  $s_0$  i  $c$  – stałe. Wiedząc, że wektor przyspieszenia  $\vec{a}$  tworzy stały kąt  $\alpha$  ze styczną do toru w każdym punkcie, znaleźć wartość:

- prędkości,
- przyspieszeń: stycznego i normalnego,
- promienia krzywizny toru jako funkcji długości łuku krzywej.

1.22. Punkt materialny porusza się po spirali hiperbolicznej, dla której  $r = c/\varphi$ , gdzie  $c$  jest stałą, przy czym wartość kąta  $\varphi$  jest liniową funkcją czasu. Znaleźć odległość  $r$  punktu od środka spirali jako funkcję czasu. Przedyskutować poszczególne przypadki.

1.23. Znaleźć rozkład prędkości i przyspieszeń dla wahadła matematycznego przy założeniu drgań harmonicznym. Zadanie rozwiązać w dwóch układach współrzędnych – kartezjańskim i biegunowym.

1.24. Sprinter przebiegł na zawodach drogę  $s$  w czasie  $t$ . Zakładając, że miejscowość, w której odbywały się zawody, leży na szerokości geograficznej  $\varphi$ , a dany fragment bieżni tworzy kąt  $\Theta = 0$  z płaszczyzną południka ziemskiego, znaleźć:

- przyspieszenie Coriolisa działające na sprintera,
- odchylenie od kierunku prędkości początkowej zmierzone na końcu toru.

Bez wykonywania rachunków oszacować liczbowo wartość odchylenia, jeżeli  $s = 100$  [m],  $t = 10$  [s],  $\varphi = 30^\circ$ . Przyjąć, że okres obrotu kuli ziemskiej  $T = 86\,000$  [s].

1.25. W celu sprawdzenia odchylenia ku wschodowi ciała spadającego pionowo Reich wykonał w r. 1831 ponad sto doświadczeń ze spadającą swobodnie kulą w szybie kopalni ( $\varphi = 51^\circ$ ) i otrzymał następujące wyniki: przy wysokości spadania 158 [m] odchylenie ku wschodowi wyniosło średnio 28,3 [mm]. Obliczyć odchylenie przewidywane teoretycznie bez uwzględnienia oporu powietrza.

1.26. Punkt porusza się jednostajnie po powierzchni kuli o promieniu  $R$ , przy czym wektor prędkości  $\vec{v}$  tworzy z południkami stały kąt  $\alpha$ . Znaleźć czas potrzebny na przejście punktu od równika do bieguna oraz równanie toru.

## 2. DYNAMIKA

✓ 2.1. Ciało o masie  $m$ , poruszające się ruchem jednostajnie prostoliniowym z prędkością  $v_0$ , zostało zatrzymane na drodze  $s_0$ . Siła hamująca była liniową funkcją prędkości  $v$  taką, że w chwili zatrzymania ciała wartość jej równała się połowie wartości, jaką miała w chwili rozpoczęcia hamowania. Obliczyć wartość początkową siły hamującej.

✓ 2.2. Samochód o masie  $m$  hamowany jest siłą oporu  $F = -kv^2$ . Jaką drogę przebędzie samochód zanim prędkość jego znajdzie do połowy?

✓ 2.3. Ciało o masie  $m$  spada pod wpływem siły ciężkości z wysokości  $h$ , bez prędkości początkowej. Uwzględniając opór ośrodka jako proporcjonalny do prędkości, znaleźć zależność drogi od czasu. Znaleźć przybliżone wyrażenie na  $x(t)$ , gdy opór ośrodka jest bardzo mały, ale nie do zaniedbania.

2.4. Napisać równanie ruchu cząstki o masie  $m$  i ładunku  $q$ , znajdującej się w jednorodnym, zmiennym polu elektrycznym  $\vec{E} = (E_0 \sin \omega t, 0, 0)$ , gdzie  $\omega$  jest częstością kołową, a  $E_0$  – amplitudą wektora natężenia pola elektrycznego.

a. Znaleźć  $x(t)$ , przyjmując warunki początkowe:  $v_x(0) = 0$ ,  $x(0) = 0$ .

b. Sprawdzić czy funkcja  $x(t) = x_1 \sin \omega t + v_0 t + x_0$  spełnia równanie Newtona. Wyznaczyć postać współczynników:  $x_0$ ,  $x_1$  i  $v_0$ .

2.5. Znaleźć równanie toru ciała o masie  $m$  w polu siły  $\vec{F} = k\vec{r}$ . W chwili początkowej ciało znajdowało się w punkcie  $(x_0, 0)$ , a jego prędkość miała wartość  $v_0$  i była prostopadła do osi  $x$ . Rozpatrzeć przypadki  $k > 0$  i  $k < 0$ . Czy siła  $\vec{F} = k\vec{r}$  jest zachowawcza?



✓ 2.6. Na ciało o masie  $m$ , znajdujące się na poziomej płaszczyźnie, działa przez  $t_1$  sekund pozioma siła  $F = \text{const}$ . Znaleźć drogę przebytą przez ciało do momentu zatrzymania się, jeżeli współczynnik tarcia o płaszczyznę równy jest  $\mu$ .

✓ 2.7. Ciało o masie  $m$  porusza się pod działaniem zmiennej siły  $F = b(t_0 - t)$ . Po jakim czasie ciało zatrzyma się, jeżeli w chwili początkowej jego prędkość równa była  $v_0$ , a siła działa w kierunku ruchu. Jaką drogę  $s$  przebędzie ciało do momentu zatrzymania się ( $b$  – stała dodatnia,  $t_0$  – ustalony czas)?

✓ 2.8. Kamień o masie  $m$  wrzucono z prędkością  $v_0$  do studni, w której poziom wody znajduje się na głębokości  $d$ . Zakładamy, że kamień w powietrzu spada swobodnie, natomiast w wodzie działa na niego siła oporu proporcjonalna do prędkości  $\vec{F} = -k\vec{v}$ . Znaleźć zależności położenia, prędkości i przyspieszenia kamienia od czasu.

2.9. Rozwiązać równanie Newtona dla jednowymiarowego oscylatora harmonicznego:

- nietłumionego,
- tłumionego siłą proporcjonalną do prędkości.

2.10. Kropla wody w postaci kulki spada pod wpływem siły ciężkości w atmosferze nasyconej parą wodną. Przez skraplanie się pary kropla doznaje ciągłego przyrostu masy, który jest wprost proporcjonalny do powierzchni kropli i przyrostu czasu. Współczynnik proporcjonalności wynosi  $\alpha$ .

a. Zbadać ruch bez uwzględniania tarcia przy założeniu, że w chwili początkowej  $t = 0$ ,  $r = r_0$ ,  $v = v_0$ , gdzie  $r$  oznacza promień kropli.

b. Zbadać ruch, gdy  $r_0 = 0$  oraz gdy  $v_0 = 0$ .

✓ 2.11. Doskonale giętki sznur o długości  $l$  leży częściowo na gładkim, poziomym stole, częściowo zwisa pionowo w dół. Część sznura leżąca na stole jest prostopadła do krawędzi stołu. Zbadać ruch przy założeniu, że w chwili początkowej  $t = 0$ ,  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ,  $v = 0$ .

2.12. Rakieta unosi się pionowo w górę. Prędkość wypływu gazu przez dyszę, w układzie związanym z rakieta, wynosi  $\vec{c}$  i ma przeciwny zwrot niż prędkość

rakiety. Ilość ubywającej masy w jednostce czasu  $\frac{dm}{dt} = \rho(t)$ . Zbadać ruch rakiety

bez uwzględnienia tarcia przy stałej prędkości  $\vec{c}$ , gdy przyspieszenie rakiety  $\vec{a} = \text{const}$  (znaleźć wyrażenie na zmienną masę). W chwili początkowej  $t = 0$ ,  $z = 0$ ,  $v = 0$ ,  $m = m_0$ . Założyć, że podczas całego lotu rakiety przyspieszenie ziemskie jest stałe i wynosi  $g$ .

2.13. Punkt materialny o masie  $m$  znajduje się na zboczu w kształcie paraboli  $y = ax^2$ . Współczynnik tarcia jest równy  $\mu$ . Całość znajduje się w polu grawitacyjnym ziemskim. Znaleźć maksymalną wysokość, na której punkt będzie pozostawać w spoczynku.

✓ 2.14. Kula o promieniu  $R$  pływa w cieczy o gęstości  $\rho$ , przy czym jest w niej zanurzona do połowy swej objętości. Jaką pracę należy wykonać, aby wydobyć kulę nad poziom cieczy?

✓ 2.15. Kula o promieniu  $R$  i ciężarze właściwym  $\gamma_k$  jest zanurzona w wodzie, tak że styka się z jej powierzchnią. Jaką pracę trzeba wykonać, żeby wyciągnąć kulę z wody?

✓ 2.16. Drewniany pływak w kształcie walca, którego pole podstawy jest równe  $S$ , a wysokość  $H$ , pływa na powierzchni wody. Ciężar właściwy drzewa wynosi  $\gamma_d$ .

- Jaką pracę trzeba wykonać, żeby wyciągnąć pływak z wody?
- Jaką pracę trzeba wykonać, aby całkowicie zanurzyć pływak w wodzie?

2.17. Kropla o masie początkowej  $M_0$  spada pod działaniem siły ciężkości i jednostajnie parując traci w ciągu każdej sekundy masę  $m$ . Jaką pracę wykona siła ciężkości w czasie od początku ruchu do chwili zupełnego wyparowania kropli. Opór powietrza zaniedbać.

2.18. Obliczyć pracę, którą trzeba wykonać, aby wyczerpać płyn o gęstości  $\rho$  ze zbiornika mającego kształt obróconego wierzchołkiem w dół stożka o wysokości  $H$  i promieniu podstawy  $R$ . Jak zmieni się wynik, jeżeli stożek będzie zwrócony wierzchołkiem ku górze?

2.19. Wymiary piramidy Cheopsa są w przybliżeniu następujące: wysokość  $H = 140$  [m], krawędź podstawy (kwadratu)  $a = 200$  [m]. Ciężar właściwy kamienia, z którego jest zbudowana, wynosi w przybliżeniu  $25\,000$  [N/m<sup>3</sup>]. Obliczyć pracę zużytą przy jej budowie na pokonanie siły ciężkości.

2.20. Jaką pracę trzeba wykonać, aby usypać stos piasku w kształcie stożka o promieniu podstawy  $R = 1,5$  [m] i wysokości  $H = 1$  [m]. Ciężar właściwy piasku wynosi  $\gamma = 20\,000$  [N/m<sup>3</sup>] (piasek podnosi się z powierzchni ziemi).

2.21. Obliczyć pracę, którą trzeba włożyć, aby wyczerpać wodę napelniającą zbiornik w kształcie walca o wysokości  $H$  i promieniu podstawy  $R$ .

✓ 2.22. Obliczyć pracę wykonaną po górnym łuku okręgu o środku  $(1/2, 0)$  między punktami  $P_1(x, y) = (1, 0)$  i  $P_2(x, y) = (0, 0)$  w polu siły:

$$\vec{F}(x, y) = (-e^x \cos y, e^x \sin y).$$

✓ 2.23. Obliczyć pracę wykonaną przez siłę  $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2, xyz, z^2 + 3x)$  przy przejściu od punktu  $P_1(x, y, z) = (-1, 0, 0)$  do punktu  $P_2(x, y, z) = (1, 0, 0)$ :

- po prostej wzdłuż osi  $x$ ,
- po półokręgu w płaszczyźnie  $xy$ .

2.24. Wykazać, że w każdym polu potencjalnym składowe działających w nim sił (klasy  $C^1$ ) muszą spełniać związki:

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}.$$

2.25. Praca związana z przesunięciem jakiegoś ciała po dowolnym, zamkniętym torze, w pewnym potencjalnym polu sił, mierzona w inercjalnym układzie odniesienia wynosi  $W = 0$ . Czy w dowolnym innym układzie inercjalnym będzie spełniona analogiczna równość  $W' = 0$ ?

✓ 2.26. Dla którego z następujących pól sił, danych składowymi wektora natężenia pola  $\vec{K}$ , praca nie zależy od drogi:

- $K_x = ye^{-xyz}$ ,  $K_y = xe^{-xyz}$ ,  $K_z = ye^{-xyz}$ ,
- $K_x = (x^2y + 2x + yz + z)e^{xy}$ ,  $K_y = (x^3 + xz)e^{xy}$ ,  $K_z = e^{xy}$ ,
- $K_x = xz \cos y$ ,  $K_y = -\frac{1}{2}x^2z \sin y$ ,  $K_z = 0$ ,
- $K_x = y(xz - 1)e^{-xz}$ ,  $K_y = -xe^{-xz}$ ,  $K_z = x^2e^{-xz}$ ,
- $K_x = K_y = 0$ ,  $K_z = -g$ ,
- $K_x = -kx$ ,  $K_y = -ky$ ,  $K_z = -kz$ , gdzie  $k = \text{const}$ ,
- $K_x = \sin y$ ,  $K_y = x \cos y$ ,  $K_z = 1$ ,
- $K_x = yz$ ,  $K_y = xz$ ,  $K_z = xy$ ,
- $K_x = \frac{\alpha}{r^2} \frac{x}{r}$ ,  $K_y = \frac{\alpha}{r^2} \frac{y}{r}$ ,  $K_z = \frac{\alpha}{r^2} \frac{z}{r}$ , gdzie  $\alpha = \text{const}$ .

Wyliczyć potencjały dla pól zachowawczych.

21  
22  
2.27. Potencjał pewnego pola dany jest wzorem

$$V(r) = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r},$$

gdzie  $a$  i  $b$  – stałe dodatnie.

- Znaleźć siłę działającą w tym polu na cząstkę o masie  $m$ .
- Znaleźć punkty równowagi.

22  
2.28. Oddziaływanie między nukleonami można przedstawić z dość dobrą dokładnością przez potencjał Yukawy:

$$V(r) = -V_0 \left( \frac{r_0}{r} \right) e^{-r/r_0},$$

gdzie:  $V_0 = 50$  [MeV], a  $r_0 = 1,5 \cdot 10^{-13}$  [cm].

- Obliczyć siłę  $F(r)$  działającą na cząstkę o masie  $m$ .
- W jakiej odległości siła ma wartość równą 1% swej wartości dla  $r = r_0$ .

21  
22  
2.29. W jakiej odległości między dwiema cząsteczkami nie będzie działała żadna siła, jeżeli energia potencjalna tego układu dana jest wzorem:

$$E_p(r) = \frac{q}{r} e^{kr},$$

gdzie  $q$  i  $k$  – stałe.

2.30. Mamy następujące pola sił:

- $K_x = 0$ ,  $K_y = a$ ,  $K_z = \sin z$ ,
- $K_x = a$ ,  $K_y = 0$ ,  $K_z = \sin y$ ,

gdzie  $a$  jest stałą dodatnią. Niech ciało o masie  $m$  znajduje się w punkcie  $x = y = z = 0$  w chwili  $t_0$  w spoczynku. Znaleźć energię kinetyczną tego ciała w punkcie  $x = y = 1$ ,  $z = \pi/2$ , dla tego  $z$  pól  $a$  i  $b$ , dla którego jest to, przy podanych danych, możliwe.

2.31. Punkt materialny  $A$  odpychany jest przez stały punkt  $B$  z siłą proporcjonalną do ich wzajemnej odległości. W chwili  $t = 0$  odległość  $AB = 0$ , a prędkość punktu  $A$  jest równa  $v_0$ . Znaleźć ruch punktu  $A$  korzystając z:

- równań ruchu,
- całki energii.

2.32. Przedyskutować ruch cząstki o masie  $m$  i energii  $E$  w polach sił o potencjale:

a)  $V(x) = A|x|$ ,

b)  $V(x) = A \operatorname{tg}^2(ax)$ ,

gdzie  $A$  i  $a$  – stałe dodatnie.

2.33. Przedyskutować ruch cząstki o masie  $m$  i energii  $E = 0$  w polu sił opisanym potencjałem Morse'a, tzn.

$$V(x) = A(e^{-2ax} - 2e^{-ax}),$$

gdzie  $A$  i  $a$  – stałe dodatnie.

2.34. Stosując równania Lagrange'a znaleźć czas ruchu z wysokości  $H$  ciała o masie  $m$ , ślizgającego się bez tarcia po równi pochyłej, nachylonej pod kątem  $\alpha$  względem ziemi. Przy jakim kącie  $\alpha$  czas ruchu z wysokości  $H$  będzie najmniejszy?

2.35. Cząstka o masie  $m$  porusza się po spirali logarytmicznej  $r = e^{\theta}$  w polu siły sprężystości o potencjale  $V(r) = kr^2$ . Napisać równanie Lagrange'a i przedyskutować ruch.

2.36. Znaleźć funkcję Lagrange'a podwójnego wahadła płaskiego (długości  $l_1, l_2$  i masy  $m_1, m_2$ ), znajdującego się w jednorodnym polu siły ciężkości.

2.37. Podać funkcję Lagrange'a płaskiego wahadła o masie  $m_2$  i długości  $l$ , zawieszono na punkcie materialnym o masie  $m_1$ , poruszającym się po prostej:

a) poziomej,

b) pionowej.

2.38. Punkt porusza się po elipsoidzie bez działania żadnych sił. Wykazać za pomocą równań Lagrange'a pierwszego rodzaju, że jego prędkość jest stała.

2.39. Dwie kule o masach  $m_1$  i  $m_2$  osadzone są na końcach nieważkiego pręta, w odległościach  $r_1$  i  $r_2$  od tego punktu pręta, wokół którego obraca się on swobodnie na osi, do której jest prostopadły. Znaleźć równania ruchu metodą Lagrange'a.

2.40. Znaleźć funkcję Lagrange'a i równanie ruchu koralika o masie  $m$ , ślizgającego się bez tarcia po poziomym pręcie, wirującym ze stałą prędkością kątową  $\omega$ . Nie działają żadne siły zewnętrzne. Wychylenie od środka obrotu w chwili  $t = 0$  wynosi  $r = 0$ , a prędkość  $v = v_0$ .

2.41. Wykazać, że dla pól potencjalnych we współrzędnych kartezjańskich równania Lagrange'a przechodzą w równania Newtona.

2.42. Pewien przedmiot znajduje się na wysokości  $h$  nad dnem pustego naczynia. Jego energia potencjalna względem dna wynosi  $E_p = mgh$ . Czy wartość tej energii ulegnie zmianie, jeżeli do naczynia nalejemy wody?

2.43. Wykazać, że prawo Archimidesa jest prostą konsekwencją zasady zachowania energii.

2.44. Wykazać, że wydłużenie sprężyny, na której zawieszono pewne ciało, jest takie, że energia potencjalna układu jest minimalna.

2.45. Obliczyć amplitudę i fazę początkową ruchu harmonicznego nie-tłumionego, wykonywanego przez punkt materialny wzdłuż prostej, jeżeli w chwili  $t = 0$  wychylenie punktu  $x = 0,05$  [m], jego prędkość  $v = 0,2$  [m/s], a częstotliwość drgań  $\nu = 1$  [s<sup>-1</sup>].

2.46. Zbadać ruch kulki materialnej poruszającej się wzdłuż prostoliniowego kanału przechodzącego przez środek Ziemi, jeżeli wiemy, że we wnętrzu Ziemi siła działająca na kulkę jest wprost proporcjonalna do jej odległości od środka Ziemi i skierowana do jej środka. Prędkość początkowa kulki przy wejściu do kanału jest równa zero. Obliczyć czas, w ciągu którego kulka osiągnie środek Ziemi oraz prędkość, z jaką go minie (promień Ziemi  $R = 6370$  [km]).

2.47. Deska, ustawiona w płaszczyźnie poziomej, wykonuje w kierunku pionowym ruch drgający o amplitudzie  $x_0 = 0,75$  [m]. Jaka powinna być maksymalna częstotliwość drgań deski, aby ciało, swobodnie leżące na desce, nie odrywało się od niej?

2.48. Deska ustawiona poziomo wykonuje drgania harmoniczne w kierunku poziomym o okresie  $T = 5$  [s]. Ciało, leżące swobodnie na desce, zaczyna się ślizgać, gdy amplituda drgań osiągnie wartość  $x_0 = 0,5$  [m]. Jaki jest współczynnik tarcia między tym ciałem a deską?

2.49. Na szalkę o masie  $M$ , zawieszoną na sprężynie o współczynniku sprężystości  $k$ , z wysokości  $h$  spada ciężarek o masie  $m$  i pozostaje na niej, wskutek czego szalka wraz z ciężarkiem zaczyna drgać ruchem harmonicznym. Znaleźć amplitudę drgań.



2.50. Przyczepiony do sprężyny klocek może ślizgać się bez tarcia po poziomej płaszczyźnie. Jediną siłą decydującą o drganiach klocka jest w tym przypadku siła działająca ze strony sprężyny. Jeżeli zestaw ten zostanie zawieszony, to o ruchu klocka będzie decydować także siła ciężkości. Czy w związku z tym częstości drgań w obu przypadkach będą różne?

2.51. Zaniedbując lepkość wyznaczyć okres małych drgań słupa wody o całkowitej długości  $l$ , znajdującego się w szklanej rurce wygiętej w kształcie litery U. Jak zmieni się okres drgań, jeżeli rurka zostanie umieszczona w windzie poruszającej się ze stałym przyspieszeniem  $a$ ?

2.52. Jednorodny pręt o masie  $m$ , przekroju poprzecznym  $S$  i długości  $l$  jest zawieszony na sprężynie i do połowy zanurzony w cieczy o gęstości  $\rho$ . Zaniedbując lepkość cieczy, obliczyć okres drgań pręta, jeżeli wiadomo, że po usunięciu cieczy sprężyna (w równowadze z prętem) wydłużyła się o odcinek  $d$  w stosunku do tej długości, jaką miała wówczas, gdy pręt był zanurzony w cieczy. Masę samej sprężyny zaniedbać.

2.53. Wyznaczyć okres drgań ciężarka zawieszonoego na dwu połączonych z sobą sprężynach, których współczynniki sprężystości są odpowiednio równe  $k_1$  i  $k_2$ . Masy sprężyn zaniedbać.

2.54. Ciecz wiano w zgiętą rurkę, której ramiona tworzą z poziomem kąty  $\alpha$  i  $\beta$ ; całkowita długość słupka cieczy wynosi  $l$ . Gdy równowaga cieczy zostanie zakłócona, zaczynają się wahania poziomów w rurkach. Zaniedbując siły wiskowatości i tarcia wewnętrznego znaleźć okres tych drgań.

2.55. Obliczyć współczynnik tłumienia drgań harmonicznch tłumionych punktu materialnego, jeżeli iloraz dwóch po sobie następujących maksymalnych wychyleń punktu materialnego w tę samą stronę wynosi 2, zaś okres drgań tłumionych  $T = 0,5$  [s]. Obliczyć okres drgań nietłumionych odpowiadający danym drganiom tłumionym.

2.56. Logarytmiczny dekrement tłumienia drgań harmonicznch  $\delta = 0,02$ . Obliczyć ile razy zmniejszy się amplituda drgań po wykonaniu 100 drgań.

2.57. Okres drgań tłumionych  $T$  wynosi 4 [s], logarytmiczny dekrement tłumienia  $\delta = 1,6$ , a faza początkowa jest równa zeru. Wychylenie punktu w chwili  $t = T/4$  jest równe 0,045 [m].

a. Napisać równanie ruchu drgań.

b. Sporządzić wykres tego ruchu drgającego w przedziale czasu  $0 \leq t \leq 2T$ .

2.58. Częstość kołowa drgań kulki stalowej o promieniu  $r = 0,01$  [m] i gęstości  $\rho = 7,83 \cdot 10^3$  [kg/m<sup>3</sup>], zawieszona na sprężynie, wynosi w powietrzu  $\omega = 5$  [s<sup>-1</sup>], a w cieczy  $\omega_1 = 4,06$  [s<sup>-1</sup>]. Wyznaczyć lepkość cieczy.

2.59. Przedmiot o masie  $m = 5$  [kg], zawieszony na sprężynie, wprawiono w ruch drgający i stwierdzono, że przy braku tłumienia wykonuje on 10 pełnych cykli w ciągu 10 [s]. Następnie włączono niewielkie tłumienie magnetyczne, wprost proporcjonalne do prędkości przedmiotu i powodujące po 10 cyklach zmniejszenie amplitudy drgań od 0,2 [m] do 0,1 [m].

a. Napisać równanie ruchu tego przedmiotu.

b. Znaleźć nowy okres drgań.

c. Jaka jest maksymalna szybkość rozpraszania energii w ciągu pierwszego cyklu?

2.60. Dwa równoległe ruchy drgające o jednakowych amplitudach i fazach początkowych, o okresach  $T_1 = 3$  [s] i  $T_2 = 3,1$  [s], nakładają się dając ruch wypadkowy. Obliczyć okres drgań ruchu wypadkowego oraz okres dudnień.

2.61. Wyznaczyć tor ruchu wypadkowego, który powstanie przy nałożeniu się dwóch wzajemnie prostopadłych drgań harmonicznym o jednakowych amplitudach, równych 0,05 [m] i jednakowych okresach, których różnica faz wynosi  $\pi/2$ .

2.62. Wyznaczyć tor ruchu wypadkowego, który powstaje z nałożenia się dwóch wzajemnie prostopadłych ruchów harmonicznym o amplitudach 0,03 [m] i 0,05 [m], o jednakowych okresach i fazach.

2.63. Wyznaczyć amplitudę wypadkowego ruchu harmonicznego, otrzymanego w wyniku nałożenia się dwóch jednokierunkowych ruchów drgających o jednakowych okresach, amplitudach 0,03 [m] i 0,05 [m] i różnicy faz  $60^\circ$ .

2.64. Dwa ruchy harmoniczne o niewiele różniących się częstotliwościach po nałożeniu dają ruch wypadkowy, w którym występuje 5 dudnień na sekundę. Jaka jest częstotliwość drugiego z tych ruchów, jeżeli pierwszy ma częstotliwość  $\nu_1 = 40$  [s<sup>-1</sup>]?

2.65. Jaką różnicę faz mają drgania dwóch punktów znajdujących się w odległościach równych odpowiednio 10 [m] i 16 [m] od źródła drgań. Okres drgań wynosi 0,04 [s], a prędkość rozchodzenia się drgań 300 [m/s].



2.66. Znaleźć różnicę faz drgań dwóch punktów leżących na promieniu i odległych od siebie o 2 [m], jeżeli długość fali jest równa 1 [m].

2.67. Wychylenie z położenia równowagi punktu, znajdującego się w odległości 0,04 [m] o źródła drgań, w chwili  $t = T/6$  jest równe połowie amplitudy. Znaleźć długość fali biegnącej.

2.68. Prędkość rozchodzenia się fal w powietrzu  $v_1 = 330$  [m/s], w wodzie zaś  $v_2 = 1450$  [m/s]. Promień fali rozchodzącej się w powietrzu tworzy z powierzchnią wody kąt  $\alpha = 80^\circ$ . Jaki kąt z powierzchnią wody będzie tworzył promień fali załamanej?

2.69. W wyniku interferencji dwóch fal o częstotliwościach  $\nu = 475$  [s<sup>-1</sup>] powstała fala stojąca. Odległość dwóch sąsiednich węzłów fali stojącej wynosi 1,5 [m]. Jaka jest prędkość rozchodzenia się fali w ośrodku, w którym powstała fala stojąca?

2.70. Obliczyć prędkość rozchodzenia się fal podłużnych i poprzecznych w stali o gęstości  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$  [kg/m<sup>3</sup>], jeżeli moduł sprężystości na wydłużenie  $E = 2 \cdot 10^{11}$  [N/m<sup>2</sup>], a moduł ścinający  $G = 0,8 \cdot 10^{11}$  [N/m<sup>2</sup>].

2.71. Prędkość rozchodzenia się fal podłużnych w stali wynosi  $v_1 = 5100$  [m/s]. Jaka jest prędkość rozchodzenia się fal poprzecznych w stali, skoro stała Poissona  $m = 3,1$ ?

2.72. Jeden koniec sprężystego pręta połączony jest ze źródłem drgań harmonicznymi:  $y = y_0 \sin(\omega t)$ . Drugi koniec pręta jest unieruchomiony. Wyznaczyć charakter drgań w dowolnym punkcie pręta, przyjmując, że przy odbiciu od unieruchomionego końca faza zmienia się na przeciwną.

2.73. Cienki pręt o długości  $l$  jest unieruchomiony na obu końcach. Wyznaczyć możliwe częstotliwości podłużnych drgań własnych pręta.

2.74. Rozwiązać poprzednie zadanie w przypadku, gdy pręt jest unieruchomiony tylko w jednym punkcie  $x = 0$ .

2.75. Obserwator i źródło dźwięku poruszają się naprzeciw siebie wzdłuż prostej, przy czym prędkość obserwatora  $v = 10$  [m/s], a prędkość źródła dźwięku  $u = 5$  [m/s]. Obydwie prędkości odnoszą się do ośrodka, w którym dźwięk się rozchodzi (powietrze) i który jest w spoczynku. Jakiej częstotliwości

dźwięk słyszy obserwator, jeżeli źródło wysyła dźwięk o częstotliwości  $\nu = 500$  [ $\text{s}^{-1}$ ], zaś prędkość rozchodzenia się głosu w powietrzu w danej temperaturze wynosi  $c = 340$  [ $\text{m/s}$ ].

2.76. O ile podwyższy się poziom głośności dźwięku, jeżeli jego natężenie zwiększy się pięciokrotnie?

2.77. Dany jest układ trzech punktów materialnych o masach:  $m_1 = 0,005$  [ $\text{kg}$ ],  $m_2 = 0,010$  [ $\text{kg}$ ],  $m_3 = 0,015$  [ $\text{kg}$ ]. Punkty materialne, znajdujące się w chwili  $t = 0$  w punktach  $A_1 (0,03, 0,04, 0,05)$ ,  $A_2 (-0,02, 0,04, -0,06)$ ,  $A_3 (0, 0, 0)$  (współrzędne w nawiasach dane są w [ $\text{m}$ ]), wprowadzone są w ruch przez siły zewnętrzne, których suma wektorowa jest wektorem o wartości  $F = 0,05$  [ $\text{N}$ ] i ma kierunek osi  $x$ . Znaleźć położenie środka masy układu w chwili  $t = 2$  [ $\text{s}$ ].

2.78. Znaleźć położenie środka masy:

- ciała jednorodnego, które ma postać półkula o promieniu  $R$  i grubości tak małej, że można ją pominąć,
- stożka prostego o wysokości  $h$ ,
- ciała jednorodnego w kształcie półkuli o promieniu  $R$ ,
- powierzchni, która powstała z prostokąta o bokach  $a, b$  w ten sposób, że z jednej strony wycięto półkole o promieniu  $b/2$  i przyłączono je z drugiej strony,
- paraboloidy obrotowej o wysokości  $a$ , która powstała przez obrót paraboli  $y^2 = 2px$  dookoła osi  $x$ .

2.79. Udowodnić, że środek masy dowolnego trójkąta o niewielkiej grubości znajduje się w punkcie przecięcia się środkowych tego trójkąta.

2.80. Znaleźć osie główne i odpowiednie momenty bezwładności dla następujących jednorodnych ciał o danych masach  $m$ :

- prostopadłościanu o bokach:  $a, b, c$ ,
- kuli o promieniu  $R$ ,
- stożka o wysokości  $h$  i promieniu podstawy  $R$ ,
- elipsoidy obrotowej z półosiami  $a, b, c$ ,
- wydrążonej kuli o średnicy zewnętrznej  $D$  i średnicy wewnętrznej  $d$ ,
- wydrążonego walca o długości  $l$ , zewnętrznym promieniu  $R$  i wewnętrznym  $r$ .

2.81. Moment bezwładności fluorowodoru HF względem jego środka masy wynosi  $1,37 \cdot 10^{-47}$  [ $\text{kg m}^2$ ]. Znaleźć odległość między atomami wodoru i fluoru, jeżeli masa atomu wodoru  $m_H = 1,67 \cdot 10^{-27}$  [ $\text{kg}$ ], a masa atomu fluoru  $m_F = 3,17 \cdot 10^{-27}$  [ $\text{kg}$ ].

**2.82.** Wykazać, że dla cząsteczek dwuatomowych tensor momentu bezwładności względem układu środka masy wyraża się wzorem  $I = \mu a^2$ , gdzie  $\mu$  jest masą zredukowaną cząsteczki dwuatomowej, a  $a$  – odległością między atomami w położeniu równowagi.

**2.83.** Obliczyć tensor momentu bezwładności względem środka masy cząsteczki  $\text{CH}_4$  o strukturze czworościanu foremnego, w którego środku znajduje się atom C, a w wierzchołkach atomy H. Odległość pomiędzy atomami C i H  $a = 1,07 \cdot 10^{-10}$  [m].

**2.84.** Pręt o masie 2 [kg] i długości  $l = 1$  [m] jest zawieszony na osi poziomej, przechodzącej przez jego koniec. Jaka prędkość będzie miał drugi koniec pręta przy przejściu przez najniższe położenie, jeżeli pręt znajdujący się w najwyższym położeniu puścimy swobodnie? Jaka siła działa na oś pręta w chwili jego przechodzenia przez najniższe położenie?

**2.85.** Mamy prosty jednorodny pręt o długości  $l = 1$  [m]. W jakiej odległości od jego środka należy umocować ten pręt, aby tworzył wahadło fizyczne o najmniejszym okresie?

**2.86.** Jednorodna, cienka płyta kwadratowa o masie  $M$  i krawędzi  $a$ , zawieszona pionowo na jednym z wierzchołków, waha się w swej płaszczyźnie pod wpływem własnego ciężaru. W którym miejscu przekątnej przechodzącej przez punkt zaczepienia płyty, poza samą osią obrotu, można przykleić punktową masę  $m$  tak, aby ruch płyty nie uległ przez to zmianie?

**2.87.** Drewniana listwa o długości  $l = 0,4$  [m] i masie  $m = 1$  [kg] może się obracać dookoła osi prostopadłej do niej, przechodzącej przez jej środek. W koniec listwy trafia pocisk o masie  $m_1 = 0,01$  [kg], lecący z prędkością  $v_1 = 200$  [m/s] w kierunku prostopadłym do osi i do listwy. Znaleźć prędkość kątową, z jaką listwa zacznie się obracać, gdy utkwi w niej pocisk.

**2.88.** Tarczę okrągłą o ciężarze  $P$  i promieniu  $r$  zawieszono na trzech równoległych niciach o długości  $l$ . Nici przymocowano do brzegu tarczy w równych odległościach na obwodzie. Na tarczę położono pręt o ciężarze  $Q$  tak, że jego środek pokrywa się ze środkiem tarczy. Gdy tarczę obróci się o mały kąt, będzie ona wykonywać drgania harmoniczne. Okres drgań samej tarczy wynosi  $T_1$ , a tarczy z prętem  $T_2$ . Wyznaczyć moment bezwładności pręta względem osi przechodzącej przez jego środek.

2.89. Jednorodny walec o masie  $m$  i promieniu  $a$  toczy się w polu siły ciężkości wewnątrz walca o promieniu  $R$ . Znaleźć równanie ruchu walca wychylonego w chwili początkowej z położenia równowagi o kąt  $\varphi_0$ . Kiedy otrzymane równanie można w prosty sposób rozwiązać?

2.90. Dwie kule staczają się po równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha$ . Masa pierwszej kuli jest rozłożona równomiernie w całej objętości, a masa drugiej, pustej w środku, rozłożona jest cienką warstwą na powierzchni. Określić różnicę między przyspieszeniami środków mas tych kul.

2.91. Po równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha$  toczą się na dół z tej samej wysokości: kula jednorodna i walec jednorodny.

a. Wyznaczyć przyspieszenia środków mas tych ciał, jeśli ruch odbywa się bez poślizgu, a oś walca jest pozioma.

b. Znaleźć prędkość środków mas po przebyciu przez ciała drogi  $s$ , jeżeli w chwili  $t = 0$  były w spoczynku.

c. Powtórzyć obliczenia z punktu *b* przy założeniu, że kulka i walec zsuwają się bez tarcia.

d. Znaleźć maksymalną wartość kąta  $\alpha$ , dla którego ruch odbywa się bez poślizgu, jeśli współczynnik tarcia wynosi  $\mu$ .

2.92. Jednorodny walec metalowy o gęstości  $\rho = 8 \cdot 10^3$  [kg/m<sup>3</sup>] i długości  $l = 0,3$  [m] obraca się z prędkością kątową  $\omega$  dookoła stałej osi przechodzącej przez środek masy walca prostopadłe do jego osi podłużnej. Wyznaczyć maksymalną prędkość kątową obrotu walca, jeżeli największe dopuszczalne naprężenie, któremu można poddać walec w kierunku podłużnym wynosi  $6 \cdot 10^7$  [N/m<sup>2</sup>].

2.93. Obliczyć energię kinetyczną jaką uzyska ciało, mające kształt walca o promieniu  $r = 0,08$  [m] i masę  $m = 1,5$  [kg], w czasie  $t = 5$  [s], obracające się dookoła osi przechodzącej przez środki jego podstaw ze stałym przyspieszeniem kątowym  $\varepsilon = \pi/8$  [s<sup>-2</sup>]. W chwili  $t = 0$  ciało znajdowało się w spoczynku.

2.94. Płaskie naczynie z cieczą obraca się z prędkością kątową  $\omega$  wokół osi pionowej  $z$ , przechodzącej przez jego środek. Udowodnić, że powierzchnia swobodna wirującej cieczy ma w przekroju kształt paraboli. Obliczyć energię ruchu obrotowego opisanego układu, jeśli poziom cieczy w naczyniu nie obracającym się wynosi  $z_0$ . Dane są: gęstość cieczy  $\rho$ , długość podstawy naczynia  $2a$ , szerokość  $b$ , moment bezwładności pustego naczynia  $I_0$ . Przyjmujemy, że  $b \ll a$ .

2.95. Na brzegu poziomej, okrągłej tarczy o masie  $M$  i promieniu  $R$  stoi człowiek o masie  $m$ . Tarcza może obracać się bez tarcia wokół pionowej osi. Znaleźć prędkość kątową tarczy, jeżeli człowiek będzie chodzić wzdłuż jej brzegu ze stałą prędkością  $v$  względem niej. Jaką drogę musi przejść po tarczy człowiek, aby jego droga względem Ziemi była zamkniętym okręgiem?

2.96. Wyjaśnić, dlaczego jadąc na rowerze można bez trudu utrzymać równowagę, podczas gdy na stojącym rowerze jest to prawie niemożliwe.

2.97. Jednorodny pręt o długości  $l$  spadając z pewnej wysokości zaczepia o krawędź stołu. W czasie spadania jest on nachylony pod kątem  $\alpha$  w stosunku do poziomu i nie obraca się. Przy jakiej wartości kąta  $\alpha$  pręt uzyska największą prędkość kątową. Zakładamy, że zderzenie jest doskonale sprężyste.

2.98. Jednym z elementów gimnastyki artystycznej są ćwiczenia z obręczą. W czasie takich ćwiczeń często można oglądać obręcz, która rzucona przez zawodniczkę, tocząc się, wraca ku niej. Jest to możliwe, jeżeli w czasie rzutu obręcz zostanie wprowadzona w ruch obrotowy o odpowiednim kierunku. Jaki warunek powinny spełniać początkowe wartości prędkości ruchu postępowego  $v_0$  i prędkości  $\omega_0$ , aby po pewnym czasie ruchu z poślizgiem obręcz potoczyła się do tyłu.

## ODPOWIEDZI I ROZWIĄZANIA

### I. MECHANIKA KLASYCZNA

#### 1. KINEMATYKA

##### 1.1.

a)  $r_1 = 9,4 \text{ [m]}, r_2 = 11,3 \text{ [m]}$ ;

b)  $\vec{r} = -2\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k} \text{ [m]}, r = 7,9 \text{ [m]}$ ;

c)  $\cos(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0,7, \cos(\vec{r}_1, \vec{r}) = 0,5, \cos(\vec{r}_2, \vec{r}) = 0,9$ ;

d)  $8,3 \text{ [m]}$ .

##### 1.2.

a. Z definicji prędkości

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = 2\vec{i} \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right], \quad \frac{d\vec{r}_2}{dt} = 3\vec{j} \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right].$$

Całkując te wyrażenia i korzystając z warunków początkowych dostajemy

$$\vec{r}_1 = (2t - 3) \vec{i} \text{ [m]}, \quad \vec{r}_2 = (3t - 3) \vec{j} \text{ [m]},$$

stąd

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (3 - 2t) \vec{i} + (3t - 3) \vec{j} \text{ [m]}.$$

b. Obliczając minimum funkcji  $r = r(t)$  znajdujemy czas największego zbliżenia  $t_{min} = 1,2 \text{ [s]}$  oraz odpowiadającą mu odległość  $r_{min} = 0,8 \text{ [m]}$ .

##### 1.3.

a)  $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (-3, 1, -1) - (2, 2, 0) t \text{ [m/s]}$ ;

b)  $\vec{a} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = - (2, 2, 0) \text{ [m/s}^2\text{]}$ .

## 1.4. Z definicji prędkości średniej

$$\bar{v} = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} v dt,$$

stąd

$$\bar{v} = \frac{at_1^2}{3} + \frac{bt_1}{2}.$$

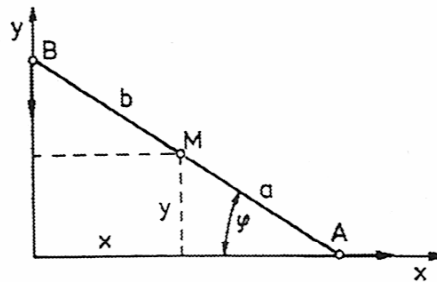
## 1.5. Przyjmując oznaczenia jak na rys.4

$$\frac{x}{b} = \cos\varphi,$$

$$\frac{y}{a} = \sin\varphi.$$

Podnosząc oba równania do kwadratu i dodając do siebie wyznaczamy tor

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$



Rys.4

Punkt  $M$  porusza się po elipsie o półosiach  $a$  i  $b$ .

## 1.6. Ruch piłki określają wzory

$$s_1 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

$$v_1 = v_0 - g t.$$

Z warunku

$$v_1 = 0$$

znajdujemy

$$t_{max} = \frac{v_0}{g}$$

i

$$h_{max} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}$$

Ruch kamienia określają wzory

$$s_2 = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2,$$

$$v_2 = v_0 + g t.$$

W momencie spotkania  $s_1 + s_2 = h_{\max}$  (rys.5). Stąd

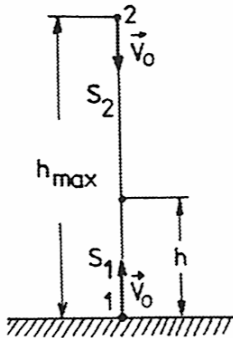
$$t = \frac{v_0}{4g}.$$

Wstawiając  $t$  do odpowiednich wzorów mamy

$$h = \frac{7 v_0^2}{32 g},$$

$$v_1 = \frac{3 v_0}{4},$$

$$v_2 = \frac{5 v_0}{4}.$$



Rys.5

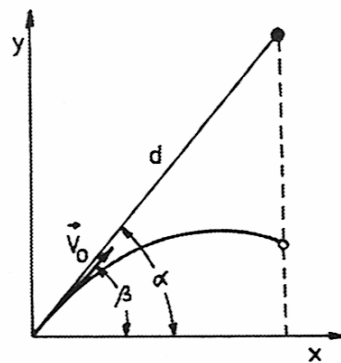
1.7. W momencie trafienia współrzędne jabłka i pocisku muszą być jednakowe (rys.6). Stąd

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$$

i

$$\alpha = \beta.$$

Zatem kąt wystrzału powinien być równy kątowi widzenia.



Rys.6

1.8. Przyjmując oznaczenia z rys.7 mamy

a.  $x = v_0 t \cos \alpha$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2;$$



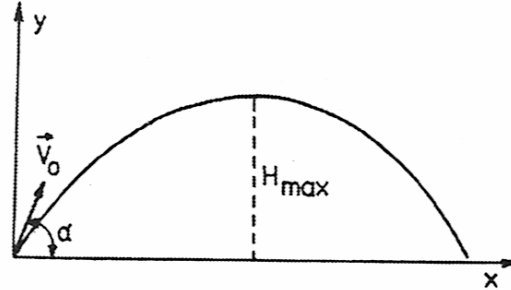
$$b. y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha};$$

c. Na płaszczyźnie wartość promienia krzywizny  $\rho$  wyraża się następującym wzorem:

$$\rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|},$$

gdzie kropkami oznaczono odpowiednie różniczkowania po czasie.

Korzystając z tego wzoru



Rys.7

$$\rho = \frac{1}{g v_0 \cos \alpha} \left[ v_0^2 \cos^2 \alpha + \left( v_0 \sin \alpha - \frac{gx}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 \right]^{3/2}.$$

W przypadku  $y = 0$  dostajemy dwie wartości na  $x$

$$x_1 = 0,$$

wtedy

$$\rho_1 = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha};$$

$$x_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g},$$

wtedy

$$\rho_2 = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha}.$$

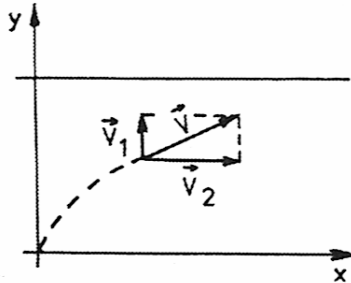
W przypadku  $y = H_{max}$

$$x_3 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g},$$

wtedy

$$\rho_3 = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}.$$

1.9. Układ współrzędnych wybieramy tak, aby oś  $x$  była równoległa, zaś oś  $y$  prostopadła do brzegów rzeki. Początek układu przyjmujemy w punkcie startu łódki.



Rys.8

a. Z rysunku mamy

$$v_x = v_2 = v_o \sin \frac{\pi y}{L},$$

$$v_y = v_1,$$

stąd

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_o^2 \sin^2 \frac{\pi y}{L}};$$

b.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = v_1 \frac{dx}{dy} = v_o \sin \frac{\pi y}{L}.$$

Wobec tego

$$dx = \frac{v_o}{v_1} \sin \frac{\pi y}{L} dy.$$

Całkując to równanie, przy warunkach początkowych

$$x(0) = y(0) = 0,$$

otrzymujemy równanie toru łódki

$$x = \frac{2 v_o L}{\pi v_1} \sin^2 \frac{\pi y}{2L}.$$

1.10. Przyjmujemy układ współrzędnych jak na rys.9. Wówczas w pierwszej połowie drogi wektor prędkości łódki będzie miał następujące składowe:

$$v_x = \frac{2 u}{L} y,$$

$$v_y = v$$

ale

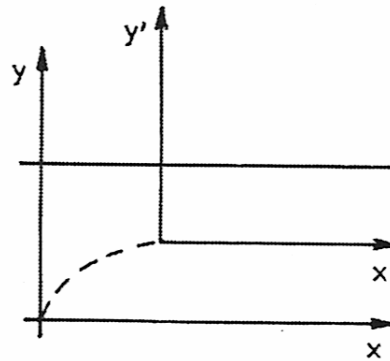
$$v_x = \frac{dx}{dt} = v \frac{dx}{dy},$$

stąd

$$v \frac{dx}{dy} = \frac{2u}{L} y.$$

Całkując otrzymane równanie różniczkowe metodą rozdzielania zmiennych, przy warunkach początkowych  $t = 0, x = 0, y = 0$ , dostajemy

$$\frac{1}{2} y^2 = \frac{vL}{2u} x.$$



Rys.9

Stąd równanie toru łodzi w pierwszej połowie drogi przybiera postać

$$y = \sqrt{\frac{vLx}{u}}.$$

Podstawiając do tego równania  $y = \frac{L}{2}$  otrzymamy odległość  $x_{01}$ , na jaką prąd zniesie łódź

$$x_{01} = \frac{uL}{4v}.$$

Obieramy teraz nowy układ współrzędnych ( $X' O' Y'$ ) z początkiem w tym punkcie, gdzie znajduje się łódź po przepłynięciu pierwszej połowy drogi (rys.9). Wektor prędkości łodzi ma teraz składowe

$$v_x' = u - \frac{2u}{L} y',$$

$$v_y' = v.$$

Postępując podobnie jak w przypadku poprzednim mamy

$$\frac{dx'}{dy'} = \frac{u}{v} - \frac{2u}{Lv} y'.$$

Po scałkowaniu tego równania, przy warunkach początkowych  $t = 0$ ,  $x' = 0$ ,  $y' = 0$ , otrzymujemy

$$x' = \frac{u}{v} y' - \frac{u}{Lv} y'^2,$$

skąd

$$y' = \frac{L}{2} - \sqrt{\frac{L^2}{4} - \frac{v x' L}{u}},$$

ale

$$x' = x - \frac{u L}{4 v}$$

$$y' = y - \frac{1}{2} L.$$

Wobec tego równanie toru łodzi w drugiej połowie drogi przybiera postać

$$y = L - \sqrt{\frac{L^2}{2} - \frac{v x L}{u}}.$$

Podstawiając do tego równania  $y = L$  otrzymamy odległość  $x_0$ , na jaką prąd znieśie łódź

$$x_0 = \frac{u L}{2v}.$$

Ostatecznie tor łodzi będzie złożeniem dwóch parabol

$$y = \sqrt{\frac{v x L}{u}} \quad \text{i} \quad y = L - \sqrt{\frac{L^2}{2} - \frac{v x L}{u}}.$$

1.11. Przyjmując układ współrzędnych jak na rys.10 otrzymujemy

a.

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_o,$$

skąd po scałkowaniu

$$y = v_o t.$$

Równanie toru

$$x = \frac{y^2}{2p},$$

skąd

$$x = \frac{v_o^2 t^2}{2p};$$

b.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{t v_o^2}{p},$$

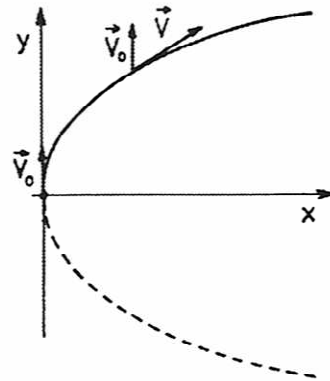
więc

$$\vec{v} = \frac{t v_o^2}{p} \vec{i} + v_o \vec{j},$$

$$v = v_o \sqrt{\frac{v_o^2 t^2}{p^2} + 1};$$

c. Wykonując odpowiednie różniczkowania znajdujemy wektor przyspieszenia i jego wartość

$$\vec{a} = \frac{v_o^2}{p} \vec{i}, \quad a = \frac{v_o^2}{p};$$



Rys.10

d.

$$a_t = \dot{v} = \frac{v_0^3 t}{p^2 \sqrt{\frac{v_0^2 t^2}{p^2} + 1}},$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{v_0^2}{\sqrt{v_0^2 t^2 + p^2}};$$

e.

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = p \left( 1 + \frac{v_0^2 t^2}{p^2} \right)^{3/2};$$

f. Ponieważ

$$\frac{v_0^2 t^2}{p^2} = \frac{y^2}{p^2} = \frac{2x}{p},$$

to

$$\rho = p \left( 1 + \frac{2x}{p} \right)^{3/2}.$$

W wierzchołku paraboli

$$x = 0,$$

skąd

$$\rho = p.$$

1.12. Tor punktu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Różniczkując równanie toru względem czasu otrzymujemy

$$\frac{2 x \dot{x}}{a^2} + \frac{2 y \dot{y}}{b^2} = 0,$$

stąd

$$\dot{y} = -\frac{x\dot{x}}{y} \frac{b^2}{a^2}.$$

Różniczkując po raz drugi mamy

$$\frac{1}{a^2} (\dot{x}^2 + x\ddot{x}) + \frac{1}{b^2} (\dot{y}^2 + y\ddot{y}) = 0.$$

Ponieważ  $\ddot{x} = 0$ , więc

$$\frac{1}{b^2} (\dot{y}^2 + y\ddot{y}) = -\frac{1}{a^2} \dot{x}^2.$$

Ostatecznie

$$\ddot{y} = -\frac{b^4}{a^2} \frac{\dot{x}}{y^3}.$$

### 1.13

a. Znajdziemy przyspieszenie ruchu różniczkując dane równanie dwukrotnie względem czasu. Otrzymujemy

$$2x\dot{x} = 2at + b,$$

stąd

$$\dot{x} = \frac{2at + b}{2x},$$

$$2x\dot{x}^2 + 2x\ddot{x} = 2a.$$

Przy uwzględnieniu wartości na  $\dot{x}$  i  $x^2$  mamy

$$\ddot{x} = \frac{4ac - b^2}{4x^3}.$$

Przyspieszenie jest więc odwrotnie proporcjonalne do trzeciej potęgi odległości punktu od początku układu.

b. Ruch jest jednostajny, gdy przyspieszenie jest równe zero, czyli gdy  $b^2 = 4ac$ . Wówczas stała prędkość wynosi

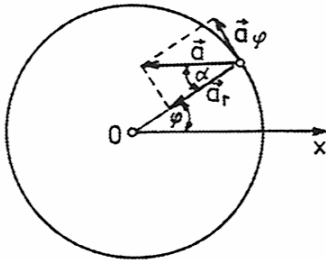
$$\dot{x} = \sqrt{a}.$$

## 1.14

a. Przyspieszenie punktu poruszającego się po okręgu wyraża się za pomocą współrzędnych biegunowych przez wektor

$$\vec{a} = a_r \vec{i}_r + a_\varphi \vec{i}_\varphi = -r\dot{\varphi}^2 \vec{i}_r + r\ddot{\varphi} \vec{i}_\varphi,$$

gdzie  $\vec{i}_r$  i  $\vec{i}_\varphi$  są wektorami jednostkowymi tego układu.



Rys.11

Z rys.11 widać, że

$$\frac{a_\varphi}{a_r} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Podstawiając do tego wzoru odpowiednie wartości na  $a_\varphi$  i  $a_r$ , otrzymujemy

$$-\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^2} = \operatorname{tg}\alpha,$$

co można też zapisać w postaci

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\dot{\varphi}} \right) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Po rozdzieleniu zmiennych i scałkowaniu mamy

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega_o}{1 + t \omega_o \operatorname{tg}\alpha}.$$

Całkując ponownie znajdujemy szukany kąt

$$\varphi = \operatorname{ctg}\alpha \ln |1 + t \omega_o \operatorname{tg}\alpha|.$$

Gdy  $\alpha = 0$ , prędkość kątowa  $\dot{\varphi} = \operatorname{const}$ , czyli ruch jest jednostajny. Gdy  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ , więc nie ma ruchu.

b.

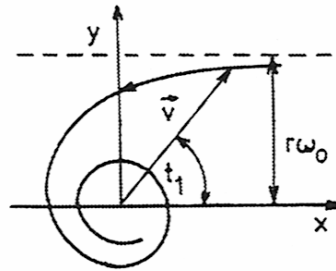
$$v = r \dot{\varphi} = \frac{r \omega_o}{t_1},$$

gdzie  $t_1 = 1 + t \omega_o \operatorname{tg}\alpha$ .



Wzór przedstawiający równanie hodo-  
grafu jest równaniem spirali hiperbolicznej.  
Jej asymptota znajduje się w odległości  
 $y = r\omega_0$  od osi  $x$  (rys.12), gdyż

$$\lim_{t_1 \rightarrow 0} y = \lim_{t_1 \rightarrow 0} v \sin t_1 = \lim_{t_1 \rightarrow 0} r\omega_0 \frac{\sin t_1}{t_1} = r\omega_0.$$



Rys.12

Zaznaczone na rys.12 współrzędne prostokątne  $x, y$  związane są z współrzędnymi  
biegunowymi  $v, t_1$  równaniami:  $x = v \cos t_1, y = v \sin t_1$ .

1.15. Różniczkując dane równanie dwukrotnie względem czasu otrzymujemy

$$2ax\dot{x} + b\dot{x} = 1,$$

stąd

$$\dot{x} = \frac{1}{2ax + b},$$

$$2ax^2 + 2ax\ddot{x} + b\ddot{x} = 0,$$

więc

$$\ddot{x} = -\frac{1}{4a^2x_1^3},$$

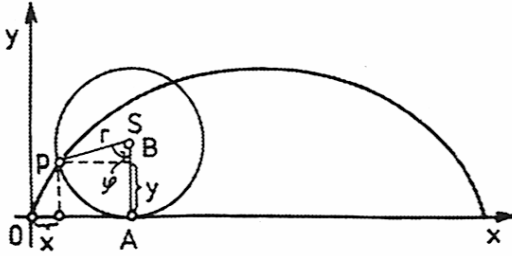
gdzie

$$x_1 = x + \frac{b}{2a}.$$

Stały punkt ma więc współrzędną

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

1.16. Niech w chwili początkowej punkt  $P$  pokrywa się z punktem styczności koła i prostej. Obieramy ten punkt za początek układu współrzędnych, zaś prostą za oś  $x$ . Gdy koło obróci się o kąt  $\varphi$ , to punkt styczności przesunie się do punktu  $A$ , przy czym  $OA = PA = r\varphi$ .



Rys.13

Jak wynika z rys.13, współrzędne  $x$  i  $y$  punktu  $P$  wynoszą

$$x = OA - PB = r(\varphi - \sin\varphi),$$

$$y = AS - BS = r(1 - \cos\varphi).$$

Krzywa określona tymi równaniami nazywa się cykloidą. Gdy koło wykona pełny obrót, punkt  $P$  staje się znowu punktem styczności, po czym ruch się powtarza. Wystarczy więc zbadać ruch dla

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

a. Według założenia prędkość obrotu koła jest stała

$$\dot{\varphi} = \omega = \text{const.}$$

Po scałkowaniu mamy

$$\varphi = \omega t.$$

Równania ruchu punktu  $P$  przyjmują wtedy postać

$$x = r(\omega t - \sin\omega t),$$

$$y = r(1 - \cos\omega t).$$

Różniczkując je dwukrotnie względem czasu otrzymujemy składowe prędkości i przyspieszenia

$$\dot{x} = r\omega(1 - \cos\omega t), \quad \dot{y} = r\omega \sin\omega t,$$

$$\ddot{x} = r\omega^2 \sin\omega t, \quad \ddot{y} = r\omega^2 \cos\omega t,$$

a stąd

$$v = 2r\omega \left| \sin \frac{\omega t}{2} \right|,$$

$$a = r\omega^2.$$

By obliczyć przyspieszenie normalne, należy wyznaczyć promień krzywizny, definiowany wzorem

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right|.$$

Wygodnie jest określać  $\rho$  za pomocą wektorów prędkości  $\vec{v}$  i przyspieszenia  $\vec{a}$ .

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\vec{v}}{v},$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left( \frac{\vec{v}}{v} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{v}}{v} \right) \frac{dt}{ds} = \frac{v \dot{\vec{v}} - \dot{v} \vec{v}}{v^3}.$$

Wstawiając do ostatniego wzoru odpowiednie wartości na  $v$  i  $\dot{v}$  oraz  $\vec{v}$  i  $\dot{\vec{v}}$  otrzymujemy

$$\frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} = \frac{\cos \frac{\omega t}{2} \vec{i} - \sin \frac{\omega t}{2} \vec{j}}{4 r \sin \frac{\omega t}{2}},$$

a stąd

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{4 r \sin \frac{\omega t}{2}}.$$

Tak więc

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = r \omega^2 \sin \frac{\omega t}{2},$$

$$a_s = \dot{v} = r \omega^2 \cos \frac{\omega t}{2}.$$

b. Nie znamy prędkości kątowej, wobec tego równania cykloidy przybierają postać

$$x = r (\varphi - \sin \varphi),$$

$$y = r (1 - \cos \varphi),$$

gdzie  $\varphi = \varphi(t)$  jest nieznaną funkcją czasu. Różniczkując te równania względem czasu otrzymujemy

$$\begin{aligned}\dot{x} &= r (1 - \cos\varphi) \dot{\varphi}, \\ \dot{y} &= r \dot{\varphi} \sin\varphi,\end{aligned}$$

a stąd

$$v = 2r \left| \sin \frac{\varphi}{2} \frac{d\varphi}{dt} \right|.$$

Ograniczając się do jednego obrotu możemy opuścić znak bezwzględności

$$v = 2r \sin \frac{\varphi}{2} \dot{\varphi}.$$

Pozwoli nam to składowe prędkości wyrazić w postaci

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \sin \frac{\varphi}{2}, \\ \dot{y} &= v \cos \frac{\varphi}{2}.\end{aligned}$$

Różniczkując składowe prędkości względem czasu i uwzględniając, że

$$\dot{\varphi} = \frac{v}{2r \sin \frac{\varphi}{2}},$$

otrzymujemy składowe przyspieszenia

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{v^2}{4r} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}, \\ \ddot{y} &= -\frac{v^2}{4r}\end{aligned}$$

i jego wartość

$$a = \frac{v^2}{4r \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Ponieważ  $v = \text{const}$ , istnieje tylko przyspieszenie normalne

$$a_n = \frac{v^2}{4r \sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{v^2}{\rho}.$$

Stąd

$$\rho = 4r \sin \frac{\varphi}{2}.$$

1.17. W biegunowym układzie współrzędnych wektory prędkości i przyspieszenia mają postać

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{r} \vec{i}_r + r\dot{\varphi} \vec{i}_\varphi, \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \vec{i}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \vec{i}_\varphi,\end{aligned}$$

gdzie wektor jednostkowy  $\vec{i}_r$  ma kierunek wektora wodzącego, a wektor jednostkowy  $\vec{i}_\varphi$  jest prostopadły do niego, o zwrocie zgodnym z przyrostem kąta  $\varphi$ . Wstawiając do tych wzorów odpowiednie wartości, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\vec{v} &= cr\vec{i}_r + br\vec{i}_\varphi, \\ \vec{a} &= (c^2 - b^2)r\vec{i}_r + 2bcr\vec{i}_\varphi.\end{aligned}$$

Kąt  $\alpha$  między tymi wektorami obliczamy za pomocą iloczynu skalarnego

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + b^2}}.$$

### 1.18

a)  $r = ct, \quad \varphi = bt.$

b)  $r = \frac{c}{b} \varphi.$

Jest to równanie spirali Archimedesesa.

c)  $v = c \sqrt{1 + b^2 t^2} = c \sqrt{1 + \varphi^2}.$

d)  $a = bc \sqrt{4 + b^2 t^2} = bc \sqrt{4 + \varphi^2}.$

$$e) a_s = \frac{b^2 ct}{\sqrt{1 + b^2 t^2}} = \frac{b^2 r}{\sqrt{1 + \varphi^2}}.$$

$$a_n = \frac{bc(b^2 t^2 + 2)}{\sqrt{1 + b^2 t^2}} = \frac{\varphi r(\varphi^2 + 2)}{t^2 \sqrt{1 + \varphi^2}}.$$

$$f) \rho = \frac{r(1 + \varphi^2)^{3/2}}{\varphi(2 + \varphi^2)}.$$

1.19. a. Przyjmując warunki początkowe

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0 \quad \text{i} \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0,$$

otrzymujemy

$$x = r \cos \varphi = bt^2,$$

$$y = r \sin \varphi = ct^2.$$

Stąd, po prostych przekształceniach, mamy:

$$r = t^2 \sqrt{b^2 + c^2},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{c}{b}.$$

b. Z definicji prędkości

$$v_r = \dot{r} = 2t \sqrt{b^2 + c^2},$$

$$v_\varphi = r\dot{\varphi} = 0,$$

skąd

$$v = 2t \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Z definicji przyspieszenia

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 2\sqrt{b^2 + c^2},$$

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0,$$

skąd

$$a = 2\sqrt{b^2 + c^2}.$$

1.20. Szukamy równania toru w biegunowym układzie współrzędnych (rys.14).

Z warunków zadania wynika, że w przyjętym układzie odniesienia

$$v_r = u,$$

gdzie  $u$  jest prędkością dźwięku. Ponieważ

$$v_\varphi = \sqrt{v^2 - v_r^2} = \sqrt{v^2 - u^2},$$

to

$$v_\varphi = \text{const},$$

a stosunek  $\frac{v_\varphi}{v_r}$  ma wartość stałą

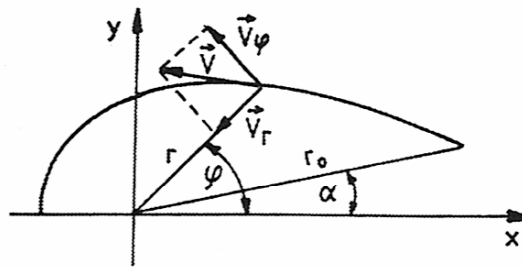
$$\frac{v_\varphi}{v_r} = \frac{\sqrt{v^2 - u^2}}{u}.$$

Korzystając z tego, iż  $v_\varphi = r\dot{\varphi}$  oraz  $v_r = -\dot{r}$ , otrzymujemy równanie różniczkowe:

$$-\frac{r\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{\sqrt{v^2 - u^2}}{u},$$

które można zapisać w innej postaci

$$\frac{\sqrt{v^2 - u^2}}{u} \frac{d}{dt} \ln r = -\frac{d}{dt} \varphi.$$



Rys.14

Rozwiązaniem ogólnym tego równania jest rodzina krzywych

$$\ln (Cr) = - \frac{\varphi u}{\sqrt{v^2 - u^2}},$$

z której wybieramy jedną, przechodzącą przez punkt początkowy o współrzędnych  $(r_0, \alpha)$ . Dla tej krzywej stała

$$C = \frac{1}{r_0} e^{-\frac{\alpha u}{\sqrt{v^2 - u^2}}}$$

Zatem szukany tor samolotu będzie dany wzorem

$$r = r_0 e^{\frac{(\alpha - \varphi)u}{\sqrt{v^2 - u^2}}}.$$

Współrzędne końca toru  $(r_k, \varphi_k)$  dane są równościami

$$r_k = r_0 e^{\frac{(\alpha - \pi)u}{\sqrt{v^2 - u^2}}},$$

$$\varphi_k = \pi.$$

### 1.21

$$\text{a) } v = \frac{ds}{dt} = c s_0 e^{ct},$$

$$\text{b) } a_t = \frac{dv}{dt} = c^2 s_0 e^{ct},$$

$$a_n = a_t \operatorname{tg} \alpha = c^2 s_0 e^{ct} \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\text{c) } \rho = \frac{v^2}{a_n} = s_0 \operatorname{ctg} \alpha.$$

Gdy  $\alpha = 0$ , wtedy  $a_n = 0$ , co odpowiada nieskończonemu promieniowi krzywizny, zatem mrówka porusza się po prostej.

### 1.22

$$r = c/\varphi, \quad \varphi = a + bt.$$

Dla  $t = 0$   $r(0) = c/a = r_0$

$$r = \frac{c}{a + bt} = \frac{r_0}{1 + \frac{bt}{a}}.$$



W przypadku  $b/a > 0$  punkt porusza się po spirali w kierunku do środka. Jest to ruch ograniczony w przestrzeni i trwający nieskończenie długo ( $r \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ ).

W przypadku  $b/a < 0$  punkt porusza się po spirali w kierunku na zewnątrz. Jest to ruch nieograniczony, ale czas ruchu jest skończony ( $r \rightarrow \infty$ , gdy  $t \rightarrow -a/b$ ).

W przypadku  $b > 0$  torem ruchu jest spirala prawoskrętna, w przypadku  $b < 0$  – spirala lewoskrętna.

1.23. Przyjmujemy współrzędne i oznaczenia jak na rys.15.

Układ biegunowy:

$$r = l,$$

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t,$$

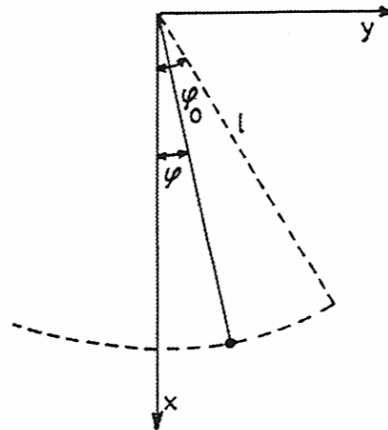
gdzie  $\omega$  – częstość drgań wahadła.

Prędkość:

$$v_r = \dot{r} = 0,$$

$$v_\varphi = r\dot{\varphi} = -l \varphi_0 \omega \sin \omega t,$$

$$v = l \varphi_0 \omega \sin \omega t.$$



Rys.15

Przyspieszenie:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -l \varphi_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t,$$

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = -l \varphi_0 \omega^2 \cos \omega t,$$

$$a = l \varphi_0 \omega^2 \sqrt{\cos^2 \omega t + \varphi_0^2 \sin^4 \omega t}.$$

Układ kartezjański:

$$x = r \cos \varphi = l \cos(\varphi_0 \cos \omega t),$$

$$y = r \sin \varphi = l \sin(\varphi_0 \cos \omega t),$$

Prędkość

$$\begin{aligned}v_x &= \dot{x} = l \varphi_o \omega \sin \omega t \sin(\varphi_o \cos \omega t), \\v_y &= \dot{y} = -l \varphi_o \omega \sin \omega t \cos(\varphi_o \cos \omega t), \\v &= l \varphi_o \omega \sin \omega t.\end{aligned}$$

Przyspieszenie

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{v^2}{l} = l \varphi_o \omega^2 \sin^2 \omega t, \\a_t &= \dot{v} = l \varphi_o \omega^2 \cos \omega t, \\a &= l \varphi_o \omega^2 \sqrt{\cos^2 \omega t + \varphi_o \sin^4 \omega t}.\end{aligned}$$

1.24

a)  $\vec{a}_c = 2\vec{v} \times \vec{\omega}$ ,

$$a_c = 2v \omega \sin \varphi = 2 \frac{s}{t} \omega \sin \varphi.$$

b)  $x = \frac{1}{2} a_c t^2 = st \omega \sin \varphi$ ,  
 $x \approx 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ [m]}.$

1.25. Zauważmy, że wektor prędkości kątowej Ziemi  $\vec{\omega}$  tworzy z kierunkiem pionu kąt  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ . Przyjmując prostokątny układ współrzędnych, którego oś  $x$  skierowana jest z zachodu na wschód, zaś oś  $z$  pionowo w dół otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2 v \omega \cos \varphi = 2 \omega g t \cos \varphi, \\ \ddot{z} &= g.\end{aligned}$$

Całkując te równania metodą rozdzielania zmiennych, przy warunkach początkowych:

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0 \quad \text{oraz} \quad z(0) = \dot{z}(0) = 0,$$

mamy

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \varphi, \\ z &= \frac{1}{2} g t^2.\end{aligned}$$

Eliminując z tych równań czas, dostajemy

$$x = \frac{2}{3} \omega z \cos\varphi \sqrt{\frac{2z}{g}} \approx 2,75 \cdot 10^{-2} [\text{m}].$$

1.26. Wprowadzamy współrzędne sferyczne (rys.16)

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r \cos\vartheta.$$

Wtedy ruch punktu w przestrzeni w dowolnej chwili  $t$  określić możemy za pomocą trzech równań:

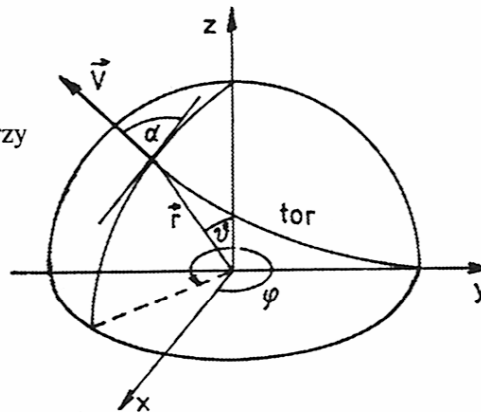
$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad \vartheta = \vartheta(t).$$

Wektor prędkości  $\vec{v}$  rozkładamy na trzy składowe  $\vec{v}_r$ ,  $\vec{v}_\varphi$ ,  $\vec{v}_\vartheta$ , o współrzędnych:

$$v_r = v_x \cos\varphi \sin\vartheta + v_y \sin\varphi \sin\vartheta + v_z \cos\vartheta = \dot{r},$$

$$v_\varphi = -v_x \sin\varphi + v_y \cos\varphi = r\dot{\varphi} \sin\vartheta,$$

$$v_\vartheta = -v_x \cos\varphi \cos\vartheta - v_y \sin\varphi \cos\vartheta - v_z \sin\vartheta = r\dot{\vartheta}.$$



Rys.16

Z warunków zadania wynika, że

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = R\dot{\varphi} \sin\vartheta, \quad v_\vartheta = -R\dot{\vartheta},$$

$$\left| \frac{v_\vartheta}{v_\varphi} \right| = \text{ctg}\alpha.$$

Stąd

$$-R \frac{d\vartheta}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} \sin\vartheta \text{ctg}\alpha.$$

Po rozdzieleniu zmiennych i przeliczowaniu mamy ostatecznie:

$$\text{tg} \frac{\vartheta}{2} = e^{-\varphi \text{ctg}\alpha}.$$

Jest to równanie loksodromy. Obliczymy jej długość.

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

Korzystając z wzorów definiujących układ sferyczny, znajdujemy

$$dx = \frac{\partial x}{\partial R} dR + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \vartheta} d\vartheta = -R \sin\vartheta \sin\varphi d\varphi + R \cos\vartheta \cos\varphi d\vartheta,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial R} dR + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \vartheta} d\vartheta = R \sin\vartheta \cos\varphi d\varphi + R \cos\vartheta \sin\varphi d\vartheta,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial R} dR + \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} d\vartheta = -R \sin\vartheta d\vartheta.$$

Po wstawieniu tych wyrażeń do wzoru na  $ds$  otrzymujemy

$$ds = R d\vartheta \sqrt{1 + \sin^2\vartheta \left(\frac{d\varphi}{d\vartheta}\right)^2}.$$

Z poprzednich rozważań mamy

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\vartheta},$$

a więc

$$ds = \frac{R}{\cos\alpha} d\vartheta.$$

Po scałkowaniu w granicach od 0 do  $\frac{\pi}{2}$

$$s = \frac{\pi R}{2 \cos\alpha}.$$

Czas przebiegu

$$t_p = \frac{s}{v} = \frac{\pi R}{2v \cos\alpha}.$$

## 2. DYNAMIKA

2.1. Siła hamująca jest liniową funkcją prędkości tzn.  $F = av + b$ . Szukaną wartość początkową siły hamującej  $F_p$  otrzymujemy, podstawiając do tego wzoru  $v = v_o$ . Wtedy

$$F_p = av_o + b,$$

gdzie nieznane są współczynniki  $a$  i  $b$ . Znajdujemy je z warunków zadania. Wartość siły w momencie zatrzymania ( $v = 0$ )

$$F_k = b = \frac{F_p}{2},$$

skąd

$$b = av_o.$$

Ponieważ prędkość  $v$  ciała i siła hamująca mają ten sam kierunek, lecz przeciwne zwroty, to równanie ruchu dla hamowania ma postać

$$m \frac{dv}{dt} = -a(v + v_o).$$

Z kolei uwzględniając, że  $dt = \frac{ds}{v}$ , powyższe równanie możemy doprowadzić do postaci

$$mv \frac{dv}{ds} = -a(v + v_o),$$

czyli

$$- \frac{mv dv}{a(v + v_o)} = ds.$$

Całkując to równanie w granicach od  $v_o$  (początek hamowania) do 0 (zatrzymanie ciała), otrzymujemy

$$\frac{m v_o}{a} (1 - \ln 2) = s_o,$$

stąd

$$a = \frac{mv_o}{s_o} (1 - \ln 2).$$

Na siłę hamującą  $F_p$ , działającą w chwili początkowej, otrzymujemy więc wyrażenie

$$F_p = \frac{2mv_o^2}{s_o} (1 - \ln 2).$$

2.2. Równanie ruchu samochodu przybiera postać

$$m \frac{dv}{dt} = -kv^2.$$

Całkując to równanie metodą rozdzielania zmiennych, przy warunkach początkowych:  $v(0) = v_o$ ,  $x(0) = 0$ , otrzymujemy

$$v = \frac{mv_o}{k v_o t + m},$$

$$x = \frac{m}{k} \ln \frac{k v_o t + m}{m}.$$

Stąd znajdziemy czas  $t_1$ , po którym prędkość samochodu zmaleje do połowy,  $t_1 = \frac{m}{v_o k}$ , i odpowiadającą mu drogę

$$x(t_1) = \frac{m}{k} \ln 2.$$

2.3. Niech oś  $x$  będzie skierowana do góry. Wtedy siła ciężkości ma zwrot przeciwny niż oś, tak że  $F_1 = -mg$ ; wektor prędkości ma taki sam zwrot jak siła ciężkości, a siła hamująca jest skierowana zgodnie z osią, tj.  $F_2 = mkv$ , gdzie  $k$  jest stałą dodatnią. Zatem równanie ruchu przybiera postać

$$\frac{dv}{dt} = -(g - kv).$$

Całkując je dwukrotnie metodą rozdzielania zmiennych, przy warunkach początkowych:  $v(0) = 0$ ,  $x(0) = h$ , otrzymujemy

$$x(t) = h + \frac{g}{k} t + \frac{g}{k^2} (1 - e^{kt}).$$

Gdy opór ośrodka jest bardzo mały, wówczas funkcję  $f = 1 - e^{kt}$  można rozwinąć w szereg Maclaurina.

$$\begin{aligned} f(t) &\approx f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) t + \frac{1}{2!} f''(0) t^2 + \frac{1}{3!} f'''(0) t^3 + \dots = \\ &= -kt - \frac{1}{2} k^2 t^2 - \frac{1}{6} k^3 t^3 + \dots \end{aligned}$$

Biorąc cztery początkowe wyrazy rozwinięcia i wstawiając do wzoru na drogę, dostajemy przybliżone wyrażenie na  $x(t)$

$$x(t) \approx h - \frac{1}{2} g t^2 - \frac{1}{6} g k t^3.$$

2.4. Cząstka naładowana porusza się w zadanym polu zgodnie z równaniem ruchu

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = q E_o \sin \omega t.$$

a. Przy podanych warunkach początkowych otrzymujemy

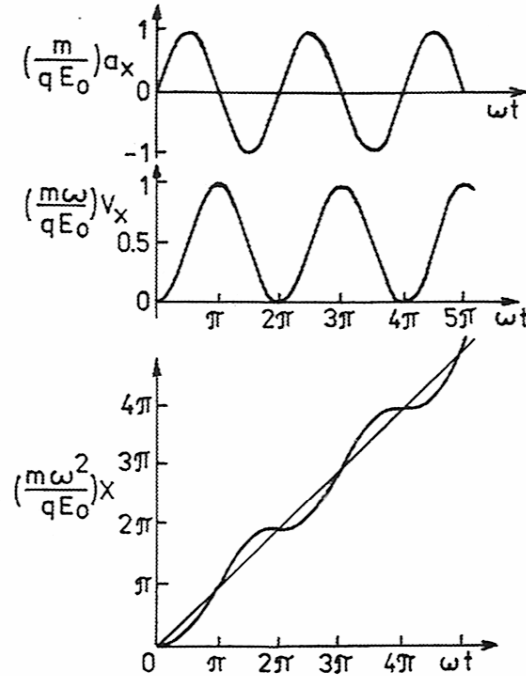
$$\begin{aligned} v_x(t) &= \frac{q E_o}{m \omega} (1 - \cos \omega t), \\ x(t) &= -\frac{q E_o}{m \omega^2} \sin \omega t + \frac{q E_o}{m \omega} t. \end{aligned}$$

Rozwiązania powyższe przedstawiono na rys.17.

b. Podstawiamy rozwiązanie próbne  $x(t) = x_1 \sin \omega t + v_o t + x_o$  do równania ruchu. Równanie to będzie spełnione, gdy

$$x_o = 0, \quad x_1 = -\frac{q E_o}{m \omega^2}, \quad v_o = \frac{q E_o}{m \omega}.$$

Przy warunku granicznym, że  $v_x = 0$  dla  $t = 0$ , ruch składa się z oscylacji, która nakłada się na przesunięcie ze stałą prędkością  $\frac{q E_0}{m\omega}$ .



Rys.17

2.5. Siła  $\vec{F} = k\vec{r}$  jest siłą centralną, zatem tor ciała jest zawsze krzywą płaską. Przyjmijmy, że płaszczyzna toru jest równocześnie płaszczyzną  $(x, y)$  kartezjańskiego układu współrzędnych. Zamiast rozwiązywać układ równań różniczkowych

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k}{m} x, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{k}{m} y, \end{array} \right.$$

z warunkami początkowymi



$$x(0) = x_0, \quad y(0) = 0,$$

$$\dot{x}(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0,$$

możemy rozwiązać jedno równanie różniczkowe na płaszczyźnie zespolonej  $z = x + iy$ , postaci

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{k}{m} z,$$

z warunkami początkowymi

$$z(0) = x_0,$$

$$\dot{z}(0) = i v_0.$$

Rozwiązaniem ogólnym tego równania jest funkcja

$$z(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t},$$

gdzie  $r_1$  i  $r_2$  są pierwiastkami równania charakterystycznego

$$r^2 - \frac{k}{m} = 0.$$

W zależności od wartości stałej  $k$  rozwiązania równania charakterystycznego są rzeczywiste bądź zespolone.

Dla  $k > 0$ :

$$r_1 = \frac{k}{m}, \quad r_2 = -\frac{k}{m},$$

stąd

$$z(t) = C_1 e^{\frac{k}{m} t} + C_2 e^{-\frac{k}{m} t}.$$

Z warunków początkowych

$$x_0 = C_1 + C_2,$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} (C_1 - C_2),$$

stąd

$$C_1 = \frac{x_o + i v_o \sqrt{\frac{m}{k}}}{2},$$

$$C_2 = \frac{x_o - i v_o \sqrt{\frac{m}{k}}}{2}.$$

Wobec tego rozwiązanie szczególne równania różniczkowego jest wyrażone wzorem:

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{x_o}{2} \left( e^{\sqrt{\frac{k}{m}}t} + e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t} \right) + i \frac{v_o \sqrt{\frac{m}{k}}}{2} \left( e^{\sqrt{\frac{k}{m}}t} - e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t} \right) = \\ &= x_o \cosh \sqrt{\frac{k}{m}} t + i v_o \sqrt{\frac{m}{k}} \sinh \sqrt{\frac{k}{m}} t, \end{aligned}$$

Zatem rozważane ciało porusza się po hiperboli o równaniu parametrycznym

$$\begin{cases} x(t) = x_o \cosh \sqrt{\frac{k}{m}} t, \\ y(t) = v_o \sqrt{\frac{m}{k}} \sinh \sqrt{\frac{k}{m}} t \end{cases}$$

dla  $t \geq 0$ , które – po wyeliminowaniu czasu – można zapisać w postaci ogólnej

$$\frac{x^2}{x_o^2} - \frac{y^2}{\left(v_o \sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2} = 1.$$

Dla  $k < 0$  równanie charakterystyczne ma dwa rozwiązania zespolone

$$r_1 = i \sqrt{\frac{|k|}{m}}, \quad r_2 = -i \sqrt{\frac{|k|}{m}}.$$

Otrzymujemy zatem rozwiązanie ogólne postaci

$$\begin{aligned} z(t) &= C_1 e^{i\sqrt{\frac{|k|}{m}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{|k|}{m}}t} = \\ &= (C_1 + C_2) \cos \sqrt{\frac{|k|}{m}} t + i (C_1 - C_2) \sin \sqrt{\frac{|k|}{m}} t. \end{aligned}$$

Z warunków początkowych wynika, że

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} \left( x_0 + v_0 \sqrt{\frac{m}{|k|}} \right), \\ C_2 &= \frac{1}{2} \left( x_0 - v_0 \sqrt{\frac{m}{|k|}} \right), \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy rozwiązanie szczególne równania różniczkowego

$$z(t) = x_0 \cos \sqrt{\frac{|k|}{m}} t + i v_0 \sqrt{\frac{m}{|k|}} \sin \sqrt{\frac{|k|}{m}} t.$$

Jest to równanie elipsy, które możemy zapisać w postaci parametrycznej

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos \sqrt{\frac{|k|}{m}} t, \\ y(t) = v_0 \sqrt{\frac{m}{|k|}} \sin \sqrt{\frac{|k|}{m}} t \end{cases}$$

dla  $t \geq 0$ , bądź w postaci ogólnej

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{\left( v_0 \sqrt{\frac{m}{|k|}} \right)^2} = 1.$$

Sprawdzając warunek

$$\text{rot } \vec{F} = 0,$$

łatwo wykazać, że rozpatrywane pole jest zachowawcze.

2.6. W pierwszym okresie ruchu na ciało działa siła  $F$  zgodna z kierunkiem ruchu i siła tarcia skierowana przeciwnie. Równanie ruchu ma postać

$$m \frac{dv}{dt} = F - \mu mg.$$

Przy warunkach początkowych:  $v(0) = 0$ ,  $x(0) = 0$ , otrzymujemy

$$v(t) = \frac{Ft}{m} - \mu gt,$$

$$x(t) = \frac{Ft^2}{2m} - \frac{\mu gt^2}{2}.$$

Warunki początkowe dla drugiej części ruchu dostajemy podstawiając w tych wzorach czas  $t = t_1$

$$v(t_1) = \frac{Ft_1}{m} - \mu gt_1,$$

$$x(t_1) = \frac{Ft_1^2}{2m} - \frac{\mu gt_1^2}{2}.$$

W drugim okresie ruchu na ciało działa jedynie siła tarcia. Równanie ruchu przybiera wtedy postać

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu mg,$$

skąd

$$v(t) = -\mu gt + \frac{Ft_1}{m},$$

$$x(t) = -\frac{\mu gt^2}{2} + \frac{Ft_1 t}{m} - \frac{Ft_1^2}{2m}.$$

Ciało zatrzymuje się w chwili  $t_2$  i wtedy  $v = 0$ , czyli

$$0 = -\mu gt_2 + \frac{Ft_1}{m},$$

stąd

$$t_2 = \frac{Ft_1}{\mu mg}.$$

Droga  $s$ , którą przebędzie ciało do momentu zatrzymania się jest równa

$$s = x(t_2) = \frac{Ft_1^2}{2m} \left( \frac{F}{\mu mg} - 1 \right).$$

**2.7.** Siła działa w kierunku ruchu. Równanie różniczkowe ruchu ciała przybiera postać

$$m \frac{dv}{dt} = b (t_o - t),$$

stąd

$$dv = \frac{b}{m} (t_o - t) dt.$$

Po dwukrotnym scałkowaniu równania przy zadanych warunkach początkowych, wyznaczeniu czasu ruchu  $t_1$  z warunku  $v(t_1) = 0$ , dostajemy:

$$t_1 = t_o + \sqrt{t_o^2 + \frac{2mv_o}{b}},$$

$$s = x(t_1) = \frac{1}{3} \sqrt{t_o^2 + \frac{2mv_o}{b}} \left( 2v_o + \frac{bt_o^2}{m} \right) + \frac{bt_o^3}{3m} + v_o t_o.$$

**2.8.** Przyjmujemy oś  $x$  skierowaną w kierunku ruchu kamienia. Ruch kamienia w powietrzu jest opisany równaniem

$$m \frac{dv}{dt} = mg,$$

z warunkami początkowymi

$$x(0) = 0,$$

$$v(0) = v_o.$$

Całkując to równanie otrzymujemy znane wzory dla spadku swobodnego

$$\begin{aligned}
 a &= g, \\
 v &= v_0 + gt, \\
 x &= v_0 t + \frac{gt^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Warunki początkowe dla drugiej części ruchu znajdujemy podstawiając w tych wzorach  $x = d$ . Wtedy

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gd} - v_0}{g}, \\
 v(t_1) &= v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gd}, \\
 x(t_1) &= x_1 = d.
 \end{aligned}$$

Ruch kamienia w wodzie jest opisany równaniem

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv.$$

Po rozdzieleniu zmiennych w tym równaniu i scałkowaniu z uwzględnieniem warunków początkowych dla ruchu kamienia w wodzie otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{mg}{k} + \left( v_1 - \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k(t-t_1)}{m}}, \\
 x &= \frac{mg}{k} (t - t_1) + \frac{m}{k} \left( v_1 - \frac{mg}{k} \right) \left( 1 - e^{-\frac{k(t-t_1)}{m}} \right) + d.
 \end{aligned}$$

Zatem szukane zależności położenia, prędkości i przyspieszenia od czasu są następujące:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{v_0 t + gt^2}{2}, & \text{dla } t \leq t_1, \\ \frac{mg}{k} (t - t_1) + \frac{m}{k} \left( v_1 - \frac{mg}{k} \right) \left( 1 - e^{-\frac{k(t-t_1)}{m}} \right) + d, & \text{dla } t > t_1, \end{cases}$$

$$v(t) = \begin{cases} v_0 + gt, & \text{dla } t \leq t_1, \\ \frac{mg}{k} + \left(v_1 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k(t-t_1)}{m}}, & \text{dla } t > t_1, \end{cases}$$

$$a(t) = \begin{cases} g, & \text{dla } t \leq t_1, \\ \left(g - \frac{k}{m} v_1\right) e^{-\frac{k(t-t_1)}{m}}, & \text{dla } t > t_1, \end{cases}$$

## 2.9

a. Oscylatorem harmonicznym nietłumionym nazywamy punkt materialny wykonujący ruch pod wpływem siły sprężystej (typu Hooke'a) tzn. proporcjonalnej do wychylenia od stanu równowagi i skierowanej do położenia równowagi. Równanie Newtona takiego oscylatora w przypadku jednowymiarowym ma postać

$$m\ddot{x} = -kx,$$

gdzie  $k$  jest dodatnim współczynnikiem proporcjonalności (stałą sprężystości). Dokonując standardowego podstawienia  $\omega^2 = \frac{k}{m}$  dostajemy równanie różniczkowe drugiego rzędu, liniowe jednorodne

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Całki ogólnej tego równania szukamy w postaci  $x = e^{rt}$ . Z równania charakterystycznego mamy dwa rozwiązania

$$r = \pm i\omega,$$

zatem całka ogólna przybiera postać

$$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}.$$

Stale  $C_1$  i  $C_2$  wyznaczamy z warunków początkowych:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Stąd

$$C_1 = \frac{\dot{x}_0}{2i\omega}, \quad C_2 = -\frac{\dot{x}_0}{2i\omega},$$

a

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \left( \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \right) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin\omega t.$$

W polu sił Hooke'a ciało drga sinusoidalnie wokół położenia równowagi. Okres tych drgań znajdziemy z warunku

$$\omega T = 2\pi$$

stąd

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

b. O oscylatorze harmonicznym tłumionym mówimy wówczas, gdy oprócz siły typu Hooke'a  $F_1 = -kx$  istnieje siła  $F_2$  tłumiąca ruch. Na ogół zakłada się, że siła tłumiąca jest proporcjonalna do prędkości lub kwadratu prędkości i skierowana przeciwnie do kierunku ruchu.

Rozpatrzmy ruch jednowymiarowy w ośrodku lepkiem, gdzie  $F_2 = -b\dot{x}$  ( $b$  – stała dodatnia). Równanie Newtona przyjmuje wtedy postać

$$\ddot{x} + 2\sigma \dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

gdzie dokonano standardowych podstawień

$$\frac{b}{m} = 2\sigma, \quad \frac{k}{m} = \omega^2.$$

Jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu, liniowe jednorodne. Rozwiązując je, podobnie jak równanie oscylatora harmonicznego nietłumionego, mamy

$$x = e^{-\sigma t} (C_1 e^{\sqrt{\sigma^2 - \omega^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\sigma^2 - \omega^2} t}).$$

Przyjmując warunki początkowe

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$



dostajemy

$$C_1 = \frac{\dot{x}_0}{2\sqrt{\sigma^2 - \omega^2}}, \quad C_2 = -\frac{\dot{x}_0}{2\sqrt{\sigma^2 - \omega^2}}.$$

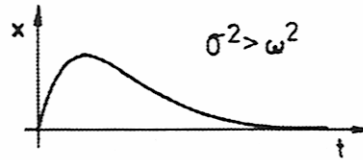
Rozwiązanie ogólne równania ruchu przybiera więc postać

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\sigma^2 - \omega^2}} e^{-\sigma t} \left( \frac{e^{\sqrt{\sigma^2 - \omega^2} t} - e^{-\sqrt{\sigma^2 - \omega^2} t}}{2} \right),$$

lub inaczej

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\sigma^2 - \omega^2}} e^{-\sigma t} \sinh(\sqrt{\sigma^2 - \omega^2} t).$$

Zauważmy, że w zależności od tego czy  $\sigma^2 - \omega^2 > 0$  (tzw. przypadek aperiodyczny), czy  $\sigma^2 - \omega^2 < 0$  (tzw. przypadek periodyczny), pierwiastek  $\sqrt{\sigma^2 - \omega^2}$  przybiera odpowiednio wartość rzeczywistą lub urojoną. W pierwszym przypadku, odpowiadającemu dużemu oporowi ośrodka, następuje tylko jednorazowe wychylenie z położenia równowagi (rys.18). Ruch taki nazywamy pełzającym.



Przy małej lepkości ośrodka, tzn. gdy  $\sigma^2 < \omega^2$

Rys.18

$$\sqrt{\sigma^2 - \omega^2} = i \sqrt{\omega^2 - \sigma^2}.$$

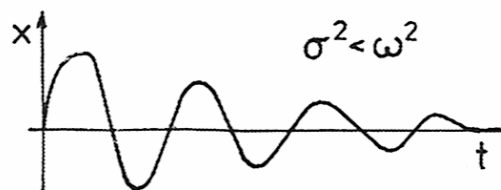
Wtedy rozwiązanie równania ruchu można przepisać jeszcze raz w formie

$$x = A \left( \frac{e^{it\sqrt{\omega^2 - \sigma^2}} - e^{-it\sqrt{\omega^2 - \sigma^2}}}{2i} \right) = A \sin(t \sqrt{\omega^2 - \sigma^2}),$$

gdzie:

$$A = \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\omega^2 - \sigma^2}} e^{-\sigma t},$$

przedstawia malejącą wykładniczo amplitudę ruchu (rys.19).



Rys.19

**2.10**

a. Dodatkowa masa wody, zwiększająca masę kropli, nie ma prędkości (spoczywa w układzie inercyjnym), wobec tego równanie ruchu przybiera postać

$$\frac{d}{dt} (m\vec{v}) = m\vec{g}.$$

Przyjmując prostą pionową, skierowaną w dół, jako oś ruchu i korzystając z tego, że w pewnej chwili czasu masa kropli

$$m = \frac{4}{3} \pi \rho r^3,$$

można równanie ruchu napisać w postaci

$$\frac{d}{dt} (r^3 v) = r^3 g,$$

gdzie promień kropli  $r$  jest nieznaną funkcją czasu. Wiadomo jednak, że przyrost masy

$$dm = \alpha 4\pi \rho r^2 dt.$$

Z drugiej strony

$$dm = 4\pi \rho r^2 dr.$$

Z porównania tych dwu relacji wynika, że

$$dr = \alpha dt,$$

co pozwala zapisać równanie ruchu w postaci

$$\alpha d(r^3 v) = gr^3 dr,$$

umożliwiającej całkowanie. Uwzględniając warunki początkowe znajdujemy stąd:

$$v = \frac{gr}{4\alpha} + \frac{r_o^3}{r^3} \left( v_o - \frac{gr_o}{4\alpha} \right),$$

$$z = \frac{gr^2}{8\alpha^2} + \frac{r_o^3}{r^2} \left( \frac{gr_o}{8\alpha^2} - \frac{v_o}{2\alpha} \right) + \frac{r_o v_o}{2\alpha} - \frac{gr_o^2}{4\alpha^2}.$$

Podstawiając

$$r = r_o + \alpha t$$

otrzymujemy szukane zależności:

$$v = v(t), \quad z = z(t).$$

b. Jeśli  $r_o = 0$ , to

$$v = \frac{gr}{4\alpha},$$

$$z = \frac{gr^2}{8\alpha^2}.$$

Ponieważ  $r = \alpha t$ , to:

$$v = \frac{1}{4} gt,$$

$$z = \frac{1}{8} gt^2.$$

W przypadku gdy  $v_o = 0$ , otrzymujemy:

$$v = \frac{gr}{4\alpha} \left( 1 - \frac{r_o^4}{r^4} \right),$$

$$z = \frac{gr^2}{8\alpha^2} + \frac{gr_o^4}{8\alpha^2 r^2} - \frac{gr_o^2}{4\alpha^2},$$

gdzie:

$$r = r_o + \alpha t.$$

2.11. Przy ruchu sznura masa przybywająca ma tę samą prędkość co masa spadająca. Jeśli więc za zmienną  $x$  przyjmiemy długość części sznura zwisającej swobodnie, to równanie ruchu przybiera postać

$$m \frac{dv}{dt} = m_x g,$$

gdzie  $m$  jest masą całego sznura, a  $m_x$  – masą części zwisającej. Uwzględniając, że długość sznura jest wprost proporcjonalna do jego masy, otrzymujemy

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{l} x.$$

Podstawiając w tym równaniu

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

i całkując je przy zadanych warunkach początkowych znajdujemy

$$v = \sqrt{\frac{g}{l} (x^2 - x_o^2)}.$$

Stąd

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - x_o^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} dt.$$

Po scałkowaniu tego równania uzyskujemy zależność długości zwisającej części sznura od czasu w postaci

$$x = x_0 \cosh \left( t \sqrt{\frac{g}{l}} \right).$$

2.12. Obieramy oś  $z$  skierowaną pionowo w górę jako oś ruchu. Równanie ruchu rakiety przybiera wówczas postać

$$m \frac{dv}{dt} = -c \frac{dm}{dt} - mg.$$

Stąd przyspieszenie rakiety

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{c}{m} \frac{dm}{dt} - g.$$

Ponieważ przyspieszenie rakiety ma być stałe, możemy wyrazić je jako wielokrotność  $g$

$$\frac{dv}{dt} = kg,$$

skąd znajdujemy

$$v = kgt$$

oraz wysokość  $z$

$$z = \frac{1}{2} kgt^2.$$

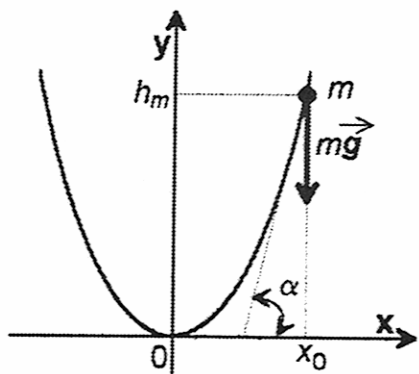
Dla znalezienia zależności masy rakiety od czasu całkujemy równanie

$$-\frac{c}{m} \frac{dm}{dt} - g = kg,$$

skąd

$$m = m_0 \exp \left[ -g \left( \frac{1+k}{c} \right) t \right].$$

2.13. Z rysunku 20 wynika, że warunkiem spoczynku punktu jest



Rys.20

$$mg \sin \alpha \leq mgf \cos \alpha$$

Stąd w przypadku granicznym

$$\operatorname{tg} \alpha = f.$$

Maksymalna wysokość, na której punkt będzie pozostawał w spoczynku

$$h_m = y(x_0) = ax_0^2;$$

$x_0$  znajdujemy z warunku

$$\operatorname{tg} \alpha = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = 2ax_0,$$

skąd

$$x_0 = \frac{f}{2a}$$

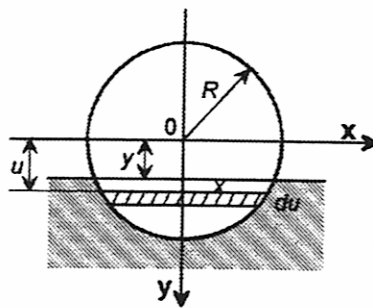
i ostatecznie

$$h_m = \frac{f^2}{4a}.$$

2.14. Uwzględniając oznaczenia przyjęte na rys.21 oraz prawo Archimedes, mamy

$$W = \int_0^R F_y dy = \int_0^R (G - V(y) \rho g) dy,$$

gdzie  $G$  jest ciężarem kuli, a  $V(y)$  oznacza zmieniającą się objętość tej części kuli, która jest zanurzona w cieczy. Objętość ta jest funkcją współrzędnej  $y$ , określającej poziom cieczy względem układu odniesienia związanego ze środkiem kuli i można ją wyrazić wzorem:



Rys.21

$$V(y) = \pi \int_y^R x^2 du = \pi \int_y^R (R^2 - u^2) du = \frac{2}{3} \pi R^3 - \pi R^2 y + \frac{1}{3} \pi y^3$$

( $x^2$  wyznaczyliśmy z równania okręgu  $x^2 + u^2 = R^2$ ).

Podstawiając otrzymane wyrażenie na  $V(y)$  do wzoru na pracę, znajdujemy

$$W = GR - \frac{1}{4} \pi \rho g R^4.$$

Z treści zadania wiemy, że

$$G = \frac{2}{3} \pi \rho g R^3$$

(warunek pływania), zatem szukaną pracę możemy wyrazić wzorem

$$W = \frac{5}{12} \pi \rho g R^4.$$

2.15. Korzystając z wyprowadzonego w poprzednim zadaniu wzoru na zmieniającą się objętość części kuli zanurzonej w cieczy, mamy

$$W = \int_{-R}^R F_y dy = \int_{-R}^R [G - V(y) \gamma_w] dy = \frac{4}{3} \pi R^4 (2\gamma_k - \gamma_w),$$

gdzie  $\gamma_w$  jest ciężarem właściwym wody.

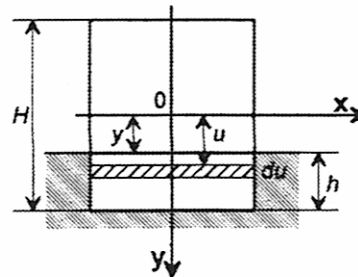
2.16. Prostokątny układ współrzędnych wiążemy ze środkiem masy (ciężkości) walca (rys.22)

a. Początkową wysokość części zanurzonej walca  $h$  znajdujemy z warunku pływania:

$$Sh\gamma_w = SH\gamma_d,$$

gdzie  $\gamma_w$  jest ciężarem właściwym wody. Stąd

$$h = H \frac{\gamma_d}{\gamma_w}.$$



Rys.22

Zmieniającą się objętość części zanurzonej walca obliczymy jako funkcję dolnej granicy całkowania ze wzoru:

$$V(y) = S \int_y^{\frac{H}{2}} du = S \left( \frac{H}{2} - y \right).$$

Szukaną pracę możemy wtedy wyrazić wzorem:

$$W = \int_{\frac{H}{2}-h}^{\frac{H}{2}} [SH\gamma_d - V(y)\gamma_w] dy = \frac{SH^2\gamma_d^2}{2\gamma_w}.$$

b. Praca potrzebna do całkowitego zanurzenia pływaka jest równa

$$W = \int_{\frac{H}{2}-h}^{-\frac{H}{2}} [SH\gamma_d - V(y)\gamma_w] dy = \frac{1}{2} \gamma_w SH^2 (1 - \gamma_d)^2.$$

2.17. Z warunków zadania wynika, że masa kropli  $M$  zależy od czasu wg wzoru

$$M(t) = M_o - mt,$$

gdzie  $m$  jest prędkością ubytku masy.

Czas ruchu  $t_k$  znajdujemy z warunku

$$M_o - mt_k = 0,$$

skąd

$$t_k = \frac{M_o}{m}.$$



Czasowi ruchu  $t_k$  odpowiada droga

$$x_k = \frac{1}{2} g t_k^2 = \frac{1}{2} g \frac{M_o^2}{m^2}.$$

Praca siły ciężkości jest więc równa

$$W = \int_0^{x_k} F(x) dx = g \int_0^{\frac{1}{2} g \frac{M_o^2}{m^2}} \left( M_o - m \sqrt{\frac{2x}{g}} \right) dx = \frac{M^3 g^2}{6m^2}.$$

2.18. Przyjmując oznaczenia z rys.23 mamy

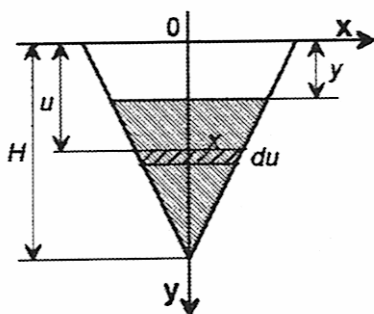
$$V(y) = \pi \int_y^H x^2 du = \frac{\pi R^2}{3H^2} (H - y)^3,$$

gdzie  $x$  wyznaczono z proporcji

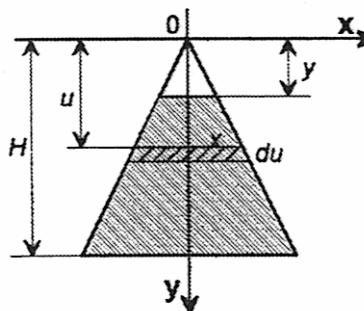
$$\frac{H - u}{x} = \frac{H}{R}.$$

Wtedy praca zużyta na pokonanie siły ciężkości

$$W = g\rho \int_0^H V(y) dy = \frac{g\rho\pi R^2}{3H^2} \int_0^H (H - y)^3 dy = \frac{1}{12} \pi g\rho R^2 H^2.$$



Rys.23



Rys.24

Przypadek stożka zwróconego wierzchołkiem ku górze przedstawiono na rys.24. Mamy więc

$$\frac{u}{x} = \frac{H}{R},$$

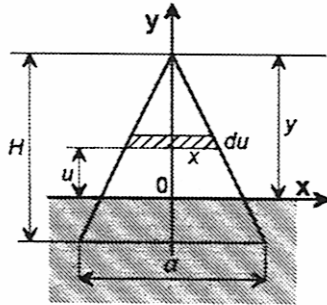
a

$$V(y) = \pi \int_y^H x^2 du = \frac{1}{3} \pi H R^2 \left( 1 - \frac{y^3}{H^3} \right).$$

Wtedy

$$W = \frac{1}{3} \pi g \rho H R^2 \int_0^H \left( 1 - \frac{y^3}{H^3} \right) dy = \frac{1}{4} \pi g \rho R^2 H^2.$$

**2.19.** Praca zostaje zużyta na pokonanie siły ciężkości działającej na piramidę, podnoszącą się z powierzchni ziemi (rys.25). Zmieniającą się objętość piramidy obliczamy ze wzoru



Rys.25

$$V(y) = 4 \int_0^y x^2 du = \frac{a^2 y^3}{3H^2},$$

gdzie  $x$  znaleziono z proporcji

$$\frac{y-u}{x} = \frac{H}{\frac{a}{2}}.$$

Stąd szukana praca

$$W = \int_0^H F_y(y) dy = \gamma \int_0^H V(y) dy = \frac{\gamma a^2}{3H^2} \int_0^H y^3 dy = \frac{1}{12} \gamma a^2 H^2.$$

Podstawiając dane liczbowe mamy

$$W \approx 1,63 \cdot 10^{12} \text{ [Nm]}.$$

2.20. Aby usypać stos piasku w kształcie stożka, należy wykonać pracę

$$W = \frac{1}{12} \pi \gamma R^2 H^2.$$

Wstawiając do tego wzoru dane liczbowe mamy

$$W \approx 11\,775 \text{ [Nm]}.$$

2.21. Praca włożona jest równa

$$W = \frac{1}{2} \gamma_w \pi R^2 H^2,$$

gdzie  $\gamma_w$  jest ciężarem właściwym wody.

### 2.22

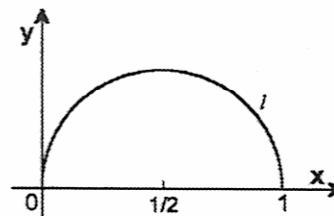
İ s p o s ó b . Praca siły  $\vec{F}$  przy przemieszczeniu punktu od  $P_1(x, y)$  do  $P_2(x, y)$  wyraża się całką krzywoliniową po drodze  $l$  (rys.26)

$$W = \int_l \vec{F} d\vec{r} = \int_l F_x dx + F_y dy = \int_l -e^x \cos y dx + e^x \sin y dy.$$

Krzywoliniową całkę skierowaną zamieniamy na całkę oznaczoną, wprowadzając parametryzację krzywej  $l$ :

$$x = t, \quad y = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2},$$

$$0 \leq t \leq 1.$$



Rys.26

Stąd

$$dx = dt,$$

$$dy = \frac{\frac{1}{2} - t}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2}} dt.$$

Zatem

$$W = \int_0^1 -e^t \cos \sqrt{\frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2} dt + \\ + \int_0^1 e^t \sin \sqrt{\frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2} \frac{\frac{1}{2} - t}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2}} dt = e - 1.$$

II sposób. Sprawdzamy warunki Schwartza:  $\text{rot } \vec{F} = 0$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = e^x \sin y.$$

Pole sił jest więc polem potencjalnym, praca elementarna – różniczką zupełną

$$dW = F_x dx + F_y dy = -e^x \cos y dx + e^x \sin y dy,$$

tak że można całkować po dowolnej drodze, np. po prostej  $y = 0$  w przedziale zmienności  $x : [1, 0]$ . Otrzymamy

$$W = - \int_1^0 e^x \cos 0 dx = -e^x \Big|_1^0 = e - 1.$$

2.23. Drogi całkowania przedstawiono na rys.27.

a.

$$W_1 = \int_{i_1} \vec{F} d\vec{r} = \int_{-1}^1 F_x dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3},$$

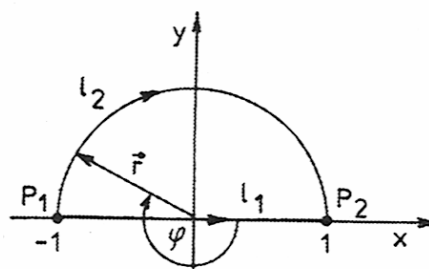
gdyż  $y = 0, z = 0$ .

b. W celu obliczenia całki krzywoliniowej po drodze  $l_2$  przejdziemy do współrzędnych biegunowych  $(r, \varphi)$ :

$$x = \cos\varphi,$$

$$y = \sin\varphi,$$

gdyż  $|\vec{r}| = 1$ . Stąd



Rys.27

$$dx = -\sin\varphi d\varphi.$$

Zatem

$$W_2 = \int_{l_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{l_2} (x^2 + y^2) dx = - \int_{-\pi}^0 \sin\varphi d\varphi = \cos\varphi \Big|_{-\pi}^0 = 2.$$

**2.24.** Pole siły  $\vec{F}(\vec{r})$  nazywamy potencjalnym (i zachowawczym), jeżeli istnieje jednoznaczna funkcja skalarna  $E_p(\vec{r})$ , taka że

$$\vec{F} = -\text{grad } E_p.$$

Pokażemy, że dla takiego pola zachodzi warunek

$$\text{rot } \vec{F} = 0.$$

Załóżmy, że  $\text{rot } \vec{F} \neq 0$  i istnieje taka funkcja  $\varphi$ , że  $\vec{F} = -\text{grad } \varphi$ . Stąd

$$\text{rot grad } \varphi = -\text{rot } \vec{F} \neq 0,$$

co jest sprzeczne z tożsamością

$$\text{rot grad } \varphi \equiv 0,$$

prawdziwą dla każdej funkcji skalarnej  $\varphi$ , klasy  $C^2$ .

Zatem słuszne jest twierdzenie, że energia potencjalna  $E_p(\vec{r})$  jest określona tylko w przypadku bezwirowego pola sił  $F(\vec{r})$ , tzn.

$$\text{rot } \vec{F} = 0.$$

Warunek ten w zapisie skalarnym w układzie kartezjańskim przybiera postać:

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}.$$

**2.25.** Pole zachowawcze w jednym inercjalnym układzie odniesienia  $U$  na ogół nie jest polem zachowawczym w innym inercjalnym układzie odniesienia  $U'$ . Wynika stąd, że w ogólności  $W' \neq 0$ . Równość  $W' = 0$  może zachodzić tylko w szczególnych przypadkach, np. gdy pole w układzie  $U'$  pozostaje stacjonarne.

**2.26.** Praca nie zależy od drogi, gdy pole sił jest potencjalne, tzn. spełnione są warunki

$$\frac{\partial K_z}{\partial y} = \frac{\partial K_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial K_x}{\partial z} = \frac{\partial K_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial K_y}{\partial x} = \frac{\partial K_x}{\partial y}.$$

Warunki te spełnione są dla przypadków: e, f, g, h, i. Tak np. dla przypadku i, wobec

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

mamy

$$\frac{\partial K_z}{\partial y} = \alpha z \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r^3} \right) = \alpha z \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^3} \right) \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\alpha y z}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^3} \right),$$

$$\frac{\partial K_y}{\partial z} = \alpha y \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r^3} \right) = \alpha y \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^3} \right) \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\alpha y z}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^3} \right),$$

tj.

$$\frac{\partial K_z}{\partial y} = \frac{\partial K_y}{\partial z}.$$

Podobnie udowadnia się pozostałe dwie relacje.

Potencjał pola obliczamy ze wzoru:

$$V(x, y, z) = V(x_0, y_0, z_0) - \left[ \int_{x_0}^x K_x(u, y_0, z_0) du + \int_{y_0}^y K_y(x, v, z_0) dv + \int_{z_0}^z K_z(x, y, s) ds \right],$$

gdzie punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  jest dowolnym, ustalonym punktem odniesienia w prostokątnym układzie współrzędnych; np. może to być początek układu współrzędnych  $(0, 0, 0)$ .

Dla poszczególnych przypadków mamy:

e)  $V(x, y, z) = gz + \text{const}$ ,

f)  $V(x, y, z) = \frac{1}{2} k (x^2 + y^2 + z^2) + \text{const}$ ,

g)  $V(x, y, z) = V(0, 0, 0) - \left( \int_{\substack{y=0 \\ z=0}}^x \sin y du + \int_{\substack{x=x \\ z=0}}^y x \cos v dv + \int_{\substack{x=x \\ y=y}}^z ds \right) =$   
 $= V(0, 0, 0) - \left( x \int_0^y \cos v dv + \int_0^z ds \right) = -(x \sin y + z) + \text{const}$ ,

h)  $V(x, y, z) = -xyz + \text{const}$ ,

i)  $V(r) = V(r_0) - \int_{r_0}^r \frac{\alpha}{r^3} (x dx + y dy + z dz) = V(r_0) - \alpha \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{\alpha}{r} + \text{const}$ ,

gdzie pod całką uwzględniono zależność:

$$dr = \frac{1}{r} (x dx + y dy + z dz).$$

2.27 a.

$$\vec{F} = -m \text{ grad } V(r),$$

$$\text{grad } V(r) = \frac{dV}{dr} \hat{r},$$

gdzie przez  $\hat{r}$  oznaczono wektor jednostkowy w kierunku  $\vec{r}$  ( $\hat{r} = \vec{r}/r$ ).

Stąd

$$\vec{F} = m \left( \frac{b}{r^2} - \frac{2a}{r^3} \right) \hat{r}.$$

b. Z warunku

$$\frac{dE_p}{dr} = 0,$$

otrzymujemy

$$r_o = \frac{2a}{b}.$$

**2.28**

a.

$$\vec{F} = -E_{po} \left( \frac{r_o}{r^2} + \frac{1}{r} \right) e^{-r/r_o} \hat{r},$$

gdzie

$$E_{po} = m V_o$$

b.

$$r = 6 \cdot 10^{-15} \text{ [m]}.$$

**2.29.**

$$r_o = \frac{1}{k}.$$

**2.30.** Pole sił jest potencjalne w przypadku a. Zatem w przypadku zadania a układ jest zachowawczy

$$E = E_k + E_p = \text{const.}$$

Z drugiej strony

$$E_p \left( 1, 1, \frac{\pi}{2} \right) = E_p(0, 0, 0) - \left( \int_0^1 ma \, dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} m \sin z \, dz \right) = E_p(0, 0, 0) - m(a + 1).$$



Stąd wobec

$$E_k\left(1, 1, \frac{\pi}{2}\right) + E_p\left(1, 1, \frac{\pi}{2}\right) = E_k(0, 0, 0) + E_p(0, 0, 0)$$

i

$$E_k(0, 0, 0) = 0,$$

otrzymujemy

$$E_k\left(1, 1, \frac{\pi}{2}\right) = m(a + 1).$$

### 2.31

a. Przyjmując początek osi  $x$  w ustalonym punkcie  $B$ , a zwrot osi zgodny z kierunkiem ruchu punktu  $A$ , otrzymujemy równanie ruchu w postaci

$$\frac{dv}{dt} = \frac{b}{m} x.$$

Stosując podstawienie

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

uzyskujemy po dwukrotnym scałkowaniu równania ruchu

$$x = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{b}{m}}} \sinh\left(\sqrt{\frac{b}{m}} t\right).$$

b. Z zasady zachowania energii

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{bx^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2},$$

znajdujemy

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 + \frac{b}{m} x^2}.$$

Stąd po rozdzieleniu zmiennych i scałkowaniu, otrzymujemy

$$\sqrt{\frac{b}{m}} t = \ln \left[ \frac{\sqrt{\frac{b}{m}}}{v_o} \left( x + \sqrt{x^2 + \frac{v_o^2}{b/m}} \right) \right]$$

i po przekształceniach

$$x = \frac{v_o}{\sqrt{\frac{b}{m}}} \sinh \left( \sqrt{\frac{b}{m}} t \right).$$

### 2.32

a. Korzystając z zasady zachowania energii

$$\frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + E_p(x) = E,$$

gdzie

$$E_p(x) = m V(x) = m A |x|,$$

mamy

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - m A |x|)}.$$

Z równania tego wynika, że przy  $E = m A |x|$ , czyli w punktach

$$x_{1,2} = \pm \frac{E}{mA},$$

cząstka spoczywa ( $v = 0$ ), natomiast w punkcie  $x = 0$  jej prędkość staje się maksymalna

$$v_m = \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Siła działająca na cząstkę

$$F = -\frac{dE_p}{dx} = \begin{cases} -mA & \text{dla } x > 0 \\ mA & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Ruch cząstki będzie więc ruchem oscylującym pomiędzy punktami  $x_1$  i  $x_2$ . Okres  $T$  oscylacji znajdujemy z równania określającego prędkość cząstki

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - mA|x|)}},$$

skąd

$$T = 4 \int_0^{\frac{E}{mA}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - mA|x|)}} = \frac{4}{A} \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

b. Postępując podobnie jak w części a, otrzymujemy:  
— wartość prędkości cząstki

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}[E - mA \operatorname{tg}^2(ax)]},$$

— współrzędne punktów, w których cząstka spoczywa

$$x_{1,2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left( \pm \sqrt{\frac{E}{mA}} \right),$$

— wartość siły działającej na cząstkę

$$F = -2maA [1 + \operatorname{tg}^2(ax)] \operatorname{tg}(ax),$$

— okres oscylacji

$$T = \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{2m}{E + mA}}.$$

2.33. Pole, w którym znajduje się cząstka jest zachowawcze, wobec tego

$$E_k + E_p(x) = \text{const} = 0$$

gdzie  $E_k$  jest energią kinetyczną, a

$$E_p(x) = m A (e^{-2ax} - 2e^{-ax})$$

jest energią potencjalną rozważanej cząstki. Mamy stąd

$$\frac{1}{2} m v^2 = -m A (e^{-2ax} - 2e^{-ax}),$$

wobec tego prędkość cząstki

$$v = \sqrt{2A} \sqrt{2e^{-ax} - e^{-2ax}}.$$

Z tego równania znajdujemy równanie ruchu cząstki, podstawiając

$$v = \frac{dx}{dt}$$

i całkując otrzymane równanie różniczkowe metodą rozdzielania zmiennych. Tak więc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2e^{-ax} - e^{-2ax}}} = \sqrt{2A} \int dt.$$

Mnożąc licznik i mianownik w wyrażeniu podcałkowym z lewej strony równania przez  $e^{ax}$  otrzymujemy

$$\int \frac{e^{ax} dx}{\sqrt{2e^{ax} - 1}} = \sqrt{2A} \int dt.$$

Stąd po scałkowaniu mamy

$$\frac{1}{a} \sqrt{2e^{ax} - 1} = \sqrt{2A} \cdot t + C,$$

gdzie  $C$  jest stałą związaną z wyborem warunków początkowych.

Przyjmujemy następujące warunki początkowe ruchu cząstki:

$$t = t_0, \quad v = 0, \quad x = x_0.$$

Współrzędną  $x_0$  punktu, w którym cząstka spoczywa, znajdujemy z równania

$$v = 0 = \sqrt{2A} \sqrt{2e^{-ax_0} - e^{-2ax_0}},$$

skąd

$$x_0 = -\frac{1}{a} \ln 2.$$

Podstawiając tak wybrane warunki początkowe otrzymujemy szukaną stałą w postaci

$$C = -\sqrt{2A} t_0.$$

Wobec tego

$$\sqrt{2e^{ax} - 1} = a \sqrt{2A} (t - t_0)$$

i po prostych przekształceniach mamy

$$x = \frac{1}{a} \ln \left[ \frac{1}{2} + Aa^2 (t - t_0)^2 \right].$$

2.34. Funkcja Lagrange'a przyjmuje dla tego przypadku postać

$$L = E_k - E_p = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mg y.$$

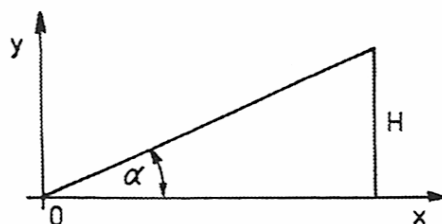
Z rys.28 wynika, że zmienne  $x$  i  $y$  nie są niezależne, bowiem

$$y = x \operatorname{tg} \alpha,$$

tj.

$$\dot{y} = \dot{x} \operatorname{tg} \alpha.$$

Układ ma jeden stopień swobody, obierając więc  $x$  jako współrzędną uogólnioną otrzymujemy



Rys.28

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - mgx \operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{2 \cos^2 \alpha} \dot{x}^2 - mgx \operatorname{tg} \alpha.$$

Stąd

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -mg \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{m}{\cos^2 \alpha} \ddot{x}.$$

Podstawiając te wyrażenia do równania Lagrange'a mamy

$$\ddot{x} + \frac{1}{2} g \sin 2\alpha = 0$$

Całkując to równanie i uwzględniając warunki początkowe otrzymujemy

$$x = -\frac{1}{4} g t^2 \sin 2\alpha + H \operatorname{ctg} \alpha.$$

Czas ruchu znajdujemy z warunku  $x(t_k) = 0$ , czyli

$$t_k = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Czas ruchu jest najmniejszy przy  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

**2.35.** Obierając zmienną  $r$  jako współrzędną uogólnioną i uwzględniając, że

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{r}}{r}$$

otrzymujemy funkcję Lagrange'a

$$L = m (\dot{r}^2 - \omega^2 r^2),$$

gdzie

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Stąd równanie Lagrange'a przybiera postać

$$\ddot{r} + \omega^2 r = 0.$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego nietłumionego. Jego rozwiązaniem jest funkcja

$$r = A \cos(\omega t + \beta),$$

która ma jednak sens jedynie dla  $r \geq 0$ .

Gdyby cząstka po dojściu do punktu  $r = 0$  uległa sprężystemu odbiciu, wówczas

$$r = |A \cos(\omega t + \beta)|,$$

2.36. Układ przedstawiony na rys.29 ma dwa stopnie swobody. Jako współrzędne uogólnione obieramy kąty  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ . Energie kinetyczną i potencjalną układu wyrażamy przez wybrane współrzędne uogólnione.

Dla  $m_1$ :

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\alpha}_1)^2 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha}_1^2,$$

$$E_{p1} = -m_1 g z_1 = -m_1 g l_1 \cos \alpha_1.$$

Dla  $m_2$ :

$$x_2 = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2,$$

$$\dot{x}_2 = l_1 \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 + l_2 \dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2,$$

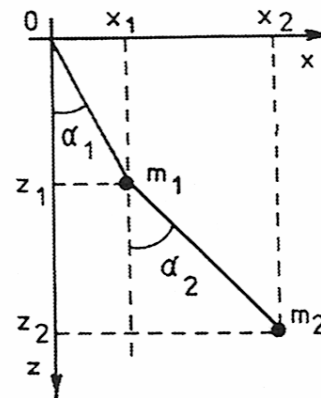
$$z_2 = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos \alpha_2,$$

$$\dot{z}_2 = -(l_1 \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 + l_2 \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_2),$$

czyli

$$E_{k2} = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \frac{m_2}{2} (l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + 2l_1 l_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + l_2^2 \dot{\alpha}_2^2),$$

$$E_{p2} = -m_2 g z_2 = -m_2 g (l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos \alpha_2).$$



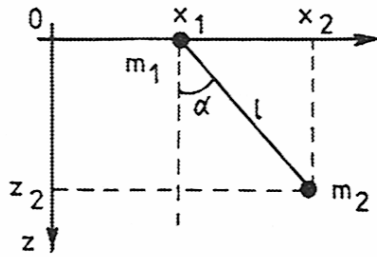
Rys.29

Stąd

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\alpha}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \\ + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \alpha_1 + m_2 g l_2 \cos \alpha_2.$$

### 2.37

a. Układ przedstawiony na rys.30 ma dwa stopnie swobody. Jako współrzędne uogólnione przyjmujemy  $x$  i  $\alpha$ . Współrzędne kartezjańskie obu punktów wyrażamy przez współrzędne uogólnione.



Rys.30

Dla  $m_1$ :

$$x_1 = x, \quad \dot{x}_1 = \dot{x},$$

$$z_1 = 0, \quad \dot{z}_1 = 0.$$

Dla  $m_2$ :

$$x_2 = x + l \sin \alpha, \quad \dot{x}_2 = \dot{x} + l \dot{\alpha} \cos \alpha,$$

$$z_2 = l \cos \alpha, \quad \dot{z}_2 = -l \dot{\alpha} \sin \alpha.$$

Wtedy odpowiednie energie przybierają postać

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2,$$

$$E_{p1} = 0,$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\alpha} \cos \alpha + l^2\dot{\alpha}^2),$$

$$E_{p2} = -m_2 g l \cos \alpha.$$

Stąd

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (2l\dot{x}\dot{\alpha} \cos \alpha + l^2\dot{\alpha}^2) + m_2 g l \cos \alpha.$$



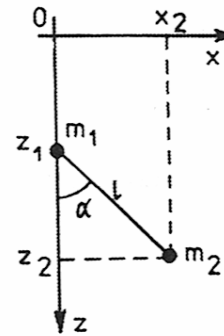
b. Układ ma dwa stopnie swobody. Wprowadzając jako współrzędne uogólnione:  $z$ ,  $\alpha$  (rys.31) i licząc podobnie jak w punkcie a, mamy:

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}^2,$$

$$E_{p1} = -m_1 g z,$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2} m_2 (\dot{z}^2 - 2l\dot{z}\dot{\alpha} \sin\alpha + l^2\dot{\alpha}^2),$$

$$E_{p2} = -m_2 g (z + l \cos\alpha).$$



Rys.31

Stąd

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} (2gz + \dot{z}^2) + \frac{m_2}{2} (l^2\dot{\alpha}^2 - 2l\dot{z}\dot{\alpha} \sin\alpha + 2gl \cos\alpha).$$

**2.38.** Jeśli ruch układu  $n$  punktów materialnych, każdy o masie  $m_i$ , ograniczony jest  $p$  więzami w postaci

$$f_j (x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n, z_1 \dots z_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

to spełnione są następujące równania

$$m_i \ddot{x}_i = F_{ix} + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$m_i \ddot{y}_i = F_{iy} + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i},$$

$$m_i \ddot{z}_i = F_{iz} + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i},$$

gdzie:  $\lambda_j$  – nieokreślone mnożniki Lagrange'a,

$\sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$  – składowa reakcji więzów w kierunku osi  $x$ , działająca na  $i$ -ty punkt,

$F_{ix}$  – składowa siły zewnętrznej działająca w kierunku osi  $x$  na  $i$ -ty punkt.

Z treści zadania wynika, że punkt porusza się po powierzchni

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

gdzie:  $a, b, c$  – stałe.

Stąd równania Lagrange'a pierwszego rodzaju mają postać:

$$m \ddot{x} = 2\lambda \frac{x}{a^2},$$

$$m \ddot{y} = 2\lambda \frac{y}{b^2},$$

$$m \ddot{z} = 2\lambda \frac{z}{c^2}.$$

Mnożąc pierwsze z tych równań przez  $\dot{x}$ , drugie przez  $\dot{y}$ , trzecie przez  $\dot{z}$  i dodając stronami otrzymujemy

$$m (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = \lambda \left( \frac{2x\dot{x}}{a^2} + \frac{2y\dot{y}}{b^2} + \frac{2z\dot{z}}{c^2} \right).$$

Różniczkując równanie elipsoidy otrzymujemy

$$\frac{2x\dot{x}}{a^2} + \frac{2y\dot{y}}{b^2} + \frac{2z\dot{z}}{c^2} = 0.$$

Stąd

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = 0.$$

Korzystając z własności pochodnych wynik ten możemy zapisać w postaci

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 0.$$

Wyrażenie w nawiasie jest kwadratem prędkości punktu. Wobec tego

$$\frac{d}{dt} v^2 = 0,$$

i ostatecznie

$$v^2 = \text{const.}$$

2.39. Z treści zadania wynika, że zaniedbujemy opory ruchu, wobec tego moment pędu układu jest stały, stąd ruch jest płaski. Przyjmujemy układ współrzędnych, tak aby płaszczyzna  $(x, y)$  była płaszczyzną ruchu (rys.32).

Wówczas układ ma trzy stopnie swobody. Odpowiadającymi im współzrzednymi uogólnionymi są współzrzedne  $x_s$  i  $y_s$  środka obrotu i kąt  $\varphi$  nachylenia pręta do osi  $x$ .

Energia kinetyczna układu

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2),$$

gdzie:  $x_1, y_1$  – współzrzedne masy  $m_1$ ,  
 $x_2, y_2$  – współzrzedne masy  $m_2$ .

Ale

$$x_1 = x_s - r_1 \cos\varphi, \quad y_1 = y_s - r_1 \sin\varphi,$$

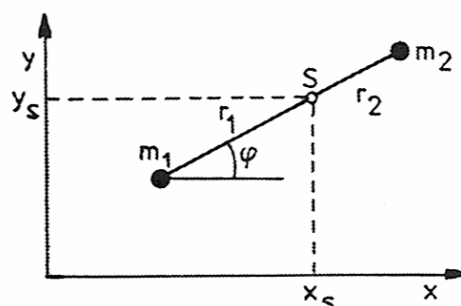
$$x_2 = x_s + r_2 \cos\varphi, \quad y_2 = y_s + r_2 \sin\varphi.$$

Wobec tego

$$E_k = \frac{m_1 + m_2}{2} (\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2) + \frac{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}{2} \dot{\varphi}^2.$$

Energia potencjalna

$$E_p = 0.$$



Rys.32

Funkcja Lagrange'a

$$L = E_k - E_p,$$

stąd równania Lagrange'a II rodzaju przyjmują postać:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} - \frac{\partial L}{\partial x_s} = \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2) \dot{x}_s] = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_s} - \frac{\partial L}{\partial y_s} = \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2) \dot{y}_s] = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} [(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \dot{\varphi}] = 0.$$

Wobec tego

$$\ddot{x}_s = 0, \quad \ddot{y}_s = 0, \quad \ddot{\varphi} = 0.$$

Stąd wynika, że układ obraca się jednostajnie dookoła osi, a równocześnie środek obrotu przesuwa się ruchem jednostajnym w płaszczyźnie  $(x, y)$ .

#### 2.40. Funkcja Lagrange'a wynosi

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2).$$

Koralik ma jeden stopień swobody, więzy sprowadzają się do warunku  $\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$ , tj.

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2).$$

Stąd równanie Lagrange'a daje

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0.$$

Całka ogólna tego równania ma postać

$$r = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t},$$

co po uwzględnieniu warunków początkowych daje:

$$r = \frac{v_0}{\omega} \sinh(\omega t),$$

$$v = v_0 \cosh(\omega t).$$

2.41. Funkcja Lagrange'a we współrzędnych kartezjańskich przyjmuje postać

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - E_p(x, y, z),$$

stąd

$$\frac{\partial L}{\partial x} = - \frac{\partial E_p}{\partial x} = F_x,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} (m \dot{x}) = m \ddot{x}.$$

Podstawiając te wyniki do równania Lagrange'a otrzymujemy

$$m \ddot{x} = F_x.$$

Postępując podobnie dostaniemy dwa pozostałe równania.

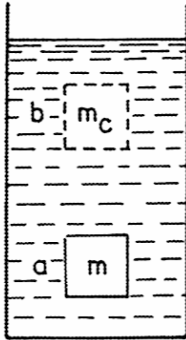
2.42. Wykorzystamy związek między pracą a energią potencjalną. Oznaczmy przez  $h_1$  położenie powierzchni cieczy względem dna naczynia – przyjętego za poziom odniesienia.

Wtedy

$$E_p' = \int_0^{h_1} (mg - V\rho g) dz + \int_{h_1}^h mg dz = mgh - V\rho gh_1 < E_p$$

gdzie:  $V$  – objętość ciała,  
 $\rho$  – gęstość cieczy.

2.43. Rozpatrzmy ciało o masie  $m$  całkowicie zanurzone w cieczy. Niech  $m_c$  oznacza masę cieczy o objętości równej objętości tego ciała. Przesunięcie ciała z położenia  $a$  do położenia  $b$  (rys.33) jest równoznaczne zamianie miejscami mas  $m$  i  $m_c$ .



Rys.33

W stanie początkowym energia potencjalna tych dwu elementów obliczona względem dowolnego ustalonego poziomu (np. dna naczynia) jest równa

$$E_{p1} = mgh_1 + m_cgh_2,$$

a w stanie końcowym

$$E_{p2} = mgh_2 + m_cgh_1.$$

Otrzymana stąd zmiana energii układu jest równoważna pracy wykonanej podczas przesunięcia ciała, tzn.

$$(m - m_c) g \Delta h = F \Delta h.$$

Mamy więc

$$F = mg - m_c g,$$

co stanowi treść prawa Archimedesesa.

2.44. Jeżeli wydłużenie sprężyny oznaczmy symbolem  $x$ , to całkowita energia potencjalna układu

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 - mgx,$$

gdzie:  $\frac{1}{2} kx^2$  – energia potencjalna siły sprężystości,

$mgx$  – grawitacyjna energia potencjalna liczona względem poziomu wyznaczonego przez dolny koniec wiszącej swobodnie, nieobciążonej sprężyny.

Warunkiem ekstremum jest

$$\frac{dE_p}{dx} = 0.$$

Odpowiada to równości

$$kx = mg,$$

co jest identyczne z warunkiem równowagi sił.  
Druga pochodna

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2} = k > 0,$$

zatem funkcja  $E_p$  w punkcie  $x = \frac{mg}{k}$  ma minimum, co odpowiada warunkowi równowagi trwałej.

#### 2.45. Amplituda ruchu

$$x_0 = \sqrt{x^2 + \frac{v^2}{4\pi v^2}} \approx 6,0 \cdot 10^{-2} \text{ [m]}.$$

Faza początkowa ruchu określona jest wzorem

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{v}{2\pi v x} \approx -0,64,$$

stąd

$$\alpha = -32^\circ.$$

2.46. Początek układu współrzędnych umieszczamy w środku Ziemi. Siła działająca na kulkę ma postać

$$F = -kx.$$

Na powierzchni Ziemi siła ta równa się ciężarowi kulki, a więc

$$kR = mg,$$

skąd

$$k = \frac{mg}{R}.$$

Wobec tego możemy napisać różniczkowe równanie ruchu kulki w następującej postaci

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{R} x = 0.$$

Stosując standardowe podstawienie  $\omega^2 = \frac{g}{R}$  dostajemy równanie różniczkowe drugiego rzędu, liniowe jednorodne

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

Całka ogólna tego równania jest postaci (patrz rozwiązanie zad.2.9)

$$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}.$$

Stałe  $C_1$  i  $C_2$  wyznaczamy z warunków początkowych:

$$t = 0, \quad x(0) = R, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

skąd

$$C_1 = C_2 = \frac{R}{2},$$

a

$$x = R \left( \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right) = R \cos \omega t = R \cos \left( t \sqrt{\frac{g}{R}} \right).$$

Czas, w ciągu którego kulka osiągnie środek Ziemi, obliczamy z równości

$$R \cos \left( t_1 \sqrt{\frac{g}{R}} \right) = 0,$$

skąd

$$t_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R}{g}} = 1248 \text{ [s]}.$$



Prędkość kulki obliczamy ze wzoru

$$v = \frac{dx}{dt} = -R \sqrt{\frac{g}{R}} \sin \left( t \sqrt{\frac{g}{R}} \right).$$

Kulka minie środek Ziemi z prędkością

$$v_1 = R \sqrt{\frac{g}{R}} \sin \left( t_1 \sqrt{\frac{g}{R}} \right) = 7,9 \text{ [km/s]}.$$

2.47. Żądanie zawarte w zadaniu zostanie spełnione wtedy, gdy maksymalne przyspieszenie ruchu drgającego deski będzie równe co najwyżej przyspieszeniu ziemskiemu spadku swobodnego. Wychylenie deski z położenia równowagi jest opisane równaniem

$$x = x_o \cos \omega t,$$

a więc przyspieszenie deski

$$\ddot{x} = -x_o \omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x.$$

W ruchu drgającym przyspieszenie osiąga wartość maksymalną w punktach maksymalnego wychylenia. Zatem warunek zadania będzie spełniony dla takiej wartości  $\omega$ , dla której

$$\omega^2 x_o = g,$$

czyli dla

$$\omega = 2\pi v = \sqrt{\frac{g}{x_o}}.$$

Stąd

$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{x_o}} = 0,575 \left[ \frac{1}{s} \right].$$

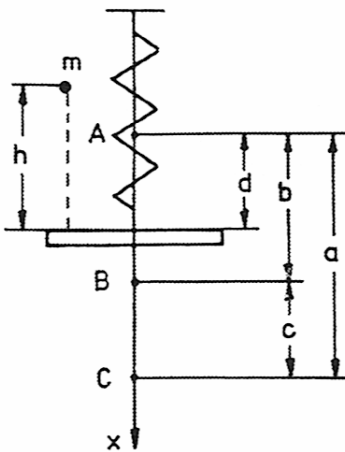
2.48. W przypadku granicznym warunek dla sił przybiera postać

$$m x_o \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 = \mu mg,$$

stąd

$$\mu = \frac{4\pi^2 x_0}{gT^2} = 0,08.$$

2.49. Na rys.34 punktami  $A, B, C$  zaznaczono kolejno: położenie równowagi sprężyny nieobciążonej, położenie równowagi sprężyny obciążonej szalką o masie  $M$  i ciężarkiem o masie  $m$  oraz maksymalne wychylenie od położenia równowagi sprężyny nieobciążonej. Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami szukana amplituda drgań



Rys.34

$$c = a - b.$$

Wielkość wychylenia  $b$  wyznaczmy z warunku równowagi

$$(M + m)g = kb,$$

stąd

$$b = \frac{(M + m)g}{k}.$$

Dla wyznaczenia  $a$  skorzystamy z prawa zachowania energii

$$\frac{1}{2}(M + m)v^2 + (M + m)g(a - d) = -\int_d^a (-kx) dx,$$

gdzie  $v$  jest prędkością, z jaką będzie się poruszać szalka wraz z ciężarkiem. Prędkość  $v$  wyznaczmy z zasady zachowania pędu dla układu izolowanego

$$(M + m)v = mv_1,$$

gdzie:  $v_1 = \sqrt{2gh}$  jest prędkością, z jaką ciężarek uderza w szalkę. Stąd

$$v = \frac{m}{M + m} \sqrt{2gh}.$$

Wychylenie  $d$  sprężyny w chwili uderzenia ciężarka w szalkę spełnia zależność:

$$Mg = kd,$$

stąd

$$d = \frac{Mg}{k}.$$

Podstawiając znalezione wartości  $v$  i  $d$  do prawa zachowania energii otrzymujemy:

$$a = \frac{(M + m)g}{k} \pm \sqrt{\frac{m^2 g^2}{k^2} + \frac{2m^2 g h}{(M + m)k}}.$$

Amplituda ruchu przyjmuje więc postać:

$$c = \sqrt{\frac{m^2 g^2}{k^2} + \frac{2m^2 g h}{(M + m)k}}.$$

2.50. W pierwszym przypadku równanie ruchu przybiera postać

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x,$$

gdzie  $k$  – współczynnik sprężystości.

Rozwiązania równania szukamy w postaci

$$x = x_0 \cos \omega t.$$

Podstawiając je do równania ruchu znajdujemy częstość kołową drgań

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

W drugim przypadku równanie ruchu przybiera postać

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x + mg.$$

Jego rozwiązanie przedstawia się następująco:

$$x = x_0 \cos \omega t + c,$$

gdzie:  $c$  – stała.

Podstawiając to rozwiązanie do równania ruchu znajdujemy

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{oraz} \quad c = \frac{m^2}{k} g.$$

Wobec tego w obu przypadkach częstość drgań sprężyny jest taka sama. Uogólniając otrzymane wyniki można powiedzieć, że stała siła nie wpływa na częstość drgań, a określa jedynie punkt, wokół którego one zachodzą. W naszym przypadku jest to punkt  $x = \frac{mg}{k}$ , określający tzw. statyczne wydłużenie sprężyny.

**2.51.** Oznaczmy przez  $x$  wychylenie cieczy z położenia równowagi. Wówczas niezrównoważony słup cieczy ma wysokość  $2x$ . Stąd siła działająca na ciecz

$$F = -2x\rho gS = -2 \frac{mg}{l} x.$$

Wobec tego równanie ruchu

$$\ddot{x} + \frac{2g}{l} x = 0$$

przedstawia równanie ruchu oscylatora harmonicznego nielumionego. Stały współczynnik występujący przy wychyleniu jest równy kwadratowi częstości kołowej  $\omega$ . Stąd okres drgań

$$T_1 = 2\pi\omega^{-1} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

W windzie na wodę działa siła

$$F = -2 \frac{m (g \pm a)}{l} x,$$

gdzie znak plus odnosi się do przypadku, gdy winda porusza się ku górze, znak minus zaś do przypadku, gdy winda porusza się w dół. Wobec tego równanie ruchu przybiera postać

$$\ddot{x} + \frac{2(g \pm a)}{l} x = 0,$$

skąd

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2(g \pm a)}}.$$

**2.52.** Oznaczmy przez  $x$  wychylenie pręta z położenia równowagi. Wówczas równanie ruchu ma postać

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + mg - S\rho g \left( \frac{l}{2} + x \right).$$

Korzystając z warunku

$$mg = \frac{1}{2} S\rho gl,$$

równanie ruchu zapisujemy następująco

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{m} (k + S\rho g) x.$$

Nieznana stałą sprężystości  $k$  wyznaczamy z warunku na zmianę długości sprężyny po usunięciu cieczy. Oznaczając przez  $x_1$  położenie równowagi statycznej pręta po usunięciu cieczy, zaś przez  $x_2$  położenie równowagi statycznej w cieczy, mamy

$$d = x_1 - x_2 = \frac{mg}{k} - \frac{mg - \frac{1}{2} S\rho gl}{k},$$

skąd

$$k = \frac{S\rho gl}{2d}.$$

Podstawiając  $k$  do równania ruchu otrzymujemy

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{S\rho g (l + 2d)}{2dm} x = -\omega^2 x,$$

stąd

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2dm}{S\rho g (l + 2d)}}.$$

2.53. Pod wpływem ciężaru pierwsza sprężyna ulegnie wydłużeniu  $x_1$ , druga sprężyna – wydłużeniu  $x_2$ , zaś cały układ wydłużeniu o

$$x = x_1 + x_2.$$

Przypisując układowi zastępczy współczynnik sprężystości  $k$  możemy napisać

$$\frac{mg}{k} = \frac{mg}{k_1} + \frac{mg}{k_2},$$

skąd

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

Wobec tego okres drgań ciężarka

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} m}.$$

2.54. Oznaczmy przez  $x_1$  wysokość, na jaką przemieściła się ciecz w ramieniu I, zaś przez  $x_2$  wysokość, na jaką przemieściła się ciecz w ramieniu II (rys.35).

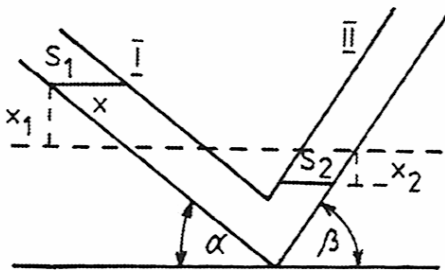
Wtedy niezrównoważony słup cieczy ma wysokość  $x_1 + x_2$ . Stąd siła działająca na ciecz

$$F = - \frac{mg}{l} (x_1 + x_2).$$

Z rysunku mamy:

$$S = S_1 \sin\alpha = S_2 \sin\beta,$$

$$x_1 S_1 = x_2 S_2,$$



Rys.35

oraz

$$x_1 = x \sin\alpha,$$

gdzie  $S_1$  i  $S_2$  są swobodnymi powierzchniami cieczy, odpowiednio w ramieniu I i II,  $S$  jest przekrojem rurki. Wobec tego

$$F = -\frac{mg}{l} (\sin\alpha + \sin\beta) x.$$

Równanie ruchu ma zatem postać

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g (\sin\alpha + \sin\beta)}{l} x = -\omega^2 x.$$

Stąd okres drgań

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g (\sin\alpha + \sin\beta)}}.$$

**2.55**

$$\sigma = \frac{1}{T} \ln 2 = 1,39 \text{ [s}^{-1}\text{]},$$

$$T_0 = 0,497 \text{ [s]}.$$

**2.56.** Amplituda zmaleje 7,39 raza.

**2.57**

a. W tym przypadku równanie ruchu przybiera postać

$$\ddot{x} + 2\sigma\dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

gdzie  $\sigma$  jest stałą tłumienia, zaś  $\omega$  częstością drgań nietłumionych. Ponieważ ruch jest okresowy, to zachodzi przypadek słabego tłumienia i rozwiązanie równania ruchu możemy przedstawić następująco

$$x = C e^{-\sigma t} \sin(\omega_1 t + \varphi).$$

W naszym przypadku

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2} [\text{s}^{-1}], \quad \varphi = 0, \quad \sigma = 0,4, \quad \omega^2 = 2,62 [\text{s}^{-2}] \text{ i } C = 6,7 \cdot 10^{-2} [\text{m}].$$

Stąd otrzymujemy równanie ruchu punktu

$$\ddot{x} + 0,8 \dot{x} + 2,62 x = 0$$

i jego rozwiązanie

$$x = 6,7 \cdot 10^{-2} e^{-0,4t} \sin \frac{\pi}{2} t [\text{m}].$$

b. Z warunku  $\sin \frac{\pi}{2} t = \sin \omega_1 t = 0$  znajdujemy czasy, w których punkt znajduje się w położeniu równowagi w rozważanym przedziale  $[0, 2T]$

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 2 [\text{s}], \quad t_3 = 4 [\text{s}], \quad t_4 = 6 [\text{s}], \quad t_5 = 8 [\text{s}].$$

Z warunku  $\frac{dx}{dt} = 0$  znajdujemy czas  $t'_1 = 0,84 [\text{s}]$ , odpowiadający pierwszemu maksimum lokalnemu funkcji  $x(t)$ . Znając okres, znajdujemy stąd czasy odpowiadające kolejnym ekstremom lokalnym w rozważanym przedziale  $[0, 2T]$

$$t'_2 = 2,84 [\text{s}], \quad t'_3 = 4,84 [\text{s}], \quad t'_4 = 6,84 [\text{s}].$$

Podstawiając znalezione wartości  $t'$  do równania ruchu otrzymujemy odpowiadające im wartości wychylenia punktu. Na tej podstawie możemy sporządzić szukany wykres zależności  $x(t)$ .

**2.58.** Równanie drgań kulki w cieczy ma postać

$$\ddot{x} + \frac{6\pi\eta r}{m} \dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

gdzie  $x$  jest wychyleniem mierzonym względem położenia równowagi statycznej,  $\eta$  jest współczynnikiem lepkości cieczy. Z teorii wiemy, że stały współczynnik



występujący przy prędkości ruchu jest równy podwójnemu współczynnikowi tłumienia drgań  $\sigma$ , a ten wiąże się z częstotścią drgań związkiem

$$\sigma = \sqrt{\omega^2 - \omega_1}.$$

stąd

$$\eta = \frac{4}{9} \rho r^2 \sqrt{\omega^2 - \omega_1} = 10 \text{ [kgm}^{-1}\text{s}^{-1}\text{]}.$$

**2.59.**

a)  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\ln 2}{5} \frac{dx}{dt} + 4\pi^2 x = 0.$

b)  $T = 1,006 \text{ [s]}.$

c)  $1,1 \text{ [W]}.$

**2.60.** Równania ruchów drgających zapisujemy w postaci:

$$x_1 = x_o \sin (\omega_1 t + \alpha),$$

$$x_2 = x_o \sin (\omega_2 t + \alpha).$$

Stąd ruch wypadkowy

$$x = x_1 + x_2 = 2x_o \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \alpha \right)$$

przedstawia drganie harmoniczne, którego amplituda

$$A = \left| 2a \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right|$$

zmienia się okresowo z częstotścią  $(\omega_1 - \omega_2)$ . Wobec tego okres dudnień

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} = 93 \text{ [s]}.$$

**2.61.** Przyjmując kartezjański układ współrzędnych, możemy zapisać równania drgań w postaci

$$x = A \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = A \cos \omega t,$$

$$y = A \sin \omega t.$$

Stąd równanie toru

$$x^2 + y^2 = A^2$$

przedstawia okrąg o promieniu  $A = 0,05$  [m].

**2.62.** Z kierunkami drgań wiążemy prostokątny układ współrzędnych, przyjmując początek układu w położeniu równowagi. Wobec tego równania drgań mają postać

$$x = A_1 \sin \omega t,$$

$$y = A_2 \sin \omega t.$$

Stąd równanie toru

$$y = \frac{A_2}{A_1} x = \frac{5}{3} x$$

przedstawia prostą przechodzącą przez początek układu. Takie drgania nazywamy liniowo spolaryzowanymi.

**2.63.** Ruch wypadkowy jest opisany równaniem

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos (\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos (\omega t + \alpha_2) =$$

$$= (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2) \cos \omega t - (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2) \sin \omega t$$

gdzie  $A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2$  oznaczają odpowiednio amplitudy i fazy ruchów składowych. Równanie ruchu zapiszemy w prostszej postaci, jeśli zauważymy, że zawsze można znaleźć takie dwie stałe  $A$  i  $\alpha$ , że spełnione będą związki:

$$A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 = A \cos \alpha,$$

$$A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2 = A \sin \alpha,$$

czyli

$$A = \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + A_2^2},$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}.$$

Po wstawieniu do równania ruchu otrzymujemy

$$x = A \sin(\omega t + \alpha),$$

gdzie  $A = 0,07$  [m] jest amplitudą ruchu wypadkowego.

**2.64.** Korzystając z wyniku zadania 2.60 mamy

$$v_2 = \frac{1}{T_2} = 40 \text{ [s}^{-1}\text{]}.$$

**2.65.** Różnica faz

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{l_2 - l_1}{\lambda} = \frac{\pi}{10}$$

gdzie  $l_1$  i  $l_2$  są odległościami zadanych punktów od źródła drgań.

**2.66.** Różnica faz  $\Delta\varphi = 4\pi$ .

**2.67.** Długość fali  $\lambda = 0,48$  [m].

**2.68.** Promień fali załamanej będzie tworzył z powierzchnią wody kąt  $\beta = 40^\circ 11'$ .

**2.69.** Odległość między węzłami fali stojącej

$$l_2 - l_1 = (2n + 1) \frac{\lambda}{2},$$

gdzie:  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Stąd

$$v = \lambda\nu = 1425 \text{ [ms}^{-1}\text{]}.$$

**2.70.** Prędkość rozchodzenia się fal podłużnych

$$v_1 = 5 \cdot 10^3 \text{ [ms}^{-1}\text{]},$$

a prędkość rozchodzenia się fal poprzecznych

$$v_2 = 3,17 \cdot 10^3 \text{ [ms}^{-1}\text{]}.$$

**2.71.** Korzystając ze związku

$$G = \frac{E}{2(1+m)},$$

otrzymujemy

$$v_2 = v_1 \sqrt{\frac{1}{2(1+m)}} = 3,22 \cdot 10^3 \text{ [ms}^{-1}\text{]}.$$

**2.72.** Przyjmując oś  $x$  jako kierunek rozchodzenia się fali mamy:

— równanie fali padającej

$$y_1 = y_o \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) \right],$$

— równanie fali odbitej

$$y_2 = y_o \sin \left[ \omega \left( t + \frac{x}{v} \right) + \pi \right] = -y_o \sin \left[ \omega \left( t + \frac{x}{v} \right) \right].$$

Stąd równanie fali wypadkowej przybiera postać

$$y = y_1 + y_2 = -2y_o \sin \left( \frac{x}{v} \omega \right) \cos \omega t.$$

Jest to równanie fali stojącej, której amplituda

$$A = \left| -2y_o \sin \frac{x}{v} \omega \right|$$

przyjmuje wartość maksymalną (strzałki) w punktach

$$x = (2k + 1) \frac{\lambda}{2},$$

natomiast wartość minimalną (węzły) w punktach

$$x = k \frac{\lambda}{2},$$

gdzie  $\lambda$  jest długością fali, zaś  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

2.73

$$v = n \frac{v}{2l},$$

gdzie  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

2.74

$$v = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{v}{2l},$$

gdzie  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

2.75. Z wzoru Dopplera częstotliwość dźwięku odbieranego przez obserwatora

$$v' = \frac{c + v}{c - v} v = 522 \text{ [s}^{-1}\text{]}.$$

2.76. Poziom głośności dźwięku wzrośnie o 7 dB.

2.77. Równania ruchu środka masy mają w tym przypadku postać:

$$\ddot{x}_s = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad \ddot{y}_s = 0, \quad \ddot{z}_s = 0.$$

Po dwukrotnym scałkowaniu tych równań otrzymujemy

$$x_s = \frac{1}{2} \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} t^2 + C_1,$$

$$y_s = C_2,$$

$$z_s = C_3,$$

gdzie:  $C_1, C_2, C_3$  – stałe, które wyznaczymy z warunków początkowych, określających położenie środka masy w chwili  $t = 0$

$$x_s^o = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$y_s^o = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$z_s^o = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Mamy stąd:

$$C_1 = x_s^o, \quad C_2 = y_s^o, \quad C_3 = z_s^o$$

i ostatecznie

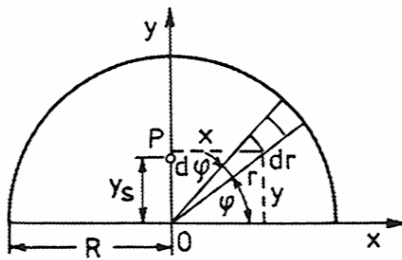
$$x_s = x_s^o + \frac{1}{2} \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} t^2 = -0,17 \cdot 10^{-2} \text{ [m]}$$

$$y_s = y_s^o = 2 \cdot 10^{-2} \text{ [m]}$$

$$z_s = z_s^o = -1,2 \cdot 10^{-2} \text{ [m]}.$$

### 2.78

a. Jeżeli układ współrzędnych obierzemy tak, jak na rys.36, to ze względu na symetrię środek masy znajdzie się w punkcie  $P$  o współrzędnych  $(0, y_s)$ , gdzie współrzędna



Rys.36

$$y_s = \frac{\int y dm}{\int dm}.$$

Elementarną masę znajdujemy przechodząc do współrzędnych biegunowych

$$dm = \rho dS = \frac{m}{\frac{1}{2} \pi R^2} dx dy = \frac{2m}{\pi R^2} r dr d\varphi.$$

Wtedy

$$y_s = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^\pi r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi}.$$

b. Obierzmy początek prostokątnego układu współrzędnych w wierzchołku stożka, a oś  $y$  skierujmy wzdłuż wysokości stożka (rys.37). Wtedy ze względu na symetrię mamy

$$x_s = z_s = 0,$$

oraz

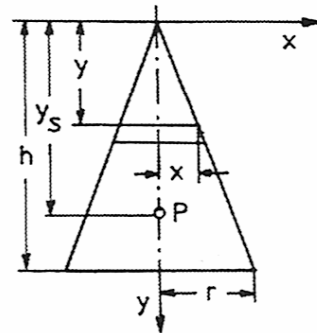
$$y_s = \frac{3}{h^3} \int_0^h y^3 dy = \frac{3}{4} h,$$

ponieważ

$$x : y = r : h,$$

a stąd

$$x = \frac{r}{h} y.$$

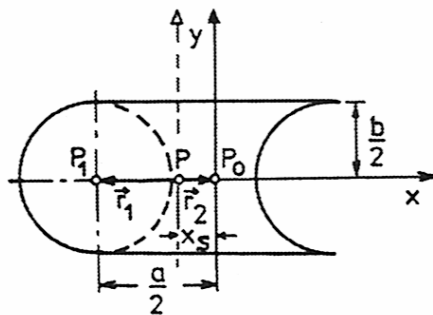


Rys.37

c. Środek masy znajduje się w punkcie o współrzędnych

$$x_s = z_s = 0, \quad y_s = \frac{3}{8} R.$$

d. Zgodnie z rys.38 poszukiwany środek masy znajduje się w punkcie  $P$  o współrzędnych  $(-x_s, 0)$ . Wartość  $x$ -owej współrzędnej tego punktu znajdziemy łatwo, jeśli rozważaną powierzchnię



Rys.38

podzielimy na krążek o promieniu  $\frac{b}{2}$  o środku w punkcie  $P_1$ , będącym także jego środkiem masy oraz na część, która ze względu na symetrię ma środek masy w punkcie  $P_0$ , tj. w środku prostokąta o bokach  $a, b$ . Przesuwając wtedy początek układu współrzędnych do wypadkowego środka masy układu (punkt  $P$ ), mamy

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0,$$

gdzie  $m_1$  jest masą krążka, a  $m_2$  – masą pozostałej części układu.

Rozpisując to równanie we współrzędnych kartezjańskich, otrzymujemy po przekształceniach

$$\frac{\frac{a}{2} - x_s}{x_s} = \frac{ab - \frac{\pi b^2}{4}}{\frac{\pi b^2}{4}},$$

stąd

$$x_s = \frac{\pi b}{8}.$$

e. Współrzędne środka masy są następujące:

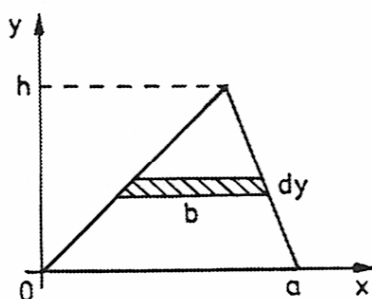
$$x_s = \frac{2}{3} a, \quad y_s = z_s = 0.$$

2.79. Oznaczmy podstawę dowolnego trójkąta (rys.39) przez  $a$ , jego wysokość przez  $h$ . Obierzmy pasek o długości  $b$  i szerokości  $dy$  w odległości  $y$  od podstawy. Elementarną masę znajdujemy ze wzoru

$$dm = \rho b dy = \frac{h - y}{h} \rho a dy,$$

gdzie zależność  $b$  od  $y$  wyznaczyliśmy z proporcji

$$\frac{b}{a} = \frac{h - y}{h}.$$



Rys.39

Dla współrzędnej  $y_s$  środka masy otrzymujemy

$$y_s = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{\int_0^h (h - y) y dy}{\int_0^h (h - y) dy} = \frac{1}{3} h.$$



Środek masy trójkąta znajduje się, licząc od jego dowolnej podstawy, w odległości równej  $\frac{1}{3}$  odpowiedniej wysokości trójkąta, czyli środek masy pokrywa się z punktem przecięcia się środkowych trójkąta.

**2.80.** We wszystkich rozważanych przypadkach jako układ odniesienia obieramy układ środka masy. Symetryczny tensor momentu bezwładności będzie miał w nim tylko elementy diagonalne. Oznaczmy je odpowiednio:

$$I_{xx} = I_1, \quad I_{yy} = I_2, \quad I_{zz} = I_3.$$

a. Osie  $x$ ,  $y$ ,  $z$  są równoległe do krawędzi  $a$ ,  $b$ ,  $c$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm = \rho \iiint_V (y^2 + z^2) dx dy dz = \\ &= \frac{m}{abc} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[ \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} (y^2 + z^2) dz \right] dy = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2). \end{aligned}$$

W analogiczny sposób znajdziemy pozostałe główne momenty bezwładności:

$$I_2 = \frac{1}{12} m (a^2 + c^2), \quad I_3 = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2).$$

b.

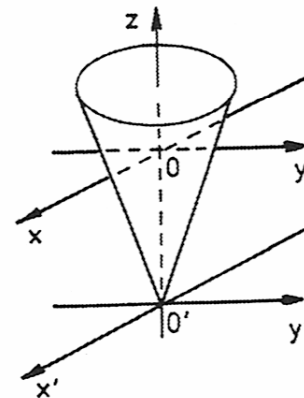
$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5} mR^2.$$

c. Obliczamy najpierw tensor  $I'_{ik}$  względem układu współrzędnych o początku leżącym w wierzchołku stożka (rys.40). Obliczenie przeprowadza się łatwo w cylindrycznym układzie współrzędnych

$$x' = r \cos \varphi,$$

$$y' = r \sin \varphi,$$

$$z' = z,$$



Rys.40

gdzie:  $r \in \left[0, \frac{zR}{h}\right]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $z \in [0, h]$ .

$$\begin{aligned} I'_1 &= \int_{(m)} (y'^2 + z'^2) dm = \rho \iiint_V (y'^2 + z'^2) dx' dy' dz' = \\ &= \frac{3m}{\pi R^2 h} \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{\frac{zR}{h}} (r^2 \sin^2 \varphi + z^2) r dr d\varphi dz = \frac{3}{5} m \left( \frac{R^2}{4} + h^2 \right). \end{aligned}$$

$$I'_2 = I'_1 = \frac{3}{5} m \left( \frac{R^2}{4} + h^2 \right).$$

$$I'_3 = \rho \iiint_V (x'^2 + y'^2) dx' dy' dz' = \frac{3m}{\pi R^2 h} \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{\frac{zR}{h}} r^3 dr d\varphi dz = \frac{3}{10} m R^2.$$

Środek masy znajduje się na osi stożka, w odległości  $a = \frac{3}{4} h$  od wierzchołka.

Korzystając z twierdzenia Steinera ostatecznie dostajemy:

$$I_1 = I_2 = I'_1 - ma^2 = \frac{3}{20} m \left( R^2 + \frac{h^2}{4} \right),$$

$$I_3 = I'_3 = \frac{3}{10} m R^2.$$

d. Środek masy pokrywa się z geometrycznym środkiem elipsoidy, a osie główne z jej osiami. Całkowanie po elipsoidzie można sprowadzić do całkowania po kuli jednostkowej, wprowadzając uogólnione współrzędne sferyczne:

$$x = a r \cos \varphi \sin \Theta,$$

$$y = b r \sin \varphi \sin \Theta,$$

$$z = c r \cos \Theta,$$

w którym równanie elipsoidy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ma prostą postać

$$r^2 = 1.$$

Nowe zmienne  $r$ ,  $\Theta$ ,  $\varphi$  przyjmują wtedy wartości

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \Theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

a elementarna masa

$$dm = \frac{m}{V} dx dy dz = \frac{3m}{4\pi abc} abc r^2 \sin\Theta dr d\Theta d\varphi = \frac{3m}{4\pi} r^2 \sin\Theta dr d\Theta d\varphi,$$

gdzie objętość elipsoidy obliczyliśmy ze wzoru:

$$V = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} abc r^2 \sin\Theta dr d\Theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Zatem moment bezwładności względem osi  $x$  jest równy

$$I_1 = \rho \iiint_V (y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{3m}{4\pi} \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (b^2 r^2 \sin^2\varphi \sin^2\Theta + c^2 r^2 \cos^2\Theta) \sin\Theta r^2 dr d\Theta d\varphi = \frac{m}{5} (b^2 + c^2).$$

Licząc analogicznie, otrzymujemy

$$I_2 = \frac{m}{5} (a^2 + c^2), \quad I_3 = \frac{m}{5} (a^2 + b^2).$$

e.

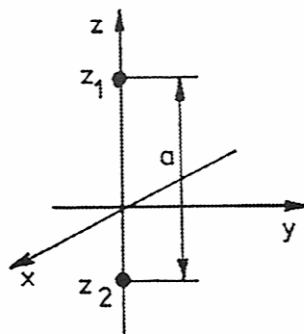
$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2m}{5} \frac{D^5 - d^5}{D^3 - d^3}.$$

f.

$$I_1 = I_2 = \frac{m}{12} l^2 + \frac{m}{4} (R^2 + r^2),$$

$$I_3 = \frac{m}{2} (R^2 + r^2).$$

2.81. Wprowadzamy układ współrzędnych środka masy, w którym oś  $Oz$  przechodzi przez oba atomy (rys.41). Oznacza to, że



Rys.41

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 = 0$$

i

$$a = z_1 - z_2,$$

gdzie  $z_1$  i  $z_2$  są odpowiednimi współrzędnymi atomów o masie  $m_1$  i  $m_2$ . Z powyższych dwóch równości otrzymujemy:

$$z_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a, \quad z_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} a.$$

Wtedy

$$I_1 = I_2 = m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2 = m_1 \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 a^2 + m_2 \left( \frac{-m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 a^2 =$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a^2 = \mu a^2,$$

$$I_3 = 0,$$

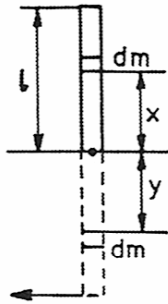
a tensor momentu bezwładności przyjmuje postać diagonalną:

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} \mu a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.82

$$a = 0,8 \cdot 10^{-10} \text{ [m]}.$$

2.84. Posłużymy się zasadą zachowania energii mechanicznej, przy czym energię potencjalną pręta będziemy liczyć względem poziomej płaszczyzny przechodzącej przez oś obrotu (rys.43). Wtedy energia potencjalna pręta w jego najwyższym położeniu jest równa



Rys.43

$$E_{p1} = - \int_0^l (-S\rho g x) dx = \frac{1}{2} S\rho g l^2 = \frac{1}{2} mgl,$$

zaś w najniższym położeniu

$$E_{p2} = - \frac{1}{2} mgl.$$

Możemy więc napisać

$$\frac{1}{2} mgl = - \frac{1}{2} mgl + \frac{1}{2} I\omega^2,$$

czyli

$$mgl = \frac{1}{2} I\omega^2.$$

Ponieważ

$$\omega = \frac{v}{l},$$

$$I = \int x^2 dm = \rho S \int_0^l x^2 dx = \frac{1}{3} \frac{mS l^3}{lS} = \frac{1}{3} ml^2,$$

zatem

$$mgl = \frac{1}{6} mv^2.$$

Stąd

$$v = \sqrt{6gl} = 7,7 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right].$$

Siła, jaka działa na oś obrotu przy przechodzeniu końca pręta przez najniższe położenie jest sumą ciężaru pręta i siły odśrodkowej  $F_o$ , którą obliczamy ze wzoru:

$$F_o = \int y\omega^2 dm = \frac{m}{l} \omega^2 \int_0^l y dy = 3mg.$$

Całkowita siła jest równa

$$F = mg + 3mg = 4mg \approx 78,5 \text{ [N]}.$$

**2.85.** Okres wahadła fizycznego, utworzonego przez pręt, jest równy

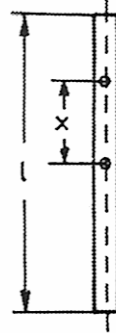
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgx}}.$$

Posługując się twierdzeniem Steinera, moment bezwładności pręta względem osi obrotu (rys.44) możemy wyrazić zależnością:

$$I = \frac{1}{12} ml^2 + mx^2.$$

Aby okres omawianego wahadła fizycznego był minimalny, wyrażenie

$$y = \frac{I}{mgx} = \frac{\frac{1}{12} l^2 + x^2}{gx}$$



Rys.44

powinno osiągnąć minimum. Warunek ten jest spełniony, gdy

$$x = \frac{l}{2\sqrt{3}} \approx 0,29 \text{ [m]}.$$

**2.86.** Niech płytka kwadratowa o masie  $M$  (wahadło fizyczne) i wahadło matematyczne o długości  $l$  i masie  $m$  wahają się w tej samej płaszczyźnie i wokół tej samej osi obrotu. Możemy tak dobrać długość  $l$ , że po wychyleniu płytki i wahadła matematycznego o ten sam kąt  $\alpha$  i swobodnym puszczeniu zależność  $\alpha(t)$  dla obu wahań będzie taka sama (konkretna postać funkcji  $\alpha(t)$  nie ma tu żadnego znaczenia). Wtedy koniec wahadła matematycznego cały czas będzie się

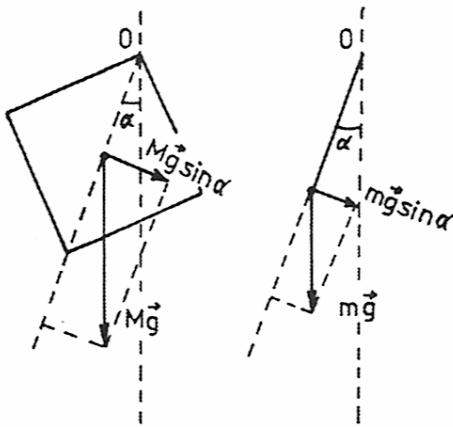
znajdował przy tym samym punkcie płytki. Przyklejenie masy  $m$  do płytki nie zmieni więc jej ruchu. Zakładamy, że fazy drgań obu wahadeł są takie same.

Moment bezwładności płytki kwadratowej o masie  $M$  i krawędzi  $a$  względem osi prostopadłej do płytki i przechodzącej przez jej środek wynosi

$$I_o = \frac{1}{6} Ma^2.$$

Na przykład z twierdzenia Steinera znajdujemy moment bezwładności względem faktycznej osi obrotu

$$I = \frac{2}{3} Ma^2.$$



Rys.45

Równania ruchu wahadeł są więc następujące (rys.45):

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = - \frac{g}{\frac{2\sqrt{2}}{3}a} \sin\alpha,$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = - \frac{g}{l} \sin\alpha.$$

Równania te są identyczne, gdy

$$l = \frac{2\sqrt{2}}{3}a = \frac{2}{3}d,$$

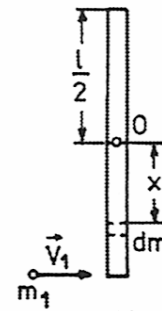
gdzie  $d$  jest przekątną płytki.

2.87. Moment pędu listwy obracającej się z prędkością kątową  $\omega$  dookoła osi przechodzącej przez środek listwy (rys.46), względem tego środka, ma kierunek zgodny z osią obrotu, a jego wartość

$$L = \int xv \, dm = \omega \int x^2 \, dm = \omega I,$$

gdzie  $I$  jest momentem bezwładności listwy względem osi obrotu.

Zasadę zachowania pędu układu izolowanego listwa-pocisk możemy napisać w postaci równania



Rys.46

$$m_1 v_1 \frac{l}{2} = \omega I + m_1 v \frac{l}{2},$$

w którym  $v$  jest prędkością liniową, z jaką porusza się pocisk wraz z listwą. Ponieważ

$$v = \omega \frac{l}{2}, \quad \text{zaś} \quad I = \frac{1}{12} ml^2,$$

więc

$$m_1 v_1 \frac{l}{2} = \frac{1}{12} m \omega l^2 + \frac{1}{4} m \omega l^2.$$

Stąd znajdujemy szukaną prędkość kątową

$$\omega = \frac{6 m_1 v_1}{l (m + 3m_1)} = 29,1 \left[ \frac{1}{s} \right].$$

2.88. Z rys.47 widać, że

$$l\varphi = r\alpha,$$

stąd

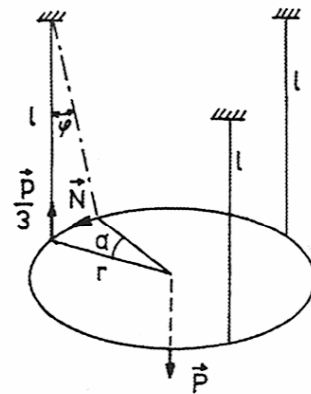
$$\varphi = \frac{r}{l} \alpha.$$

Naprężenie każdej nici wynosi  $\frac{P}{3}$ . Składowa tego naprężenia, prostopadła do  $r$  wynosi

$$N = \frac{P}{3} \sin\varphi = \frac{P}{3} \sin\left(\frac{r}{l} \alpha\right).$$

Dla małych kątów  $\alpha$

$$\sin\left(\frac{r}{l} \alpha\right) \approx \frac{r}{l} \alpha$$



Rys.47



i

$$N = \frac{Pr}{3l} \alpha.$$

Zatem całkowity moment sił, działający na rozważaną bryłę sztywną, wynosi

$$M = -3Nr = -\frac{Pr^2}{3l} \alpha,$$

a równanie ruchu bryły przyjmuje postać

$$\ddot{\alpha} + \frac{Pr^2}{Il} \alpha = 0,$$

gdzie  $I$  jest momentem bezwładności bryły względem osi przechodzącej przez jej środek. Stąd

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{Pr^2}{Il}},$$

a

$$I = \frac{PT^2r^2}{4\pi^2l}.$$

Moment bezwładności tarczy

$$I_1 = \frac{PT_1^2r^2}{4\pi^2l},$$

moment bezwładności tarczy wraz z prętem

$$I_2 = \frac{(P + Q) T_2^2 r^2}{4\pi^2 l}.$$

a moment bezwładności pręta

$$I_p = I_2 - I_1 = \frac{r^2 [T_2^2 (P + Q) - T_1^2 P]}{4\pi^2 l}.$$

2.89. Korzystając z zasady zachowania energii

$$\frac{d}{dt} (E_k + E_p) = 0,$$

znajdujemy równanie ruchu walca

$$\ddot{\varphi} + \frac{2g}{3(R-a)} \sin\varphi = 0.$$

Dla małych wychyleń z położenia równowagi

$$\sin\varphi \approx \varphi$$

i równanie to przechodzi w równanie oscylatora harmonicznego

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0,$$

gdzie

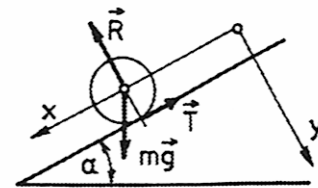
$$\omega^2 = \frac{2g}{3(R-a)}.$$

2.90. Na kulę poruszającą się po równi pochyłej bez poślizgu działają następujące siły (rys.48): siła ciężkości  $mg$ , reakcja  $R$  równi pochyłej, prostopadła do równi oraz tarcie  $T$  występujące na styku kuli z równią. Ruch ten możemy rozpatrywać jako ruch postępowy środka masy i ruch obrotowy dookoła osi przechodzącej przez środek masy. Mamy więc następujące równania ruchu:

$$m\ddot{x}_s = mg \sin\alpha - T,$$

$$m\ddot{y}_s = mg \cos\alpha - R,$$

$$I_s\ddot{\varphi} = rT.$$



Rys.48

Uwzględniając, że w każdej chwili

$$\ddot{y}_s = 0,$$

mamy

$$R = mg \cos\alpha.$$

Ponieważ kula porusza się bez poślizgu, punkt styku z równią pochyłą jest chwilowym punktem obrotu, zatem prędkość środka masy

$$\dot{x}_s = r\dot{\varphi},$$

skąd, po zróżniczkowaniu, otrzymujemy wyrażenie na przyspieszenie środka masy

$$a_s = \ddot{x}_s = r\ddot{\varphi}.$$

Podstawiając tę wartość do równań ruchu i rugując z nich  $T$  mamy

$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right) a_s = mg \sin\alpha,$$

skąd

$$a_s = \frac{mgr^2 \sin\alpha}{mr^2 + I}.$$

Dla kuli jednorodnej

$$I_1 = \frac{2}{5} mr^2 \quad \text{i} \quad a_{s1} = \frac{5}{7} g \sin\alpha.$$

Dla powłoki kulistej

$$I_2 = \frac{2}{3} mr^2 \quad \text{i} \quad a_{s2} = \frac{3}{5} g \sin\alpha.$$

Stąd

$$a_{s1} - a_{s2} = \frac{4}{35} g \sin\alpha.$$

2.91

a.

$$a_s = \frac{mgr^2 \sin\alpha}{mr^2 + I}$$

Dla kuli jednorodnej

$$a_s = \frac{5}{7} g \sin\alpha.$$

Dla walca jednorodnego

$$a_s = \frac{2}{3} g \sin\alpha.$$

b. Przyspieszenia środków mas rozważanych ciał są stałe, zatem ruch jest jednostajnie przyspieszony. Szukaną prędkość wyznaczamy ze wzoru

$$v_s = a_s t.$$

Biorąc pod uwagę, że

$$s = \frac{1}{2} a_s t^2,$$

skąd

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a_s}},$$

otrzymujemy

$$v_s = \sqrt{2a_s s}.$$

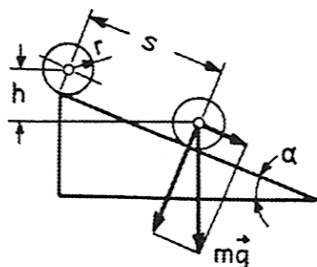
Dla kuli jednorodnej

$$v_s = \sqrt{\frac{10}{7} g s \sin\alpha}.$$

Dla walca jednorodnego

$$v_s = \sqrt{\frac{4}{3} g s \sin\alpha}.$$

c. Przy zsuwaniu się bez tarcia ruch obrotowy nie występuje. Zgodnie z zasadą zachowania energii (rys.49)



Rys.49

$$\frac{1}{2} m v_s^2 = m g s \sin \alpha,$$

skąd

$$v_s = \sqrt{2 g s \sin \alpha}.$$

Prędkość zsuwania jest więc jednakowa dla obu ciał.

d. Za pomocą  $a_s$  można z równań ruchu wyznaczyć tarcie. Wynosi ono

$$T = \frac{I a_s}{r^2},$$

więc

$$T = \frac{2}{7} m g \sin \alpha \quad \text{dla kuli,}$$

$$T = \frac{1}{3} m g \sin \alpha \quad \text{dla walca.}$$

Ruch odbywa się bez poślizgu, gdy

$$T \leq \mu N = \mu m g \cos \alpha,$$

czyli gdy

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{7}{2} \mu \quad \text{dla kuli,}$$

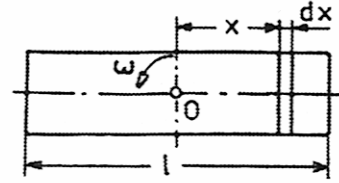
$$\operatorname{tg} \alpha \leq 3 \mu \quad \text{dla walca.}$$

2.92. Elementarna siła odśrodkowa działająca wzdłuż walca (rys.50) jest równa

$$dF = x \omega^2 dm = \rho S \omega^2 x dx,$$

gdzie  $S$  jest powierzchnią przekroju walca.  
Stąd całkowita siła

$$F = \rho S \omega^2 \int_0^{\frac{l}{2}} x \, dx = \frac{1}{8} \rho S \omega^2 l^2,$$



Rys.50

a odpowiadające jej naprężenie

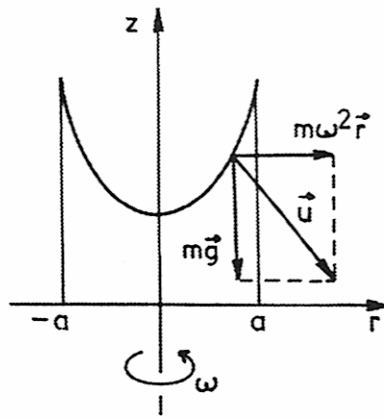
$$p = \frac{F}{S} = \frac{1}{8} \rho \omega^2 l^2.$$

Podstawiając do tego wzoru wartość granicznego naprężenia  $p_g$  znajdujemy maksymalną prędkość kątową obrotu

$$\omega_g = \sqrt{\frac{8p_g}{\rho l^2}} = 816 \text{ [s}^{-1}\text{]}.$$

2.93.  $E_k = \frac{1}{4} m r^2 \varepsilon^2 t^2 = 0,00925 \text{ [J]}.$

2.94. Aby cząsteczka znajdująca się na powierzchni cieczy w odległości  $r$  od osi obrotu była w równowadze, siła wypadkowa  $\vec{u} = (m\omega^2 r, -mg)$  (rys.51) musi być prostopadła do powierzchni. Z równania stycznej i warunku prostopadłości otrzymujemy równanie



Rys.51

$$-\frac{mg}{m\omega^2 r} \frac{dz}{dr} = -1,$$

które po rozdzieleniu zmiennych przybiera postać

$$dz = \frac{\omega^2}{g} r \, dr.$$

Po elementarnym scałkowaniu mamy równanie kwadratowe określające swobodną powierzchnię cieczy

$$z(r) = z(0) + \frac{\omega^2}{2g} r^2.$$

Stałą całkowania  $z(0)$  obliczymy z warunku na stałość objętości cieczy (korzystając z założenia, że  $b \ll a$ )

$$2z_0 ab = b \int_{-a}^a z(r) dr.$$

Stąd

$$z(0) = z_0 - \frac{\omega^2 a^2}{6g}.$$

Energia kinetyczna ruchu obrotowego wynosi

$$E_k = \frac{I + I_0}{2} \omega^2,$$

gdzie  $I$  jest momentem bezwładności cieczy, traktowanej jak ciało sztywne, względem osi obrotu

$$I = \rho \int_{-a}^a dr \int_0^{z(r)} dz \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (r^2 + x^2) dx \approx \frac{1}{3} m_0 a^2 + \frac{2}{45} \frac{m_0 \omega^2 a^4}{z_0 g}.$$

W powyższym wzorze uwzględniono, że masa cieczy  $m_0 = 2abz_0\rho$  oraz zaniebano wyrazy zawierające  $b^3$ .

2.95. Z zasady zachowania momentu pędu mamy

$$I_1 \omega_1 = (I_1 + I) \omega,$$

gdzie  $I_1$  jest momentem bezwładności człowieka względem osi obrotu tarczy,  $I$  jest momentem bezwładności tarczy względem tej samej osi,  $\omega_1 = \frac{v}{R}$  – prędkością kątową człowieka, a  $\omega$  – szukaną prędkością kątową tarczy. Stąd

$$\omega = \frac{I_1 \omega_1}{I_1 + I} = \frac{mv}{R \left( m + \frac{M}{2} \right)}.$$

Droga

$$S = 2\pi R \left( 1 + \frac{2m}{M} \right).$$

2.96. Wskazówka – rozważyć wpływ momentu  $\vec{M}$  siły ciężkości, występującego po pochyleniu na jedną stronę jadącego roweru, oraz związanego z nim momentu pędu

$$\Delta \vec{L} = \vec{M} \Delta t,$$

na ruch tego roweru.

2.97. Korzystając z zasad zachowania energii i momentu pędu możemy napisać:

$$\frac{1}{2} m v_o^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2,$$

$$m v_o \frac{l}{2} \cos \alpha = m v \frac{l}{2} \cos \alpha + I \omega,$$

gdzie:  $v_o$  i  $v$  są prędkościami środka masy pręta przed i po zderzeniu,  $I$  jest momentem bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy, a  $\omega$  prędkością kątową po zderzeniu.

Rozwiązując ten układ równań i pamiętając, że

$$I = \frac{1}{12} m l^2,$$

otrzymujemy

$$\omega = \frac{12 v_o \cos \alpha}{l (1 + 3 \cos^2 \alpha)}.$$

Z warunku

$$\frac{d\omega}{d\alpha} = 0$$



znajdujemy, że maksymalna wartość  $\omega$  odpowiada kątowi

$$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

**2.98.** Siła tarcia  $T$ , pojawiająca się w momencie zetknięcia obręczy z podłożem, wywołuje zmiany jej prędkości liniowej i kątowej. Zgodnie z II zasadą dynamiki zmiany te opisane są równaniami:

$$m \frac{dv}{dt} = T,$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = RT,$$

gdzie:  $I = mR^2$  jest momentem bezwładności pierścienia. Eliminując z tych równań czas dostajemy

$$dv = R d\omega.$$

Całkując to równanie w granicach od prędkości początkowej  $v_0$  do końcowej  $-v_k$  i od prędkości kątowej  $\omega_0$  do końcowej  $\omega_k = \frac{v_k}{R}$ , odpowiadającej toczeniu bez poślizgu, otrzymujemy

$$v_k = \frac{1}{2} (\omega_0 R - v_0).$$

Aby obręcz toczyła się do tyłu, musi być spełniony warunek

$$\omega_0 R > v_0.$$